NGỌC HUYỀN LB

CÔNG PHÁ TOÁN®

TẬP 3

CUỐN SÁCH GIÚP EM TỰ TIN HƠN TRONG KỲ THI THPT QUỐC GIA

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤN BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Quản lý xuất bản: (043) 9728806; Tổng biên tập: (04) 397 15011
Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc – Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: ĐẶNG PHƯƠNG ANH

Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP

Trình bày bìa: NGUYỄN SƠN TÙNG

Sửa bản in: LƯƠNG VĂN THỦY – NGUYỄN THỊ CHIÊN – TĂNG HẢI TUÂN

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC TRỰC TUYẾN VIỆT NAM – VEDU CORP
Địa chỉ: 101 Nguyễn Ngọc Nại, Thanh Xuân, Hà Nội

SÁCH LIÊN KẾT

CÔNG PHÁ TOÁN TẬP 3

Mã số: 1L – 173 ĐH2017
In 2000 cuốn, khổ 29,7 x 21cm tại Nhà máy In Bộ Tổng Tham Mưu – Bộ Quốc Phòng
Địa chỉ: Km13 Ngọc Hồi, Thanh Trì, Hà Nội
Số xuất bản: 679 – 2017/CXB,IPH/03- 124/ĐHQGHN, ngày 30/03/2017
Quyết định xuất bản số: LK-TN/ QĐ – NXBĐHQGHN, ngày 30/03/2017
In xong và nộp lưu chuyển quý I năm 2017.

Cuốn sách này tôi xin dành tặng riêng cho mẹ Thơm – người phụ nữ - người mẹ và…người cha mà tôi yêu thương và khâm phục nhất trên đời!

LỜI MỞ ĐẦU

Ngay từ khi biết chân vào ngưỡng cửa đại học (tháng 8/2016), tôi đã suy nghĩ rất nhiều về một cuốn sách có thể giúp cho các em học sinh tự tin với môn Toán và yêu thích nó hơn. Hơn nữa, kể từ năm nay, các em học sinh phải làm bài thi môn Toán dưới hình thức Trắc nghiệm với áp lực thời gian rất lớn (riêng kì thi THPT quốc gia, các em phải làm 50 câu/90 phút). Bởi vậy mà một tài liệu giúp các em tối ưu thời gian ôn luyện càng trở nên cần thiết hơn bao giờ hết. Chính vì thế, sau khi tham khảo ý kiến của thầy cô và bạn bè, tôi đã quyết định bắt tay vào viết cuốn sách này (1/11/2016). Sau gần 5 tháng miệt mài làm việc, cùng với sự giúp đỡ của thầy cô, bạn bè, tôi đã hoàn thành xong đứa con tinh thần của mình.

Công phá toán giúp em được những gì?

Thứ nhất, cuốn sách giúp các em hệ thống lại toàn bộ phương pháp, tư duy giải toán cần thiết trong chương trình lớp 12. Đặc biệt, tôi rất chú trọng tới những vấn đề mà học sinh thường hay nhầm lẫn.

Thứ hai, cuốn sách giúp các em nắm được toàn bộ những vấn đề hay nhất, cần thiết nhất trong 200 đề thi thử của các trường, Sở Giáo dục và Đào tạo trên toàn quốc. Hàng ngày có rất nhiều đề thi thử được chia sẻ trên mạng, tuy nhiên có nhiều đề thi không đảm bảo chất lượng các câu hỏi hay câu hỏi không bám sát cấu trúc đề thi của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Cuốn sách sẽ giúp các em sàng lọc những vấn đề quan trọng và CẦN phải học để tiết kiệm thời gian sưu tầm, in ấn đề. Ngoài ra, những bài tập chất lượng này còn giúp các em khắc sâu thêm tư duy giải toán lớp 12.

Thứ ba, cuốn sách giúp các em nắm được những kĩ năng xử lý casio cần thiết trong việc học toán lớp 12. Tuy nhiên ở cuốn Công phá toán này, tất cả kĩ năng MTCT đều gắn chặt với tư duy giải Toán, không chỉ đơn thuần là các thao tác bấm máy thông thường.

Thứ tư, cuốn sách tích hợp hệ thống gửi tài liệu qua Mail, để học sinh có thể khai thác triệt để cuốn sách. Ngoài gửi qua Mail đáp án chi tiết 10 đề tự luyện theo trình tự thời gian, tôi còn gửi thêm 1 số tài liệu hay, liên quan tới nội dung cuốn sách khi sưu tầm được để các em thêm một lần nữa khai thác triệt để giá trị của sách. Đây cũng là một cách để đảm bảo quyền lợi cho các em, quý độc giả sử dụng sách chính hãng.

Chính vì những đặc điểm trên, tôi rất mong các em học sinh, quý độc giả hãy thường xuyên trao đổi, liên với tôi để tôi có cơ hội được phục vụ quý vị tốt nhất. Trước khi đọc kĩ vào nội dung sách, tôi mong các em, quý độc giả nắm tổng thể nội dung sách. Cuốn sách tôi viết được chia thành 2 phần chính như sau:

- Phần thứ nhất:
    - Hệ thống tư duy, phương pháp giải các dạng toán theo chuyên đề
    - Hệ thống ví dụ, bài tập minh họa điển hình kèm phân tích, đánh giá, mở rộng
    - Hệ thống bài tập rèn luyện kèm lời giải chi tiết được chọn lọc kĩ càng từ 200 đề thi thử các trường trên toàn quốc.
- Phần thứ hai: 10 đề thi thử bao quát kiến thức lớp 12 nhất (được chọn lọc từ 10 trường THPT trên toàn quốc). Đáp án và lời giải chi tiết sẽ được tôi gửi đều đặn qua Mail.

Cách học như thế nào cho hiệu quả?

Để sử dụng cuốn sách hiệu quả, các em nên có một kế hoạch cụ thể. Khi có kế hoạch cụ thể thì chúng ta mới đo lường được hiệu quả sử dụng sách. Ở đây, tôi xin phép được chia học sinh thành 3 đối tượng sử dụng sách:

Đối tượng 1: Mới bắt đầu học chương trình lớp 12 (các em chuẩn bị lên lớp 12)

Trong trường hợp này, cách duy nhất tôi khuyên là các em nên học theo trình tự đã được sắp xếp ở trong sách, cứ lần lượt học: Đầu tiên đọc kĩ lý thuyết, phương pháp, tiếp theo đọc vào ví dụ minh họa và cuối cùng là luyện tập các bài tập rèn luyện. Tuy nhiên khi đọc lý thuyết hay phương pháp mà vẫn mơ màng, các em có thể bỏ qua, đọc tiếp vào phần Ví dụ minh họa. Trong một số trường hợp, thông qua lời giải và phân tích ở phần Ví dụ minh họa sẽ giúp các em hiểu ra và nắm vững phần lý thuyết, phương pháp hơn. Trong quá trình làm chuyên đề, các em vẫn có thể tham khảo thêm các bài tập ở trong 10 đề tự luyện ở cuối sách để củng cố thêm.

Đối tượng 2: Học xong chương trình (hoặc chuẩn bị thi THPT quốc gia)

Các em xem phần nào còn yếu, chưa chắc chắn thì đánh dấu lại, xem kĩ phần ví dụ minh họa. Sau khi xem xong các em luyện hết mọi bài trong phần Bài tập rèn luyện. Trong quá trình làm bài tập rèn luyện, nhớ đối chiếu ngược trở lại phần lý thuyết và ví dụ minh họa để khắc sâu kiến thức. Cứ xong một chuyên đề, các em lại luyện 1 đề trong số 10 tự luyện cuối sách để hình dung cụ thể mức độ khó dễ trong một đề thi chính thức như thế nào và cũng là để tập phản xạ với các dạng bài thuộc chuyên đề đó ở trong một đề.

Đối tượng 3: Các em xuất sắc hẳn

Đối với các em có mức học giỏi trở lên thì chỉ cần tập trung 2 việc chính. Thứ nhất, các em chỉ cần lưu ý đặc biệt tới các phần STUDY TIP và hệ thống bài tập rèn luyện. Những bài đã quá quen thuộc rồi thì có thể bỏ qua. Ngoài ra, riêng đối với các em học sinh thuộc đối tượng 2 và đối tượng 3, các em nên tham khảo thêm 30 đề trong "Bộ đề chuyên" để củng cố thật chắc kiến thức lớp 12. Trong mọi trường hợp, khi làm đề, các em nên tạo môi trường, không khí GIỐNG Y NHƯ LÚC THI THẬT. Thứ hai, dù bận đến mấy, sau khi làm đề xong cũng phải làm hai việc: XEM LẠI ĐÁP ÁN CHI TIẾT và CHẤM ĐIỂM.

Do tôi vừa mới bước chân vào đại học, kinh nghiệm sư phạm còn chưa nhiều, hơn nữa đây là cuốn sách viết riêng đầu tiên tôi viết, chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy, tôi rất mong nhận được sự góp ý từ các em học sinh và quý độc giả trên toàn quốc.

Mọi góp ý xin gửi về **email:** ngochuyenlb.hnue@gmail.com **hoặc fb:** facebook.com/huyenvu2405.
Group chuyên môn: facebook.com/groups/ngochuyenfamily/
Fan page: facebook.com/ngochuyenlb. **Website:** ngochuyenlb.com

LỜI TRI ÂN

Để có thể hoàn thiện cuốn sách, tôi đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ của thầy cô, người thân và các em học sinh yêu quý. Lời cảm ơn đầu tiên tôi muốn gửi tới cô Bùi Thị Nhung – Gv Toán – THCS Đông Sơn, Tam Điệp, Ninh Bình. Được làm học trò của cô là một trong những điều may mắn nhất trong cuộc đời tôi. Cô là người đầu tiên giúp tôi thực sự đam mê Toán và quyết tâm theo đuổi nó. Tôi sẽ không bao giờ quên những ngày miệt mài ôn luyện cùng cô, những ngày mưa gió cô đạp xe xuống tận nhà hỏi han, động viên khi ốm. Nếu không gặp được cô, có lẽ tôi đã không có ngày hôm nay. Tiếp theo tôi xin được gửi lời cảm ơn tới cô Phạm Thị Hòa, cô giáo dạy Toán suốt 3 năm học cấp III của tôi. Cô là người chỉ bảo và giúp đỡ tôi rất nhiều trong phong cách viết và giảng dạy Toán. Nếu không gặp được cô, chắc có lẽ tôi cũng không đủ tự tin để viết sách. Từ tận đáy lòng, tôi biết ơn cô rất nhiều!

Tiếp theo tôi xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất tới người anh – người thầy Lê Bá Bảo – Gv Toán – THPT Đặng Huy Trứ, TP. Huế. Anh là một trong những người giáo viên tâm huyết và tốt bụng nhất tôi từng biết cho tới giờ. Anh luôn cho đi mà không mảy may một suy nghĩ thiệt hơn, luôn sẵn sàng giúp đỡ anh em đồng nghiệp một cách chân thành và tận tâm nhất. Tôi rất may mắn khi nhận được sự giúp đỡ của anh, nhất là ở chuyên đề Số Phức. "Cho đi là nhận về mãi mãi" – tôi tin anh đã và đang nhận được rất nhiều tình cảm, sự quý trọng từ học sinh và các đồng nghiệp. Hãy luôn nhiệt huyết như vậy nhé người anh của tôi!

Lời cảm ơn chân thành nữa tôi xin được gửi tới thầy Châu Văn Điệp – Gv Toán – THPT Yên Mô A, Ninh Bình. Tuy không được học thầy hồi cấp III nhưng giờ đây, thầy đã dạy cho tôi rất nhiều điều về cuộc sống, về chuyên môn. Thầy là người đầu tiên luôn sẵn sàng trả lời câu hỏi chuyên môn của tôi bất kể là 5h sáng, 12h trưa hay...0h đêm. Không chỉ cuốn sách Công Phá Toán này mà cả cuốn Bộ đề tinh túy, thầy luôn nhiệt thành như vậy. Chính điều này càng thôi thúc tôi thêm nỗ lực phấn đấu nhiều hơn nữa. Nếu có thể quay ngược thời gian, tôi ước mình được là học trò của thầy, được nghe thầy giảng và truyền lửa đam mê.

Lời cảm ơn tiếp theo tôi xin được gửi tới các thầy cô sau: thầy Phạm Văn Nghị, thầy Đặng Việt Đông – GV Toán, THPT Nho Quan A – Ninh Bình, thầy Nguyễn Thư – Gv Toán – THPT Phương Xá, Phú Thọ, thầy Nguyễn Văn Lực – Gv chuyên luyện thi Toán, TP. Cần Thơ, thầy Nguyễn Duy Hưởng – Gv chuyên luyện thi Toán, Hà Nội, thầy Nguyễn Văn Dũng – Gv chuyên luyện thi Toán, Hà Nội, thầy Nguyễn Trường Sơn – Gv chuyên Toán – THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình; thầy Võ Trọng Trí – Gv Toán – THPT Anh Sơn I, Nghệ An, thầy Đoàn Trí Dũng, thầy Cao Đắc Tuấn (Gv chuyên luyện thi Toán – Hà Nội), thầy Võ Quang Mẫn – Gv Toán – Đại học Khoa học Huế. Những lời góp ý của các thầy đã giúp em hoàn thiện công phá hóa được chỉnh chu và chính xác hơn. Mong các thầy luôn khỏe mạnh và luôn là những bậc tiền bối đáng kính của thế hệ trẻ chúng tôi.

Để hoàn thành cuốn sách này, tôi cũng không bao giờ quên sự hào phóng và nhiệt tình của các bạn thân. Nhất là 3 người bạn trong nhóm "X-àm Girl" ở lớp K1 – Sư Phạm Toán tiếng Anh, Đại học Sư Phạm Hà Nội: Lê Thùy Linh, Nguyễn Bảo Chung, Nguyễn Thị Minh Hằng. Ngoài ra, tôi cũng xin cảm ơn người bạn thân – người anh – người đồng nghiệp Nguyễn Văn Hưởng – Kĩ sư Tài Năng Bách Khoa, tác giả Toán Lovebook. Tất cả họ đều luôn sát cánh bên tôi những lúc căng thẳng nhất, khó khăn nhất với cuốn sách. Nếu không có họ, chắc có lẽ tôi không thể hoàn thành cuốn sách ngay trong năm học này.

Lời cảm ơn tiếp theo, tôi xin được gửi tới các em sau: Lê Xuân Tuấn, Phạm Xuân Nam, Mai Thuỳ Dương, Nguyễn Văn Cảnh, Trần Ngọc Mai (học sinh lớp AK51), Lê Thị Ngọc Mai, Đinh Thúy Quỳnh, Trần Thị Nga, Ngô Thị Mỹ Linh (học sinh lớp GK51), Phạm Thị Hương (học sinh lớp BK51), Bùi Thị Thu Phương (Cựu học sinh lớp AK50). Tất cả các em đều là những học sinh xuất sắc của thầy Châu Văn Điệp ở trường THPT Yên Mô A, huyện Yên Mô, tỉnh Ninh Bình. Các em đã giúp đỡ tôi rất nhiều trong khâu đọc soát bản thảo. Tôi tin với đức tính ham học hỏi và cần mẫn, các em nhất định sẽ thành công sau này.

Cuối cùng, tôi xin được gửi lời cảm ơn tới toàn thể các anh chị trong nhà sách Lovebook. Anh chị đã dẫn dắt tôi từ những ngày đầu tập tành viết sách. Thực lòng, nếu không được làm việc ở nơi đây, có lẽ tôi đã không có ngày hôm nay. Đặc biệt tôi muốn gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới anh Lương Văn Thùy (Giám đốc) và chị Nguyễn Thị Thu Hương (phòng biên tập). Hai anh chị là người mà tôi làm việc cùng thường xuyên trong nhà sách. Anh chị đã hướng dẫn tôi từng chi tiết nhỏ nhất trong việc soạn thảo và trình bày. Tận đáy lòng, tôi rất mong Lovebook có thể trao cơ hội cho nhiều sinh viên đam mê, nhiệt huyết như tôi hơn nữa. Và tôi cũng luôn tin chắc chắn rằng nhà sách Lovebook sẽ còn phát triển mạnh mẽ hơn rất nhiều.

LỜI TRI ÂN ĐẶC BIỆT

Tôi muốn dành riêng mục này để gửi lời cảm ơn chân thành và yêu thương nhất tới toàn thể các em học sinh đang follow tôi trên facebook và gmail. Sự tin tưởng và quan tâm của các em dành cho tôi hàng ngày là một liều thuốc bổ vô giá. Nó truyền cho tôi động lực hoàn thiện bản thân mỗi ngày, là niềm hạnh phúc mỗi sáng thức dậy. Thực lòng, nếu không có các em, có lẽ tôi đã không thể hoàn thiện cuốn sách. Với tinh thần ham học hỏi và hướng thiện, tôi tin các em sẽ trở thành những người công dân tuyệt vời sau này. Tôi biết ơn các em rất nhiều!

Để hoàn thành cuốn sách Công phá toán này, tôi không thể không kể tới các thầy cô ở các trường, đơn vị đã tâm huyết biên soạn ra những đề thi thử chất lượng. Qua đây, tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn tới các thầy cô tổ Toán ở các trường THPT, đơn vị sau:

1. THPT Chuyên Đại học Vinh - Nghệ An
2. THPT Chu Văn An - Hà Nội
3. THPT Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa

55. THPT Thuận Thành 1 - Bắc Ninh
56. THPT Kiến An - Hải Phòng
57. THPT Gia Viễn C - Ninh Bình

4. THPT Chuyên Hà Nội Amsterdam
5. Sở GD&ĐT Lâm Đồng
6. Sở GD&ĐT Phú Thọ
7. THPT Nhã Nam - Bắc Giang
8. THPT Phạm Hồng Thái - Hà Nội
9. THPT Nguyễn Văn Linh - Ninh Thuận
10. THPT Bảo Lâm - Lâm Đồng
11. THPT Gia Viễn B - Ninh Bình
12. THPT Hiệp Hòa số 1 - Bắc Giang
13. THPT Chuyên KHTN - Hà Nội
14. THPT Huỳnh Thúc Kháng - Hà Nội
15. THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình
16. THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội
17. THPT Can Lộc - Hà Tĩnh
18. THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh
19. THPT Xuân Trường C - Nam Định
20. THPT Chuyên Hưng Yên - Hưng Yên
21. THPT Trần Hưng Đạo - Ninh Bình
22. THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam
23. THPT Chuyên Sơn La - Sơn La
24. THPT Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An
25. THPT Huỳnh Thúc Kháng - Nghệ An
26. THPT Lý Thái Tổ - Hà Nội
27. THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh
28. THPT Chuyên Hùng Vương - Gia Lai
29. THPT Ngô Sỹ Liên - Bắc Giang
30. Sở GD&ĐT Hà Nội
31. TT luyện thi ĐH Diệu Hiền - Cần Thơ
32. THPT Việt Đức - Hà Nội
33. THPT Minh Hà - Quảng Ninh
34. THPT Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định
35. THPT Phạm Văn Đồng - Phú Yên
36. THPT Yên Phong 2 - Bắc Ninh
37. THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hóa
58. Sở GD&ĐT Bạc Liêu
59. Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc
60. THPT Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh
61. THPT Chuyên Vị Thanh - Hậu Giang
62. THPT Kim Liên - Hà Nội
63. Sở GD&ĐT Nam Định
64. THPT Cầu Xe - Hải Dương
65. THPT Chuyên Trần Phú - Hải Phòng
66. THPT Kim Thành - Hải Dương
67. THPT Chuyên Đại học sư phạm Hà Nội
68. Sở GD&ĐT Bà Rịa Vũng Tàu
69. CLB giáo viên trẻ TP.Huế
70. THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc
71. THPT Lương Đắc Bằng - Thanh Hóa
72.THPT Chuyên Bắc Cạn
73. THPT Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương.
74. Sở GD&ĐT Bắc Ninh
75. THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa
76. THPT Lam Kinh - Thanh Hóa
77. THPT Chuyên Vĩnh Phúc - Vĩnh Phúc
78. THPT Phan Đình Phùng - Hà Nội
79.THPT Trần Hưng Đạo - Nam Định
80.THPT Công Nghiệp - Hòa Bình
81.THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh
82. THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp
83. Trường PT Năng Khiếu - TP.Hồ Chí Minh.
84. THPT Chuyên Mặt Trăng
85. Sở GD&ĐT Thanh Hóa
86. THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc
87. Sở GD&ĐT Ninh Bình
88. THPT Lương Tài số 2 - Bắc Ninh
89. THCS-THPT Nguyễn Khuyến - TP.HCM
90. THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Bà Rịa Vũng Tàu
91. THPT Trần Hưng Đạo - TP.Hồ Chí Minh

38. THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa
39. THPT Vĩnh Chân - Phú Thọ
40. THPT Nho Quan A - Ninh Bình
41. THPT Cái Bè - Tiền Giang
42. THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang
43. THPT Triệu Sơn 2 - Thanh Hóa
44. THPT Chuyên Thái Bình - Thái Bình
45. THPT Phạm Công Bình - Vĩnh Phúc
46. THPT Nguyễn Đình Chiểu - Bình Định
47. THPT Tiên Du số 1 - Bắc Ninh
48. THPT Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng
49. THPT Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình
50. THPT Hà Trung - Thanh Hóa
51. THPT Hồng Bàng - Hải Phòng
52. Sở GD&ĐT Hưng Yên
53. THPT Hàn Thuyên - Bắc Ninh
54. Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ
92. THPT Hai Bà Trưng - Thừa Thiên Huế
93. THPT Chuyên Lê Hồng Phong - TP.HCM
94. THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội
95. THPT Quang Trung - Hà Nội
96. THPT Yên Hòa - Hà Nội
97. THPT Việt Nam - Ba Lan
98. THPT Đống Đa - Hà Nội
99. THPT Ngọc Tố - Sóc Trăng
100. THPT Hoàng Diệu
101. THPT Anh Sơn 2 - Nghệ An
102. THPT Đông Thụy Anh - Thái Bình
103. THPT Hoằng Hóa 4 - Thanh Hóa
104. THPT An Lão - Hải Phòng
105. THPT A Kim Bảng - Hà Nam
106. Sở GD&ĐT Quảng Ninh
107. Sở GD&ĐT Hà Tĩnh
108. Nhóm thầy cô Toán học Bắc Trung Nam.

Một lần nữa, tôi xin cảm ơn tất cả!

MỤC LỤC

Chủ đề 1: Hàm số và các ứng dụng của đạo hàm.

Hệ thống tư duy, phương pháp giải các bài tập chọn lọc chuyên đề

I.I. Tính đơn điệu của hàm số.

A. Lý thuyết.

1. Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K (với K là một khoảng (đoạn), nửa khoảng (nửa đoạn)) được gọi chung là hàm số đơn diệu trên K.

2. Tính đơn điệu của hàm số và dấu của đạo hàm.

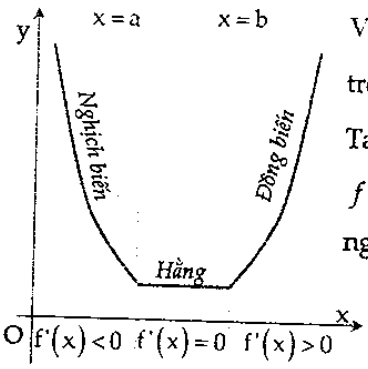
Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:

> Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I. Khi đó
> Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x)\ge 0, \forall x\in I$.
> Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x)\le 0, \forall x\in I$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

> **1. Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I.**
> a. Nếu $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in I$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến trên I.
> b. Nếu $f'(x)\le 0$ với mọi $x\in I$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số nghịch biến trên I.
> c. Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in I$ thì hàm số không đổi trên I.
> **2. Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a;b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$**
> a. Nếu $f'(x)>0$ (hoặc $f'(x)<0$) với mọi $x\in(a;b)$ thì hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a;b)$.
> b. Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in(a;b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a;b)$.

Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị hàm số đi lên từ trái sang phải.
Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải (hình 1.1).



Hình 1.1

Ví dụ: Hàm số có đồ thị ở hình 1.1 nghịch biến trên khoảng $(-\infty;a)$, không đổi trên khoảng (a,b) và đồng biến trên khoảng $(b;+\infty)$.

Ta có thể nói rằng hàm số có đồ thị ở hình 1.1 đồng biến trên $(-\infty;a]$ bởi $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in(-\infty;a]$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại $x=a$ (tức là hữu hạn nghiệm).

> *Lí giải:* Ở phần trên về cách xác định tính đơn điệu của hàm số bằng đạo hàm phải có dấu bằng xảy ra tại hữu hạn nghiệm bởi: Nếu là vô hạn nghiệm, hay là xảy ra trên toàn khoảng đó thì hàm số không còn tính đơn điệu nữa, mà là hàm không đổi trên khoảng đó. Ví dụ như ở hàm số có đồ thị như hình 1.1 thì trên $(a;b)$ hàm số là hàm hằng.

STUDY TIP: Để kết luận xem hàm số có đồng biến hay nghịch biến trên một khoảng $(x_n;x_{n+1})$ vừa tìm được hay không, ta chỉ cần xét dấu của đạo hàm tại một điểm trên khoảng đó.

3. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

a. Tìm tập xác định.

b. Tính đạo hàm $f'(x)$. *Tìm các điểm* $x_i\,(i=1,2,3,...n)$ *làm cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.*

c. Sắp xếp các điểm tìm được theo thứ tự tăng dần.

d. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

B. Bài tập trong các đề thi thử của các trường.

Dạng 1: Bài toán không chứa tham số.

Ví dụ 1: Hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng:

A. $\left(\frac{1}{2};1\right)$ B. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ C. $(-\infty;0)$ D. $(1;+\infty)$

Trích đề thi thử lần IV – Tạp chí Toán học tuổi trẻ số

Đáp án A.

Phân tích: Để tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số thì ta đi tìm nghiệm của phương trình $y'=0$ hoặc giá trị làm cho phương trình $y'=0$ không xác định, từ đó tìm được các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Lời giải

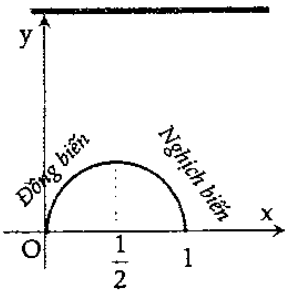
Cách 1: Điều kiện: $x\in(0;1)$

Ta có $y'=\left(\sqrt{x-x^2}\right)'=\dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}}$; y' không xác định khi $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

$y'=0$ khi $x=\frac{1}{2}$. Khi đó ta có 2 khoảng cần xét đó là $\left(0;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};1\right)$. Nhận thấy ở đây $y'<0$ với $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$, do đó hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

STUDY TIP: Ở đây ta chọn STEP là 0.1 bởi khoảng khá nhỏ, và ta cần xét tính đồng biến nghịch biến trên 2 khoảng là $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Hình 1.2 là đồ thị hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$, ta thấy bài làm đã xác định đúng.



Hình 1.2

Cách 2: Nhận thấy điều kiện là $x\in(0;1)$, do vậy loại luôn C và D.

Ở B và A, các đầu mút của các khoảng cách nhau 0,5, do vậy ta có thể quyết định được STEP khi sửa dụng TABLE trong máy tính.

Giải thích:

Lệnh TABLE trong máy tính dùng để tính giá trị của hàm số tại một vài điểm. Ta có thể sử dụng chức năng tính giá trị của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$. Bởi vậy, khi sử dụng TABLE trong việc xác định hàm số đồng biến hay nghịch biến trong một khoảng là khá dễ dàng, bởi ta chỉ cần xét xem giá trị của hàm số tăng hay giảm trên khi x chạy trên khoảng đó thôi.

Sử dụng lệnh TABLE để liệt kê các giá trị của hàm số khi cho x chạy trên khoảng cần xét với bước nhảy nhất định.

Thao tác:

1. Ấn MODE 7, nhập hàm số cần tính giá trị.
2. START? Nhập x bắt đầu từ đâu.
3. END? Nhập x kết thúc ở đâu.
4. STEP? Bước nhảy giữa các giá trị, tính từ điểm đầu mút.

Áp dụng vào bài toán này ta được:

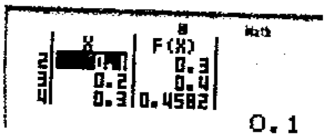
Ấn MODE 7, và nhập $f(x)=\sqrt{X-X^2}$ ấn =.

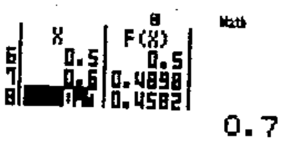
START? Nhập 0 =.

END? Nhập 1 =.

STEP? Nhập 0.1 =.

Sau khi nhập máy hiện như hình bên:





Nhận thấy từ khi x chạy từ 0 đến $0,5=\frac{1}{2}$ thì giá trị của hàm số tăng, tức hàm số đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Còn với x chạy từ $\frac{1}{2}$ đến 1 thì giá trị của hàm số giảm, tức hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Chọn A.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2-1$. Chọn khẳng định đúng

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Trích đề thi thử lần I – SGD & ĐT Hưng Yên

Đáp án A.

Phân tích

STUDY TIP
Với hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c(a\neq 0)$ có $\frac{b}{a}<0$ thì:
1. Với $a>0$ thì đồ thị hàm số có dạng chữ W.
2. Với $a<0$ thì đồ thị hàm số có dạng chữ M.
(chỉ là mẹo nhớ đồ thị).

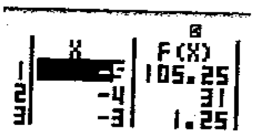
Cách 1: Xét phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$. Như đã giới thiệu về cách nhớ dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a=\frac{1}{4}>0$ nên ở đây ta có thể xác định nhanh hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

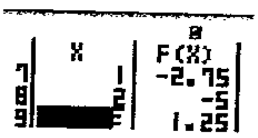
Cách 2: Sử dụng lệnh TABLE.

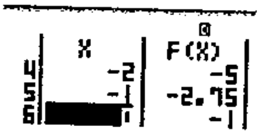
Sử dụng lệnh TABLE với START là -5 và END 5, STEP 1 ta có thể xác định được: giá trị của hàm số tăng khi x chạy từ −2 đến 0 và từ 2 đến 5, giá trị của hàm số giảm khi x chạy từ -5 đến -2 và từ 0 đến 2.

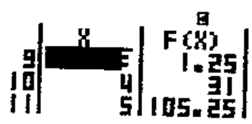
Do đó ta có thể xác định được hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.









STUDY TIP
1. Với hàm số dạng $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ thì $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, đặt $\lambda=ad-bc$ thì:
a. Với $\lambda>0$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
b. Với $\lambda<0$ thì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=\frac{x-3}{x+3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Kim Liên Hà Nội)

Đáp án B.

Điều kiện: $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

Ta có $y'=\frac{3.1-(-3).1}{(x+3)^2}=\frac{6}{(x+3)^2}>0$ với mọi $x\in D$. Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tức là hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Chú ý: Ở đây ta không chọn D bởi:

> " Ở sách giáo khoa hiện hành, không giới thiệu khái niệm hàm số (một biến) đồng biến, nghịch biến trên một tập số, mà chỉ giới thiệu khái niệm hàm số (một biến) đồng biến, nghịch biến trên một khoảng, một đoạn, nửa khoảng (nửa đoạn)."

Do vậy ta chỉ có thể nói rằng: "Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$". Mà không thể nói "Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$." hoặc "Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$."

STUDY TIP:
Với các câu hay mệnh đề nói hàm số đồng biến hay nghịch biến trên một tập số không liên tục, bị gián đoạn thì là mệnh đề sai.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^2(3-x)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Đại học Vinh – lần I)

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $y'=-3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Nhận thấy đây là hàm số bậc ba, có hệ số $a=-1<0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;2)$.

Nhận xét: Việc nhớ dạng đồ thị giúp ta làm nhanh các bài toán đơn điệu mà không cần vẽ bảng biến thiên.

STUDY TIP: Với hàm số bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq0)$. Nếu phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt : Nếu $a>0$ thì đồ thị hàm số có dạng chữ N, tức hàm số có hai khoảng đồng biến một khoảng nghịch biến. Còn $a<0$ thì ngược lại.

Ví dụ 5: Trong các hàm số sau hàm nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4+x^2-1$ B. $y=\frac{x+1}{x+3}$

C. $y=x^2+1$ D. $y=x^3+x$

(Trích đề thi thử THPT Lương Bắc Đằng)

Đáp án D.

Lời giải

Ta có thể loại luôn phương án A, B, C do

Hàm số bậc bốn trùng phương luôn có khoảng đồng biến và nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tương tự hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol nên cũng luôn có khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Còn phương án B: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất gián đoạn tại $x=-3$, do đó hàm số này không thể luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà chỉ luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định.

Qua bài toán trên ta rút ra các kết quả sau:

Kết quả 1. Hàm số bậc bốn trùng phương luôn có một điểm cực trị là $x=0$, do vậy hàm số bậc bốn trùng phương luôn có khoảng đồng biến, nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Kết quả 2. Hàm bậc hai luôn có một điểm cực đại hoặc một điểm cực tiểu, hoặc nhớ nôm na là đồ thị hàm bậc hai là một parabol, do vậy hàm bậc hai không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Kết quả 3. Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không thể đơn điệu trên $\mathbb{R}$ do hàm số bị gián đoạn tại giá trị làm cho mẫu số không xác định, do đó ta chỉ có thể nói hàm số này đơn điệu trên từng khoảng xác định chứ không nói đơn điệu trên tập xác định hoặc đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Kết quả 4. Để hàm số bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất, tức là $\boxed{\Delta'\leq 0\Leftrightarrow b^2-3ac\leq 0}$ (trong công thức này a, b, c lần lượt là các hệ số của hàm bậc ba ban đầu). Lúc này dấu của hệ số a quyết định tính đơn điệu của hàm số.

a. Nếu $a<0$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b. Nếu $a>0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 6: Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai về hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$?

A. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

C. Hàm số không có cực trị

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Đáp án B.

Lời giải

Từ kết quả 3 ở trên ta chọn luôn B.

Ví dụ 7: Hàm số $y=\sqrt{x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng:

A. $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ B. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ C. $(-\infty;0)$ D. $(1;+\infty)$

(Trích đề thi thử Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 4)

Đáp án A.

Lời giải

Điều kiện: $0\leq x\leq 1$

STUDY TIP: Với các hàm căn thức bậc hai thì ta chỉ cần xét dấu của đạo hàm đa thức trong ngoặc, do mẫu số của đạo hàm luôn lớn hơn 0.

Ta có $y' = \dfrac{-2x+1}{2\sqrt{x-x^2}}$

y' không xác định khi $x=0; x=1$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Vì mẫu số luôn lớn hơn 0, do đó ta xét tử số. Ta thấy trên $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ thì $y'<0$ với mọi x, do vậy hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ví dụ 8: Hỏi hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$ B. $(-\infty;3)$ C. $(-\infty;1)$ D. $(3;+\infty)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần 1)

Đáp án D.

Lời giải

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

Ta có $y'=\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

$y'>0 \Leftrightarrow x>2$, kết hợp với điều kiện xác định thì hàm số đồng biến trên $(3;+\infty)$

Một số ví dụ về bài toán hàm số lượng giác:

Ví dụ 9: Cho hàm số $\dfrac{x}{2}+\sin^2 x$; $x\in[0;\pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$ B. $\left(\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12}\right)$

C. $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12}\right)$ D. $\left(\dfrac{7\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$

(Trích đề luyện tập chuyên đề 1.1 Toán học Bắc Trung Nam)

Đáp án A.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=\dfrac{1}{2}+\sin 2x$. Giải $y'=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vì $x\in[0;\pi]$ nên có 2 giá trị $x=\dfrac{7\pi}{12}$ và $x=\dfrac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{7\pi}{12}$		$\dfrac{11\pi}{12}$		π
y'	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Hàm số đồng biến $\left(0;\dfrac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\dfrac{11\pi}{12};\pi\right)$

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x}{\ln x}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $(0;+\infty)$

B. Hàm số luôn nghịch biến trên $(0;e)$ và đồng biến trên $(e;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ và đồng biến trên $(1;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ và $(1;e)$; đồng biến trên $(e;+\infty)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Amsterdam Hà Nội)

Câu 2: Cho hàm số $y=x-\ln(x+1)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

B. Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Amsterdam Hà Nội)

Câu 3: Hỏi hàm số $y=x^3+3x^2-4$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-2;0)$ B. $(-\infty;-2)$

C. $(0;+\infty)$ D. $\mathbb{R}$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Kim Liên Hà Nội)

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi (từng) khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi (từng) khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

D. Hàm số nghịch biến với mọi $x\neq 1$.

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên KHTN)

Câu 5: Hàm số $y=-x^3+3x^2+9x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;3)$ B. $(-2;-1)$ C. $\mathbb{R}$ D. $(2;3)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Lam Sơn)

Câu 6: Cho hàm số $y=-x^3-6x^2+10$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-4)$

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-4;0)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Lương Văn Tụy)

Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và khoảng $(0;1)$

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và khoảng $(0;1)$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Lương Văn Tụy)

Câu 8: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Lương Văn Tụy)

Câu 9: Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ B. $(0;+\infty)$

C. $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ D. $(-\infty;0)$

(Trích đề minh họa lần I của BGD – 2017)

Câu 10: Biết rằng hàm số $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a<0;b\le 0$ B. $ab\le 0$

C. $ab\ge 0$ D. $a>0;b\ge 0$

(Trích đề thi thử trường THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội)

Câu 11: Hàm số $y=-\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ nghịch biến trong khoảng nào sau đây:

A. $(-\infty;0)$ B. $(0;2)$

C. $(2;+\infty)$ D. $(0;+\infty)$

Câu 12: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó:

A. $y=x^3-x+1$ B. $y=\frac{x+1}{x-1}$

C. $y=x^3+2x-3$ D. $y=x^4+2x^2+3$

(Trích đề thi thử lần I – Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Câu 13: Hỏi hàm số $y=\sqrt{2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;2)$ B. $(0;1)$

C. $(1;2)$ D. $(1;+\infty)$

(Trích đề thi thử lần I – Sở GD & ĐT Nam Định)

Câu 14: Cho hàm số $y=\sin x-\cos x+\sqrt{3}x$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$

B. Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

C. Hàm số là hàm lẻ.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Thái Bình)

Câu 15: Hàm số $y=x^4-2x^2-7$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(0;1)$ B. $(0;+\infty)$

C. $(-1;0)$ D. $(-\infty;0)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Thái Bình)

Câu 16: Hỏi hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$ B. $(3;+\infty)$

C. $(-\infty;1)$ D. $(-\infty;2)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Nguyễn Thị Minh Khai)

Câu 17: Xét tính đơn điệu của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$

C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;3)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Nguyễn Thị Minh Khai)

Câu 18 Hàm số $y=\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $(-\infty;1)$. B. $(1;+\infty)$.

C. $\left(\frac{1}{2};1\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

Câu 19: Hàm số $y=2x^2-x^4$ nghịch biến trên những khoảng nào ? Tìm đáp án đúng nhất.

A. $(-1;0);(1;+\infty)$. B. $(-\infty;-1);(0;1)$.

C. $(-1;0)$. D. $(-1;1)$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp - Hòa Bình)

Câu 20: Hàm số $y=\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$ và $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

C. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. D. $(-\infty;-1)$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Câu 21: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

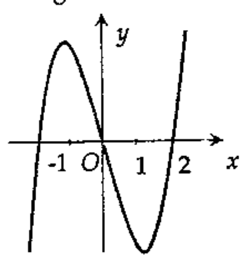
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

Dạng 2: Bài toán chứa tham số.

Ở dạng này ta xét dạng toán tìm điều kiện của m để hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ hoặc trên khoảng con của $\mathbb{R}$.

Nhắc lại lý thuyết

Cho hàm số $y = f(x,m)$ với m là tham số xác định trên một khoảng I.

a. Hàm số đồng biến trên $I \Leftrightarrow y' \geq 0,\ \forall x \in I$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.

b. Hàm số nghịch biến trên $I \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in I$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm.

Chú ý: Để xét dấu của y' ta thường sử dụng phương pháp hàm số hay định lý về dấu của tam thức bậc hai như sau:

Cho tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

a. Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.

b. Nếu $\Delta = 0$ thì x luôn cùng dấu với hệ số a (trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$)

c. Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình $g(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt, khi đó dấu của $g(x)$ trong khoảng hai nghiệm thì khác dấu với hệ số a, ngoài khoảng hai nghiệm thì cùng dấu với hệ số a.

Bốn bước cơ bản để giải bài toán thìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng xác định

Bước 1: Tìm miền xác định

Bước 2: Tính đạo hàm y'

Bước 3: Áp dụng lý thuyết vừa nhắc ở trên.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên tập xác định.

A. $m \geq -1$ hoặc $m \leq -2$ B. $-2 < m < -1$

C. $-2 \leq m \leq -1$ D. $m > -1$ hoặc $m < -2$

(Trích đề thi thử THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh)

STUDY TIP

Khi xét hàm số bậc ba:

1. Luôn đồng biến hoặc nghịch biến ($y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép), đồng biến khi $a > 0$ và ngược lại.
2. Có 2 khoảng đồng biến, một khoảng nghịch biến ($y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và có hệ số $a > 0$); và ngược lại.

Đáp án C.

Lời giải

Xét hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ có $y' = x^2 + 2(m+1)x - (m+1)$

Do hệ số $a = \dfrac{1}{3} > 0$ nên để hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất.

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 + (m+1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m+1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m>0$ B. $m<\frac{3}{2}$ C. $m\ge\frac{3}{2}$ D. $m>\frac{3}{2}$

(Trích đề thi thử lần I THPT Nguyễn Thị Minh Khai)

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1:

Do hàm số $t=\sin x$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên đặt $\sin x=t; t\in(0;1)$

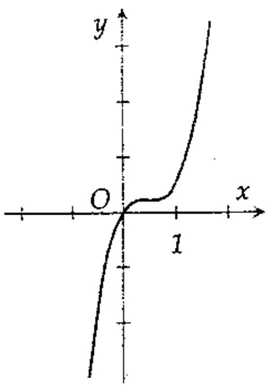
Để hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số $y=f(t)$ phải đồng biến trên $(0;1)\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ hoặc là vô nghiệm, có nghiệm kép (1) ; hoặc là có hai nghiệm $x_1<x_2$ thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}x_1<x_2<0<1\\0<1<x_1<x_2\end{array}\right.$ (2).

STUDY TIP
Ở đây ta có thể loại luôn trường hợp hai bởi xét tổng hai nghiệm không thỏa mãn.

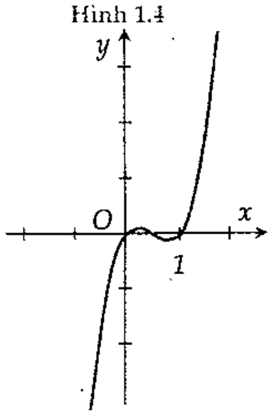
Trường hợp (1): phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow\Delta'\le0\Leftrightarrow 9-6m\le0\Leftrightarrow m\ge\frac{3}{2}$.

Trường hợp (2): Thỏa mãn $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'>0\\x_1x_2>0\\x_1+x_2<0\end{cases}\\\begin{cases}\Delta'>0\\(x_1-1)(x_2-1)>0\\\frac{x_1+x_2}{2}>1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<\frac{3}{2}\\\frac{m}{6}>0\\1<0\end{cases}\\\begin{cases}m<\frac{3}{2}\\\frac{m}{6}-1+1>0\\\frac{1}{2}>1\end{cases}\end{array}\right.$ (loại)



Hình 1.4



Hình 1.5

Cách 2: Ở đây chỉ có hai trường hợp: một là vô nghiệm, có nghiệm kép; hai là $(0;1)$ nằm ngoài khoảng hai nghiệm.

Nhận thấy 3 phương án B, C, D cùng có số $\frac{3}{2}$ nên ta xét $\frac{3}{2}$ trước. Do có phương án C có dấu $\ge$ do vậy, ta sẽ xét dấu bằng trước, nếu dấu bằng thỏa mãn thì ta loại luôn B và D

Với $m=\frac{3}{2}$ thì $y'=6t^2-6t+\frac{3}{2}=6\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$(phương trình $y'=0$ có nghiệm kép, thỏa mãn). Đến đây ta loại luôn B và D.

Hình 1.4 là đồ thị hàm số $y=f(t)$ khi $\frac{3}{2}$

Tiếp theo ta chỉ cần xét đến A. Ta sẽ thử $m=1\notin\left[\frac{3}{2};\infty\right)$.

Với $m=1$ thì $y'=6t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$, nhận xét $0<\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}<\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}<1$ (không thỏa mãn). Vậy loại A, chọn C.

Hình 1.5 là đồ thị hàm số $y=f(t)$ khi $m=1$. Vậy suy luận của ta là đúng.

Ta có thể biết được $(0;1)$ nằm ngoài khoảng hai nghiệm thì hàm số đồng biến bởi y' là một tam thức bậc hai có hệ số $a=6>0$, do vậy dựa trên cách xét dấu tam thức bậc hai đã học ở lớp 10 thì:

1. Nếu $\Delta<0$ thì dấu của tam thức cùng với dấu của hệ số a, tức là lớn hơn 0, tức là luôn đồng biến.

2. Nếu phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thì trong khoảng hai nghiệm thì hàm số sẽ khác dấu với hệ số a, và ngoài khoảng hai nghiệm thì hàm số cùng dấu với hệ số a.

Nhận xét: Ở đầu lời giải cách 1, tôi có chỉ rõ rằng "Do hàm số $t=\sin x$ đồng biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên đặt $\sin x=t; t\in(0;1)$" bởi khi đặt hàm hợp, ta cần lưu ý điều kiện của hàm hợp. Ở bài toán trên nếu thay $\sin x$ bằng $\cos x$; lúc này, nếu đặt $\cos x=t$ và tiếp tục giải như trên thì kết quả đạt được $m\ge\dfrac{3}{2}$ là hoàn toàn sai.

Thật vậy: Với $m=2$ lúc này hàm số $y=2\cos^3x-3\cos^2x+2\cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Tiếp theo để hiểu rõ hơn vấn đề này, ta xét ví dụ sau:

Ví dụ: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x^4+(2-m)x^2+4-2m$ nghịch biến trên $[-1;0]$.

A. $m\ge4$ B. $m>4$ C. $m\le2$ D. $m<2$

Lời giải sai

Nếu làm theo như bài toán trên, ta đặt $t=x^2$, do $x\in[-1;0]$ nên $t\in[0;1]$

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $y=f(t)=t^2+(2-m)t+4-2m$ phải nghịch biến trên $[0;1]$.

Ta có $y'=f'(t)=2t+2-m$

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $[0;1]$ $\Leftrightarrow f'(t)\le0, \forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow m\ge 2t+2, \forall t\in[0;1] \Leftrightarrow m\ge4$, chọn A.

Nhận xét, đây là kết quả sai, thật vậy nếu thử $m=2; m=1;...$ vẫn thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lời giải đúng

Đáp án C.

Cách 1: Ta đặt $t=x^2$, do $x\in[-1;0]$ nên $t\in[0;1]$

Khi đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $y=f(t)=t^2+(2-m)t+4-2m$ phải đồng biến trên $[0;1]$.

Ta có $y' = f'(t) = 2t + 2 - m$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1] \Leftrightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in [0;1]$

$\Leftrightarrow m \leq 2t + 2, \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow m \leq 2$

Cách 2: Xét hàm số $y = x^4 + (2-m)x^2 + 4 - 2m$ có

$y' = 4x^3 + 2.(2-m).x = 2x(2x^2 + 2 - m)$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1;0]$ thì $y' \leq 0, \forall x \in [-1;0]$.

Ta có $2x \leq 0, \forall x \in [-1;0]$, nên để thỏa mãn điều kiện thì

$$(2x^2 + 2 - m) \geq 0, \forall x \in [-1;0] \Leftrightarrow 2 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

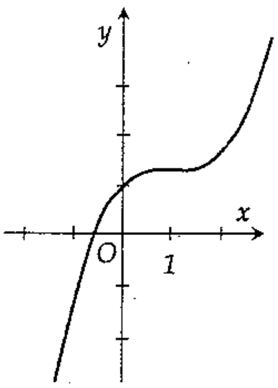
Như vậy, ta rút ra nhận xét sau:

> Xét hàm số $f(x) = g(u(x))$ trên *I* (với *I* là khoảng (đoạn), nửa khoảng (nửa đoạn)). Đặt $u(x) = t; t \in K$ (với *K* là một khoảng (đoạn), nửa khoảng (nửa đoạn) được tính chặt chẽ theo điều kiện của *x*).
> 1. Nếu $u(x)$ là hàm số đồng biến trên *I* thì hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ cùng tính đơn điệu trên *K* với hàm số ban đầu.
> 2. Nếu $u(x)$ là hàm số nghịch biến trên *I* thì thường hàm số thu được sau khi đặt ẩn phụ hay chính là hàm $g(t)$ ngược tính đơn điệu trên *K* với hàm số ban đầu.
> Thường trong trường hợp này ta không đặt ẩn mà giải quyết bài toán bằng cách đạo hàm trực tiếp.

Ví dụ 3: Trong tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, giá trị nhỏ nhất của *m* là:

A. –4   B. –1   C. 0   D. 1

Phân tích: Tiếp tục là một hàm số bậc ba, ta xét $y' \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm để tìm giá trị nhỏ nhất của *m*.



Hình 1.6

Lời giải

Ta có $y' = x^2 + 2mx - m$

Để hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$ với mọi m

$\Leftrightarrow m^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$. Vậy giá trị nhỏ nhất của *m* thỏa mãn là $m = -1$

Hình 1.6 là đồ thị hàm số đã cho khi $m = -1$ (thỏa mãn, vậy suy luận trên là đúng).

Ví dụ 4: Điều kiện cần và đủ của *m* để hàm số $y = \frac{mx+5}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > -5$.   B. $m \geq -5$.   C. $m \geq 5$.   D. $m > 5$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Đại học Sư Phạm Hà Nội)

Đáp án D.

Lời giải

Ta có $y' = \dfrac{m-5}{(x+1)^2}$ để hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định thì $m-5>0 \Leftrightarrow m>5$.

> Hàm số bậc nhất trên bậc nhất có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định. (chứ không phải ~~trên tập xác định~~)
> Đồng biến trên từng khoảng xác định khi $ad-bc>0$, nghịch biến trên từng khoảng xác định khi $ad-bc<0$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \dfrac{mx+2-2m}{x+m}(1)$ (m là tham số). Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $-3 \le m \le 1$ B. $-3<m<1$ C. $\begin{cases} m \ne 1 \\ m \ne -3 \end{cases}$ D. $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$

(Trích đề thi thử lần I – SGD & ĐT Lâm Đồng)

Đáp án D.

Phân tích: Một bài toán về hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nhưng có tham số ở mẫu. Nếu bài toán hỏi "Tìm m để hàm số (1) nghịch biến (hoặc đồng biến) trên một khoảng (a,b) nhất định thì bài toán lại phải thêm điều kiện, tuy nhiên, ở đây ta có thể giải đơn giản như sau:

Lời giải

Điều kiện: $x \ne -m$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2+2m-2}{(x+m)^2}$. Để hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định thì $m^2+2m-2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1+\sqrt{3} \\ m<-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (đến đây ta loại luôn được A, B, C).

Ví dụ 6: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x+2-2m}{x+m}$ đồng biến trên $(-1;2)$

A. $m>\dfrac{2}{3}$ B. $m \ge 1$ C. $-2<m<\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{2}{3}<m<1$

Lời giải

Để hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;2)$ thì $y'>0$ với mọi $x \in (-1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-(2-2m)>0 \\ -m \notin (-1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2>0 \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m \le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1$$

STUDY TIP
Hàm số đơn điệu trên khoảng nào thì phải xác định trên khoảng đó trước. Do vậy ở đây cần có điều kiện cho $-m \notin (-1;2)$.

> Chú ý: Phải có điều kiện $-m$ nằm ngoài khoảng $(-1;2)$ bởi nếu $-m$ nằm trong khoảng $(-1;2)$ thì hàm số bị gián đoạn trên $(-1;2)$. Tức là không thể đồng biến trên $(-1;2)$ được. Đây là phần mà tôi muốn nhấn mạnh với quý độc giả. Bởi nếu không có điều kiện đó, sẽ chọn thành A là sai.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2m-3}{x-m}$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $m\in(-\infty;-3)\cup(1;2]$ B. $m\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$

C. $m\in(-\infty;-3)$ D. $m\in(1;+\infty)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong – TP HCM)

Đáp án A.

Lời giải

Từ STUDY TIP trên ta có được hàm số đơn điệu trên khoảng nào thì phải xác định trong khoảng đó trước, do vậy trong ví dụ này, ta phải có điều kiện để $m\notin(2;+\infty)$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có $y'=\dfrac{-m^2-2m+3}{(x-m)^2}$. Hàm số $y=\dfrac{mx+2m-3}{x-m}$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}y'<0\\ m\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2-2m+3<0\\ m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-3\end{array}\right.\\ m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<m\le 2\\ m<-3\end{array}\right.$$

Phân tích sai lầm: Ở đây nhiều độc giả không xét điều kiên để hàm số luôn xác định trên $(2;+\infty)$ nên chọn B là sai.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y=x-\sqrt{x^2-x+a}$. Tìm a để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a>\dfrac{1}{4}$ B. $a=\dfrac{1}{4}$ C. $a<\dfrac{1}{4}$ D. $a\in\varnothing$

Đáp án D.

STUDY TIP
Ở đây trước tiên, để hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải xác định trên $\mathbb{R}$. Do vậy ta phải tìm điều kiện để căn thức luôn xác định với mọi số thực x.

Lời giải

Để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow x^2-x+a\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\Delta\le 0\Leftrightarrow 1-4a\le 0\Leftrightarrow a\ge\dfrac{1}{4}$.

Với $a\ge\dfrac{1}{4}$ thì

Tính đạo hàm: $y'=1-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+a}}$

Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow 1-\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+a}}\le 0$ $\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-a}}\ge 1$

STUDY TIP
Chú ý: Đến đây nhiều độc giả chọn luôn B, hoặc C là sai, nên kết hợp cả điều kiện ban đầu ,từ đó rút ra kết luận..

Lúc này:

$$2x-1\ge 2\sqrt{x^2-x+a} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 1\ge 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ a\le \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện để hàm số xác định với mọi số thực x thì ta thấy không có giá trị nào của a thỏa mãn.

Kết quả

Sau bài toán trên ta thấy, với các bài toán hàm căn thức thì nếu đề bài yêu cầu tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên , hoặc trên khoảng I nào đó, thì ta cần tìm điều kiện để hàm số luôn xác định trên hoặc trên khoảng I đó.

Câu 1: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\ln\dfrac{1}{4};0\right)$

A. $m\in[-1;2]$ B. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$

C. $m\in(1;2)$ D. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Bảo Lâm)

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m<-3$ B. $m\le-3$ C. $m\le3$ D. $m>-3$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Chu Văn An)

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $-4\le m<-1$ B. $\left[\begin{array}{l} m>2\\ m\le-6\\ -4\le m<-1\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m>2\\ m\le-4\end{array}\right.$ D. $-1<m<2$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 5: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2-m$ nghịch biến trên khoảng (0; 1)?

A. $m\ge\dfrac{1}{2}$ B. $m<\dfrac{1}{2}$ C. $m\le0$ D. $m\ge0$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Amsterdam)

Câu 6: Để hàm số $y=x^3-3m^2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì:

A. $m\le0$ B. $m=0$ C. $m\ge0$ D. $m<0$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Lương Thế Vinh)

Câu 7: Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge2\\ m\le-1\end{array}\right.$ B. $m\le2$

C. $-2\le m\le-1$ D. $-1\le m\le0$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2<m<1$ B. $\left[\begin{array}{l} m\ge1\\ m\le-2\end{array}\right.$

C. $-2\le m\le1$ D. $\left[\begin{array}{l} m>1\\ m<-2\end{array}\right.$

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 9: Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

A. $m\le1$ B. $m>3$ C. $m\le-3$ D. $m\le3$

Câu 10: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}\,mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m\ge2017$ B. $m>0$

C. $m\ge\dfrac{1}{2017}$ D. $m\ge-\dfrac{1}{2017}$

(Trích đề thi thử Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m<-1$ B. $m\ge1$

C. $m\le0$ D. $m>-1$

(Trích đề thi thử THPT Kiến An)

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{\sin x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$:

A. $m\le0$ hoặc $m\ge1$ B. $m<0$

C. $0<m\le1$ D. $m\ge1$

Câu 13: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đồng biến trong khoảng $(0;3)$?

A. $m\ge\dfrac{12}{7}$. B. $m<\dfrac{12}{7}$. C. $m\in\mathbb{R}$. D. $m>\dfrac{7}{12}$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=mx^3+mx^2+m(m-1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le\dfrac{4}{3}$ B. $m\le\dfrac{4}{3}$ và $m\ne0$

C. $m=0$ hoặc $m\ge\dfrac{4}{3}$ D. $m\ge\dfrac{4}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài tập không chứa tham số

Câu 1: Đáp án D.

Cách 1: Cách tư duy.

Tập xác định: $D=(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e;$

y' không xác định tại $x=1$

+ $y'>0\ \forall x\in(e;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(e;+\infty)$.

+ $y'<0\ \forall x\in(0;1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

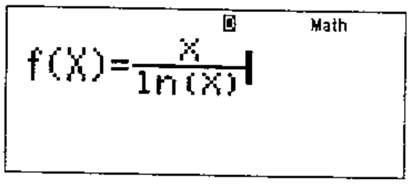
+ $y'<0\ \forall x\in(1;e)$ nên hàm số nghịch biến trên $(1;e)$.

Cách 2: Sử dụng máy tính casio:

Nhận thấy ở các phương án có các khoảng sau: $(0;+\infty);(0;1);(0;e);\ (1;e);(e;+\infty)$.

Lúc này ta sử dụng lệnh MODE 7 TABLE để xét tính đồng biến nghịch biến của hàm số:

Nhập vào máy $Fx=\dfrac{x}{\ln x}$:

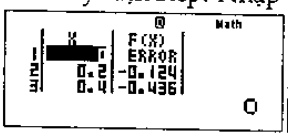


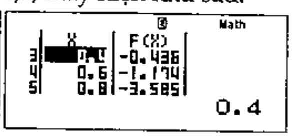
Ấn 2 lần = máy hiện Start? Ta chọn $x=0$, ấn 0 =

End? Ta nhập SHIFT  (chính là chọn end là e).

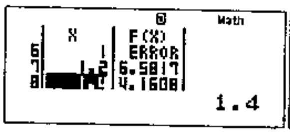
Do ở đây ta cho chạy từ 0 đến e bởi ta cần xét tính đồng biến nghịch biến trên $(0;+\infty);(0;1);(0;e)$; $(1;e)$.

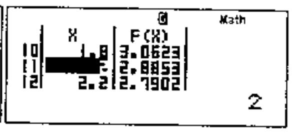
Ấn = máy hiện Step? Nhập 0,2, máy hiện như sau:





Từ đây ta nhận thấy giá trị của hàm số giảm khi cho x chạy từ 0 đến 1. Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;1)$; từ đây ta loại A và B. Tiếp theo kéo xuống thì máy hiện:





Lúc này ta thấy các giá trị của hàm số tiếp tục giảm khi cho x chạy từ 1 đến e. Do vậy hàm số nghịch biến trên $(1;e)$, từ đây ta loại C, chọn D.

Câu 2: Đáp án D.

Tập xác định: $D=(-1;+\infty)\Rightarrow$ loại A.

$y'=\left[x-\ln(x+1)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

$y'>0\Leftrightarrow x>0\ \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$y'<0\Leftrightarrow -1<x<0$

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$

Cách 2: Sử dụng máy tính casio bằng lênh TABLE trong MODE 7 tương tự bài 1.

Câu 3: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(x^3+3x^2-4\right)'=3x^2+6x$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

Ta có hệ số $a=1>0$ nên đồ thị hàm số có dạng N, tức hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$.

Câu 4: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $ad-bc=1-2=-1<0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5: Đáp án D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(-x^3+3x^2+9x\right)'=-3x^2+6x+9$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-1\end{array}\right.$

Ta thấy hàm số có hệ số $a=-1<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;3)$.

Câu 6: Đáp án D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=\left(-x^3-6x^2+10\right)'=-3x^2-12x$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$

Do hệ số $a=-1<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-4;0)$

Câu 7: Đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = \left(x^4 - 2x^2 - 1\right)' = 4x^3 - 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{array}\right.$

Do hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng **W** từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(0;1)$; hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 8: Đáp án A.

Vì $f'(x) = x^2(x+2) \geq 0\ \forall x \in (-2;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$.

Câu 9: Đáp án B.

Cách suy luận 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = \left(2x^4 + 1\right)' = 8x^3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vì $y' > 0\ \forall x \in (0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Cách suy luận 2:

Đồ thị hàm số có dạng Parabol có đỉnh là $I(0;1)$ và hệ số $a = 2 > 0$ nên đồ thị hàm số là Parabol có bề lõm hướng xuống, tức hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 10: Đáp án D.

Ở phần sau ta sẽ học về đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương, ở phần dạng đồ thị ta có sơ đồ về dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương. Từ đó ta rút ra nhận xét:

Do hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên đồ thị hàm số không thể có ba điểm cực trị, vậy đồ thị hàm số có dạng parabol quay bề lõm xuống dưới và có đỉnh là $I(0;c)$.

Áp dụng sơ đồ tôi vừa giới thiệu ở bài sau để thỏa mãn điều kiện trên thì $\begin{cases} a > 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

Câu 11: Đáp án D.

Từ việc xem xét sơ đồ tôi giới thiệu ở câu 10 thì ta có: $ab = \left(-\dfrac{1}{4}\right).(-2) > 0$ và $a = -\dfrac{1}{4} < 0$ nên đồ thị hàm số là parabol quay bề lõm lên trên, tức hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 12: Đáp án C.

Phương án A. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = \left(x^3 - x + 1\right)' = 3x^2 - 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$

$\Rightarrow$ Hàm số này không đồng biến trên tập xác định của nó.

Phương án B. Loại vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Phương án C. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 + 2 > 0\ \forall x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm số này đồng biến trên tập xác định của nó.

Câu 13: Đáp án B.

Tập xác định: $D = [0;2]$.

$y' = \dfrac{-2x+2}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vì $y' > 0\ \forall x \in (0;1)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 14: Đáp án D.

$y' = \left(\sin x - \cos x + \sqrt{3}x\right)'$

$= \cos x + \sin x + \sqrt{3} = \sqrt{2}.\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}$

$= \sqrt{2}.\left[\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1\right] + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) > 0$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Câu 15: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng **W**, từ đây suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 16: Đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus [1;3]$

$y' = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (không thuộc D)

Vì $y' < 0\ \forall x \in (-\infty;1)$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 17: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Mặt khác hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng N, tức hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-1;1)$.

Câu 18: Đáp án B.

Tập xác định: $D=(-2;+\infty)$

$$y'=\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}=\frac{x-1}{(x+2)^2}$$

Vì $y'>0\ \forall x\in(1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 19: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=-4x^3+4x=-4x\left(x^2-1\right)$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$$

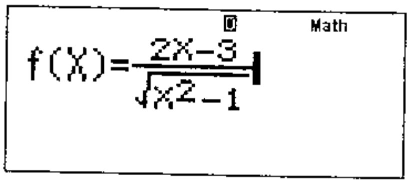
Mặt khác hệ số $a=-1<0$, suy ra đồ thị hàm số có dạng chữ M, tức hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 20: Đáp án D.

Với các bài toán mà ta khó tính đạo hàm, ta nên dùng TABLE để giải quyết bài toán.

Nhập $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{7:TABLE}}$

Nhập như sau:



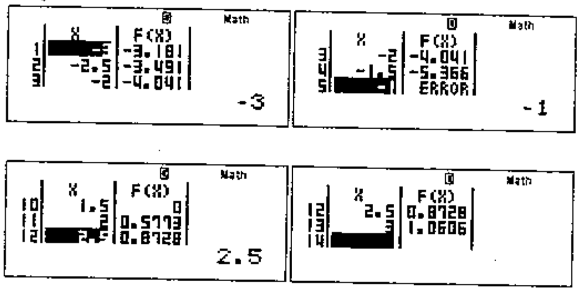
Tiếp theo ấn 2 lần dấu =.

Start? ấn -3 =

End? ấn 3 =

Step? 0.5 =

Máy hiện:



Từ đây ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

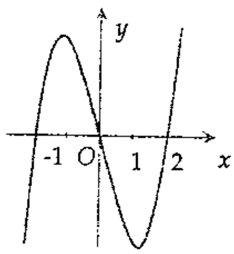
Câu 21: Đáp án C

Ta thấy hàm số có $y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Mặt khác hệ số $a=1>0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, tức hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.

Câu 22: Đáp án B.

Đây là một bài toán dễ mắc sai lầm, do đồ thị trong hình vẽ



Nhận thấy trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ thì $f'(x)<0$ nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Phân tích sai lầm: Nhiều học sinh tưởng đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và chọn luôn D.

Dạng 2: Bài toán chứa tham số

Câu 1: Đáp án D

Đặt $e^x=t\,(t>0)$

Vì $x\in\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

$$\Rightarrow t\left(\frac{1}{4};1\right)\Rightarrow m^2\notin\left(\frac{1}{4};1\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m\le-1\\m\ge1\\-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$y=\frac{t-m-2}{t-m^2};\ y'=\frac{-m^2+m+2}{\left(t-m^2\right)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

Khi $y'>0$ hay $-m^2+m+2>0\Leftrightarrow-1<m<2$

Vậy $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$ hoặc $1\le m<2$.

Câu 2: Đáp án A.

Điều kiện: $x\ne m$.

$$y'=\frac{-m-3}{(x-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow-m-3>0\Leftrightarrow m<-3$.

Câu 3: Đáp án B.

Đặt $\sqrt{x-1}=t$.

Vì $x\in(17;37)$. $\Rightarrow t\in(4;6)\Rightarrow m\notin(-6;-4)$

$$y=\frac{(m-1)t+2}{t+m}$$

$y' = \dfrac{m^2 - m - 2}{(t+m)^2}$.

Hàm số đồng biến khi $m^2 - m - 2 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -1 \end{array}\right.$.

Kết hợp các điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m \le -6 \\ -4 \le m < 1 \end{array}\right.$

Câu 4: Đáp án B.

$D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6mx$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$, mặt khác hàm số có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ N, suy ra hàm số nghịch biến trên $(0;2m)$.

Vậy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ thì $2m < 1 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$.

Câu 5: Đáp án B

$D = \mathbb{R}$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $b^2 - 3ac \le 0$

$\Leftrightarrow 0^2 - 3.1.(-3m^2) \le 0 \Leftrightarrow 9m^2 \le 0 \Rightarrow m = 0$.

Câu 6: Đáp án C

Đẻ hàm số luôn nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ thì

$b^2 - 3ac \le 0 \Leftrightarrow m^2 - 3.\left(-\dfrac{1}{3}\right).(3m+2) \le 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le -1$.

Câu 7: Đáp án A

Để hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định thì $(m+1).(-m) + 2 > 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 > 0$

$\Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Câu 8: Đáp án C

$y' = 3x^2 + 6x - m$

Phương trình $y' = 0$ có $\Delta' = b^2 - 3ac$

$= 3^2 - 3.1.(-m) = 9 + 3m$

Trường hợp 1: đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, thì $x = 0$ phải là điểm cực đại, lúc này: $y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (không thỏa mãn)

Vậy hàm số phải luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m \le -3$

Câu 9: Đáp án C.

Ta có $y' = \cos x + \sin x + 2017\sqrt{2}m$. Ta có $y' = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2017\sqrt{2}m$. Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

$\Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ge -2017m$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này xảy ra khi $-2017m \le -1 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{2017}$.

Câu 10: Đáp án C.

Đặt $\sin x = t$

Vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Hàm số trở thành $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$. Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì hàm số $y = \dfrac{2t-1}{t-m}$ phải đồng biến trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc = -2m + 1 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$.

Vì $m \notin (0;1)$ nên $m \le 0$.

Câu 11: Đáp án B.

Cách 1: Đạo hàm trực tiếp

Ta có

$y' = \left(\dfrac{\sin x + m}{\sin x - m}\right)' = \dfrac{\cos x(\sin x - m) - \cos x(\sin x + m)}{(\sin x - m)^2}$

$= \dfrac{-2m\cos x}{(\sin x - m)^2}$, để hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì

$\begin{cases} -2m\cos x < 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases}$

Do $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\cos x \in (0;-1)$, do vậy để hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $\begin{cases} -2m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Cách 2: Đặt ẩn

Đặt $\sin x = t$,

Vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $t \in (0;1)$.

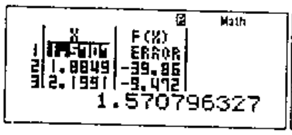
Ta thấy hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ do đó để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì hàm số $y = f(t) = \dfrac{t+m}{t-m}$ phải đồng biến trên $(0;1)$

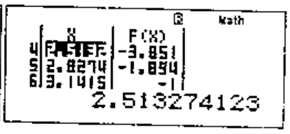
Tức là $\begin{cases} ad - bc = -m - m > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$

Cách 3: Sử dụng TABLE

Ta thấy với $m = 0$ không thỏa mãn, do là hàm hằng nên ta loại A.

Vậy ta sẽ thử $m=1$; Start $\frac{\pi}{2}$; End π Step $\frac{\pi}{10}$ thì ta được:





Vậy với $m=1$ không thỏa mãn. Do vậy ta loại được C, D. Từ đây ta chọn B.

Câu 12: Đáp án A.

Cách 1: Giải toán thông thường

Ta có $y'=-x^2+2(m-1)x+(m+3)$

Hàm số đã cho đồng biến trên $(0;3)$ $\Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in(0;3)$.

Vì hàm số $y'(x)$ liên tục tại $x=0; x=3$ nên $y'\ge 0, \forall x\in(0;3) \Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x\in[0;3]$ (mục đích là để cô lập tham số m)

$\Leftrightarrow m\ge \frac{x^2+2x-3}{2x+1}, \forall x\in[0;3]$.

(Do $2x+1>0, \forall x\in[0;3]$ nên khi chia cả hai vế không làm đổi dấu bất phương trình).

$\Leftrightarrow m\ge \max\limits_{x\in[0;3]} g(x)$ với $g(x)=\frac{x^2+2x-3}{2x+1}$

Mặt khác ta tìm được $\max\limits_{x\in[0;3]} g(x)=g(3)=\frac{12}{7}$.

Vậy $m\ge \frac{12}{7}$.

Cách 2: Thử giá trị.

Lúc này ta một giá trị m nằm trong khoảng $\left(\frac{7}{12};\frac{12}{7}\right)$ là có thể xác định được kết quả, ta chọn $m=1$ khi đó hàm số trở thành $y=-\frac{1}{3}x^3+4x-10$.

Có $y'=0 \Leftrightarrow -x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Do hệ số $a=-\frac{1}{3}<0$ nên hàm số đồng biến trên $(-2;2)$ vậy không thỏa mãn đề bài. Vậy loại B, C, D, chọn A.

Câu 13: Đáp án D

Với $m=0$ thì hàm số trở thành $y=2$ là hàm hằng, loại. Từ đây ta loại A, C.

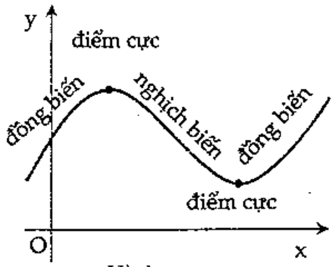
Với $m\ne 0$:

Đến đây ta không cần thử mà có thể chọn luôn D, bởi hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi hệ số $a>0$ và phương trình $y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm, tuy nhiên với phương án B, $m\le \frac{4}{3}$ thì m có thể âm, tức hệ số a âm thì không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$ được. Vậy ta chọn D.

Chú ý: Với bài toán này việc hiểu bản chất và suy luận nhanh hơn rất nhiều so với việc bấm máy thử từng phương án.

I.II Cực trị của hàm số và giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

A. Lý thuyết về cực trị của hàm số



Hình

Ở phần I.I ta vừa học cách sử dụng đạo hàm để tìm khoảng đơn điệu của hàm số, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số. Ở phần này ta sẽ xác định điểm nằm giữa khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số, và ngược lại. Những điểm này được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số. Điểm cực trị bao gồm cả điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số. Đồ thị hàm số ở hình 1.7 có điểm cực đại là điểm phía bên trái và điểm cực tiểu ở phía bên phải (điểm được đánh dấu).

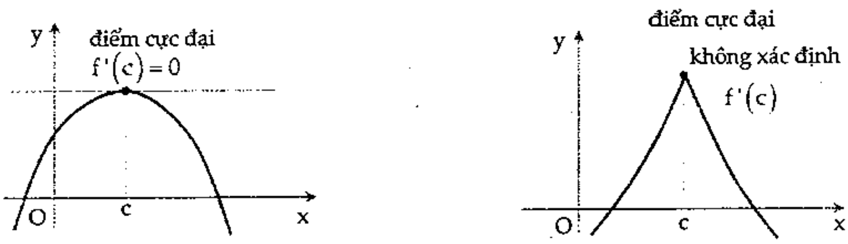
1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

a, Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

b, Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Với hàm liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y' = 0$ hoặc y' không xác định được thể hiện ở hình 1.8



Hình 1.8

Nếu hàm số đạt cực đại hoặc cực tiểu tại $x = c$ thì $x = c$ là điểm làm cho y' bằng 0 hoặc y' không xác định.

2. Chú ý

STUDY TIP: điểm cực trị của hàm số là $x = c$; còn điểm cực trị của đồ thị hàm số là điểm có tọa độ $M(c;f(c))$

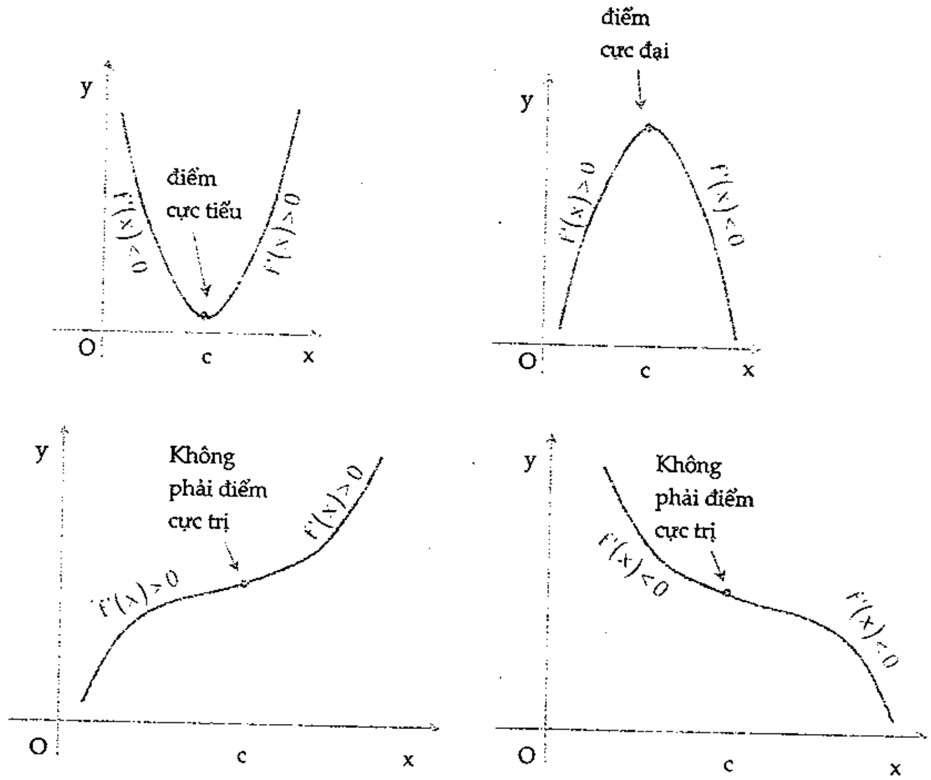
Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số ; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu f_{CD} (f_{CT}), còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.

Trong các bài trắc nghiệm thường có các câu hỏi đưa ra để đánh lừa thí sinh khi phải phân biệt giữa điểm cực trị của hàm số và điểm cực trị của điểm cực trị của đồ thị hàm số.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị

> Khi $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua $x=c$ thì $x=c$ được gọi là điểm cực đại của hàm số.
>
> Khi $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=c$ thì $x=c$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Hình 1.9 mô tả điều kiện đủ để hàm số có cực trị:



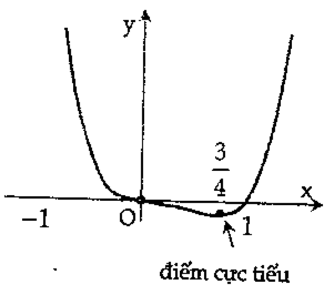
Hình 1.9

Ví dụ 1: Hàm số $y=x^4-x^3$ có điểm cực trị			
A. $x=0; x=\frac{3}{4}$	B. $x=0$	C. $x=\frac{3}{4}$	D. $x=1$

Lời giải

Ta có $y'=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$$



Hình 1.10

Ta thấy y' không đổi dấu qua $x=0$, do vậy $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số. Và y' đổi dấu từ âm sang dương quan $x=\frac{3}{4}$ do vậy $x=\frac{3}{4}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Hình 1.10 thể hiện đồ thị hàm số, ta thấy rõ điểm $O(0;0)$ không là điểm cực trị của đồ thị hàm số).

> Nếu $x=c$ là điểm cực trị của hàm $y=f(x)$ thì $f'(c)=0$ hoặc $f'(c)$ không xác định, nhưng nếu $f'(c)=0$ thì chưa chắc $x=c$ đã là điểm cực trị của hàm số.

4. Quy tắc để tìm cực trị

Quy tắc 1

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định.
3. Lập bảng biến thiên.
4. Từ bảng biến thiên suy ra cực trị.

Quy tắc 2

1. Tìm tập xác định.
2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu $x_i\ (i=1,2,3,...,n)$ là các nghiệm của nó.
3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=|x|$ Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số có một điểm cực đại.

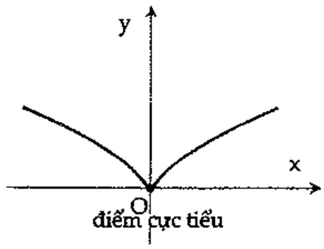
B. Hàm số đã cho không có cực trị.

C. Hàm số đã cho có đạo hàm không xác định tại $x=0$ nên không đạt cực trị tại $x=0$.

D. Hàm số đã cho có đạo hàm không xác định tại $x=0$ nhưng đạt cực trị tại $x=0$.

Đáp án D

Lời giải



Hình 1.11

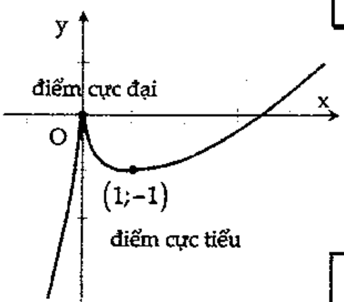
Ta có $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2}}$

y' không xác định tại $x=0$, đạo hàm của hàm số đổi dấu khi qua $x=0$. Nên hàm số đạt cực trị tại $x=0$.

Phần này đã được giới thiệu ở sau phần định nghĩa: Với hàm liên tục thì hàm số sẽ đạt cực trị tại điểm làm cho $y'=0$ hoặc y' không xác định.

Hình 1.11 biểu thị đồ thị hàm số $y=|x|$ đạt có điểm cực tiểu là $O(0;0)$.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.



Hình 1.12

Lời giải: Ta có $y'=\left(2x-3\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(2x-3x^{\frac{2}{3}}\right)'=2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}}$

y' không xác định tại $x=0$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$. Và đạo hàm đổi dấu khi qua $x=0;x=1$. Do vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x=0;x=1$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-mx^2-2x+1$ với m là tham số. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Với mọi tham số *m*, hàm số đã cho luôn chỉ có duy nhất một cực đại.

B. Với mọi tham số *m*, hàm số đã cho luôn chỉ có duy nhất một cực tiểu.

C. Với mọi tham số *m*, hàm số đã cho luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

D. Với mọi tham số *m*, hàm số đã cho không có cực trị.

Đáp án C

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ có $y' = 3x^2 - 2mx - 2$

Xét phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2mx - 2 = 0$ có $\Delta' = (-m)^2 - (-2).3 = m^2 + 6 > 0$

Do vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Mặt khác ta có mẹo xét dấu tam thức bậc hai " trong khác ngoài cùng", do vậy đạo hàm của hàm số đã cho đổi dấu như sau:

x		x_1		x_2	
y'	+		−		+

Vậy hàm số đã cho luôn có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu với mọi tham số m.

B. Các dạng toán liên quan đến cực trị

Dạng 1: Xác định điểm cực trị của hàm số, điểm cực trị của đồ thị hàm số, tìm giá trị cực trị của hàm số.

Đây là dạng toán cơ bản nhất về cực trị, tuy nhiên xuất hiện rất nhiều trong các đề thi thử. Ở dạng toán này ta chỉ áp dụng các tính chất đã được nêu ở phần A. Tuy nhiên ta đi xét các ví dụ để rút ra các kết quả quan trọng.

Ví dụ 1 : Hàm số nào sau đây không có cực trị ?

A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = \dfrac{2-x}{x+3}$.

C. $y = x^4 - 4x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^{2n} + 2017x$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

Đáp án B

STUDY TIP: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất không có cực trị.

Lời giải

Với A: Ta thấy đây là hàm bậc ba có $y' = 3x^2 - 3$, phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt nên hàm số có hai điểm cực trị (loại).

Với B: Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên không có cực trị. Do đó ta chọn B.

Ví dụ 2: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2 + 10$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

C. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

D. $y = 2x^4 - 4$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Đáp án B

Lời giải

Ta có thể loại luôn C bởi hàm số bậc ba chỉ có nhiều nhất là hai cực trị.

Tiếp theo ta đến với các hàm bậc bốn. Ta có hàm bậc bốn trùng phương có hai trường hợp, hoặc là có một điểm cực trị, hoặc là có ba điểm cực trị.

Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$.

STUDY TIP:
Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ thì nếu:
$ab>0$ thì hàm số có một điểm cực trị là $x=0$.
$ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x=0;x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\2ax^2+b=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{b}{2a}\end{array}\right.$

Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2+b=0$.

a. Nếu $\frac{-b}{2a}\leq 0$ tức là *a, b* cùng dấu hoặc $b=0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x=0$.

b.Nếu $\frac{-b}{2a}>0$ tức là *a, b* trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x=0;x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Đến đây ta có thể suy ra, nếu hệ số của *a, b* khác dấu thì hàm số bậc bốn trùng phương có ba cực trị, do vậy ta chọn luôn được B.

Tiếp tục là một bài toán áp dụng kết quả vừa thu được.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có một cực đại và hai cực tiểu.
B. Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu.
C. Hàm số có một cực đại và không có cực tiểu.
D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng kết quả vừa thu được ta có kết luận hàm số luôn có ba điểm cực trị do hai hệ số *a, b* trái dấu.

Mặt khác hệ số $a=-1<0$ nên đồ thị hàm số có dạng chữ **M** (mẹo nhỏ), do vậy hàm số có hai điểm cực đại và một cực tiểu.

Đến đây ta tiếp tục thu được kết luận ở phần STUDY TIP.

STUDY TIP:
Đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có $ab<0$, khi đó nếu:
a. $a<0$ thì $x=0$ là điểm cực tiểu; $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ là hai điểm cực đại của hàm số.
b. $a>0$ thì ngược lại $x=0$ là điểm cực đại; $x=\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ là hai điểm cực tiểu của hàm số.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ và có bảng biến thiên phía dưới:

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=4$.
B. Hàm số có đúng một cực trị.
C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.
D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng -15.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	-15	$\searrow$	$-\infty$

Đáp án C

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà qua đó y' đổi dấu, đó là $x=0$ và $x=4$, do vậy đây là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=0$, do vậy $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số, ngược lại $x=4$ lại là điểm cực đại của hàm số.
Từ đây ta loại được A, B.
D sai do đây là các giá trị cực trị, không giải giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
Ta chọn C bởi tại $x=0$ thì hàm số có giá trị cực tiểu là $y=1$.

Tiếp tục là một bài toán nhìn bảng biến thiên để xác định tính đúng sai của mệnh đề:

Ví dụ 5: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.
C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	+	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Đáp án A.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy có hai giá trị của x mà khi qua đó y' đổi dấu. Do vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị đó là $x=1; x=2$.
Chú ý: Nhiều độc giả nghĩ rằng tại $x=2$ không tồn tại y' thì $x=2$ không phải là điểm cực trị của hàm số, đây là một sai lầm rất lớn. Bởi hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm không xác định.
Ví dụ: Hàm số $y=|x|$ có đạo hàm không tồn tại khi $x=0$ nhưng đạt cực tiểu tại $x=0$.

STUDY TIP:
Ở quy tắc 1 ta có hàm số đạt cực trị tại điểm khiến cho đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

Ví dụ 6. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
A. Hàm số có một điểm cực đại
B. Hàm số có hai điểm cực trị
C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị
D. Hàm số không có điểm cực trị
(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN – lần I)

Đáp án C.

Lời giải

Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x=1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $(x-1)^2 \ge 0,\ \forall x$. Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x=3$.

STUDY TIP:
Trong đa thức, dấu của đa thức chỉ đổi khi qua nghiệm đơn và nghiệm bội lẻ, còn nghiệm bội chẵn không khiến đa thức đổi dấu.

Dạng 2: Tìm điều kiện để hàm số có cực trị.

Chú ý:

> Hàm số $y=f(x)$ xác định trên D có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0 \in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:
> i. Đạo hàm của hàm số tại x_0 phải bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0
> ii. $f'(x)$ phải đổi dấu qua x_0 hoặc $f''(x_0)\neq 0$.

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, đồ thị hàm số bậc ba hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

1. Đối với hàm số bậc 3 dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Để hàm số bậc ba có cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\boxed{\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow b^2-3ac>0}$

Ngược lại, để hàm số không có cực trị thì phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất $\boxed{\Leftrightarrow b^2-3ac\leq 0.}$

2. Đối với hàm bậc bốn trùng phương dạng $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2ax^2+b=0 \end{array}\right.$

Đến đây ta có nhận xét hàm số bậc bốn trùng phương luôn có điểm cực trị.

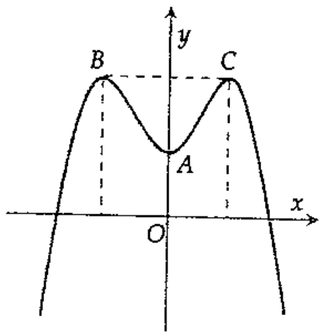
Số điểm cực trị phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $2ax^2+b=0$.

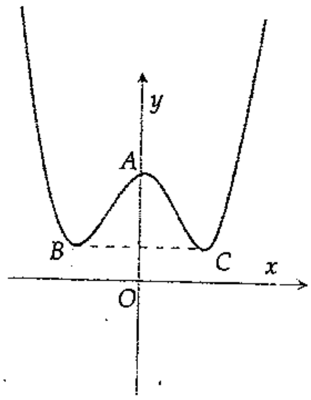
a. Nếu $\dfrac{-b}{2a}\leq 0$ tức là a, b cùng dấu hoặc $b=0$ thì phương trình vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0$. Khi đó hàm số chỉ có một điểm cực trị là $x=0$.

b. Nếu $\dfrac{-b}{2a}>0$ tức là a, b trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$. Nghĩa là hàm số có ba điểm cực trị là $x=0; x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$.

Dạng 3: Tìm điều kiện để hàm số đã cho có điểm cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

3.1 Xét hàm số bậc bốn trùng phương có dạng $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$.





Ta vừa chứng minh ở dạng 2, nếu $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị là $x=0;x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho sẽ có ba điểm cực trị là:

$A(0;c);B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right);C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta=b^2-4ac$ (Hình minh họa)

(Chứng minh: ta có $f\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)=a.\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^4+b.\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2+c=\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c$

$=\frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2}=\frac{ab^2-2ab^2+4a^2c}{4a^2}=\frac{-ab^2+4ac}{4a^2}=\frac{-b^2+4ac}{4a}$ (đpcm))

$$\boxed{\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}};BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

Bài toán 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,\ (a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Lời giải tổng quát

Với $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do điểm $A(0;c)$ luôn nằm trên Oy và cách đều hai điểm B, C. Nên tam giác ABC phải vuông cân tại A. Điều này tương đương với $AB\perp AC$ (do $AB=AC$ có sẵn rồi).

Mặt khác ta có $\vec{AB}=\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right);\vec{AC}=\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{b^2}{4a}\right)$

Do $AB\perp AC$ nên $\vec{AB}.\vec{AC}=0\Leftrightarrow\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=0\Leftrightarrow\boxed{\frac{b^3}{a}=-8}$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân điều kiện là $\frac{b^3}{a}=-8$. Ta loại được điều kiện a, b trái dấu do từ công thức cuối cùng thu được thì ta luôn có a, b trái dấu.

Ví dụ 1: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-8m^2x^2+3$ có 3 điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $\{0\}$ B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ C. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$

Đáp án D.

Cách 1: Lời giải thông thường	Cách 2: Áp dụng công thức.
TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có: $y'=4x\left(x^2-4m^2\right)$. Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\neq 0$. Lúc đó, ba điểm cực trị là: $A\left(2m;-16m^2+3\right)$, $B\left(0;3\right)$, $C\left(-2m;-16m^4+3\right)$. Nên $BA=BC$. Do đó, tam giác ABC cân tại B Khi đó, tam giác ABC vuông cân khi và chỉ khi: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow 4m^2-256m^8=0$ $\Leftrightarrow 1-64m^2=0\ \left(m\neq 0\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.	Để các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân thì $\frac{b^3}{a}=-8\Leftrightarrow \frac{\left(-8m^2\right)^3}{1}=-8$ $\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$

Nhận xét: Rõ ràng việc nhớ công thức và làm nhanh hơn rất nhiều so với việc suy ra từng trường hợp một.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

STUDY TIP:
Độc giả nên làm các bài tập rèn luyện này mà không nhìn lại công thức để có thể ghi nhớ công thức lâu hơn.

1. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-2$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông?

A. $m=1$ B. $m=-1$ C. $m=2$ D. $m=-2$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^4+2\left(m-2\right)x^2+m^2-5m+5\ \left(C_m\right)$. Giá trị nào của m để đồ thị của hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông cân thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{2}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2};\frac{21}{10}\right)$. C. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. D. $\left(-1;0\right)$.

3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^4+\left(m-2015\right)x^2+2017$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m=2017$ B. $m=2014$ C. $m=2016$ D. $m=2015$

4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2\left(m+2016\right)x^2-2017m+2016$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m=-2017$ B. $m=2017$ C. $m=-2018$ D. $m=2015$

5. Tìm m để đồ thị hàm số $f\left(x\right)=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2$ có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành một tam giác vuông.

A. $m=2$. B. $m=-1$. C. $m=0$. D. $m=1$.

Đáp án

1.A	2.A	3.A	4.A	5.C

Bài toán 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a}=-24$.

Lời giải tổng quát

Với $ab<0$ thì hàm số có ba điểm cực trị.

Do $AB=AC$, nên ta chỉ cần tìm điều kiện để $AB=BC$.

Mặt khác ta có

$\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}}; BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

Do vậy $AB=BC\Leftrightarrow -\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}=-\frac{2b}{a}\Leftrightarrow \boxed{\frac{b^3}{a}=-24}$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều. Ta có kết quả:

A. $m=3$ B. $m=0$ C. $m>0$ D. $m=\sqrt[3]{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Đáp án D.

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều thì $\frac{b^3}{a}=-24$.
Mà tam giác vuông thì $\frac{b^3}{a}=-8$.
"Vuông -8, đều -24"

Lời giải

Áp dụng công thức vừa chứng minh ở trên ta có

$\frac{b^3}{a}=-24\Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{1}=-24\Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y=x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5(C_m)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều?

A. $m=2-\sqrt[3]{3}$ B. $m=2+\sqrt[3]{3}$ C. $m=5-2\sqrt[3]{3}$ D. $m=5+2\sqrt[3]{3}$

2. Cho hàm số $y=\frac{9}{8}x^4+3(m-2017)x^2-2016$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m=2015$ B. $m=2016$ C. $m=2017$ D. $m=-2017$

3. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều?

A. $m=\sqrt[3]{3}$ B. $m=-\sqrt[3]{3}$ C. $m=\sqrt{3}$ D. $m=-\sqrt{3}$

4. Cho hàm số $y=-mx^4+2mx^2-m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác đều.

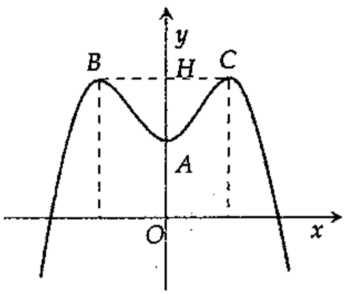
A. $m=\sqrt{3}; m=-\sqrt{3}; m=0$ B. $m=-\sqrt{3}; m=\sqrt{3}$
C. $m=0$ D. $m=\sqrt{3}$

Đáp án

1A	2B	3A	4A

Bài toán 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng S_0.

Lời giải tổng quát



Gọi H là trung điểm của BC thì lúc này H nằm trên đường thẳng chứa đoạn thẳng BC (hình vẽ).

Lúc này $H\left(0;-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AH=\left(0;-\frac{b^2}{4a}\right)$. Diện tích tam giác ABC được tính bằng công thức: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AH.BC \Rightarrow S_o^2=\frac{1}{4}\left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2\left(2\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^2$

$\Leftrightarrow S_0^2=\frac{1}{4}.\frac{b^4}{16a^2}.\frac{-2b}{a} \Leftrightarrow \boxed{S_0^2=\frac{-b^5}{32a^3}}$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích là S_0 thì có điều kiện là $S_0^2=-\frac{b^5}{32a^3}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4

A. $m=\sqrt[5]{16}$ B. $m=16$ C. $m=\sqrt[3]{16}$ D. $m=-\sqrt[3]{16}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hưng Yên, đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên ta có, hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4 $\Leftrightarrow 32.a^3S_0^2+b^5=0 \Leftrightarrow 32.1^3.4^2+(-2m)^5=0$

$\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{16}$.

Bài tập rèn luyện lại công thức:

1. Cho hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

A. $m=2; m=-2$ B. $m=0; m=2$

C. $m=0; m=-2$ D. $m=2; m=-2; m=0$

2. Cho hàm số $y=f(x)=-x^4+2(m-2)x^2+m^2-5m+5$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=3$ B. $m=\pm 3$ C. $m=2$ D. $m=\pm 2$

3. Cho hàm số $y=3x^4-2mx^2+2m+m^4$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 3.

A. $m=3$ B. $m=-3$ C. $m=4$ D. $m=-4$

4. Cho hàm số $y=x^4+2mx^2-m-1$ (1), với m là tham số thực.Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

A. $m=2$ B. $m=-2$ C. $m=4$ D. $m=-4$

Đáp án

1A	2A	3A	4B

Bài toán 4: **Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c,(a\neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích lớn nhất.**

Lời giải tổng quát

Ở bài toán 3 ta có $S_0^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.

Do vậy ta chỉ đi tìm $\boxed{Max\left(\frac{-b^5}{32a^3}\right)}$

Bài toán 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh cân bằng α.

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có góc ở đỉnh là α thì có điều kiện là $\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

Hoặc $8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0$.

Lời giải tổng quát

Cách 1:

Ta có $\cos\alpha = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{|\vec{AB}|.|\vec{AC}|}$

$\Leftrightarrow \vec{AB}.\vec{AC} - AB^2.\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}\right).\cos\alpha = 0$

$\Leftrightarrow 8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}}$

Cách 2:

Gọi H là trung điểm của BC, tam giác AHC vuông tại H có:

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{HC}{AH} = \frac{BC}{2AH} \Rightarrow BC^2 - 4.AH^2.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{8a + b^3.\tan^2\frac{\alpha}{2} = 0}$

Bài toán 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải tổng quát

Do tam giác ABC là tam giác cân nên hai góc ở đáy bằng nhau. Một tam giác không thể có hai góc tù, do vậy hai góc ở đáy của tam giác ABC luôn là góc nhọn. Vì thế cho nên để tam giác ABC là tam giác có ba góc nhọn thì góc ở đỉnh phải là góc nhọn. Tức là tìm điều kiện để $BAC = \alpha$ là góc nhọn.

Ở bài toán trên ta vừa tìm được $\cos BAC = \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$.

Để góc BAC nhọn thì $\boxed{\frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} > 0}$

STUDY TIP:
Qua đây ta rút ra kết quả, để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có ba góc nhọn thì $b.(b^3 + 8a) > 0$.

Cách khác để rút gọn công thức:

Do $\cos\alpha = \frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{|\vec{AB}|.|\vec{AC}|}$ nên để α là góc nhọn thì $\frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{|\vec{AB}|.|\vec{AC}|} > 0$.

Mà $|\vec{AB}|.|\vec{AC}| > 0$ do đó $\vec{AB}.\vec{AC} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{b.(b^3 + 8a) > 0}$

Bài toán 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r.

Lời giải tổng quát

Ta có $S_0 = p.r$ (công thức tính diện tích tam giác theo bán kính đường tròn nội tiếp).

$$\Rightarrow r = \frac{2S_0}{AB+AC+BC} = \frac{2.\sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}}{2\sqrt{-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}}+2\sqrt{-\frac{b}{2a}}} \boxed{\Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4|a|.\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}}$$

Bài toán 8: **Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R.**

Lời giải tổng quát

Trước tiên ta có các công thức sau: $S_{ABC} = \frac{AB.BC.CA}{4R}$

Gọi H là trung điểm của BC, khi đó AH là đường cao của tam giác ABC, nên

$$\frac{1}{2}AH.BC = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Leftrightarrow 2.R^2.AH^2 = AB^4$$

$$2.R^2.\frac{b^4}{16a^2} = \left(-\frac{b}{2a}+\frac{b^4}{16a^2}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{b^3-8a}{8.|a|.b}}$$

Bài toán 9: **Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có**

a. Có độ dài $BC = m_0$.

b. Có $AB = AC = n_0$.

Lời giải tổng quát

Ở ngay đầu **Dạng 3** ta đã có các công thức

$$A(0;c); B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\boxed{\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}}$$

Do vậy ở đây với các ý a, b ta chỉ cần sử dụng hai công thức này. Đây là hai công thức quan trọng, việc nhớ công thức để áp dụng là điều cần thiết!

Bài toán 10: **Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác**

a. nhận gốc tọa độ O là trọng tâm.

b. nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

c. nhận gốc tọa độ O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Lời giải tổng quát

a. Nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

a. Ở công thức vừa nhắc lại ở bài toán 9, ta có tọa độ các điểm A, B, C thì chỉ cần áp dụng công thức $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Lúc này ta có $\begin{cases} 0 + \left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}\right) + \sqrt{-\dfrac{b}{2a}} = 3.0 \\ c + \left(-\dfrac{b^2}{4a}\right) + c + \left(-\dfrac{b^2}{4a}\right) + c = 3.0 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{b^2}{2a} + 3c = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^2 - 6ac = 0}$

STUDY TIP:
Với những dạng toán này, ta lưu ý ta luôn có tam giác ABC cân tại A, nên ta chỉ cần tìm một điều kiện là có đáp án của bài toán.

b. Nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

Do tam giác ABC cân tại A, mà A nằm trên trục Oy nên AO luôn vuông góc với BC. Do vậy để O là trực tâm của tam giác ABC thì ta chỉ cần tìm điều kiện để $OB \perp AC$ hoặc $OC \perp AB$.

$OB \perp AC \Leftrightarrow OB.AC = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{2a} + \dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b^2c}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^4 + 8ab - 4b^2c = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^3 + 8a - 4ac = 0}$

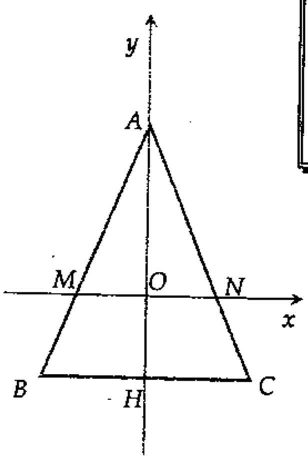
c. Nhận O làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Để tam giác ABC nhận tâm O làm tâm đường tròn ngoại tiếp thì $OA = OB = OC$. Mà ta luôn có $OB = OC$, do vậy ta chỉ cần tìm điềuk iện cho

$OA = OB \Leftrightarrow c^2 = -\dfrac{b}{2a} + \dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{2b^2c}{4a} + c^2 \Leftrightarrow b^4 - 8ab^2c - 8ab = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{b^3 - 8a - 8abc = 0}$

Bài toán 11: **Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác sao cho trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau.**



Lời giải tổng quát

Gọi M, N là giao điểm của AB, AC với trục hoành, kí hiệu như hình vẽ

Ta có $\Delta ANM \sim \Delta ACB \Rightarrow \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{OA}{AH}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ (Do trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau).

$\Rightarrow AH = \sqrt{2}OA \Leftrightarrow \boxed{b^2 = 4\sqrt{2}|ac|}$

3.2 Xét hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.

Có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$.

Bài toán 1: **Viết phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.**

Lời giải tổng quát

Giả sử hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có hai điểm cực trị là $x_1; x_2$. Khi đó thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được

$f(x) = Q(x).f'(x) + Ax + B.$

Khi đó ta có $\begin{cases} f(x_1) = Ax_1 + B \\ f(x_2) = Ax_2 + B \end{cases}$ (Do $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$).

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = Ax + B$.

STUDY TIP:
Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba biểu diễn theo y′; y″; y là

$\Rightarrow g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{18a}$

Đến đây ta quay trở về với bài toán toán 1, vậy nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm số dư đó một cách tổng quát.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y'' = 6ax + 2b$.

Xét phép chia y cho y' thì ta được:

$y = y'.\left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{b}{9a}\right) + g(x)$ (*), ở đây $g(x)$ là phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba.

Tiếp tục ta có $(*) \Leftrightarrow y = y'.\dfrac{3ax+b}{9a} + g(x) \Leftrightarrow y = y'.\dfrac{6ax+2b}{18a} + g(x)$

$\Leftrightarrow y = y'.\dfrac{y''}{18a} + g(x)$ $\boxed{\Rightarrow g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{18a}}$

Một công thức khác về phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba là:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$. Sau khi thực hiện phép chia tổng quát thì ta rút ra được công thức phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba theo *a, b, c, d* là $\boxed{y = \left(\dfrac{2c}{3} - \dfrac{2b^2}{9a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}}$

[illegible]

Sử dụng tính toán với số phức để giải quyết bài toán.

Sau đây tôi xin giới thiệu một cách bấm máy tính để tìm nhanh phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba như sau:
Trước tiên ta xét ví dụ đơn giản:

Ví dụ 1: Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ là:

A. $26x + 9y - 15 = 0$ B. $-25x + 9y - 15 = 0$
C. $26x - 9y + 15 = 0$ D. $25x - 9y + 15 = 0$

Đáp án A.

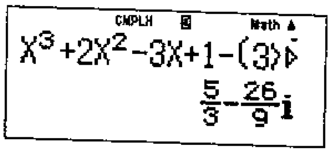
Lời giải

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số xác định bởi:

$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - (3x^2 + 4x - 3).\dfrac{6x+4}{18}$

Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức bằng cách nhập:
$\boxed{\text{MODE}} \rightarrow \boxed{\text{2:CMPLX}}$

Nhập vào máy tính biểu thức $g(x)$ như sau:



$X^3+2X^2-3X+1-\left(3X^2+4X-3\right).\dfrac{6X+4}{18}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, gán X bằng i (ở máy tính i là nút $\boxed{\text{ENG}}$) khi đó máy hiện: $\dfrac{5}{3}-\dfrac{26}{9}i$.

Vậy phương trình đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$y=\dfrac{5}{3}-\dfrac{26}{9}x \Leftrightarrow 26x+9y-15=0.$

Tiếp theo ta có một bài tham số.

> Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3(1-m)x+1+3m$, tìm m sao cho đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.
>
> A. $m\ge 0;\ \Delta: 2mx+y-2m-2=0$ B. $m>0;\ \Delta: 2mx+y-2m-2=0$
>
> C. $m<0;\ \Delta: y=202-200x$ D. $m\ge 0;\ \Delta: y=202-200x$

Đáp án B

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x+3(1-m)$, $y''=6x-6$.

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu thì $\Delta'=3^2-9.(1-m)>0 \Leftrightarrow m>0$.

Với $m>0$ thì ta thực hiện:

Chuyển máy tính sang chế độ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{2:CMPLX}}$

Nhập vào máy tính biểu thức $y-y'\dfrac{y''}{18a}$ ta có

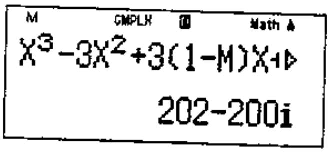
$X^3-3X^2+3(1-M)X+1+3M-\left(3X^2-6X+3(1-M)\right)\dfrac{6X-6}{18}$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$

Máy hiện X? nhập i =

Máy hiện M? nhập 100 =

Khi đó máy hiện kết quả là $202-200i$



Ta thấy $202-200i=2.100+2-2.100.i \Rightarrow y=2m+2-2mx$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $2mx+y-2m-2=0$.

Ta rút ra kết luận về cách làm dạng toán viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm bậc ba này như sau:

Bước 1: Xác định $y';y''$.

Bước 2: Chuyển máy tính sang chế độ tính toán với số phức: $\boxed{\text{MODE}} \to \boxed{\text{2:CMPLX}}$

Nhập biểu thức $y-y'.\dfrac{y''}{18a}$.

Chú ý:

Nếu bài toán không chứa tham số thì ta chỉ sử dụng biến X trong máy, tuy nhiên nếu bài toán có thêm tham số, ta có thể sử dụng các biến bất kì trong máy để biểu thị cho tham số đã cho, ở trong sách này ta quy ước biến M để dễ định hình.

Bước 3: Gán giá trị.

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, gán X với i, gán M với 100

Lúc này máy hiện kết quả, từ đó tách hệ số và i để đưa ra kết quả cuối cùng, giống như trong hai ví dụ trên.

STUDY TIP:
Với những dạng toán này, ta lưu ý rằng trước tiên, ta cần tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị.

STUDY TIP:
Với bước cuối cùng, ta cần có kĩ năng khai triển đa thức sử dụng máy tính cầm tay, do khuôn khổ của sách nên tôi không thể giới thiệu vào sách, do vậy mong quý độc giả đọc thêm về phần này.

Bài toán 2: **Định m để điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,\left(a\neq 0\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=kx+e$.**

Lời giải tổng quát:

Do đồ thị hàm bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng nên lúc này điểm uốn I sẽ thuộc d và đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số vuông góc với d. Tức là m thỏa mãn hệ sau: $\boxed{\begin{cases} y_I=kx_I+e \\ \dfrac{2}{3}.\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right).k=-1 \end{cases}}$

STUDY TIP:
Điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba là điểm có hoành độ thỏa mãn $y''=0$ và nằm trên đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d,$ $\left(a\neq 0\right)$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ (với m là tham số) có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tập tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị $\left(C_m\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=x$ là

A. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ B. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ C. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$ D. $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};0\right\}$

Đáp án B.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$;

$y''=6x-6m$; $y''=0\Leftrightarrow x=m$. Lúc này điểm uốn I là điểm có tọa độ $\left(m;2m^3\right)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có:

$$\begin{cases} 2m^3=m \\ \dfrac{2}{3}.\dfrac{-\left(3m\right)^2}{3}.1=-1 \end{cases}\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ví dụ 2: Xác định tất cả các giá trị của m để hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ đối xứng nhau qua đường thẳng $x-2y-5=0$.

A. $m=0$ B. $m=-2$ C. $m\in\varnothing$ D. $m=2$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6x$; $y''=6x-6$; $y''=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy điểm uốn $I\left(1;m-2\right)$.

Từ bài toán tổng quát ở trên ta có:

$$\begin{cases} 1-2.\left(m-2\right)-5=0 \\ \dfrac{2}{3}.\left(m-\dfrac{3^2}{3}\right).\dfrac{1}{2}=-1 \end{cases}\Leftrightarrow m=0.$$

3.3 Xét hàm phân thức.

Trước tiên ta xét bài toán liên quan đến cực trị hàm phân thức nói chung. Ta có một kết quả khá quan trọng như sau:

Xét hàm số dạng $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ xác định trên D

thì ta có $f'(x)=\dfrac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}$.

Điểm cực trị của hàm số này là nghiệm của phương trình

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v^2(x)}=0$$

$$\Leftrightarrow u'(x).v(x)-u(x).v'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(x)}{v'(x)}}$$

STUDY TIP:
Lưu ý công thức $\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ để giải quyết các bài toán một cách nhanh gọn hơn.

Nhận xét: *Biểu thức trên được thỏa mãn bởi các giá trị là cực trị của hàm số đã cho. Do đó, thay vì tính trực tiếp tung độ của các điểm cực trị, ta chỉ cần thay vào biểu thức đơn giản hơn sau khi đã lấy đạo hàm cả tử lẫn mẫu. Vận dụng tính chất này, ta giải quyết được nhiều bài toán liên quan đến điểm cực trị của hàm phân thức.*

Ví dụ: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}, a\neq 0, a'\neq 0$.

Theo công thức vừa nêu ở trên thì ta lần lượt tìm biểu thức đạo hàm của tử số và mẫu số.

Suy ra $\boxed{y=\dfrac{2ax+b}{a'}}$ là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}, a\neq 0, a'\neq 0$.

Đọc thêm:

Phương pháp sử dụng máy tính cầm tay để giải nhanh các bài tập định tham số m để hàm $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0

Cách 1: Sử dụng TABLE

> Cách làm: Ta sử dụng tính năng bảng giá trị TABLE của máy tính để nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $(x_0-0,5;x_0+0,5)$ với 4 giá trị tham số mà đề cho.

Ta lần lượt gán 4 giá trị ở phần đáp án cho A, B, C, D bằng lệnh gán giá trị SHIFT STO.

Do chức năng TABLE của máy tính cầm tay Fx 570 VN Plus có thể chạy được 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ nên một lần thử ta thử được 2 phương án. Do vậy, cả bài toán ta chỉ cần thử hai lần.

> Ví dụ 1: Với giá trị nào của tham số thực m thì hàm số
> $$y=\frac{x^3}{3}-2mx^2+3m^2x-3m$$
> đạt cực tiểu tại $x=-1$.
>
> A. $m=-1$ B. $m=1$ C. $m=\frac{1}{3}$ D. $m=-\frac{1}{3}$

Đáp án A.

Lời giải

Lần lượt gán 4 giá trị của m ở 4 phương án A, B, C, D cho các biến A, B, C, D trên máy bằng lệnh SHIFT STO như sau:

Ấn -1 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ (STO) $\boxed{(-)}$ A.

Tương tự với các phương án còn lại.

Ấn MODE 7: TABLE

Nhập hàm $f(x)=\frac{X^3}{3}-2AX^2+3A^2X-3A$. (là hàm số đã cho khi $m=-1$ ở phương án A). Sau đó ấn =, máy hiện $g(x)=$ ta nhập

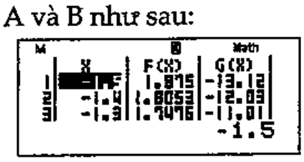
$g(x)=\frac{X^3}{3}-2BX^2+3B^2X-3B$ ấn =

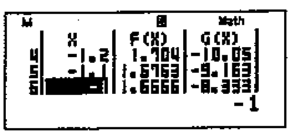
Start? Chọn $-1-0,5$

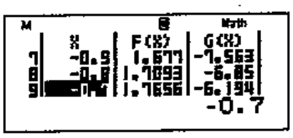
End? Chọn $-1+0,5$

STEP? Chọn 0.1

Máy sẽ hiện bảng giá trị của hàm số đã cho trong hai trường hợp ở phương án A và B như sau:







> STUDY TIP:
> Ở bài dạng này, ta chỉ cần để ý xem giá trị của hàm số thay đổi như thế nào khi qua $x=x_0$

Ta thấy ở trường hợp $F(x)$ tức là trường hợp phương án A. Ta thấy từ $x=-1,5$ chạy đến $x=-1$ thì giá trị của hàm số giảm, từ $x=-1$ đến $x=-0,7$ thì giá trị của hàm số tăng, tức là hàm số nghịch biến trên $(-1;5;-1)$ và đồng biến trên $(-1;-0,7)$. Vậy $x=-1$ là điểm cực tiểu của hàm số, vậy A thỏa mãn. Ta chọn A mà không cần xét B, C, D.

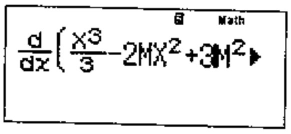
Ví dụ áp dụng:

Với giá trị nào của m thì hàm số $y=x^3-3mx+2m$ đạt cực đại tại $x=2$?

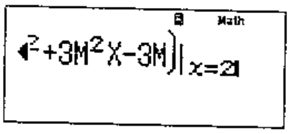
A. $m=4$ B. $m=-4$ C. $m=0$ D. Không có giá trị của m.

Cách 2: Sử dụng chức năng $\frac{d}{dx}\square$.

Cách làm: Thử các giá trị của tham số m ở các phương án, xem phương án nào làm đạo hàm bằng 0, nếu có nhiều phương án cùng làm đạo hàm bằng 0, thì ta xét đến y''.



Cũng xét ví dụ 1 ở trên thì ta có:



Sử dụng nút SHIFT, nhập vào máy như sau:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{X^3}{3}-2MX^2+3M^2X-3M\right)_{X=-1}$$

Tiếp theo ấn CALC nhập X= -1 ; M=1, máy hiệ bằng 0, thỏa mãn. Chọn A.

Chú ý: Ở cách làm này, ta cần lưu ý các trường hợp $f'(x_0)=0$ nhưng x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số.

I. Các dạng tính toán thông thường liên quan đến cực trị

Câu 1: Số điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^4+100$ là:

A. 0 B. 1 C. 3 D. 2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú- Hải Phòng)

Câu 2: Hàm số $y=x^4+2x^2+2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+4x^2-8x+5$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2. Hỏi tổng x_1+x_2 là bao nhiêu?

A. $x_1+x_2=8$ B. $x_1+x_2=-8$

C. $x_1+x_2=5$ D. $x_1+x_2=-5$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 4: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x-3)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có một điểm cực đại

B. Hàm số có hai điểm cực trị

C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị

D. Hàm số không có điểm cực trị

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN)

Câu 5: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có điểm cực đại là:

A. $I(2;-3)$ B. $I(0;1)$

C. $I(0;2)$ D. Đáp án khác

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 6: Hàm số $y=x^4+2x^2+2017$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 7: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+3x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

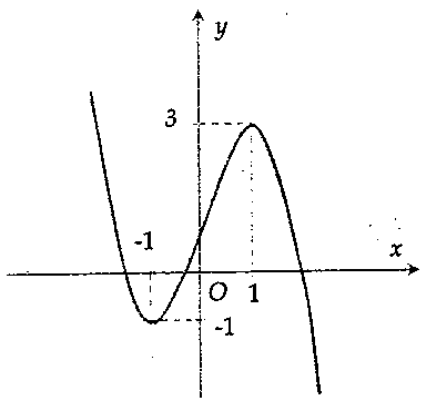
B. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=1$

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, các khẳng định sau khẳng định nào là đúng?



A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3

B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm cực đại $B(1;3)$

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $A(-1;-1)$ và cực đại tại $B(1;3)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa)

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	‖	+		-	‖	+	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại $x=0$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$ và $y=3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần I)

Câu 10: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $y=2x-\frac{1}{x+1}$ có hai điểm cực trị.

B. Hàm số $y=3x^3+2016x+2017$ có hai điểm cực trị.

C. Hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có một điểm cực trị.

D. Hàm số $y=-x^4-3x^2+2$ có một điểm cực trị.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên)

Câu 11: Số điểm cực trị của hàm số $y=|x|^3-4x^2+3$ bằng:

A. 2. B. 0. C. 3. D. 4.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên)

Câu 12: Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại:

A. $x=-1$. B. $x=0$.

C. $x=-2$. D. $x=1$.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên)

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số có đúng hai cực trị

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 hoặc 1

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 14: Hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt cực trị đại tại các điểm nào sau đây?

A. $x=\pm2$ B. $x=\pm1$

C. $x=0;x=2$ D. $x=0;x=1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 15: Hệ thức liên hệ giữa giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-2x$ là:

A. $y_{CT}+y_{CĐ}=0$ B. $2y_{CT}=3y_{CĐ}$

C. $y_{CT}=2y_{CĐ}$ D. $y_{CT}=y_{CĐ}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $M(0;\ 2)$ được gọi là điểm cực đại của hàm số

B. $f(-1)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;\ 0)$ và $(1;+\infty)$

D. $x_0=1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 17: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x-2\,(C)$. Đường thẳng đi qua điểm $A(-1;\ 1)$ và vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là:

A. $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ B. $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

C. $y=x+3$ D. $x-2y-3=0$

Câu 18: Tính khoảng cách giữa các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^4-\sqrt{3}x^2+1$.

A. $2\sqrt[4]{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt[4]{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 19: Tìm tất cả các điểm cực đại của hàm số $y=-x^4+2x^2+1$.

A. $x=\pm1$ B. $x=-1$ C. $x=1$ D. $x=0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 20: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

B. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

C. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.

D. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần 1)

Câu 21: Cho hàm số $y=x^4-\dfrac{2}{3}x^3-x^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu là 0.

B. Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $-\dfrac{2}{3}$ và $-\dfrac{5}{48}$.

C. Hàm số chỉ có một giá trị cực tiểu.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\dfrac{2}{3}$ và giá trị cực đại là $-\dfrac{5}{48}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần 1)

Câu 22: Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây?

A. $2x+y+4=0$. B. $2x+y-4=0$.

C. $2x-y-4=0$. D. $2x-y+4=0$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 23: Cho hàm số f có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x+2)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số f là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử "Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ lần 7 & THPT chuyên KHTN lần 3")

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$				-4		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **SAI**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=-2$.

C. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 26: Kết luận nào sau đây về cực trị của hàm số $y=x5^{-x}$ là đúng?

A. Hàm số có điểm cực đại là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có điểm cực tiểu là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

D. Hàm số có điểm cực đại là $x=\ln 5$.

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc)

II. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

Câu 27: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=x^3-m^2x^2-(4m-3)x-1$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. $m=1$ và $m=-3$ B. $m=1$

C. $m=-3$ D. $m=-1$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3m+1$ có 2 điểm cực trị.

A. $m>0$ B. $m<0$

C. $m\ge 0$ D. $m\ne 0$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định)

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $x_1{}^2+x_2{}^2=3$.

A. -3 B. 3 C. $-\dfrac{3}{2}$ D. $\dfrac{3}{2}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định)

Câu 30: Tìm m để hàm số: $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2+m-1)x+1$ đạt cực trị tại 2 điểm x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1+x_2|=4$.

A. $m=\pm 2$ B. $m=-2$

C. Không tồn tại m D. $m=2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3+(m-1)x^2-3mx+1$ đạt cực trị tại điểm $x_0=1$.

A. $m=-1$ B. $m=1$

C. $m=2$ D. $m=-2$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^4+2mx^2+m^2+m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m\ge 0$ B. $m>0$ C. $m\le 0$ D. $m<0$

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+ax+1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn: $(x_1^2+x_2+2a)(x_2^2+x_1+2a)=9$.

A. $a=2$ B. $a=-4$ C. $a=-3$ D. $a=-1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=4x^3+mx^2-12x$ đạt cực tiểu tại điểm $x=-2$.

A. $m=-9$ B. $m=2$

C. Không tồn tại m D. $m=9$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=mx^4+(m^2-2)x^2+2$ có hai cực tiểu và một cực đại.

A. $m<-\sqrt{2}$ hoặc $0<m<\sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2}<m<0$.

C. $m>\sqrt{2}$.

D. $0<m<\sqrt{2}$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m$ có ba điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m=\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$ B. $m=3$

C. $m=-1$ D. $m=1$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Nam Định)

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m=\sqrt[3]{3}$ B. $m=1-\sqrt[3]{3}$

C. $m=1+\sqrt[3]{3}$ D. $m=-\sqrt[3]{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 38: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4+2(m-1)x^2+2m-5$ có ba điểm cực trị lập thành tam giác đều?

A. $m=1$. B. $m=1-\sqrt[3]{3}$.

C. $m=1+\sqrt[3]{3}$. D. $m=1-\sqrt{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Câu 39: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-2$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị và các điểm cực trị của đồ thị hàm số là ba đỉnh của một tam giác vuông cân?

A. $m=1$. B. $m=-1$. C. $m=2$. D. $m=-2$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 40: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $m=\sqrt[5]{4}$ B. $m=16$

C. $m=\sqrt[5]{16}$ D. $m=-\sqrt[3]{16}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 41: Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi m có giá trị là:

A. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ B. $m=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

C. $m=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}$ D. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 42: Cho hàm số

$$y=-2x^3+(2m-1)x^2-(m^2-1)x+2.$$

Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

A. 4. B. 5. C. 3. D. 6

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng)

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3+x^2-(2m+1)x+4$ có đúng hai cực trị.

A. $m<\frac{4}{3}$. B. $m>-\frac{2}{3}$. C. $m<-\frac{2}{3}$. D. $m>-\frac{4}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng)

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+5)x^2+mx$ có cực đại, cực tiểu và $|x_{CĐ}-x_{CT}|=5$.

A. $m=0$ B. $m=-6$

C. $m\in\{6;0\}$ D. $m\in\{0;-6\}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 45: Biết đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có 2 điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$. Tính $a+b+c+d$.

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=x^2+\ln(x-m)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị.

A. $|m|>\sqrt{2}$. B. $m>\frac{9}{4}$.

C. $m<-\sqrt{2}$. D. $m>\sqrt{2}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 47: Cho đồ thị hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(-1;2)$. Tính giá trị của $a+b+c$.

A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=(1-m)x^3-3x^2+3x-5$ có cực trị?

A. $m<1$ B. $m>-1$

C. $0<m\neq 1$ D. $m>0$

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc)

Câu 49: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(2m-1)x-1$. Tìm mệnh đề sai.

A. $\forall m<1$ thì hàm số có hai điểm cực trị

B. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu

C. $\forall m\neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu

D. $\forall m>1$ thì hàm số có cực trị

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 50: Tìm m để hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+1$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

A. $-3<m<0$ B. $0<m<3$

C. $m<-3$ D. $3<m$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Hướng dẫn giải chi tiết

I. Các dạng tính toán thông thường liên quan đến cực trị

Câu 1: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Tuy nhiên do hệ số của x^4 trong hàm số $y = x^4 + 100$ là $1 > 0$, do đó hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu. Suy ra hàm số không có điểm cực đại.

Phân tích sai lầm: Nhiều độc giả chọn luôn B, có một điểm, do không xét kĩ xem $x = 0$ là điểm cực đại hay điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 2: Đáp án A.

Cách 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Cách 2:

Xem lại **STUDY TIP** đối với hàm bậc bốn trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \neq 0\right)$.

Nếu $ab > 0$ thì hàm số có 1 điểm cực trị là $x = 0$.

Nhận thấy $1 > 0$ và $2 > 0$.

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 3: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 + 8x - 8$

Vì hàm số có hai điểm cực trị là $x_1, x_2 \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 + 8x - 8 = 0$.

Theo định lí Vi – ét ta có: $x_1 + x_2 = -8$

Câu 4: Đáp án B.

Ta thấy $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Đến đây có nhiều độc giả kết luận luôn hàm số có hai điểm cực trị, tuy nhiên đó là kết luận sai lầm, bởi khi qua $x = 1$ thì $f'(x)$ không đổi dấu, bởi $\left(x-1\right)^2 \geq 0, \forall x$.

Do vậy hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị là $x = 3$.

Câu 5: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x\left(x-2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I\left(0;1\right)$.

Tư duy nhanh: Nhận thấy hàm số đã cho có hệ số $a = 3 > 0$ và có hai điểm cực trị nên đồ thị hàm số có dạng **N** (mẹo). Lúc này ta suy ra được luôn $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số, suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $I\left(0;1\right)$.

Câu 6: Đáp án A.

Nhận thấy đây là hàm bậc bốn trùng phương có hệ số *a, b* cùng dấu nên có duy nhất một điểm cực trị.

Câu 7: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3\left(x-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Tuy rằng $y' = 0$ tại $x = 1$ nhưng $x = 1$ không là cực trị của hàm số do $y' \geq 0\ \forall x \in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Tư duy nhanh: Nhận thấy $y' = 3\left(x-1\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8: Đáp án B.

Chú ý: Phân biệt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và cực đại (cực tiểu) ở phần lý thuyết về GTLN –GTNN được tôi trình bày trong chuyên đề sau.

Phương án A. Sai: -1 là giá trị cực tiểu.

3 là giá trị cực đại.

Phương án B. Đúng.

Phương án C. Sai: Giá trị cực đại là 3.

Phương án D. Sai: Nếu nói hàm số đạt cực tiểu thì phải nói tại $x = -1$ còn $A\left(-1;-1\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (tương tự với $B\left(1;3\right)$).

Câu 9: Đáp án B.

Ta có: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

Phương án A. Đúng. Do qua $x=0$ thì y' đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số vẫn đạt cực trị tại $x=0$.

Phương án B. Nhận thấy hàm số không đạt cực tiểu tại $x=1$ do tại $x=1$ thì hàm số không xác định.

Phương án C. Đúng: Do

$\lim\limits_{x\to -1} y = +\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to 1} y = -\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

Phương án D. Đúng: Do

$\lim\limits_{x\to +\infty} y = -3 \Rightarrow y=-3$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y = 3 \Rightarrow y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Câu 10: Đáp án D.

Phương án A. Sai: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = 2 + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ nên hàm số không có cực trị.

Phương án B. Sai: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 9x^2 + 2016 > 0$ nên hàm số không có cực trị.

Phương án C. Sai: Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất luôn không có cực trị.

Phương án D. Đúng: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = -4x^3 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -2x(2x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

(Hoặc dùng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta thấy $-1<0;\ 3<0 \Rightarrow (-1).(-3) > 0 \Rightarrow$ Hàm số có một điểm cực trị là $x=0$)

Câu 11: Đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đặt $|x| = t\ \ (t \ge 0)$

Khi đó $y = t^3 - 4t^2 + 3$

$y' = 3t^2 - 8t$

$y' = 0 \Leftrightarrow t(3t-8) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0\ (t/m) \Rightarrow x = 0 \\ t = \dfrac{8}{3}\ (t/m) \Rightarrow x = \pm\dfrac{8}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{8}{3}$		0		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Do vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

<u>Tư duy nhanh:</u> Không dùng bảng biến thiên, ta có $a = 1 > 0$ nên hàm số có duy nhất một điểm cực tiểu $x=0$. (Do đồ thị hàm số có dạng parabol có đỉnh hướng xuống dưới).

Câu 13: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương án A. Sai: Do hàm số có 3 cực trị.

Phương án B. Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$ còn hàm số có giá trị cực tiểu tương ứng là -3.

Phương án C. Sai: Chú ý phân biệt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và cực đại (cực tiểu).

Phương án D. Đúng.

Câu 14: Đáp án C.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực trị tại $x=0; x=2$.

<u>Tư duy nhanh:</u> Kết luận luôn hàm số đạt cực trị tại $x=0; x=2$ do hàm bậc ba hoặc là không có cực trị, hoặc là có hai cực trị. (**STUDY TIP** đã nói).

Câu 15: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 2$

$\Rightarrow$ $x_{CĐ}$ và x_{CT} là nghiệm của phương trình $3x^2 - 2 = 0$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_{CĐ} + x_{CT} = 0$

$\Rightarrow y_{CĐ} + y_{CT} = x_{CĐ}^3 - 2x_{CĐ} + x_{CT}^3 - 2x_{CT}$

$=\left(x_{CĐ}+x_{CT}\right)\left(x_{CĐ}^2-x_{CĐ}x_{CT}+x_{CT}^2\right)-2\left(x_{CĐ}+x_{CT}\right)=0$ (do $x_{CĐ}+x_{CT}=0$)

Câu 16: Đáp án A.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

+ y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$, do vậy $M(0;2)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số chứ không phải hàm số.

+ y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=-1$, do vậy $f(-1)$ là giá trị cực tiểu của hàm số.

Vậy B đúng.

+ y' mang dấu dương với $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$. Vậy C đúng.

+ y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=1$, do vậy $x_0=1$ được gọi là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 17: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-12x+9$

Sử dụng máy tính cầm tay bằng cách nhập biểu thức: $y-\frac{y'.y''}{18a}$ như sau:

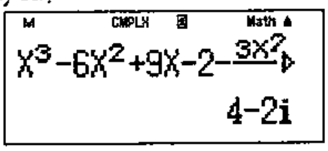
Chọn $\boxed{\text{MODE}}$ 2

Nhập vào màn hình:

$$X^3-6X^2+9X-2-\frac{\left(3X^2-12X+9\right)\left(6X-12\right)}{18}$$

Ấn $\boxed{\text{CALC}}$, nhập x= i (i là nút $\boxed{\text{ENG}}$ trên máy tính)

Lúc này máy hiện:



Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x+4\Leftrightarrow 2x+y-4=0$.

d đi qua $A(-1;1)$ và có vtcp $(2;1)$ nên có phương trình: $x-2y+3=0$ hay $d:y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$.

Câu 18: Đáp án D.

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương.

Nhận thấy $2>0;\ -\sqrt{3}>0$.

Vậy hàm số có hai điểm cực tiểu là:

$$x_1=\sqrt{\frac{-\left(-\sqrt{3}\right)}{2.2}}=\sqrt[4]{\frac{3}{16}} \text{ và } x_2=-\sqrt{\frac{-\left(-\sqrt{3}\right)}{2.2}}=-\sqrt[4]{\frac{3}{16}}$$

Lúc này đồ thị có dạng chữ W, do vậy khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu chính là khoảng cách hoành độ của chúng:

$$d=2\left|x_1-x_2\right|=2.2.\sqrt[4]{\frac{3}{16}}=\sqrt[4]{3}$$

Câu 19: Đáp án A.

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương.

Nhận thấy $-1<0;\ 2>0$.

Vậy hàm số có 2 điểm cực đại là $x_1=\sqrt{\frac{-2}{2.(-1)}}=1$ và $x_2=-\sqrt{\frac{-2}{2.(-1)}}=-1$.

Câu 20: Đáp án A.

Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=1$.

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x=1$, y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=2$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 21: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=4x^3-2x^2-2x$

$y'=0\Leftrightarrow 2x\left(2x^2-x-1\right)=0$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1)(2x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{5}{48}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow$ Hàm số có 2 giá trị cực tiểu là $-\frac{5}{48}$ và $-\frac{2}{3}$.

Vậy hàm số có giá trị cực đại là 0.

Câu 22: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=(x+2)^2+(x-1).2.(x+2)$

$y'=(x+2).3x$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực trị $A(0;-4)$ và $B(-2;0)$

$\Rightarrow$ Trung điểm của AB là $M(-1;-2)$.

Vậy M nằm trên đường thẳng $2x+y+4=0$.

Câu 23: Đáp án C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Ta thấy $x=1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $f'(x)=0$ nên $x=1$ không là điểm cực trị của hàm số (do không làm y' đổi dấu khi đi qua).

Vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x=0;x=-2$

Câu 24: Đáp án C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên:

Phương án A. Đúng: Do y' mang dấu dương trên $(0;+\infty)$.

Phương án B. Đúng: Do y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=0$.

Phương án C. Sai: Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=-2$, do vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-2$.

Phương án D. Đúng: Do y' mang dấu âm trên $(-2;0)$.

Câu 25: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		+		+	0	+	
$(x+2)$		−	0	+		+	
$f'(x)$		−		+		+	

Phương án A. Đúng: Do $f'(x)$ mang dấu dương trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Phương án B. Sai: Do $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x=-2$ nên $x=-2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Phương án C. Đúng: Do $f'(x)$ không đổi dấu khi đi qua $x=-1$ $\Rightarrow x=-1$ không là cực trị của hàm số.

Phương án D. Sai: Do $f'(x)$ mang dấu dương với $x\in(-2;1)$.

Câu 26: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=5^{-x}+x.5^{-x}.(-1).\ln 5$

$y'=5^{-x}(1-x.\ln 5)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^{-x}=0\ (VN)\\1-x.\ln 5=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 5}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 5}$		$+\infty$
y'		+	0	−	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e.\ln 5}$	$\searrow$	0

Phương án A. Đúng: Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

Phương án B. Sai: Do y' có đổi dấu $\Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

Phương án C. Sai: Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=\dfrac{1}{\ln 5}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\ln 5}$ là điểm cực đại của hàm số (không phải là điểm cực tiểu).

Phương án D. Sai: Hàm số có một điểm cực trị duy nhất là $x=\dfrac{1}{\ln 5}$.

II. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước.

Câu 27: Đáp án C.

Cách 1:Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 2m^2x - (4m-3)$

Để hàm số đạt cực đại tại $x=1$ thì điều kiện cần là $x=1$ là nghiệm của phương trình $y'=0$.

Ta có: $3.1^2 - 2m^2.1 - (4m-3) = 0$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2(m-1)(m+3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$ (1)

Lại có $y'' = 6x - 2m^2$

Điều kiện đủ để $x=1$ là điểm cực đại của hàm số là:

$y''(1) < 0 \Leftrightarrow 6.1 - 2m^2 < 0 \Leftrightarrow m^2 > 3$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m = -3$.

Cách 2: Áp dụng phương pháp sử dụng máy tính cầm tay mà tôi đã nêu ra ở phần lý thuyết.

Câu 28: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6mx$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt. Ta có:

$3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

$\Rightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Câu 29: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + m$

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1, x_2 \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình: $3x^2 - 6x + m = 0$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1.x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$

Lại có: $x_1^2 + x_2^2 = 3$

$(x_1+x_2)^2 - (x_1^2+x_2^2) = 2x_1x_2 \Leftrightarrow 2^2 - 3 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow x_1x_2 = \dfrac{1}{2}$

Mà $x_1x_2 = \dfrac{m}{3} \Rightarrow \dfrac{m}{3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$

Câu 30: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 2mx + (m^2 + m - 1)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - (m^2 + m - 1) > 0$

$\Leftrightarrow -m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ (1)

Hàm số đạt cực trị tại 2 điểm $x_1, x_2 \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2mx + (m^2 + m - 1) = 0$

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$

Lại có: $|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |2m| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m = -2$

Câu 31: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 2(m-1)x - 3m$

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = 1$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Ta có: $3.1^2 + 2(m-1).1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 32: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 4mx$

Để hàm số có đúng một điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

$4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+m=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x^2 + m = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow m > 0$.

Trường hợp 2: $x^2 + m = 0$ có 1 nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 0$.

Vậy $m \geq 0$.

Câu 33: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - x + a$

Hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + a = 0$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = a \end{cases}$

Theo bài ra ta có: $(x_1^2 + x_2 + 2a)(x_2^2 + x_1 + 2a) = 9$

$\Leftrightarrow (x_1x_2)^2 + x_1^3 + 2ax_1^2 + x_2^3 + x_1x_2 + 2ax_2 + 2ax_2^2 + 2ax_1 + 4a^2 = 9$

$\Leftrightarrow (x_1x_2)^2 + x_1x_2 + (x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2 - 3x_1x_2\right]$

$+ 2a(x_1+x_2) + 2a\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right] = 9$

$\Leftrightarrow a^2 + a + (1-3a) + 2a + 2a(1-2a) = 9$

$\Leftrightarrow a^2 + 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-4 \end{array}\right.$

Lại có: $(x_1+x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \Leftrightarrow 1 \geq 4a \Leftrightarrow a \leq \dfrac{1}{4}$

Do vậy $a = -4$

Câu 34: Đáp án D.

Cách 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 12x^2 + 2mx - 12$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$ thì:

+ Điều kiện cần là $x = -2$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$.

$$12.(-2)^2 + 2m(-2) - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 9 \quad (1)$$

+ Điều kiện đủ là $y''(-2) > 0$

$$\Leftrightarrow 12.2.(-2) + 2m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{24} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m = 9$.

Cách 2: Sử dụng máy tính như phần lý thuyết tôi hướng dẫn.

Câu 35: Đáp án D.

Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại, áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương

$$\Rightarrow \begin{cases} m.(m^2 - 2) < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{2}$$

Câu 36: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 4mx$

Áp dụng **STUDY TIP** với hàm bậc bốn trùng phương ta có: $32.1^3.1^2 + (-2m)^5 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$

Câu 37: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 4mx$

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta có: $(-2m)^3 + 24.1 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$

Câu 38: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 + 4(m-1)x$

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta có: $\left[2(m-1)\right]^3 + 24.1 = 0$

$$\Leftrightarrow (m-1)^3 = -3 \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{-3} + 1$$

Câu 39: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 4mx$

Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương ta có: $8.1 + (-2m)^3 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 40: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Để hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2, ta áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương là: $32.1^3.2^2 + (-2m)^5 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{4}$

Câu 41: Đáp án A.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sử dụng máy tính theo cách tôi giới thiệu ở lý thuyết ta được:

```
M        CMPLX  ⊠        Math ▲
X³-3MX+2-(3X²-3▷
                  2-200i
```

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng:

$y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$.

Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2}.IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}.IA.IB$

Dấu bằng xảy ra khi $IA \perp IB$.

Lúc này $d(I; AB) = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(4m^2 - 4m + 1) = 4m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Câu 42: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $b^2 - 3ac > 0$

$$\Leftrightarrow (2m-1)^2 - 6.(m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2 - 3\sqrt{2}}{2} < m < \frac{-2 + 3\sqrt{2}}{2}$$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}$

Vậy có 5 giá trị của m.

Câu 43: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Để hàm số có đúng hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 4 + 6m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$$

Câu 44: Đáp án D.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - (m+5)x + m$

$b^2 - 3ac > 0$

$$\Leftrightarrow (m+5)^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 25 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2 + 16 > 0 \text{ luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}$$

Do đó $x_{CĐ}$ và x_{CT} là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_{CĐ}+x_{CT}=m+5 \\ x_{CĐ}.x_{CT}=m \end{cases}$

Ta có: $|x_{CĐ}-x_{CT}|=5$

Bình phương 2 vế ta có:

$x_{CĐ}^2-2x_{CĐ}x_{CT}+x_{CT}^2=25$

$\Leftrightarrow (x_{CĐ}+x_{CT})^2-4x_{CĐ}x_{CT}=25$

$\Leftrightarrow (m+5)^2-4m=25$

$\Leftrightarrow m^2+6m=0 \Leftrightarrow m(m+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-6 \end{array}\right.$

Câu 45: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx+c$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(-1;18)$ và $(3;-16)$

$\Rightarrow -1;\ 3$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

$\begin{cases} (-1)^2.3a+2b(-1)+c=0 \\ 3a.3^2+2b.3+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \end{cases}$

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(-1;18)$ và $(3;-16)$ nên ta có:

$\begin{cases} -a+b-c+d=18 \\ 27a+9b+3c+d=-16 \end{cases} \Leftrightarrow 28a+8b+4c=-34\ (2)$

Từ (1) và $(2) \Rightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=0 \\ 27a+6b+c=0 \\ 28a+8b+4c=-34 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{17}{16} \\ b=-\dfrac{51}{16} \\ c=-\dfrac{153}{16} \end{cases} \Rightarrow d=\dfrac{203}{16} \Rightarrow a+b+c+d=1.$

Câu 46: Đáp án A.

Điều kiện: $x>m$

$y'=2x+\dfrac{1}{x-m}$

Để hàm số có đúng hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x+\dfrac{1}{x-m}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x(x-m)+1}{x-m}=0 \Leftrightarrow 2x^2-2mx+1=0$

$\Delta'=m^2-2.1=m^2-2$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2-2>0$

$m^2>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\sqrt{2} \\ m<-\sqrt{2} \end{array}\right.$ hay $|m|>\sqrt{2}$

Câu 47: Đáp án D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3ax^2+2bx$

Hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(-1;2)$

$\Rightarrow \begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(-1)=0 \end{cases}$ và $\begin{cases} y(0)=1 \\ y(-1)=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ 3a-2b=0 \\ c=1 \\ -a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 3a-2b=0 \\ a-b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}$

$\Rightarrow a+b+c=2+3+1=6.$

Câu 48: Đáp án D.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$y'=3(1-m)x^2-6x+3$

+ Xét $m\neq 1$: Hàm số có cực trị.

$\Leftrightarrow b^2-3ac>0$

$\Leftrightarrow (-1)^2-(1-m).1>0 \Leftrightarrow m>0$

+ Xét $m=1 \Rightarrow y=-3x^2+3x-5 \Rightarrow$ Hàm số có cực trị.

Vậy $m>0$.

Câu 49: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có $b^2-3ac=m^2-(2m-1)=(m-1)^2$

+ Xét $m=1 \Rightarrow y'=0$ có nghiệm kép

$\Rightarrow$ Hàm số có một cực trị.

+ Xét $m\neq 1 \Rightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.

Vậy mệnh đề sai là B.

Câu 50: Đáp án C.

+ Xét $m=0: y=-9x^2+1 \Rightarrow$ loại vì đồ thị hàm bậc 2 không có 3 cực trị.

+ Xét $m\neq 0$: Áp dụng **STUDY TIP** cho hàm bậc bốn trùng phương có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m(m^2-9)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2>9 \end{cases} \Leftrightarrow m<-3.$

C. Lý thuyết về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

1. Định nghĩa

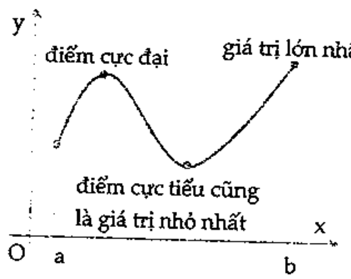
Ở phần A, chúng ta đã được giới thiệu về giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số. Vậy sự khác nhau giữa giá trị cực đại và giá trị lớn nhất (hay giá trị cực tiểu và giá trị nhỏ nhất) là gì? Ta sẽ trả lời ngay ở dưới đây.

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D chứa c.

1. $f(c)$ được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số f trên tập D nếu $f(x)\le f(c)$ $\forall x\in D$.

2. $f(c)$ được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên tập D nếu $f(x)\ge f(c)$ $\forall x\in D$

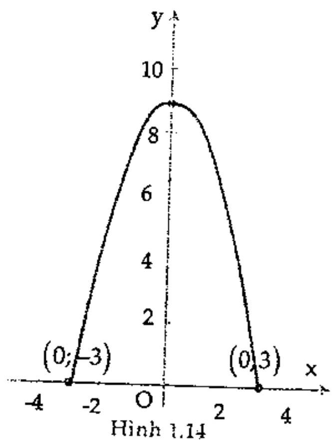
Đến đây, ta có thể kết luận: Giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số được xét trên vùng lân cận với điểm cực trị, vì vậy cho nên thường được gọi là " cực trị địa phương", còn giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được xét trên toàn miền. Ví dụ cụ thể khi thể hiện giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) và điểm cực đại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số được thể hiện ở hình 1.13.



Hình 1.13

Ta thấy giá trị cực đại và giá trị lớn nhất của hàm số khác nhau. Điểm cực đại nằm giữa khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến, còn giá trị lớn nhất là tung độ của điểm "cao nhất" của đồ thị hàm số trên $[a;b]$. Chú ý rằng, ở hình 1.13, giá trị lớn nhất của hàm số có thể nằm ở điểm đầu mút của $[a;b]$, và giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất có thể trùng với giá trị cực trị của hàm số. Ta thấy đây là đồ thị của một hàm liên tục có cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nên ta có định lý 1

Định lý 1: Mọi hàm số liên tục đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.



Hình 1.14

Chú ý: Với hàm liên tục luôn có một giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất đó có thể đạt được tại không chỉ một điểm $x=a$ mà có thể nhiều hơn. Ví dụ như hình 1.14 với đồ thị hàm số $f(x)=9-x^2$. Trên $[-3;3]$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 0 khi $x=3$ hoặc $x=-3$.

2. Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số liên tục trên một đoạn.

Để việc tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[a;b]$ nhanh hơn, ta áp dụng nhận xét sau:

> Nếu đạo hàm $f'(x)$ giữ nguyên dấu trên đoạn $[a;b]$ (hay nói cách khác là hàm số đơn điệu trên đoạn $[a;b]$), khi đó $f(x)$ đạt GTLN, GTNN tại các đầu mút của đoạn.

Dưới đây là một số ví dụ tiêu biểu, từ các ví dụ này, ta sẽ đưa ra kết luận về các hàm số tiêu biểu có thể kết luận là luôn đơn điệu trên đoạn $[a;b]$ cho trước.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\dfrac{5x+6}{2x+3}$. Biết M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;1]$, m là GTNN của hàm số trên $[0;1]$, khi đó giá trị của biểu thức $M+m$ là

A. $\dfrac{21}{5}$ B. 2 C. $\dfrac{11}{5}$ D. $\dfrac{1}{5}$

Đáp án A

Lời giải

Ta thấy hàm số $y=\dfrac{5x+6}{2x+3}$ đơn điệu trên $[0;1]$ nên hàm số đạt GTLN, GTNN trên $[0;1]$ tại điểm đầu mút, nên ta không cần tính y' mà có luôn

$$M+m=f(0)+f(1)=\frac{6}{3}+\frac{5.1+6}{2.1+3}=\frac{21}{5}.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=5x^5+2x^3+6x+1$. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên $[-1;2]$?

Lời giải

Ta có $y'=15x^4+6x^2+6>0$, vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó GTLN, GTNN của hàm số lần lượt là $f(-1)=-12=\underset{[-1;2]}{Min}f(x)$

$\underset{[-1;2]}{Max}f(x)=f(2)=189$.

Ví dụ 7: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\sqrt[3]{2x+1}$ trên $[1;5]$?

Lời giải

Ta có $y'=\left((2x+1)^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}.2.(2x+1)^{\frac{-2}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}>0$ với mọi $x\neq\dfrac{-1}{2}$.

Vậy trên $[1;5]$ thì hàm số luôn đồng biến. Từ đây ta có

$\underset{[1;5]}{Min}f(x)=f(1)=\sqrt[3]{3}$

$\underset{[1;5]}{Max}f(x)=f(5)=\sqrt[3]{11}$

Ví dụ 8: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=\sqrt{x^5+x^3+1}$ trên $[1;3]$?

Lời giải

Điều kiện: $x^5+x^3+1\geq 0$

Ta có $y' = \dfrac{5x^4 + 3x^2}{2\sqrt{x^5 + x^3 + 1}} \geq 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện trên.

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên $[1;3]$, từ đây suy ra

$\underset{[1;3]}{Min} f(x) = f(1) = \sqrt{3}$; $\underset{[1;3]}{Max} f(x) = f(3) = \sqrt{271}$.

Từ các ví dụ trên ta rút ra kết luận sau:

1. Các hàm đa thức với các số mũ lẻ có hệ số là các số cùng âm, hoặc cùng dương thì luôn đơn điệu trên tập xác định nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.

2. Các hàm có dạng $\sqrt{ax+b}; \sqrt[3]{ax+b}; \sqrt[4]{ax+b}; \ldots$ hay tổng quát là có dạng $\sqrt[n]{ax+b}$ thì thường đồng biến khi $a > 0$, nghịch biến khi $a < 0$ nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu trên $[a;b]$ với $[a;b]$ không chứa $\dfrac{-d}{c}$ nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.

STUDY TIP: Với các hàm số là tổng của các hàm cùng đồng biến, hoặc cùng nghịch biến thì cũng đồng biến, nghịch biến, nên GTLN, GTNN cũng đạt được tại đầu mút.

Đọc thêm: Phương pháp giải nhanh các bài tập tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

Dùng máy tính:

Cách 1:

Sử dụng TABLE xét hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \underset{[a;b]}{\min} f(x) \\ \underset{[a;b]}{\max} f(x) \end{array}\right.$$

Các lưu ý cách chọn các giá trị Start, End và Step.

Start? Ta nhập giá trị a.

End? Nhập giá trị b.

Step? Nhập bước nhảy phù hợp.

Từ đây ta có thể nghiên cứu nhanh dáng điệu của đồ thị trên đoạn $[a;b]$, từ đó chọn giá trị thích hợp.

Cách 2:

1.Giải phương trình $f'(x) = 0$ bằng cách sửa dụng nút SOLVE (lấy giá trị của x nằm trên $[a;b]$ để dò nghiệm), ta được các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

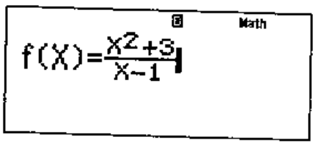
2. Dùng CALC để tìm các giá trị của $f(x)$ tại các điểm đầu mút và các điểm x_0 là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ rồi so sánh từ đó kết luận min, max.

Ví dụ 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. 6 B. -2 C. -3 D. $\dfrac{19}{3}$

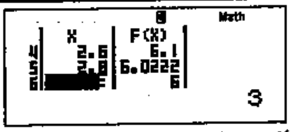
Đáp án A.

Lời giải



Ấn MODE 7 và nhập F(x) như hình bên.

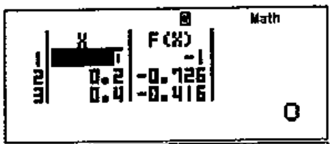
Tiếp theo chọn Start? 2; End 4; step 0,2 thì máy hiện kết quả như sau:

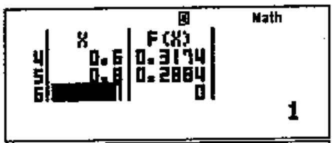


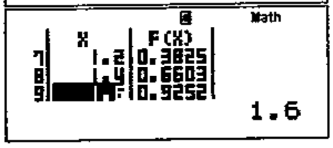
Ta thấy khi cho x chạy từ 2 đến 3 giá trị của hàm số giảm từ 7 đến 6, sau đó từ 3 đến 4 giá trị của hàm số lại tăng lên. Từ đây ta kết luận giá trị nhỏ nhất của hàm số là 6 khi $x=3$.

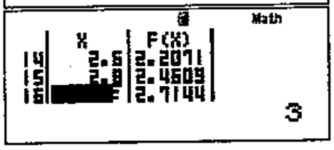
Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt[3]{(2x-1)(1-x)^2}$

Tiếp tục ấn MODE 7, chọn Start 0, End 3, Step 0,2 và máy hiện:







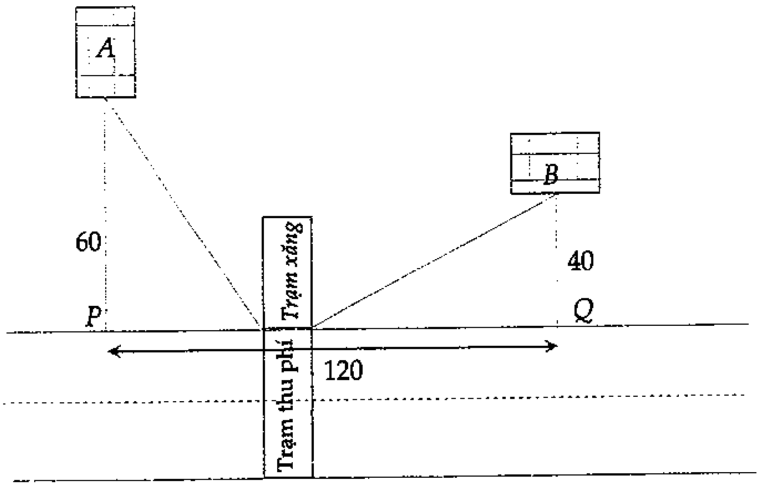


STUDY TIP: Chức năng TABLE chỉ giúp ta dự đoán khoảng mà Fx đạt giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất, tùy bài mới thể hiện giá trị chính xác, do vậy TABLE chỉ mang tính chất tương đối, hỗ trợ trong quá trình làm bài.

Ta nhận thấy giá trị của F(x) tăng dần khi cho x chạy từ 0 đến 0,6 sau đó giảm dần khi đến khi x chạy đến 1 (lúc này giá trị của F(x) là bằng 0) thì sau đó giá trị của hàm số lại tăng dần khi cho x chạy tiếp từ 1 đến 3.

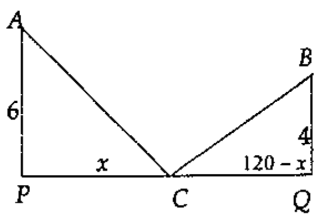
Vậy ta kết luận $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=-1$; $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=\sqrt[3]{20}$.

Ví dụ 3: Đường cao tốc mới xây nối hai thành phố A và B, hai thành phố này muốn xây một trạm thu phí và trạm xăng ở trên đường cao tốc như hình vẽ. Để tiết kiệm chi phí đi lại, hai thành phố quyết định tính toán xem xây trạm thu phí ở vị trí nào để tổng khoảng cách từ hai trung tâm thành phố đến trạm là ngắn nhất, biết khoảng cách từ trung tâm thành phố A, B đến đường cao tốc lần lượt là là 60 *km* và 40 *km* và khoảng cách giữa hai trung tâm thành phố là 120 *km* (được tính theo khoảng cách của hình chiếu vuông góc của hai trung tâm thành phố lên đường cao tốc, tức là PQ kí hiệu như hình vẽ). Tìm vị trí của trạm thu phí và trạm xăng? Giả sử chiều rộng của trạm thu phí không đáng kể.



A. 72 *km* kể từ *P*.
B. 42 *km* kể từ *Q*.
C. 48 *km* kể từ *P*.
D. tại *P*.

Đáp án A.



Lời giải

Thực chất bài toán trở thành tìm x để $AC+BC$ nhỏ nhất.

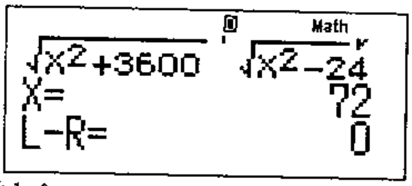
Theo định lí Pytago ta có

$$AC=\sqrt{60^2+x^2}\ ;BC=\sqrt{(120-x)^2+40^2}=\sqrt{x^2-240x+16000}$$

Khi đó $f(x)=AC+BC=\sqrt{x^2+3600}+\sqrt{x^2-240x+16000}$.

Ta cần tìm $\underset{(0;120)}{Min} f(x)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3600}}+\dfrac{x-120}{\sqrt{x^2-240x+16000}}$, khi bấm máy tính nhẩm nghiệm bằng cách nhập vào màn hình biểu thức $f'(x)$ và ấn SHIFT SOLVE và chọn một số nằm trong khoảng $(0;120)$ để dò nghiệm, như tôi nhập 2 máy nhanh chóng hiện nghiệm là 72 như sau:



Vậy từ đó ta có thể kết luận $CP=72$.

STUDY TIP:
Thường các bài toán thực tế, dùng Solve dò nghiệm sẽ rất nhanh. Ta sẽ tìm hiểu ở phần sau.

Đọc thêm:

Phương pháp giải nhanh các bài tập xác định m để hàm số đạt giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a;b]$.

Với các bài toán này, thường cho ta 4 giá trị của *m*. Trong máy tính ta có thể lập bảng giá trị của hai hàm $F(x)$ và $G(x)$ cùng một lúc, ta sẽ thử bằng cách thế 2 tham số đề bài vào hai hàm $F(x)$ và $G(x)$ dùng phương pháp ở trên để giải nhanh.

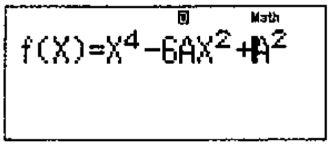
Ta đến với ví dụ đầu tiên:

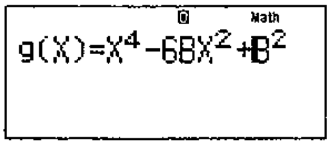
Ví dụ 1: Để hàm số $y = x^4 - 6mx^2 + m^2$ có $\max\limits_{[-2;1]} = \frac{4}{9}$ thì giá trị của tham số thực *m* là

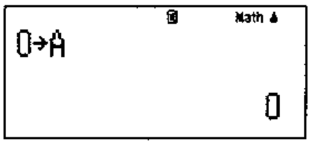
A. 0 B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. $\frac{4}{3}$

Đáp án B.

Lời giải







STUDY TIP:
Ở các bài toán dạng này ta thấy do đề bài chỉ có 4 phương án, nên ta chỉ cần thử 2 lần là có được kết quả.

Đầu tiên ta gán các giá trị ở các phương án lần lượt vào các biến A, B, C, D bằng lệnh STO như sau:

Ấn 0 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ (là nút STO) A

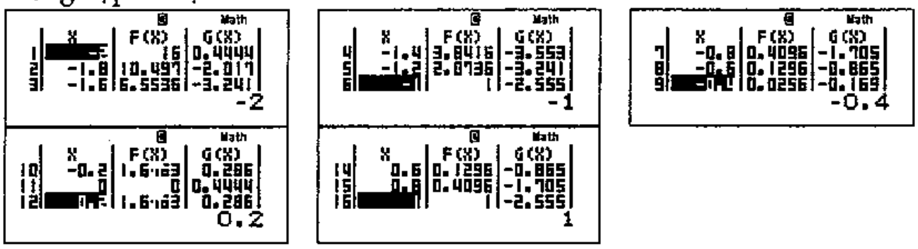
Tương tự với B, C, D.

Lúc này ta kiểm tra hai phương án A, B thì ta nhập hàm

$f(x) = X^4 - 6A.X^2 + A^2$

$g(x) = x^4 - 6.BX^2 + B^2$ như hình bên.

Tiếp theo nhập Start? -2; End? 1 Step? 0,2 Ta thấy các giá trị của hàm số ở hai trường hợp *m* hiện như sau:



Ta thấy khi $m = 0$ thì hàm số không đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{9}$ (loại).

Ở trường hợp $m = \frac{2}{3}$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{4}{9}$ khi $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Vậy ta chọn B.

Câu 1: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x+2}$ trên $[-1;2]$ là:

A. $\min\limits_{[-1;2]} y=1$ B. $\min\limits_{[-1;2]} y=-1$

C. $\min\limits_{[-1;2]} y=-5$ D. $\min\limits_{[-1;2]} y=-4$

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^3+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]} y=11$ B. $\min\limits_{[2;4]} y=-3$

C. $\min\limits_{[2;4]} y=-2$ D. $\min\limits_{[2;4]} y=6$

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ trên đoạn $[-4;-2]$.

A. $\min\limits_{[-4;-2]}=-7$ B. $\min\limits_{[-4;-2]}=-\dfrac{19}{3}$

C. $\min\limits_{[-4;-2]}=-8$ D. $\min\limits_{[-4;-2]}=-6$

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 4: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+35$ trên đoạn $[-4;4]$. Khi đó tổng $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. 48 B. 11 C. –1 D. 55

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 5: Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+3x+1$ trên đoạn $[-2;4]$ là:

A. –22 B. –18 C. 64 D. 14

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-x^2-8x$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\max\limits_{[1;3]} y=-8$ B. $\max\limits_{[1;3]} y=\dfrac{176}{27}$

C. $\max\limits_{[1;3]} y=-6$ D. $\max\limits_{[1;3]} y=-4$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 7: Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$.

A. $\min P=-5$. B. $\min P=5$.

C. $\min P=\dfrac{7}{3}$. D. $\min P=\dfrac{115}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Câu 8: Tính tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+x$ trên $[1;2]$?

A. 1. B. 2. C. 12. D. 10.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Câu 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4x+\dfrac{54}{x-2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(2;+\infty)} y=0$. B. $\min\limits_{(2;+\infty)} y=-13$.

C. $\min\limits_{(2;+\infty)} y=23$. D. $\min\limits_{(2;+\infty)} y=-21$.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Câu 10: Xét hàm số $f(x)=3x+1+\dfrac{3}{x+2}$ trên tập $D=(-2;1]$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D bằng 5.

B. Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị trên D.

C. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên D bằng 1.

D. Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên D.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần 1)

Câu 11: Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+1$ trên đoạn $[-1;3]$. Khi đó tổng $M+m$ có giá trị là một số thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. B. $(3;5)$.

C. $(59;61)$. D. $(39;42)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 12: Hàm số $y=x^3-3x$ có giá trị lớn nhất trên $[0;2]$ là:

A. 1 B. –2 C. 0 D. 2

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc)

Câu 13: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ trên đoạn $[-1;2]$ đạt tại $x=x_0$. Giá trị x_0 bằng:

A. 1. B. – 1. C. 2. D. – 2.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ trên khoảng $[2;+\infty)$ là:

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc)

Câu 15: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=-x^3+3x^2$ trên đoạn $[-2;1]$

A. $\max\limits_{[-2;1]} y=2$ B. $\max\limits_{[-2;1]} y=0$

C. $\max\limits_{[-2;1]} y=20$ D. $\max\limits_{[-2;1]} y=54$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo)

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^4+2x^2-1$ trên đoạn $[-1;1]$ là:

A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 17: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x+3}{x+1}$ trên đoạn [-4; -2].

A. $\min\limits_{[-4;-2]} y=-1$ B. $\min\limits_{[-4;-2]} y=-6.$

C. $\min\limits_{[-4;-2]} y=-8.$ D. $\min\limits_{[-4;-2]} y=\frac{1}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Văn Trỗi)

Câu 18: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ trên đoạn $[-3;3]$ là:

A. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=1;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-35$

B. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=1;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-10$

C. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=17;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-10$

D. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=17;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-35$

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I)

Câu 19: Cho hàm số $y=\left|2x^2-3x-1\right|$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ là:

A. $\frac{17}{8}$. B. $\frac{9}{4}$. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3+5x+7$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;0]$ bằng bao nhiêu?

A. 80 B. -143 C. 5 D. 7

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 21: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Khi đó tích $M.m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{10}{3}$ D. 1

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 22: Hàm số $y=\frac{x^2-3x}{x+1}$ giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;3]$ là

A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-mx+18$ trên đoạn $[1;3]$ không lớn hơn 2.

A. $m\ge 17.$ B. $m\ge 12.$

C. $m\le 12.$ D. $m\le 17.$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 24: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$y=f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ trên $[-1;1]$

A. $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

B. $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

C. $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

D. $\max f(x)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 25: Cho hàm số $y=2x+3\sqrt{9-x^2}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

A. -6 B. -9 C. 9 D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 2)

Câu 26: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x}-2x^2}{\sqrt{x}+1}$. Khi đó giá trị của $M-m$ là:

A. $-2.$ B. $-1.$ C. 1. D. 2.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 27: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên tập hợp $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

A. $\max\limits_{D} f(x)=0;$ không tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$

B. $\max\limits_{D} f(x)=0;\ \min\limits_{D} f(x)=-\sqrt{5}$

C. $\max\limits_{D} f(x)=0;\ \min\limits_{D} f(x)=-1$

D. $\min\limits_{D} f(x)=0;$ không tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 28: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{2-x^2}-x$ là:

A. $2-\sqrt{2}$ B. 2 C. $2+\sqrt{2}$ D. 1

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 29: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x-4\sqrt{6-x}$ trên đoạn $[-3;6]$. Tổng $M+m$ có giá trị là

A. 18. B. −6. C. −12. D. −4.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ có tập xác định D. Gọi $M=\max\limits_{x\in D}f(x), m=\min\limits_{x\in D}f(x)$. Khi đó $M-m$ bằng:

A. 1 B. Đáp số khác

C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Yên Phong)

Câu 31: Hàm số $y=4\sqrt{x^2-2x+3}+2x-x^2$ đạt giá trị lớn nhất tại hai giá trị x mà tích của chúng là:

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

(Trích đề thi thử THPT Cái Bè)

Câu 32: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+20}{3}+2\sqrt{x}$ trên đoạn $[1;4]$ là:

A. 9 B. 32 C. 33 D. 42

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 3)

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1;e^3]$

A. $\dfrac{4}{e^2}$. B. $\dfrac{8}{e^3}$. C. 0. D. $x=1$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Câu 34: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\ln(x+2)$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. $-\ln 2$. B. $-\dfrac{1}{2}$.

C. $1-2\ln 2$. D. $\dfrac{1}{2}-\ln 2$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 35: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\ln x+1$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{x\in(0;+\infty)}y=1+e$ B. $\min\limits_{x\in(0;+\infty)}y=1+\dfrac{1}{e}$

C. $\min\limits_{x\in(0;+\infty)}y=1-e$ D. $\min\limits_{x\in(0;+\infty)}y=1-\dfrac{1}{e}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\dfrac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên $[1;2]$ bằng −2.

A. $m=-3$ B. $m=2$ C. $m=4$ D. $m=3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x(2-\ln x)$ trên $[2;3]$ là:

A. 1 B. $4-2\ln 2$

C. e D. $-2+2\ln 2$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 38: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x+e^{2x}$ trên đoạn $[0;1]$.

A. $\max\limits_{[0;1]}y=1$. B. $\max\limits_{[0;1]}y=e^2+1$.

C. $\max\limits_{[0;1]}y=e^2$. D. $\max\limits_{[0;1]}y=2e$.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội)

Câu 39: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-xe^x$ bằng:

A. e B. $\dfrac{1}{e}$ C. 0 D. $-e$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Hồng Thái)

Câu 40: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2{}^2x-4\log_2 x+1$ trên đoạn $[1;8]$:

A. $\underset{x\in[1;8]}{Min}\,y=-2$ B. $\underset{x\in[1;8]}{Min}\,y=1$

C. $\underset{x\in[1;8]}{Min}\,y=-3$ D. Đáp án khác

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

Câu 41: Giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sin 2x-2\sin x$ là:

A. $M=0$ B. $M=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $M=3$ D. $M=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 42: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\cos^2 x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

Do $y=\dfrac{3x-2}{x+2}$ đồng biến trên $[-1;2]$ và $-2\notin[-1;2]$ nên hàm số đạt giá trị min max tại hai đầu mút. Ta có: $\begin{cases}y(-1)=-5\\y(2)=1\end{cases}$. Vậy $\min\limits_{[-1;2]}y=-5$.

Câu 2: Đáp án A.

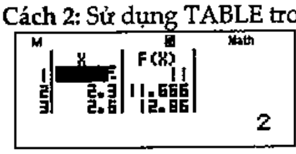
Cách 1: Ta có:

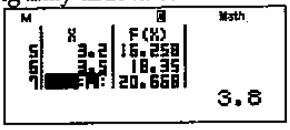
$$y'=\frac{3x^2(x-1)-x^3-3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2-3}{(x-1)^2}$$

Nhận xét: $y'>0,\forall x\in[2;4]$

Suy ra: $\min\limits_{[2;4]}y=f(2)=11.$

Cách 2: Sử dụng TABLE trong máy tính ta có:





Ta thấy hàm số đồng biến trên $[2;4]$ từ đây ta kết luận $\min\limits_{[2;4]}y=11.$

Câu 3: Đáp án A.

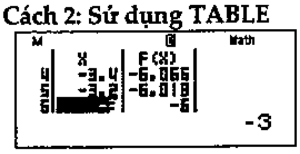
Cách 1: Ta có: $y'=\dfrac{2x.(x+1)-(x^2+3)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

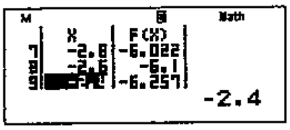
Nhận xét: $y'=0\Leftrightarrow x=-3(TM);x=1(l)$

Lại có: $\begin{cases}y(-4)=-\dfrac{19}{3}\\y(-2)=-7\\y(-3)=-6\end{cases}$

Vậy $\min\limits_{[-4;-2]}y=-7.$

Cách 2: Sử dụng TABLE





Vậy ta chọn A.

Câu 4: Đáp án C.

Xét hàm số đã cho liên tục trên $[-4;4]$, ta có:

$y'=3x^2-6x-9$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-4;4]\\x=3\in[-4;4]\end{array}\right.$

Xét: $\begin{cases}y(-4)=-41\\y(-1)=40\\y(3)=8\\y(4)=15\end{cases}$

Vậy $M+m=-41+40=-1$

Câu 5: Đáp án C.

Nhận xét: Hàm số đã cho có hệ số của các số mũ lẻ cùng dương nên đơn điệu trên $[-2;4]$. Suy ra, hàm số đạt GTLN,GTNN tại các đầu mút.

Tổng của GTLN, GTNN là: $y(-2)+y(4)=64$

Câu 6: Đáp án C.

Ta có:

$y'=3x^2-2x-8,\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{3}\notin[1;3]\\x=2\in[1;3]\end{array}\right.$

Xét: $\begin{cases}y(1)=-8\\y(2)=-12\\y(3)=-6\end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[1;3]}y=-6.$

Câu 7: Đáp án C.

Từ bài ra ta có: $y=2-x$

Do x, y là hai số không âm nên $x\in[0;2]$

Thay vào P có:

$P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+(2-x)^2-x+1=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$

$P'=x^2+4x-5$

$P'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;2]\\x=-5\notin[0;2]\end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases}P(0)=5\\P(1)=\dfrac{7}{3}\\P(2)=\dfrac{17}{3}\end{cases}$

Vậy $\min P=\dfrac{7}{3}$

Câu 8: Đáp án C.

Nhận xét: hệ số của các số hạng chứa số mũ lẻ cùng dương nên hàm số đã cho đơn điệu trên tập xác định (hay trên $\mathbb{R}$), suy ra hàm số đơn điệu trên $[1;2]$.

Tổng của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3+x$ trên $[1;2]$ là:

$y(1)+y(2)=12$

Câu 9: Đáp án C.

Ta có: $y=(x-2)^2+\dfrac{54}{(x-2)}-4$

Đặt: $t=x-2\,(x>2)\Rightarrow t>0$

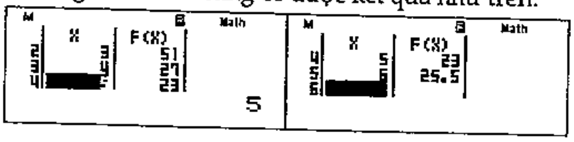
$\Rightarrow y=t^2+\dfrac{54}{t}-4.$

Xét $y=t^2+\frac{54}{t}-4$ liên tục trên $(0;+\infty)$, có: $y'=2t-\frac{54}{t^2}$

$\Rightarrow y'=0\Rightarrow t=3\in(0;+\infty)$

Nhận xét: trên $(0;+\infty)$ hàm số luôn đồng biến(lập bảng biến thiên để thấy rõ hơn) nên $y(3)=23$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho.

Sử dụng TABLE ta cũng có được kết quả như trên:



Câu 10: Đáp án D.

Xét $f(x)=3x+1+\frac{3}{x+2}$ liên tục trên $(-2;1]$, có:

$f'(x)=3-\frac{3}{(x+2)^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in D\\x=-3\notin D\end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases}f(-1)=1\\f(1)=5\end{cases}$

Vậy D sai

Câu 11: Đáp án D.

Xét $y=2x^3+3x^2-12x+1$ liên tục trên $[-1;3]$. Ta có:

$y'=6x^2+6x-12$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[-1;3].\\x=-2\notin[-1;3].\end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases}y(-1)=14\\y(1)=-6\\y(3)=46\end{cases}$

Suy ra $m+M=40\in(39;42)$

Câu 12:Đáp án D

Ta có $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1\ \Rightarrow\max\limits_{[0;2]}y=y(-1)=2$

Câu 13: Đáp án A.

Xét $y=2x^3+3x^2-12x+2$ liên tục trên $[-1;2]$, ta có:

$y'=6x^2+6x-12$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[-1;2].\\x=-2\notin[-1;2].\end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases}y(-1)=15\\y(1)=-5\\y(2)=6\end{cases}$

Suy ra $x_0=1$

Câu 14: Đáp án B.

Nhận xét: hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0\ \ \forall x\neq1$ nên y luôn nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ hay hàm số luôn nghịch biến trên $[2;+\infty)$.

Suy ra $\max\limits_{[2;+\infty)}y=y(2)=3.$

Câu 15: Đáp án C.

Xét hàm số $y=-x^3+3x^2$ liên tục trên $[-2;1]$, ta có:

$y'=-3x^2+6x$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[-2;1]\\x=2\notin[-2;1]\end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases}y(-2)=20\\y(0)=0\\y(1)=2\end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[-2;1]}y=20.$

Câu 16: Đáp án A.

Ta có $ab=1.2>0$ và hệ số $a=1>0$ nên đồ thị hàm số có dạng parabol quay bề lõm xuống dưới, tức là hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=0\Rightarrow\min\limits_{[-1;1]}y=y(0)=-1$.

Câu 17: Đáp số A.

Áp dụng lý thuyết: Hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ luôn đơn điệu trên $[a;b]$ với $[a;b]$ không chứa $\frac{-d}{c}$ nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút.

Khi đó: $\begin{cases}y(-4)=\frac{1}{3}\\y(-2)=-1\end{cases}$. Vậy $\min\limits_{[-4;-2]}y=-1.$

Câu 18: Đáp án D.

Xét $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ liên tục trên $[-3;3]$, có:

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\in[-3;3]\\x=2\in[-3;3]\end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases}f(-3)=-35\\f(-1)=17\\f(2)=-10\\f(3)=1\end{cases}$

Vậy $\begin{cases}\max\limits_{[-3;3]}f(x)=17\\\min\limits_{[-3;3]}f(x)=-35\end{cases}$

Câu 19: Đáp án A.

Xét hàm số $y=\left|2x^2-3x-1\right|$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ có:

$y=\left|2x^2-3x-1\right|=\sqrt{\left(2x^2-3x-1\right)^2}$

$y'=\dfrac{2(4x-3)\left(2x^2-3x-1\right)}{\sqrt{\left(2x^2-3x-1\right)^2}}$

Suy ra: $y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và không xác định tại

$x=1;x=\dfrac{1}{2}\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Khi đó: $\begin{cases} y\left(\dfrac{1}{2}\right)=2 \\ y\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{17}{8} \\ y(1)=2 \\ y(2)=1 \end{cases}$

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y=\dfrac{17}{8}$.

Câu 20: Đáp án D.

Xét $y=x^3+5x+7$ liên tục trên $[-5;0]$.

Áp dụng lý thuyết:

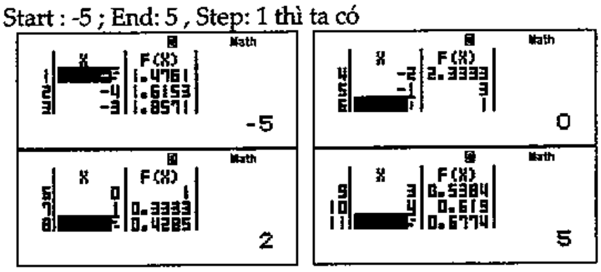
"Các hàm đa thức với các số mũ lẻ có hệ số là các số cùng âm, hoặc cùng dương thì luôn đơn điệu trên tập xác định nên GTLN, GTNN xảy ra tại các điểm đầu mút."

Và: $\begin{cases} y(0)=7 \\ y(-5)=-143 \end{cases}$

Câu 21: Đáp án D.

Sử dụng lệnh TABLE trong máy tính cầm tay với

Start : -5 ; End: 5 , Step: 1 thì ta có



Nhận xét: Hàm số đạt GTNN là $\dfrac{1}{3}$ khi $x=1$ và GTLN là 3 khi $x=-1$. Vậy $M.m=1$

Câu 22: Đáp án D.

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ liên tục trên , có:

$y'=\dfrac{(2x-3)(x+1)-x^2+3x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\in[0;3] \\ x=3\in[0;3] \end{array}\right.$

Khi đó: $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=-1 \\ y(3)=0 \end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[0;3]} y=0$.

Câu 23: Đáp án A.

Xét $f(x)=x^3-mx+18$ liên tục trên $[1;3]$,có:

$f'(x)=3x^2-m$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow 3x^2=m$

Với $m=0$ không thỏa mãn. Vậy ta loại C, D.

Với $m>0$ thì $f'(x)>0$ với mọi x, từ đây suy ra

$\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(1)=19-m\le 2\Leftrightarrow m\ge 17$

Câu 24: Đáp án B

Ta có:

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}.D=[-1;1]$

$f'(x)=\sqrt{1-x^2}-x.\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in D$

Khi đó: $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \\ f(1)=0 \end{cases}$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 25: Đáp án: A

Xét hàm số $y=2x+3\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên $D=[-3;3]$, có:

$y'=2+3.\dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=2-\dfrac{3x}{\sqrt{9-x^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{9-x^2}=3x$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{36}{5}}\in[-3;3]$

Khi đó: $\begin{cases} y(-3)=-6 \\ y\left(-\sqrt{\dfrac{36}{5}}\right)=-\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ y\left(\sqrt{\dfrac{36}{5}}\right)=\dfrac{21\sqrt{5}}{5} \\ y(3)=6 \end{cases}$

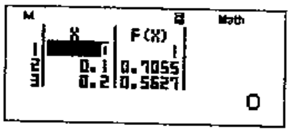
Vậy $\min\limits_{[-3;3]} y=-6$.

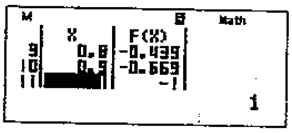
Câu 26: Đáp án D.

Điều kiện: $x\in[0;1]$

Do hàm số khá phức tạp, nên ở bài toán này ta nên sử dụng lệnh TABLE để tính:

Ta nhập hàm số với START 0, END 1, STEP 0,1 thì ta được:





Vậy $M=1; m=-1 \Rightarrow M-m=2$

Câu 27: Đáp án: A

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ trên $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Nhận thấy hàm số đã cho liên tục trên $(-\infty;1]$ và $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

Ta có:

$$f'(x)=\frac{-2x+1}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\notin D$$

Nhận xét: Hàm số luôn đồng biến trên $(-\infty;1]$ và luôn nghịch biến trên $\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Khi đó: $\begin{cases} f(1)=0 \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\sqrt{5} \end{cases}$

Suy ra: $\max\limits_D y=0$ và không tồn tại $\min\limits_D y$.

Câu 28: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$; Lúc này so sánh các giá trị của hàm số tại hai điểm đầu mút và tại $x=-\sqrt{2}; x=\sqrt{2}$ ta được:

$\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}$;

$\max\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} f(x)=f(-1)=2$. Vậy ta chọn A.

Câu 29: Đáp án B.

$f(x)=2x-4\sqrt{6-x} \quad (x\le 6)$

Xét $f(x)$ liên tục trên $[-3;6]$

$f'(x)=2+2.\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}>0 \quad \forall x\in[-3;6)$

$\Rightarrow f(x)$ luôn đồng biến trên $[-3;6)$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=6$.

$\Rightarrow$ Áp dụng lý thuyết $\Rightarrow m+M=f(-3)+f(6)=-6$.

Câu 30: Đáp án A.

Tập xác định: $D=[-1;1]$

Xét $f(x)$ liên tục trên D

$$f'(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x\ne\pm1)$$

$$\Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

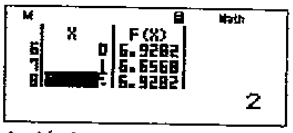
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\in[-1;1]$$

Khi đó: $\begin{cases} f(-1)=0 \\ f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \\ f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow M-m=1$

Câu 31: Đáp án C.

Sử dụng TABLE ta có:



Ta thấy tại hai giá tị $x=0; x=2$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất, do đó ta chọn C.

Câu 32: Đáp án B.

$$f(x)=\frac{x^3+20}{3}+2\sqrt{x}=\frac{x^3}{3}+2\sqrt{x}+\frac{20}{3}$$

Xét $f(x)$ liên tục trên $[1;4]$

$$\Rightarrow f'(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}>0} \quad \forall x\in[1;4]$$

Khi đó: $\begin{cases} f(1)=9 \\ f(4)=32 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[1;4]} f(x)=32$.

Câu 33: Đáp án B.

Tập xác định: $D=\left[1;e^3\right]$

Xét $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ liên tục trên $\left[1;e^3\right]$

$$y'=\frac{2.\ln x-\ln^2 x}{x^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x=0 \\ \ln x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in\left[1;e^3\right] \\ x=e^2\in\left[1;e^3\right] \end{array}\right.$$

Khi đó: $\begin{cases} y(1)=0 \\ \ln\left(e^2\right)=\dfrac{1}{e^2} \\ \ln\left(e^3\right)=\dfrac{9}{e^3} \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[1;e^3]} y=\dfrac{4}{e^2}$.

Câu 34: Đáp án C.

Xét $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0\in\{-1;2\}$$

Khi đó: $\begin{cases} f(-1) = -\dfrac{1}{2} \\ f(0) = -\ln 2 \\ f(2) = 1 - \ln 4 \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} f(x) = 1 - 2\ln 2.$

Câu 35: Đáp án B.

Tập xác định: $D = (0;+\infty)$

Xét y liên tục trên $(0;+\infty)$

$y' = \ln x + 1$

$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow e^{-1} = x \in (0;+\infty)$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$-\frac{1}{e}+1$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y = 1 - \dfrac{1}{e}.$

Câu 36: Đáp án D.

Điều kiện: $x \neq m$

Xét $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{m(x-m) - mx - 1}{(x-m)^2} = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2}$$

$$= -\frac{m^2+1}{(x-m)^2} < 0 \ \forall x + m$$

$\Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên $[1;2]$.

$\Rightarrow \max\limits_{[1;2]} f(x) = -2 \Leftrightarrow \max\limits_{[1;2]} f(1) = -2$

$\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{1-m} = -2 \, (m \neq 2) \Leftrightarrow m = 3$

Câu 37: Đáp án B.

$f(x) = x(2 - \ln x)$

Xét $f(x)$ liên tục trên $[2;3]$

$f'(x) = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \in [2;3]$

Khi đó: $\begin{cases} f(2) = 4 - 2\ln 2 \\ f(e) = e \\ f(3) = 6 - 3\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[2;3]} f(x) = 4 - 2\ln 2.$

Câu 38: Đáp án B.

Xét hàm số $y = x + e^{2x}$ liên tục trên $[0;1]$

Ta có: $y' = 1 + 2e^{2x} > 0 \ \forall x \in [0;1]$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;1]} y = \{y(0); y(1)\} = \{1; 1+e^2\} = 1 + e^2$

Câu 39: Đáp án B.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$y' = -e^x - xe^x = -e^x(x+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

$\Rightarrow \max y = e.$

Câu 40: Đáp án C.

Xét hàm số liên tục trên $[1;8]$

$y' = 2.\log_2 x.\dfrac{1}{x\ln 2} - \dfrac{4}{x\ln 2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x\ln 2}(\log_2 x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Khi đó: $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(4) = -3 \\ y(8) = -2 \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{[1;8]} y = -3.$

Câu 41: Đáp án B.

$f(x) = \sin 2x - 2\sin x$

$f'(x) = 2\cos 2x - 2\cos x = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm k2\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Vì vòng tuần hoàn của $\cos x$ là 2π nên ta có:

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
y'	4	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

$\Rightarrow M = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

Câu 42: Đáp án A.

Xét y liên tục trên $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$

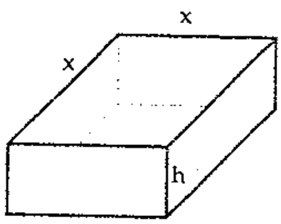
$y' = 1 - 2\cos x.\sin x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}) \ \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$

Khi đó: $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} y = 1.$

D. Ứng dụng của GTLN, GTNN vào thực tiễn, giải quyết các vấn đề tối ưu.

Trong các ứng dụng toán học, ứng dụng thường thấy là ứng dụng đạo hàm tìm GTLN, GTNN của hàm số để giải quyết các vấn đề tối ưu. Dưới đây ta xét một số ví dụ từ đó đưa ra kết luận về các bước giải quyết bài toán.



Hình 1.15

Ví dụ 1: Người ta muốn thiết kế một cái hộp không nắp bằng bìa có đáy là hình vuông. Biết diện tích bìa để làm hộp là 108 (đvdt), được biểu diễn ở hình 1.15. Thể tích lớn nhất của hộp là

A. 54 đvtt B. 108 đvtt C. $54\sqrt{2}$ đvtt D. $108\sqrt{2}$ đvtt

Đáp án B.

Lời giải

Vì hộp có đáy là hình vuông nên thể tích của hộp sẽ là $V = x^2.h$

Với $S = 4.x.h + x^2 = 108$ là diện tích bìa làm hộp.

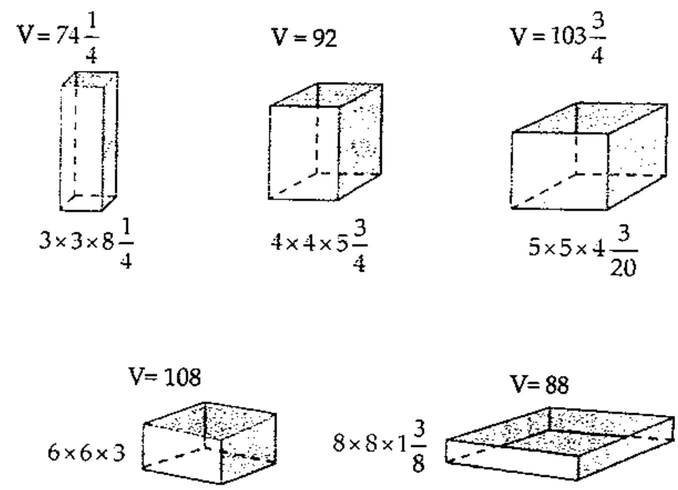
$\Rightarrow h = \dfrac{108 - x^2}{4x}$. Khi đó thể tích của khối hộp $V = x^2.\dfrac{108 - x^2}{4x} = 27x - \dfrac{1}{4}x^3$ (đvtt)

Bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $f(x) = 27x - \dfrac{1}{4}x^3$ trên $\left(0;\sqrt{108}\right]$.

Ta có $f'(x) = 27 - \dfrac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (thỏa mãn), suy ra $h = 3$

Khi đó thể tích lớn nhất là $V = 6^2.3 = 108$ (đvtt).

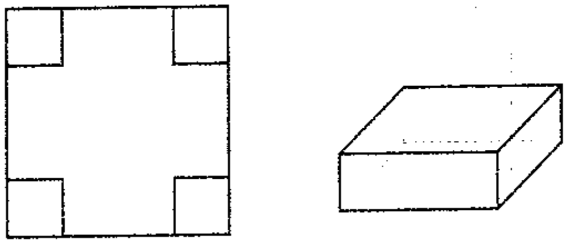
Trước khi giải quyết ví dụ 1, nhiều độc giả thường bối rối trước bài toán khi cố đi tìm xem kích thước nào là có thể tích lớn nhất. Nhiều độc giả có thể thử nhiều trường hợp khác nhau để dẫn đến kết luận bài toán, giống như các hình dưới đây:



Tuy nhiên, ta có một số bước cơ bản để giải quyết bài toán tối ưu thực tế như sau:

1. Xác định tất cả các biến.
2. Viết công thức của đại lượng cần tối ưu, sau đó từ mối quan hệ đề cho đưa về một biến (có thể là biến cần xác định hoặc biến dẫn đến công thức nhẹ gọn).
3. Tìm miền của hàm cần tìm GTLN, GTNN.
4. Tiếp tục giải như một bài toán tìm GTLN, GTNN thông thường.

Ví dụ 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất. (hình 1.16)



Hình 1.16

A. $x=6$. B. $x=3$. C. $x=2$. D. $x=4$.

(Trích đề thi minh họa lần I – BGD ĐT)

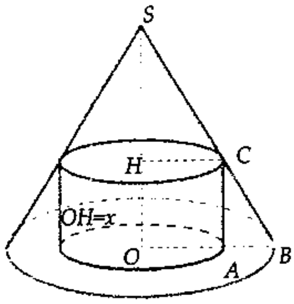
Đáp án C

Khi chuyển thành hộp không nắp thì chiều cao của hộp chính là chiều cao của hộp không nắp được tạo ra. Vậy thể tích của hộp là

$V=\left(12-2x\right)^2.x=4x^3-48x^2+144x$

Bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $f\left(x\right)=4x^3-48x^2+144x$ trên $\left(0;12\right)$.

Ta có $f'\left(x\right)=12x^2-48.2x+144=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\left(l\right)\\x=2\end{array}\right.$.



Hình 1.17

Ví dụ 3: Một nóc tòa nhà cao tầng có dạng một hình nón. Người ta muốn xây một bể có dạng một hình trụ nối tiếp trong hình nón để chứa nước (như hình vẽ minh họa).

Cho biết $SO=h;OB=R$ và $OH=x\left(0<x<h\right)$. Tìm x để hình trụ tạo ra có thể tích lớn nhất.

(Hình trụ nội tiếp trong hình nón là hình trụ có trục nằm trên trục của hình nón, một đường tròn đáy nằm trên mặt đáy của hình nón, đường tròn đáy còn lại nằm trên mặt xung quanh của hình nón). (hình 1.17)

A. $x=\dfrac{h}{3}$ B. $x=\dfrac{h}{4}$ C. $x=\dfrac{2h}{3}$ D. $x=\dfrac{h}{2}$

(Trích đề thi thử Sở GD- ĐT Lâm Đồng)

Đáp án A.

Lời giải

Bài toán này tương tự như bài toán hộp mì tôm mà tôi đã ra trong cuốn bộ đề Tinh túy ôn thi THPT Quốc gia môn Toán năm 2017 .

Áp dụng định lý Thales ta có $\dfrac{r}{R}=\dfrac{h-x}{h}\Rightarrow r=\dfrac{\left(h-x\right)R}{h}$.

Khi đó $V=\pi r^2.x=\pi.\dfrac{\left(h-x\right)^2.R^2}{h^2}.x=\dfrac{\pi R^2}{h^2}.\left(x^3-2hx^2+h^2x\right)$

Để hình trụ tạo ra có thể tích lớn nhất thì $f(x)=x^3-2hx^2+h^2x$ đạt GTLN với $0<x<h$

Ta có $f'(x)=3x^2-4hx+h^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Từ các bài toán trên tôi đưa ra một quy trình gợi ý cho bài toán tối ưu thực tế: Ta tiếp tục với các bài toán sau, từ đó rút ra kết luận để giải quyết bài toán thực tế nhanh hơn.

CHÚ Ý: Nếu miền hàm cần tìm là một đoạn thì ta cần so sánh cả hai điểm đầu mút.
Nếu miền hàm cần tìm là một khoảng thì chỉ cần xét các điểm làm cho $y'=0$ hoặc không xác định.

Ví dụ 4: Một công ty kinh doanh thực phẩm ước tính rằng số tiền thu vào ở việc kinh doanh rau được tính xấp xỉ bằng công thức $h(x)=x^2-29\,000x+1000\,100\,000$ và tiền lãi được tính bằng công thức $g(x)=1000x+100000$ với x là số tiền cho mỗi *kg* rau. Tìm x để số tiền vốn bỏ ra là ít nhất.

A. 15000 đồng B. 30000 đồng C.10000đồng D. 20000 đồng

Đáp án A.

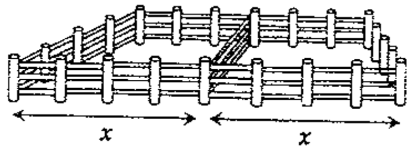
STUDY TIP: Với hàm bậc hai tìm GTNN ta có thể đưa về dạng $f(x)=(ax-b)^2+A$. Dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{b}{a}$.

Khi đó số tiền vốn bỏ ra sẽ được tính bằng công thức $f(x)=h(x)-g(x)$

$=x^2-30\,000x+1000\,000\,000=(x-15000)^2+775\,000\,000\geq 775\,000\,000$

Dấu bằng xảy ra khi $x=15000$.

Ví dụ 3: Bác nông dân định làm một hàng rào trồng rau, bác có 200 *m* vật liệu để làm hàng rào. Và hàng rào có dạng như hình vẽ bên. Hỏi diện tích đất lớn nhất để trồng rau là bao nhiêu?



A. $625\,m^2$ B. $\frac{5000}{3}m^2$ C. $2500\,m^2$ D. $10000\,m^2$

Đáp án B.

Phân tích

Ở đây đề bài cho một dữ kiện đó là có 200 *m* vật liệu để làm hàng rào. Từ đây nếu ta đặt một chiều của hàng rào theo một biến thì ta sẽ tính được chiều còn lại của hàng rào theo biến này. Lúc này, thiết lập công thức diện tích theo một biến, dùng đạo hàm tìm GTLN của hàm số một biến này.

Lời giải

Đặt chiều còn lại của hàng rào là *y*, khi đó ta có: $4x+3y=200 \Leftrightarrow y=\frac{200-4x}{3}$

Khi đó diện tích đất rào được được tính bằng công thức:

$$S=f(x)=2x.\frac{200-4x}{3}=\frac{1}{6}.4x.(200-4x)$$

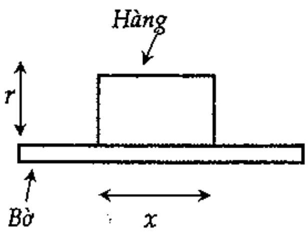
Áp dụng bất đẳng thức $ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}$ ta có:

$$\frac{1}{6}.4x.(200-4x)\leq\frac{1}{6}.\frac{1}{4}.(200-4x+4x)^2=\frac{5000}{3}(m^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi $4x=200-4x \Leftrightarrow x=25$

Ví dụ 5: Bác nông dân muốn làm một hàng rào trồng rau hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường(như hình vẽ 1.18).
Bác dự tính sẽ dùng 200 m lưới sắt để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất mà bác có thể rào nên là

A. $1500m^2$ B. $10000m^2$ C. $2500m^2$ D. $5000m^2$



Hình 1.18

Đáp án D.

Đề bài cho ta dữ kiện về chu vi của hàng rào là 200 *m*. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa *x* và *r*, đến đây ta có thể đưa về hàm số một biến theo *l* hoặc theo *r* như sau:

Ta có $x+2r=200 \Leftrightarrow r=100-\frac{x}{2}$. Từ đây ta có $r>0 \Rightarrow x<200$.

Diện tích đất rào được tính bởi: $f(x)=x.\left(100-\frac{x}{2}\right)=\frac{-x^2}{2}+100x$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{-x^2}{2}+100x$ trên khoảng $(0;200)$.

Đến đây áp dụng quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn như ở phần lý thuyết trên thì ta có phương trình:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x+100=0 \Leftrightarrow x=100$

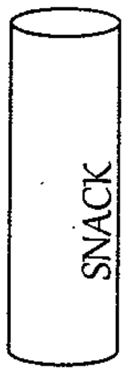
Từ đó ta có $f(100)=5000$ là giá trị lớn nhất của diện tích đất rào được.

Trên đây là cách làm áp dụng quy tắc chúng ta vừa học, tuy nhiên tôi muốn phân tích thêm cho quý độc giả như sau: Ta nhận thấy hàm số trên là hàm số bậc hai có hệ số $a=-\frac{1}{2}<0$, vậy đồ thị hàm số có dạng parabol và đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\frac{b}{2a}$. Vậy áp dụng vào bài này thì hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\frac{-100}{-\frac{1}{2}.2}=100$. Từ đó tìm $f(100)$ luôn mà không cần đi tính $f'(x)$.

Kết luận: Với hàm số bậc hai thì giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a,b]$ đạt được tại $x=\frac{-b}{2a}$ nếu $\frac{-b}{2a}\in[a,b]$.

Ví dụ 6: Một công ty sản xuất khoai tây chiên giới hạn về kích thước hộp sao cho tổng chiều dài *l* của hộp khoai tây chiên và chu vi đường tròn đáy không vượt quá 84 *cm* (để phù hợp với phương thức vận chuyển và chiều dài truyền thống của dòng sản phẩm như hình 1.19). Công ty đang tìm kích thước để thiết kế hộp sao cho thể tích đựng khoai tây chiên là lớn nhất, thể tích đó là:

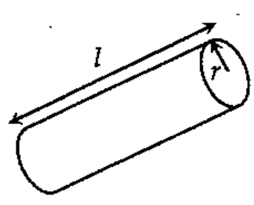
A. $\frac{29152}{\pi}cm^3$ B. 29152 cm^3 C. 14576 cm^3 D. $\frac{14576}{\pi}cm^3$



Hình 1.19

Đáp án A.

Ta có hình 1.20.



Hình 1.20

Do đề bài yêu cầu tìm thể tích lớn nhất của hộp khoai tây chiên và tổng chiều dài *l* và chu vi đường tròn đáy không vượt quá 84 *cm* nên:

Nếu muốn thể tích lớn nhất ta sẽ lấy giới hạn max của tổng độ dài tức là $l+P=84 \Leftrightarrow l+2\pi r=84$ với *r* là bán kính đường tròn đáy.

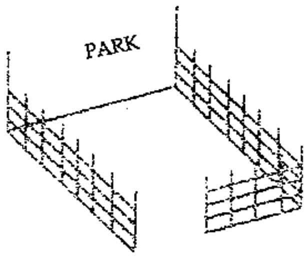
$\Leftrightarrow l=84-2\pi r$. Thể tích của hộp khoai tây chiên được tính bằng công thức:

$V=\pi r^2 l=\pi r^2(84-2\pi r)=84\pi r^2-2\pi^2 r^3=f(r)$

Ta có $f'(r)=168\pi r-6\pi^2.r^2=6\pi r(28-\pi r)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=\dfrac{28}{\pi}>0\\ r=0\end{array}\right.$.

Giống như trong cuốn Bộ đề tinh túy ôn thi THPT quốc gia năm 2017 tôi đã viết thì quý độc giả có thể nhận ra ngay $f(0)$ là giá trị cực tiểu của hàm số, $f\left(\dfrac{28}{\pi}\right)$ là giá trị cực đại của hàm số. Vậy đến đây ta tư duy nhanh

$Max\,f(r)=f\left(\dfrac{28}{\pi}\right)=\dfrac{29152}{\pi}cm^3$.



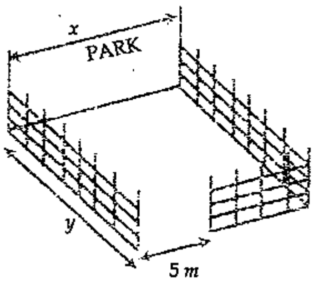
Hình 1.21

Ví dụ 7: Chủ của một nhà hàng muốn làm tường rào bao quanh $600\,m^2$ đất để làm bãi đỗ xe. Ba cạnh của khu đất sẽ được rào bằng một loại thép với chi phí 14 000 đồng một mét, riêng mặt thứ tư do tiếp giáp với mặt bên của nhà hàng nên được xây bằng tường gạch xi măng với chi phí là 28 000 đồng mỗi mét (hình 1.21). Biết rằng cổng vào của khu đỗ xe là 5 *m* Tìm chu vi của khu đất sao cho chi phí nguyên liệu bỏ ra là ít nhất, chi phí đó là bao nhiêu ?

A. 100 *m*, 1 610 000 đồng B. 100 *m*, 1 680 000 đồng

C. 50 *m*, 1 610 000 đồng D. 50 *m*, 1 680 000 đồng

Đáp án A.



Ta có các kích thước được kí hiệu như sau

Do đề đã cho diện tích khu đất nên $xy=600\Rightarrow y=\dfrac{600}{x}$

Chi phí nguyên liệu được tính bằng công thức

$f(x)=\left(x-5+2.\dfrac{600}{x}\right).14000+28000x=42000x+\dfrac{16800000}{x}-70000$ với $x>5$.

Nhận thấy *x* dương, do vậy ở đây ta có thể nhận ra ngay bất đẳng thức Cauchy với hai số dương. Vậy $f(x)\geq 2\sqrt{42000x.\dfrac{16800000}{x}}-70000=1610000$

Dấu bằng xảy ra khi $42000x=\dfrac{16800000}{x}\Leftrightarrow x=20$

Vậy chu vi của khu đất là $2.(x+y)=2.\left(20+\dfrac{600}{20}\right)=100\,m$.

STUDY TIP: Để tìm GTLN-GTNN ta có thể sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc như Cauchy, Bunyakovsky để giải quyết nhanh bài toán mà không cần tìm đạo hàm.

Chú ý: Nhiều độc giả quên trừ đi đoạn cổng vào nên sẽ chọn nhầm phương án B hoặc D.

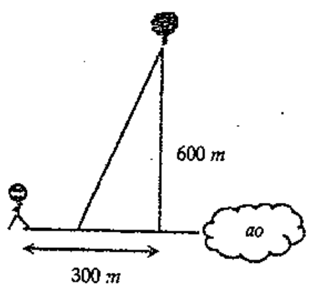
Trên đây là các dạng toán tối ưu nguyên liệu, tiếp theo ta có các bài toán tối ưu thời gian như sau:

Ví dụ 8: Một người phải đi đến một cái cây quí trong rừng càng nhanh càng tốt. Con đường mòn chính mà người ta hay đi được miêu tả như sau:

Từ vị trí người đó đi thẳng 300 *m* gặp một cái ao nên không đi tiếp được nữa , sau khi rẽ trái đi thẳng 600 *m* đường rừng sẽ đến cái cây quí đó.

Biết rằng nếu đi đường mòn thì anh ta có thể chạy với tốc độ $160\,m/phút$, còn khi đi qua rừng anh ta chỉ có thể đi với tốc độ $70\,m/phút$.

Đó là con đường đi truyền thống mà người ta hay đi, vậy con đường đi mà mất ít thời gian nhất được miêu tả

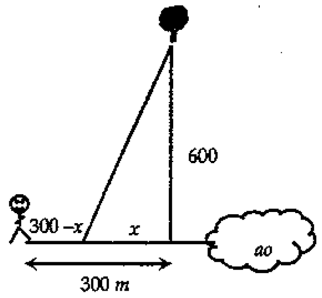


A. đi thẳng từ vị trí người đó đứng đến cái cây.

B. đi theo đường mòn 292 *m* rồi rẽ trái đi đến cái cây.

C. đi theo cách truyền thống ở trên.

A. đi thẳng 8 m rồi rẽ trái đi đến cái cây.



Hình 1.22

Đáp án D.

Kí hiệu như hình 1.22 ta có

Tổng thời gian người đó đi đến cái cây được tính theo công thức:

$$f(x)=\frac{300-x}{160}+\frac{\sqrt{600^2+x^2}}{70} \text{ với } 0\le x\le 300$$

Đến đây công việc của ta là đi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[0;300]$. Ta lần lượt làm theo các bước: $f'(x)=-\frac{1}{160}+\frac{1}{70}.\frac{2x}{2\sqrt{600^2+x^2}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 16x=7\sqrt{600^2+x^2} \Leftrightarrow 256x^2=49.\left(600^2+x^2\right) \Leftrightarrow 207x^2=49.600^2$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{49.600^2}{207}\Leftrightarrow x=\frac{7.600}{\sqrt{207}}\approx 292\ m$

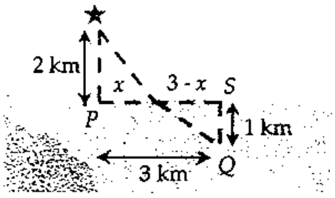
Đến đây nhiều độc giả có thể vội chọn B. Tuy nhiên nhìn kĩ thì thấy D mới đúng, vì theo miêu tả thì người đó sẽ đi $300-x$ mét sau đó thì đi thẳng đến cái cây.

STUDY TIP: Ở đây ta sử dụng công thức tính thời gian trong chuyển động thẳng đều $t=\frac{s}{v}$.

Ví dụ 9 : Giả sử bác An đang ở trên một con thuyền (kí hiệu hình ngôi sao trên hình vẽ) cách điểm gần nhất trên bờ biển P là 2km . Bác An cần đến điểm Q cách điểm gần nhất S bên bờ biển 1m. Kí hiệu như hình vẽ, biết rằng $PS=3\ km$ Tốc độ chèo thuyền là $2\,km/h$, tốc độ đi bộ trên bờ biển là $4\,km/h$. Thời gian ngắn nhất mà bác An có thể đi đến Q là :

A.1 giờ 41 phút B. 1h 30 phút.

C. 1h 46 phút D. 1h 30 phút.



Đáp án A.

Lời giải

Đây là bài toán tương tự như ví dụ 8:

Giả sử $PM=x(km)$. Khi đó $MS=PS-MP=3-x(km)$.

Nếu chèo chuyền đến điểm M và tiếp tục đi bộ đến Q thì khi đó biểu thức thời gian được tính bằng công thức :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2^2}}{2}+\frac{\sqrt{(3-x)^2+1^2}}{4} \text{ với } x\in[0;3]. \text{ (Tương tự như ví dụ 8).}$$

Để biết con đường đi đến Q mà tốn ít thời gian nhất thì ta đi tìm x để $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;3]$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{\sqrt{x^2-6x+10}}{4}$ trên $[0;3]$.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2}.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\frac{1}{4}.\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ (Do ở đây khoảng nghiệm ngắn nên ta dùng máy tính và dùng CALC dò nghiệm ra luôn kết quả).

Khi đó thời gian ngắn nhất mà bác có thể đi đến Q là :

$$f(1)=\frac{\sqrt{1+2^2}}{2}+\frac{\sqrt{2^2+1}}{4}=\frac{3\sqrt{5}}{4}(h)\approx 1 \text{ giờ } 41 \text{ phút.}$$

Các bất đẳng thức thường được áp dụng trong dạng toán tối ưu thực tế.

1. Bất đẳng thức AM – GM (hay bất đẳng thức Cauchy)

Với 2 số a, b là hai số thực không âm, ta có :

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

Với n số thực không âm $x_1;x_2;..;x_n$ ta có :

$x_1+x_2+...+x_n\ge n\sqrt[n]{x_1x_2x_3...x_n}$

Dấu bằng xảy ra khi $x_1=x_2=..=x_n$

2. Các bất đẳng thức hệ quả

Hệ quả 1 : Ta có $(a-b)^2\ge 0,\forall a,b$

$\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab,\forall a,b$

$\Leftrightarrow (a+b)^2\ge 4ab,\forall a,b$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

Hệ quả 2: Nếu tổng của hai số dương, không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

Hệ quả 3: Nếu tích của hai số dương không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

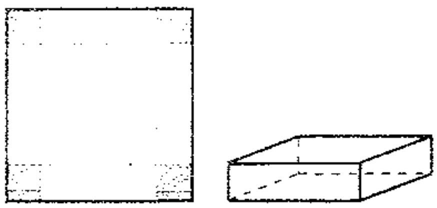
Câu 1: Tại vị trí một khu đất có sẵn một bức tường cũ dài $12m$, người ta dự định xây một căn nhà kho nền hình chữ nhật với diện tích $112m^2$. Biết rằng giá để sửa bức tường cũ dài $1m$ bằng 25% giá xây $1m$ dài mới; giá công đập dỡ bức tường cũ dài $1m$ và tận dụng vật liệu đã gỡ ra để xây $1m$ dài mới với vật liệu mới. Hỏi trong điều kiện như vậy, nên tận dụng giữ lại bao nhiêu mét tường cũ để kinh phí xây dựng kho là ít nhất?

A. Khoảng 11,3 m B. Khoảng 0,7 m

C. Khoảng 10 m D. Khoảng 2 m

(Trích tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)

Câu 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 18 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$ B. $x=3$ C. $x=2$ D. $x=4$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 3: Khi nuôi cá thí nghiệm trong một hồ, nếu trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ nuôi n con cá $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ thì trung bình sau mỗi vụ mỗi con cá nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ để sau mỗi vụ khối lượng cá thu được là nhiều nhất?

A. 10 con B. 12 con C. 9 con D. 15 con

(Trích "đề THPT Chu Văn An; THPT chuyên Vị Thanh")

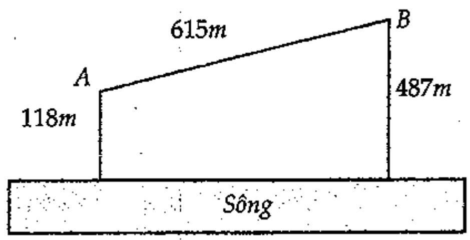
Câu 4: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

A. 2.225.000 B. 2.100.000

C. 2.200.000 D. 2.250.000

(Trích đề thi thử "THPT chuyên Bắc Cạn; Đông Sơn I")

Câu 5: Cho hai vị trí A, B cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



A. 569,5 m B. 671,4 m C. 779,8 m D. 741,2 m

(Trích đề thi thử lần I – THPT chuyên Amsterdam)

Câu 6: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích 12 m^3 để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu gấp rưỡi chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (không tính đến bề dày của thành bể). Ta có kích thước (dài; rộng – tính theo đơn vị m, làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy) phù hợp yêu cầu là:

A. Dài 2,42 m và rộng 1,82 m

B. Dài 2,74 m và rộng 1,71 m

C. Dài 2,26 m và rộng 1,88 m

D. Dài 2,19 m và rộng 1,91 m

(Trích đề thi thử lần II – THPT chuyên Lam Sơn)

Câu 7: Người ta cần xây một hồ bơi với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích là $\frac{500}{3}m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ được tính theo mét vuông (gồm đáy hồ và bốn xung quanh thành hồ). Để chi phí thuê công nhân thấp nhất thì cần xây bờ hồ có chiều rộng là:

A. 5m B. 4m C. 10m D. 12m

(Trích đề thi thử THPT Hiệp Hòa số 1)

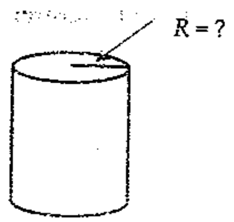
Câu 8: Cần thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng sản phẩm đã chế biến có dung tích $V\left(cm^3\right)$. Hãy xác định bán kính đường tròn đáy của hình trụ theo V để tiết kiệm vật liệu nhất.

A. $\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}(cm)$ B. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}(cm)$

C. $\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}(cm)$ D. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}(cm)$

(Trích đề thi thử lần I – THPT Lương Thế Vinh)

Câu 9: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích



toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy R bằng:

A. $R=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ B. $R=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ C. $R=\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$ D. $R=\sqrt{\frac{V}{\pi}}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo lần 2; THPT Triệu Sơn 2)

Câu 10: Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P), đường cao $SO=h$. Điểm O' thay đổi trên đoạn SO sao cho $SO'=x$ $(0<x<h)$. Hình trụ tròn xoay (T) có đáy thứ nhất là hình tròn tâm O bán kính r' $(0<r'<r)$ nằm trên mặt phẳng (P), đáy thứ hai là hình tròn tâm O' bán kính r' nằm trên mặt phẳng (Q), (Q) vuông góc với SO tại O' (đường tròn đáy thứ hai của (T) là giao tuyến của (Q) với mặt xung quanh của (N)). Hãy xác định giá trị của x để thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x=\frac{1}{2}h$ B. $x=\frac{1}{3}h$ C. $x=\frac{2}{3}h$ D. $x=\frac{1}{4}h$

(Trích đề thi thử tạp chí THTT lần 5)

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s=6t^2-t^3$. Thời điểm t (giây) tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t=2$ B. $t=3$ C. $t=4$ D. $t=5$

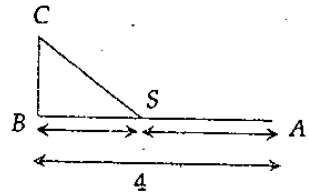
(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I; THPT chuyên Thái Bình lần I)

Câu 12: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt một khoảng cách là 300km. Vận tốc của dòng nước là $6km/h$. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức: $E(v)=cv^3t$. Trong đó c là một hằng số, E được tính bằng jun. Tìm vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất.

A. $6km/h$ B. $9km/h$ C. $12km/h$ D. $15km/h$

(Trích "đề thi thử sở GD&ĐT Hưng Yên lần I; THPT Vĩnh Chân lần I; THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa")

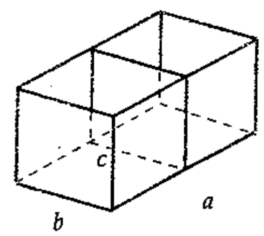
Câu 13: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C. Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1km. Khoảng cách từ B đến A là 4. Mỗi km dây điện đặt dưới nước là mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất.



A. $\frac{15}{4}km$ B. $\frac{13}{4}km$ C. $\frac{10}{4}km$ D. $\frac{19}{4}km$

(Trích "đề thi thử THPT Cái Bè lần I; THPT Nguyễn Đình Chiểu; Sở GD&ĐT Bạc Liêu; THPT chuyên Hạ Long")

Câu 14: Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước *a, b,c* như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước *a, b, c* bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.



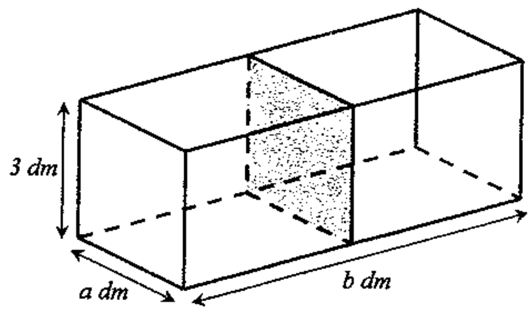
A. $a=3,6m;b=0,6m;c=0,6m$

B. $a=2,4m;b=0,9m;c=0,6m$

C. $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$

D. $a=1,2m;b=1,2m;c=0,9m$

Câu 15: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72dm^3$ và chiều cao là $3dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ.



Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.

A. $a=\sqrt{24}$, $b=\sqrt{24}$. B. $a=3$, $b=8$.

C. $a=3\sqrt{2}$, $b=4\sqrt{2}$. D. $a=4$, $b=6$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 16: Trong bài thực hành của môn huấn luyện quân sự có tình huống chiến sĩ phải bơi qua một con sông để tấn công một mục tiêu ở phía bờ bên kia sông. Biết rằng lòng sông rộng 100m và vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy trên bộ. Hãy cho biết chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất, nếu như dòng sông là thẳng, mục tiêu ở cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay và chiến sĩ cách bờ bên kia sông 100m?

A. $\dfrac{200}{\sqrt{3}}$ B. 100

C. $100\sqrt{101}$ D. $\dfrac{200}{\sqrt{2}}$

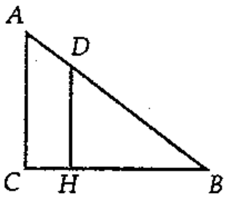
(Trích đề thi thử lần I – THPT Nguyễn Thị Minh Khai)

Câu 17: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $H(x)=0,025x^2(30-x)$ trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân trên để huyết áp giảm nhiều nhất?

A. 10 B. 20 C. 30 D. 15

(Trích đề thi thử "THPT chuyên Lương Văn Tụy;THPT chuyên Lê Quý Đôn")

Câu 18: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường $CH=0,5m$ là:



A. Xấp xỉ 5,602 m B. Xấp xỉ 6,5902 m

C. Xấp xỉ 5,4902 m D. Xấp xỉ 5,5902 m

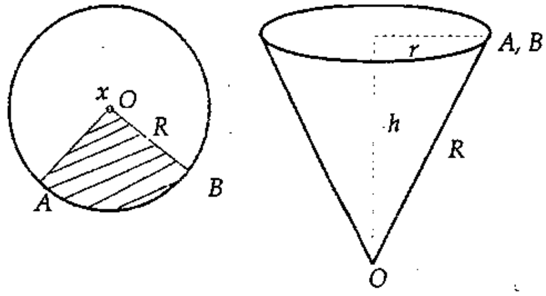
(Trích "bộ đề tinh túy ôn thi THPT quốc gia năm 2017- Lovebook; THPT Hàn Thuyên").

Câu 19: Một nhà sản suất cần thiết kế một thùng đựng dầu nhớt hình trụ có nắp đậy với dung tích là $2000dm^3$. Để tiết kiệm nguyên liệu nhất thì bán kính của nắp đậy phải bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}dm$ B. $\dfrac{20}{\sqrt[3]{\pi}}dm$ C. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}dm$ D. $\dfrac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}dm$

(Trích đề thi thử lần I – Sở GD&ĐT Vĩnh Phúc)

Câu 20: Cắt bỏ hình quạt tròn AOB (hình phẳng có nét gạch trong hình dưới) từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của quạt hình tròn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là số đo góc ở tâm của hình quạt tròn dùng làm phễu, $0<x<2\pi$. Tìm x để khối nón có thể tích lớn nhất?



A. $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{27}\pi$ B. $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

C. $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\pi$ D. Đáp án khác

Trích "sách bộ đề tinh túy 2017; đề thi thử THPT Kim Liên; THPT chuyên Thái Bình")

Câu 21: Từ một miếng tôn hình bán nguyệt có bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (xem hình) có diện tích lớn nhất. Diện tích lớn nhất có thể có của miếng tôn hình chữ nhật là:

A. $6\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{2}$ C. 9 D. 7

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng)

Câu 22: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có chiều rộng là 20cm, chiều dài là 60cm, người ta gò tấm tôn thành mặt xung quanh của một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho chiều rộng của tấm tôn là chiều cao của chiếc hộp. Hỏi thể tích lớn nhất của chiếc hộp là bao nhiêu?

A. $4000\,cm^3$ B. $9000\,cm^3$

C. $18000\,cm^3$ D. $4500\,cm^3$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

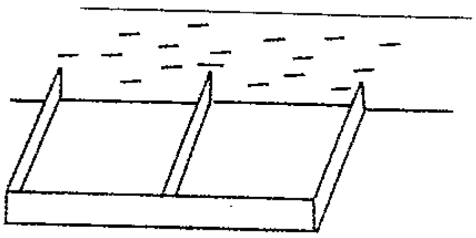
Câu 23: Một người có một dải duy băng dài 130 *cm*, người đó cần bọc dải duy băng đỏ đó quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 *cm* của dải duy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải duy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ B. $32000\pi\ cm^3$

C. $1000\pi\ cm^3$ D. $16000\pi\ cm^3$

(Trích sách bộ đề tinh túy môn toán 2017 – Lovebook)

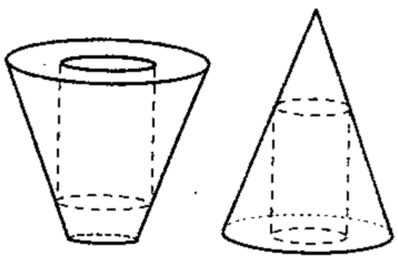
Câu 24: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.



A. $6250\ m^2$ B. $1250m^2$ C. $3125\ m^2$ D. $50\ m^2$

(Trích sách bộ đề tinh túy môn toán 2017 – Lovebook)

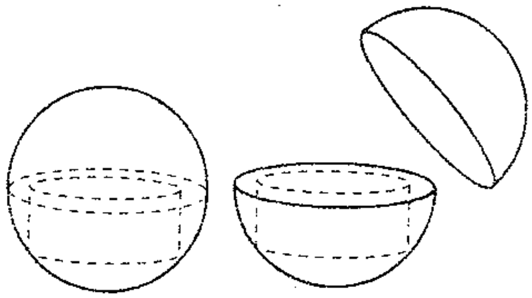
Câu 25: Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống ở dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào vắt mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của một hộp mì tôm (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Vắt mì tôm có hình một khối trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao 9 *cm* và bán kính đáy 6 *cm*. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho vắt mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó?



A. $V=36\pi$ B. $V=54\pi$ C. $V=48\pi$ D. $V=\dfrac{81}{2}\pi$

(Trích sách bộ đề tinh túy môn toán 2017 – Lovebook)

Câu 26: Công ty mĩ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng, như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa). Theo dự kiến, nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R=3\sqrt{3}\ cm$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).

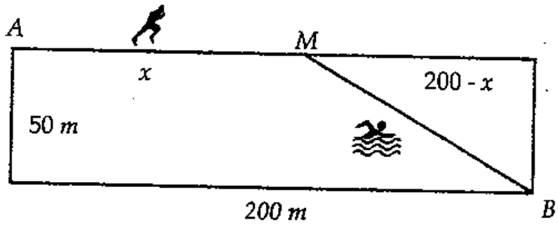


A. $54\pi\ cm^3$ B. $18\pi\ cm^3$

C. $108\pi\ cm^3$ D. $45\pi\ cm^3$

(Trích sách bộ đề tinh túy môn toán 2017 – Lovebook)

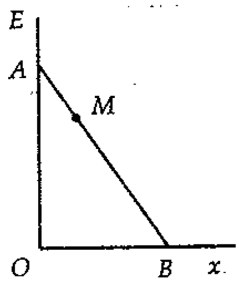
Câu 27: Có một cái hồ hình chữ nhật rộng 50 m, dài 200m. Một vận động viên tập luyện chạy phối hợp với bơi như sau: Xuất phát từ vị trí điểm A chạy theo chiều dài bể bơi đến vị trí điểm M và bơi từ vị trí điểm M thẳng đến đích là điểm B (đường nét đậm) như hình vẽ. Hỏi vận động viên đó nên chọn vị trí điểm M cách điểm A bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) để đến đích nhanh nhất, biết rằng vận tốc bơi là 1,6 m/s, vận tốc chạy là 4,8 m/s.



A. 178 *m* B. 182 *m* C. 180 *m* D. 184 *m*

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần I)

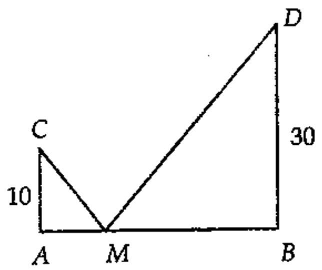
Câu 28: Trên một đoạn đường giao thông có 2 con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M, vị trí M cách đường OE 125m và cách đường Ox 1km. Vì lý do thực tiễn người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M, biết rằng giá để làm 100m đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu?



A. 1,9063 tỷ đồng B. 2,3965 tỷ đồng
C. 2,0963 tỷ đồng D. 3 tỷ đồng

(Trích đề thi thử THPT Lương THế Vinh lần 2)

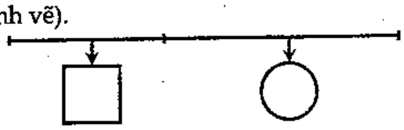
Câu 31: Nhà Văn hóa Thanh niên của thành phố X muốn trang trí đèn dây led gần cổng để đón xuân Đinh Dậu 2017 nên đã nhờ bạn Na đến giúp. Ban giám đốc Nhà Văn hóa Thanh niên chỉ cho bạn Na biết chỗ chuẩn bị trang trí đã có hai trụ đèn cao áp mạ kẽm đặt cố định ở vị trí *A* và *B* có độ cao lần lượt là 10 *m* và 30 *m*, khoảng cách giữa hai trụ đèn 24 *m* và cũng yêu cầu bạn Na chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân trụ đèn để giăng đèn dây Led nối đến hai đỉnh C và D của trụ đèn (như hình vẽ). Hỏi bạn Na phải đặt chốt ở vị trí cách trụ đèn *B* trên mặt đất là bao nhiêu để tổng độ dài của hai sợi dây đèn led ngắn nhất?



A. 20*m*. B. 6*m*. C. 18*m*. D. 12*m*.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 32: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ nhất được uốn thành vòng tròn (như hình vẽ).



Tính độ dài đoạn dây được uốn thành hình vuông sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\dfrac{30}{\pi+4}$ (cm) B. $\dfrac{120}{\pi+4}$ (cm)

C. $\dfrac{60}{\pi+4}$ (cm) D. $\dfrac{240}{\pi+4}$ (cm)

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 33: Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh bằng 16. Học sinh Trang cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M,N thuộc cạnh BC, P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB). Diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $16\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{3}$ C. $32\sqrt{3}$ D. $34\sqrt{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 34: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (*s*) và S tính bằng mét (*m*). Thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t=5s$ B. $t=6s$ C. $t=3s$ D. $t=1s$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 35: Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có thể tích là $64\pi\left(m^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.

A. $r=3(m)$. B. $r=\sqrt[3]{16}(m)$.

C. $r=\sqrt[3]{32}(m)$. D. $r=4(m)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

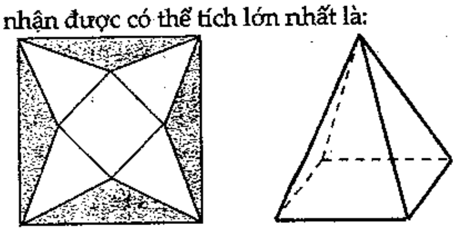
Câu 36: Một xưởng sản xuất những thùng bằng kẽm hình hộp chữ nhật không có nắp và có các kích thước x,y,z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x:y=1:3$, thể tích của hộp bằng 18 lít. Để tốn ít vật liệu nhất thì kích thước của thùng là:

A. $x=2;y=6;z=\dfrac{3}{2}$ B. $x=1;y=3;z=6$

C. $x=\dfrac{3}{2};y=\dfrac{9}{2};z=\dfrac{8}{3}$ D. $x=\dfrac{1}{2};y=\dfrac{3}{2};z=24$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 37: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của nhôm rồi gập lại thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (m) sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là:



A. $x=\dfrac{1}{2}$ B. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

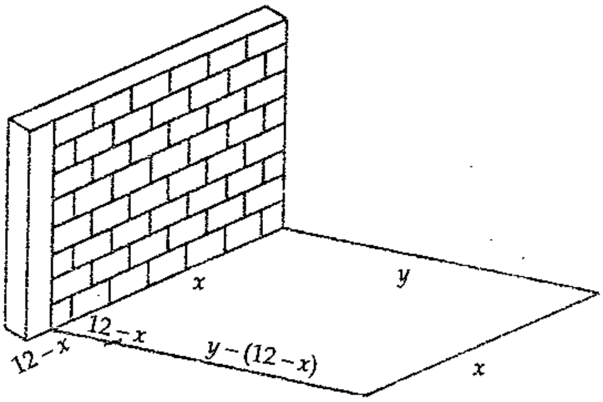
C. $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ D. $x=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

(Trích đề thi thử "THPT Can Lộc – Hà Tĩnh; THPT chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình")

Hướng dẫn giải đáp án chi tiết

Câu 1: Đáp án A.

Giả sử giữ lại x mét dài của bức tường cũ phá đi $12-x$ mét dài để lấy gạch xây một phần tường của nhà kho (hình vẽ).



Nếu a là giá xây $1m$ dài tường với vật liệu mới thì giá sửa chữa x mét dài tường cũ là $\frac{ax}{4}$. Giá xây $12-x$ mét bằng tận dụng vật liệu cũ là $\frac{a(12-x)}{2}$.

Để hoàn chỉnh việc xây cạnh y phải xây $y-(12-x)$ mét dài nữa và tốn thêm $a(x+y-12)$. Gia xây hai bức tường còn lại là $a(x+y)$. Tổng cộng xây tường đã tốn

$$\frac{a}{4}+\frac{a(12-x)}{2}+a(x+y-12)+ax+ay=\frac{a(7x+8y)}{4}-6a$$

Biểu thức này nhỏ nhất khi $7x+8y$ nhỏ nhất, với $xy=112$.

Theo bất đẳng thức Cauchy có

$$7x+8y\ge 2\sqrt{56xy}=112\sqrt{2}.$$

Vậy $7x+8y$ nhỏ nhất khi $7x=8y$.

Từ $xy=112$ và $7x=8y$, tìm được $x=\sqrt{112}\approx 11{,}3$.

Vì bức tường cũ dài $12m$, do đó cần dỡ bỏ khoảng $0{,}7m$ dài của nó.

Câu 2: Đáp án B.

Tương tự như đề minh họa môn Toán năm 2017 lần mà tôi đã đưa ra ở phần ứng dụng lý thuyết.

Ta có chiều cao của khối hộp được tạo thành là x, mặt đáy là hình vuông có cạnh $18-2x$.

Khi đó thể tích của khối hộp được tính bằng công thức

$$V=(18-2x)^2.x=4.x.(x^2-18x+81)=4x^3-72x^2+324x$$

Xét hàm số $f(x)=4x^3-72x^2+324x$ trên $(0;9)$.

Ta có $f'(x)=12x^2-144x+324$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=9\end{array}\right.$

Loại 9, vậy $x=3$.

Câu 3: Đáp án B.

Số lượng cá thu được trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là: $f(n)=n.P(n)=n.(480-20n)=-20n^2+480n$

$=2880-20n^2+480n-2880$

$=2880-20(n^2-24n+144)=2880-20(n-12)^2$

Ta có $2880-20.(n-12)^2\le 2880$.

Dấu bằng xảy ra khi $n=12$.

Câu 4: Đáp án D.

Gọi số căn hộ bị bỏ trống là $x(x\in[0;50])$

Số tiền 1 tháng thu được khi cho thuê nhà là $(2000000+50000x)(50-x)$

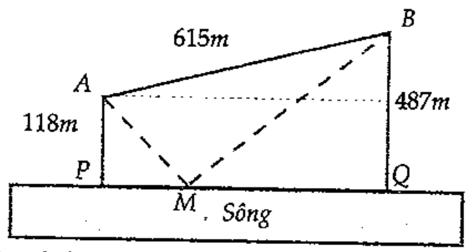
Khảo sát hàm số trên với $x\in[0;50]$ ta được số tiền lớn nhất công ty thu được khi $x=5$ hay số tiền cho thuê mỗi tháng là 2.250.000. Chọn D

Câu 5: Đáp án C.

Bài toán tương tự như ví dụ 8 và 9 mà tôi đã giới thiệu ở trên.

Giả sử người đó đi đến điểm M trên bờ sông, rồi tiếp tục đi từ M về B.

Khi đó ta có hình vẽ minh họa sau:



Quãng đường người đó đi được thể hiện như hình vẽ.

Ta có thể tính PQ như sau:

$$PQ=\sqrt{615^2-(487-118)^2}=492\text{ m}$$

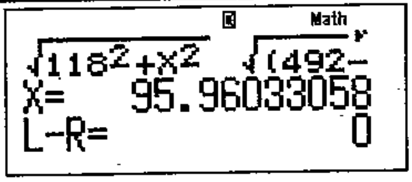
Khi đó nếu đặt $PM=x$ thì $MQ=492-x$.

Vậy, quãng đường người đó đi để lấy nước được tính bằng công thức:

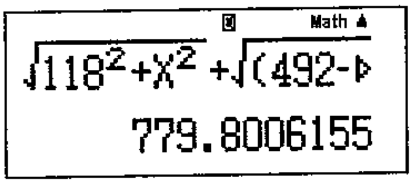
$$S=f(x)=AM+MB=\sqrt{118^2+x^2}+\sqrt{(492-x)^2+487^2}$$

Ta có $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{118^2+x^2}}-\frac{492-x}{\sqrt{(492-x)^2+487^2}}=0$

Đến đây ta nhập vào máy tính sử dụng lệnh SHIFT SOLVE và tìm được X lẻ như hình:



Lúc này giá trị này đã được lưu vào X, nên ta sẽ nhập luôn biểu thức $f(x)$ vào máy, lúc này máy sẽ hiện giá trị của $f(x)$ tại X như màn hình:



Vậy ta chọn C.

Câu 6: Đáp án C.

Phân tích: Một bài toán tối ưu thực tế khá hay, ở đây ta có mối tương quan giữa các biến là cho trước thể tích của hình hộp chữ nhật.

Do đề bài cho mối tương quan giữa chiều rộng và chiều sâu của bể, nên ta có thể quy hết về một ẩn, biểu diễn diện tích toàn phần của bể theo ẩn đó, từ đó xét hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số này.

Lời giải

Nếu đặt chiều rộng của bể là x, khi đó chiều sâu của bể sẽ là $1,5x$.

Lúc này chiều dài đáy bể sẽ là: $\frac{12}{1,5x^2}=\frac{8}{x^2}$.

Vậy diện tích toàn phần của bể là:

$$S_{tp}=S_{xq}+2S_{day}=2.\left(x+\frac{8}{x^2}\right).1,5x+2.x.\frac{8}{x^2}$$

$$=3x^2+\frac{24}{x}+\frac{16}{x}=3x^2+\frac{20}{x}+\frac{20}{x}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương thì ta có $3x^2+\frac{20}{x}+\frac{20}{x}\ge 3\sqrt[3]{3.20.20}$

Dấu bằng xảy ra khi

$$3x^2=\frac{20}{x}\Leftrightarrow x^3=\frac{20}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{20}{3}}\approx 1,88\text{ m}$$

Lúc này chiều dài của bể là: $\frac{8}{x^2}\approx 2,26\text{ m}$

Câu 7: Đáp án A.

Gọi độ dài chiều rộng của bể bơi là x (m) khi đó chiều dài bể bơi là $2x$ (m). Lúc này chiều cao của bể bơi được tính bằng: $h=\frac{500}{3.x.2x}=\frac{250}{3x^2}$ (m).

Do chi phí thuê công nhân tính theo mét vuông, nên để chi phí thấp nhất thì ta đi tìm kích thước của hồ sao cho có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.

Ta có biểu thức tính tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy theo x như sau:

$$S=f(x)=2.(2x+x).\frac{250}{3x^2}+x.2x=\frac{500}{x}+2x^2$$

$$=\frac{250}{x}+\frac{250}{x}+2x^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{250}{x}+\frac{250}{x}+2x^2\ge 3\sqrt[3]{250.250.2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{250}{x}=2x^2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{250}{2}}=5$.

Câu 8: Đáp án D

Phân tích: Đây là bài toán tổng quát, ta nên xét kĩ bài toán này, đưa ra công thức tổng quát để từ đó ta có thể áp dụng luôn công thức.

Lời giải

Gọi hai kích thước của hình trụ lần lượt là $r;h$, trong đó r là bán kính đường tròn đáy và h là chiều cao của hình trụ.

Ta có mối quan hệ: $V=\pi r^2.h\Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất thì diện tích xung quanh của hình trụ phải nhỏ nhất. Tức là:

$$f(r)=2.\pi r.h+2\pi r^2=2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\frac{2V}{r}+2\pi r^2$$

$$=\frac{V}{r}+\frac{V}{r}+2\pi r^2\ge 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

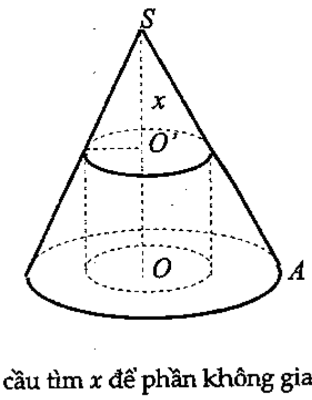
Dấu bằng xảy ra khi $\boxed{\frac{V}{r}=2\pi r^2\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$.

Câu 9: Đáp án A.

Bài toán giống bài toán 8, chỉ thay đổi là lon sữa.

Câu 10: Đáp án C.

Phân tích: Ta có hình vẽ sau:



Đề bài yêu cầu tìm x để phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài (T) đạt giá trị nhỏ nhất, tương đương với tìm x để thể tích khối trụ (T) đạt giá trị lớn nhất. (bài toán này tương tự như bài toán vắt mì tôm mà tôi đã giới thiệu ở câu 11 đề 6 trong sách bộ đề Tinh túy môn toán 2017). Nên ở đây tôi sẽ trình bày lời giải luôn.

Lời giải

Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{x}{h}=\frac{r'}{r}\Rightarrow r'=\frac{xr}{h}$.

Khi đó ta có công thức tính thể tích của khối trụ là

$V=f(x)=\pi(r')^2.(h-x)=\pi\frac{r^2}{h^2}.x^2.(h-x)$.

Khi đó $f'(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}(2hx-3x^2)=0\Leftrightarrow x=\frac{2h}{3}$ do $x>0$.

Đến đây ta chọn C.

Câu 11: Đáp án A.

Ta có hàm vận tốc là đạo hàm của hàm quãng đường, do vậy ta có

$v=s'=-3t^2+12t=-3(t^2-4t+4)+12$

$=12-3(t-2)^2\le 12$

Dấu bằng xảy ra khi $t=2$.

Câu 12: Đáp án C.

Ta có $200=(v-8).t\Rightarrow t=\frac{200}{v-8}$. Khi đó

$E(v)=cv^3.\frac{200}{v-8}$. Do c là hằng số nên để năng lượng tiêu hao ít nhất thì $f(v)=\frac{200v^3}{v-8}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Xét hàm số $f(v)$ trên $(8;+\infty)$ ta có

$f'(v)=200.\frac{3v^2.(v-8)-v^3}{(v-8)^2}=200.\frac{2v^3-24v^2}{(v-8)^2}$;

$f'(v)=0\Leftrightarrow v=12$.

Câu 13: Đáp án B.

Tương tự như bài toán tính thời gian Min thì ở đây là tính giá tiền min.

Giả sử S là điểm mà đường dây điện nối dưới đất từ A đến S, sau đó từ S đến B đường dây điện đặt dưới nước.

Lúc này đặt $SB=x\,(0\le x\le 4)$, khi đó $SA=4-x$.

Khi đó $SC=\sqrt{BC^2+SB^2}=\sqrt{1^2+x^2}=\sqrt{x^2+1}$

Vậy chi phí lắp đặt được tính bằng công thức: $f(x)=5000.\sqrt{x^2+1}+(4-x).3000$ (USD)

Ta có $f'(x)=5000.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-3000=0\Leftrightarrow x=0,75$.

(Bấm máy sửa dụng nút SHIFT SOLVE ta được nghiệm $x=0,75$).

Lúc này $SA=4-0,75=\frac{13}{4}$.

Câu 14: Đáp án C

Do độ dày của kính không đáng kể nên

Thể tích bể cá là: $V=abc=1,296$

Diện tích tổng các miếng kính là

$S=ab+2ac+3bc$ (kể cả miếng ở giữa)

Ta có:

$$\frac{S}{abc}=\underbrace{\frac{1}{c}+\frac{2}{b}+\frac{3}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{c}.\frac{2}{b}.\frac{3}{a}}}_{\text{Cauchy cho 3 so } \frac{1}{c},\frac{2}{b},\frac{3}{a}}=\frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt{abc}}=\frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt{1,296}}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{c}=\frac{2}{b}=\frac{3}{a}\\ abc=1,296\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1,8\\ b=1,2\\ c=0,6\end{cases}$.

Câu 15: Đáp án D.

Phân tích: Tương tự như bài câu 14, tuy nhiên, ở câu 14 có 3 ẩn, và ta biểu diễn hàm theo hai ẩn, còn ở câu này, có hai ẩn, nên ta có thể sử dụng dữ kiện đề bài để đưa về hàm một ẩn.

Lời giải

Do thể tích của bể cá là $72dm^3$ nên ta có

$72=3ab\Leftrightarrow b=\frac{24}{a}$.

Vậy tổng diện tích nguyên liệu để làm bể được tính bằng công thức: $S=f(a)=3.3.a+2.3b+ab$

$\Leftrightarrow f(a)=9a+6.\frac{24}{a}+a.\frac{24}{a}=9a+\frac{144}{a}+24$

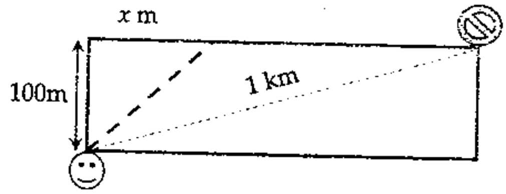
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta được: $9a+\frac{144}{a}\ge 2\sqrt{9a.\frac{144}{a}}=72$

$\Leftrightarrow f(a)\ge 72+24=96$

Dấu bằng xảy ra khi $9a=\frac{144}{a}\Leftrightarrow a=4\Rightarrow b=6$.

Câu 16: Đáp án A.

Bài toán tương tự như bài toán tìm thời gian ngắn nhất ở ví dụ 8, 9. Cũng có hai cách di chuyển, có vận tốc. Ở bài toán này ta có hình vẽ minh họa như sau để dễ tưởng tượng



Đặt vận tốc bơi của chiến sĩ là v, thì vận tốc chạy bộ của chiến sĩ là $2v$.

Kí hiệu như hình vẽ, thì quãng đường bơi của chiến sĩ sẽ là $l_1=\sqrt{x^2+100^2}$

Quãng đường chạy bộ của chiến sĩ là:

$l_2 = \sqrt{1000^2 - 100^2} - x = 300\sqrt{11} - x$

Vậy thời gian mà chiến sĩ đi được đến mục tiêu là:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{v} + \frac{300\sqrt{11} - x}{2v}$$

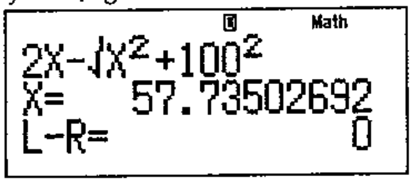
$$= \frac{2\sqrt{x^2 + 100^2} + 300\sqrt{11} - x}{2v}$$

Do v không đổi nên t min khi

$2\sqrt{x^2 + 100^2} + 300\sqrt{11} - x = f(x)$ min.

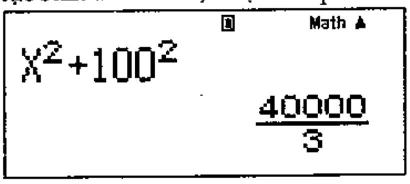
$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 100^2}} - 1 = 0$$

Bấm máy sử dụng SHIFT SOLVE ta được:



Lúc này máy đã tự động gán X. Do đề yêu cầu tìm quãng đường bơi sông tức là ta tìm $l_1 = \sqrt{x^2 + 100^2}$

Ta tiếp tục bấm $X^2 + 100^2$, được kết quả:



Vậy $l_1 = \frac{200}{\sqrt{3}}$.

Câu 17: Đáp án B.

Tìm liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất, tức là tìm x sao cho $H(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $H(x) = 0,025x^2(30 - x) = 0,0125x^2(60 - 2x)$

$= 0,0125.x.x.(60 - 2x)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$x.x.(60 - 2x) \le \left(\frac{x + x + 60 - 2x}{3}\right)^3 = 20^3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 60 - 2x \Leftrightarrow x = 20$.

Câu 19: Đáp án A

Áp dụng công thức tổng quát mà ta đã chứng minh ở câu 8 thì ta có $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{2000}{2\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 20: Đáp án B.

Với bài này độc giả cần nhớ lại công thức tính độ dài cung tròn. Độ dài cung tròn AB dùng làm phễu là:

$Rx = 2\pi r \Leftrightarrow r = \frac{Rx}{2\pi}$;

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

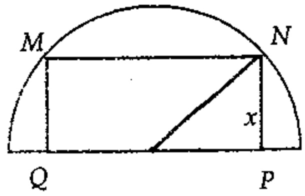
Thể tích cái phễu là:

$V = f(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ với $x \in (0;2\pi)$.

Ta có $f'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}.\frac{x^2(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. Vì đây là BT trắc nghiệm nên ta có thể kết luận luôn rằng thể tích của cái phễu lớn nhất khi $x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. Vì ta đang xét trên $(0;2\pi)$ mà $f'(x) = 0$ tại duy nhất một điểm thì ta có thể làm nhanh mà không vẽ BBT nữa.

Câu 21: Đáp án C.



Đặt $NP = x$. Khi đó $PQ = 2.\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{9 - x^2}$. Lúc này diện tích hình chữ nhật đã cho được tính bằng công thức: $S = 2.x.\sqrt{9 - x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$2.x.\sqrt{9 - x^2} \le x^2 + 9 - x^2 = 9$. Đến đây ta chọn C, mà không cần xét dấu bằng xảy ra nữa.

Câu 22: Đáp án D

Ta có hình vẽ minh họa như sau:

Nếu gọi chiều rộng của đáy hình hộp chữ nhật là x thì chiều dài của đáy hình hộp là $30 - x$. (Với 30 là nửa chu vi đáy).

Lúc này thể tích của hình hộp được tính bằng công thức: $V = f(x) = x.(30 - x).20$

Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \ge 4ab$ ta có

$$20.x.(30 - x) \le 20.\frac{(x + 30 - x)^2}{4} = 4500(cm^3).$$

Câu 23: Đáp án C

Phân tích: Một bài toán thực tế khá hay trong ứng dụng của việc tìm giá trị lớn nhất của hàm số. Ta nhận thấy, dải duy băng tạo thành hai hình chữ nhật quanh cái hộp, do đó chiều dài của dải duy băng chính là tổng chu vi của hai hình chữ nhật đó. Tất nhiên chiều dài duy băng đã phải trừ đi phần duy băng dùng để thắt nơ, có nghĩa là:

$2.2.(2r+h)=120 \Leftrightarrow h=30-2r$

Khi đó thể tích của hộp quà được tính bằng công thức:

$V=B.h=\pi.r^2(30-2r)=\pi.(-2r^3+30r^2)$

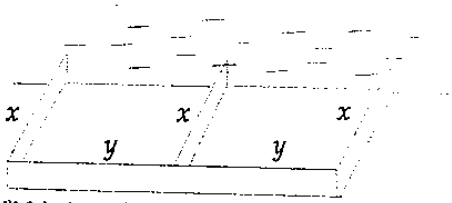
Xét hàm số $f(r)=-2r^3+30r^2$ trên $(0;15)$

$f'(r)=-6r^2+60r$; $f'(r)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=0(l) \\ r=10 \end{array}\right.$

Khi đó vẽ BBT ta nhận ra $\underset{(0;10)}{Max} f(r)=f(10)$. Khi đó thể tích của hộp quà $V=B.h=\pi.10^2.10=1000\pi$.

Câu 24: Đáp án A.

Phân tích: Ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ:



Từ đề bài ban đầu ta có được mối quan hệ sau:

Do bác nông dân trả 15 000 000 đồng để chi trả cho nguyên vật liệu và đã biết giá thành từng mặt nên ta có mối quan hệ:

$3x.50000+2y.60000=15000000$

$\Leftrightarrow 15x+12y=1500$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{150-15x}{12}=\dfrac{500-5x}{4}$

Diện tích của khu vườn sau khi đã rào được tính bằng công thức:

$f(x)=2.x.y=2x.\dfrac{500-5x}{4}=\dfrac{1}{2}(-5x^2+500x)$

Đến đây ta có hai cách để tìm giá trị lớn nhất của diện tích:

Cách 1: Xét hàm số trên một khoảng, vẽ BBT và kết luận GTLN:

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}(-5x^2+500x)$ trên $(0;100)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(-10x+500)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=50$

Ta có BBT:

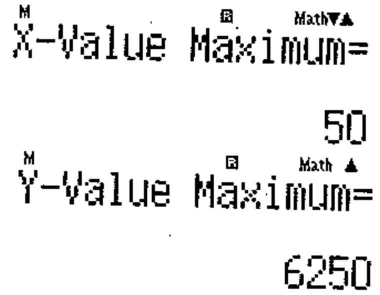
x	0		50		100
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	6250	$\searrow$	

Cách 2: Nhẩm nhanh như sau: Ta biết rằng $A-g^2(x)\le A$ với mọi x, nên ta có thể nhẩm nhanh được:

$f(x)=\dfrac{5}{2}(-x^2+100x)=\dfrac{5}{2}(-x^2+2.50.x-2500+2500)$

$=\dfrac{5}{2}\left[2500-(x-5)^2\right]\le 6250$

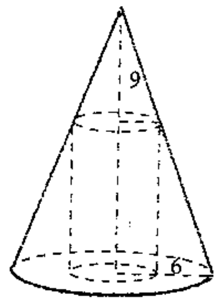
Hoặc bấm máy tính phần giải phương trình bậc hai và ấn bằng nhiều lần máy sẽ hiện như sau:



Vậy ta đã có kết quả của bài toán.

Câu 25: Đáp án C.

Phân tích: Đây thực chất là bài toán khối trụ nội tiếp khối nón, ta có kí hiệu các kích thước như sau:



Ta có thể tích vắt mì tôm được tính bằng

$V=B.h=\pi.r^2.h$

Đây là ứng dụng của bài toán tìm GTLN, GTNN trên một khoảng (đoạn) xác định:

Ta sẽ đưa thể tích về hàm số một biến theo h hoặc r. Trước tiên ta cần đi tìm mối liên hệ giữa h và r. Nhìn vào hình vẽ ta thấy các mối quan hệ vuông góc và song song, dùng định lí Thales ta sẽ có:

$\dfrac{h}{9}=\dfrac{6-r}{6} \Leftrightarrow h=\dfrac{18-3r}{2}$

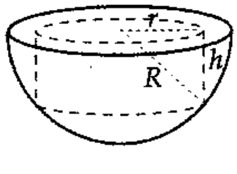
Khi đó $V=f(r)=\pi r^2.\dfrac{18-3r}{2}=-\dfrac{3\pi r^3}{2}+9\pi r^2$ với $0<r<6$

$f'(r)=-\dfrac{9}{2}\pi.r^2+18\pi r=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r=0 \\ r=4 \end{array}\right.$

Khi đó ta không cần phải vẽ BBT ta cũng có thể suy ra được với $r=4$ thì V đạt GTLN, khi đó $V=48\pi$.

Câu 26: Đáp án A.

Đây là một bài toán thực tế dựa trên ứng dụng: khối trụ nội tiếp nửa khối cầu. Ta có mặt cắt của nửa khối cầu đựng mĩ phẩm với các kích thước được thể hiện trong hình vẽ sau:



Ý tưởng của bài toán này dựa trên kiến thức chúng ta đã học là tìm GTLN-GTNN của hàm số một biến trên 1 khoảng (đoạn). Ở đây có hai biến đó là r và h. Do đó ta sẽ tìm cách để đưa về một biến, đưa biến này theo biến kia. Ở đây tôi sẽ đưa r theo h.

Ta nhận thấy theo định lý Pytago thì $r^2 = R^2 - h^2$

Khi đó $V_{tru} = B.h = \pi r^2.h = \pi\left(R^2 - h^2\right).h = \pi\left(-h^3 + R^2.h\right)$

Để thể tích khối trụ lớn nhất thì $f\left(h\right) = -h^3 + R^2.h$ có GTLN trên $\left(0;R\right)$.

$$f'\left(h\right) = -3h^2 + R^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} = 3$$

Ta có BBT (dĩ nhiên trong khi làm bài thi trắc nghiệm, quý độc giả không nhất thiết phải vẽ BBT làm gì. Tuy nhiên tôi vẫn vẽ ở đây để giải thích rõ cho quý độc giả hiểu.

h	0		$\frac{R}{\sqrt{3}}$		R
$f'(h)$		+	0	-	
$f(h)$		$\nearrow$	$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$	$\searrow$	

Mà $f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = f\left(3\right) = -3^3 + \left(3\sqrt{3}\right)^2.3 = 54$.

Vậy $V_{\max} = 54\pi$.

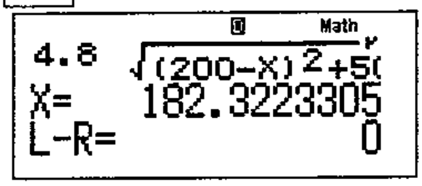
Câu 27: Đáp án B.

Tương tự như các bài toán trên, ta thiết lập được luôn công thức tính thời gian:

$$t = \frac{x}{4,8} + \frac{\sqrt{\left(200-x\right)^2 + 50^2}}{1,6}$$

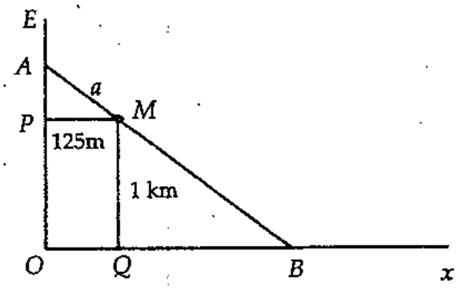
Ta có $t' = \frac{1}{4,8} + \frac{-\left(200-x\right)}{1,6.\sqrt{\left(200-x\right)^2 + 50^2}} = 0 \Leftrightarrow x \approx 182m$

Giải phương trình trên bằng cách bấm máy, sử dụng $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{CALC}}$



Câu 28: Đáp án C.

Ta có hình vẽ minh họa như sau:



Kí hiệu như hình vẽ.

Đặt $AM = a$. Lúc này để viết MB theo a, ta để ý thấy hai tam giác APM và MQB đồng dạng.

Lúc này $\frac{AP}{MQ} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow MB = \frac{AM.MQ}{AP} = \frac{a.1000}{\sqrt{a^2 - 125^2}}$

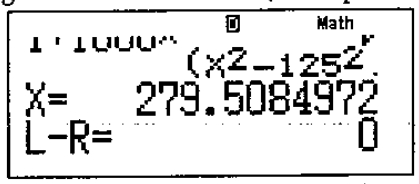
Lúc này để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất, tức là AB có độ dài ngắn nhất.

Tức là $f\left(a\right) = a + \frac{1000a}{\sqrt{a^2 - 125^2}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'\left(a\right) = 1 + 1000.\frac{\sqrt{a^2 - 125^2} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - 125^2}}}{a^2 - 125^2}$

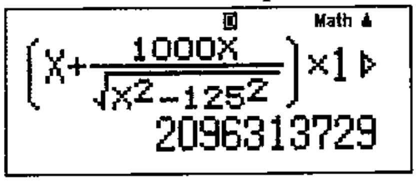
$= 1 + 1000.\frac{-125^2}{\left(a^2 - 125^2\right).\sqrt{a^2 - 125^2}} = 0 \Leftrightarrow a \approx 279,5$.

Sử dụng nút SHIFT Solve ta được kết quả như trên.



Lúc này chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là: $f\left(a_0\right).\frac{150000000}{100} \approx 2,0963$ tỷ đồng.

Do máy tính đã gán giá trị nghiệm tìm được vào X nên ta không cần dùng lệnh SHIFT STO mà nhập luôn X vào biểu thức để có kết quả:



Câu 31: Đáp án C.

Bài toán quen thuộc, đặt $AM = x$; khi đó $BM = 24 - x$. Lúc này ta có độ dài đoạn dây đèn led được tính bằng công thức:

$$f\left(x\right) = CM + DM = \sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{\left(24-x\right)^2 + 30^2}$$

$$f'\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 10^2}} + \frac{-\left(24-x\right)}{\sqrt{\left(24-x\right)^2 + 30^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 6 .$$

Lúc này $MB = 24 - 6 = 18$ (m).

Câu 32: Đáp án A.

Gọi x là độ dài cạnh hình vuông và r là bán kính của hình tròn.

Ta có $4x + 2\pi r = 60$.

Từ đó $x = \frac{1}{2}(30 - \pi r), 0 < r < \frac{30}{\pi}$.

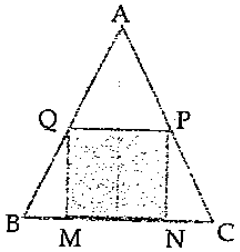
Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là

$S = \pi r^2 + x^2 = \pi r^2 + \frac{1}{4}(30 - \pi r)^2$.

Xét hàm số $f(r) = \left(\pi + \frac{\pi^2}{4}\right) r^2 - 15\pi r + 225$

Ta có $f'(r) = 2\left(\pi + \frac{\pi^2}{4}\right) r - 15\pi = 0 \Leftrightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$.

Câu 33: Đáp án C



Đặt nửa chiều dài của hình chữ nhật là x $(0 < x < 8)$,

Lúc này suy ra $NC = 8 - x$

Áp dụng định lý Thales ta có $\frac{NC}{8} = \frac{CP}{AC}$

$\Leftrightarrow CP = \frac{(8-x).16}{8} = 2(8-x)$

Áp dụng định lý Pytago ta có

$(2(8-x))^2 = (8-x)^2 + NP^2 \Leftrightarrow NP = (8-x)\sqrt{3}$

Vậy $S_{MNPQ} = 2x.(8-x)\sqrt{3}$

Áp dụng bất đẳng thức $4ab \le (a+b)^2$ ta có:

$4.x.(8-x)\frac{\sqrt{3}}{2} \le 32\sqrt{3}$.

Câu 34: Đáp án C.

Ta có $v = \left(-2t^3 + 18t^2 + 2t + 1\right)' = -6t^2 + 36t + 2$

$v' = -12t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 3s$.

Câu 35: Đáp án C.

Gọi chiều cao của bể là h, lúc này ta có

$V = \pi r^2.h = 64\pi \Leftrightarrow r^2.h = 64 \Rightarrow h = \frac{64}{r^2}$.

Vậy ta có diện tích toàn phần của bể là:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2\pi.r.\frac{64}{r^2} + 2\pi r^2 = 2\pi\left(\frac{64}{r} + r^2\right)$

$= 2\pi\left(\frac{32}{r} + \frac{32}{r} + r^2\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$2\pi\left(\frac{32}{r} + \frac{32}{r} + r^2\right) \ge 3\sqrt[3]{32.32}$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{32}{r} = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{32}$.

Câu 36: Đáp án A.

Ta có $y = 3x$, lúc này theo đề bài ta có

$xyz = 18 \Leftrightarrow 3x^2z = 18 \Leftrightarrow z = \frac{6}{x^2}$

Lúc này $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{day} = 2.(x + 3x).\frac{6}{x^2} + 2.x.3x$

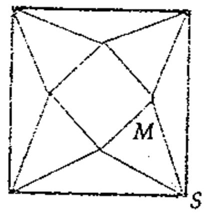
$= \frac{24}{x} + \frac{24}{x} + 6x^2 \ge 2\sqrt{24.24.6}$

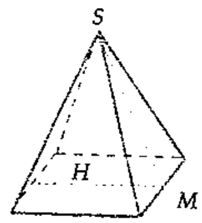
Dấu bằng xảy ra khi $\frac{24}{x} = 6x^2 \Leftrightarrow 6x^3 = 24 \Leftrightarrow x = 2$

Suy ra $y = 6; z = \frac{3}{2}$.

Câu 37: Đáp án D

Ta có hình vẽ





Kí hiệu như hình vẽ. Do hình vuông có cạnh là 1m nên độ dài đường chéo của hình vuông là $\sqrt{2}$ m.

Lúc này ta có $MS = \frac{\sqrt{2} - x}{2}$ m.

Vậy áp dụng định lý pytago cho tam giác vuông SHM ta có:

$SH = \sqrt{SM^2 - HM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.\sqrt{2 - 2\sqrt{2}x}$

Vậy $V = \frac{1}{3}.SH.x^2 = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\sqrt{2 - 2\sqrt{2}x}.x^2$

Điều kiện $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2 - 2\sqrt{2}x} - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{2 - 2\sqrt{2}x}}$

$\Leftrightarrow 2\left(2 - 2\sqrt{2}x\right) = x\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

I.III. Đường tiệm cận.

STUDY TIP: Khi tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta có thể sử dụng tính chất sau

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^r}=0, r>0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^r}=0, r>0$.

A. Lý thuyết về đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y=y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=y_0;\lim_{x\to-\infty}f(x)=y_0.$$

Ví dụ 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+3}{5x+6}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{5x+6}=\frac{2}{5}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{5x+6}=\frac{2}{5}$. Vậy đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang $y=\frac{2}{5}$.

Ví dụ 2: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=5-\frac{2}{x^2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}5-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2}=5-2.0=5$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận ngang là $y=5$.

Có một cách dễ dàng để xác định xem đồ thị của một phân thức có một tiệm cận ngang. Cách làm này được dựa trên sự so sánh về bậc của đa thức tử số và của đa thức mẫu số của hàm phân thức.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm phân thức

Đặt $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ là một hàm phân thức, trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm đa thức.

1. Nếu bậc của đa thức tử số $p(x)$ nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số $q(x)$, thì $y=0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

2. Nếu bậc của đa thức tử số $p(x)$ bằng bậc của đa thức mẫu số $q(x)$, thì $y=\frac{a}{b}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$, trong đó a, b lần lượt là hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của đa thức tử số $p(x)$ và đa thức mẫu số $q(x)$.

3. Nếu bậc của đa thức tử số $p(x)$ lớn hơn bậc của đa thức mẫu số $q(x)$ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.

Ví dụ 3: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

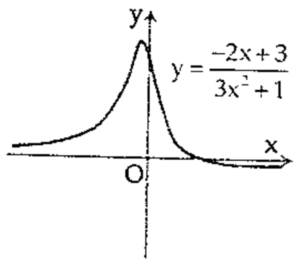
a. $y=\dfrac{-2x+3}{3x^2+1}$ b. $y=\dfrac{-2x^2+3}{3x^2+1}$ c. $y=\dfrac{-2x^3+3}{3x^2+1}$

Lời giải

a. Vì bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. (hình 1.23)

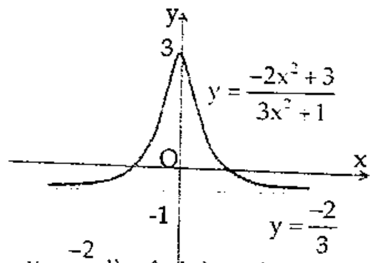
b. Vì bậc của đa thức tử số bằng bậc của đa thức mẫu số nên đường thẳng $y=\dfrac{-2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. (hình 1.24)

c. Vì bậc của đa thức tử số lớn hơn bậc của đa thức mẫu số nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang (hình 1.25).



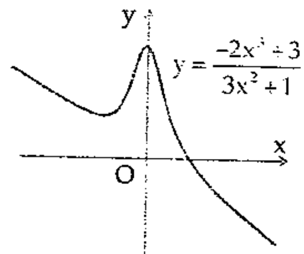
$y = 0$ là một đường tiệm cận ngang

Hình 1.23



$y=\dfrac{-2}{3}$ là một đường tiệm cận ngang

Hình 1.24



không có đường tiệm cận ngang

Hình 1.25

B. Lý thuyết về đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Định nghĩa

> Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn
>
> $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty,$
>
> $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty.$

Một trong những trường hợp phổ biến thường thấy trong các bài toán tìm tiệm cận đó là đường tiệm cận đứng của hàm phân thức (hàm có dạng $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, trong đó $p(x)$ và $q(x)$ là các hàm đa thức.

> Nếu c là một số thực mà thỏa mãn $q(c)=0$ và $p(c)\neq 0$, khi đó đồ thị hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận đứng $x=c$.

Ví dụ 4: Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ là

A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lương Văn Tụy)

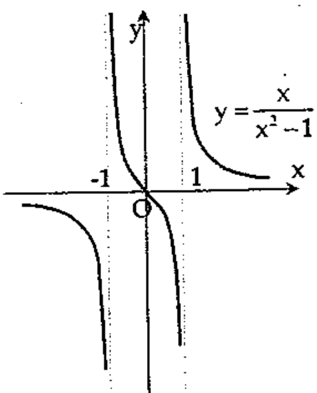
Đáp án D

Lời giải

Nhận thấy bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1; x=1$ (thỏa mãn không là nghiệm của đa thức tử số), do đó $x=1$; $x=-1$ lần lượt là hai đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Kiểm tra lại ở hình 1.26 là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ (thỏa mãn).



Hình 1.26

STUDY TIP: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0)$; $ad-bc\neq 0$ luôn có một TCĐ: $x=\dfrac{-d}{c}$; một TCN $y=\dfrac{a}{c}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\dfrac{7}{2x+5}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số bằng

A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lương Văn Tụy)

Đáp án A.

Lời giải

Đây là hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên luôn có một tiệm cận đứng là $x=\dfrac{-5}{2}$ và một tiệm cận ngang là $y=0$.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2+mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. Không có giá trị thực nào của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài

B. $0\le m\le 4$ hoặc $m=-\dfrac{4}{3}$

C. $m\in\left\{0;4;-\dfrac{4}{3}\right\}$

D. $m\le 0$ hoặc $m\ge 4$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai)

Đáp án C.

Lời giải

Ta thấy đây là hàm phân thức nên ta có thể áp dụng các chú ý đưa ra ở phần lý thuyết về tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng thì phương trình $x^2+mx+m=0$

TH1: có duy nhất một nghiệm $\Leftrightarrow m^2-4m=0 \Leftrightarrow m=0; m=4$.

TH2: có một nghiệm bằng 2, một nghiệm khác 2 $\Leftrightarrow 2^2+2m+m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-4}{3}$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai)

Đáp án A.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang ta suy ra được A là đáp án đúng.

Ví dụ 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-\sqrt{mx^2+1}}{x-1}$ có đúng hai tiệm cận ngang.

A. $m<0$

B. $0<m<3$ hoặc $m>3$

C. $m>0$

D. $m=0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai)

Đáp án C

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sqrt{mx^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{2-\sqrt{m}}{1}=2-\sqrt{m}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-\sqrt{mx^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\sqrt{m+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{2+\sqrt{m}}{1}=2+\sqrt{m}$

Vậy để đồ thị hàm số có đúng hai tiệm cận ngang thì $2-\sqrt{m};2+\sqrt{m}$ xác định và không trùng nhau, tức là $m>0$.

Ví dụ 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy.

A. $m\neq 0$.

B. Đáp án khác.

C. $m<0$.

D. $m>0$.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội)

Đáp án B.

Lời giải

STUDY TIP: Ta chú ý điều kiện $ad-bc\neq 0$

Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì $m\neq\dfrac{5}{4}$

Áp dụng **STUDY TIP** ở trên thì đồ thị hàm số đã cho luôn có một tiệm cận đứng là $x=m$. Do vậy để tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy thì $m>0$ và $m\neq\dfrac{5}{4}$.

Ví dụ 10: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

A. 3 và $x=-2$.

B. $x=-3$.

C. $x=3$ và $x=2$.

D. $x=3$.

(Trích đề minh họa lần 2 của BGD&ĐT)

Đáp án D.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $\left[\begin{array}{l}x\neq 3\\ x\neq 2\end{array}\right.$

Ghi nhớ: Với các bài toán tìm tiệm cận của các đồ thị hàm số phân thức, ta nên xét xem tử số và mẫu số đã tối giản hay chưa để tránh sai lầm.

Ta có $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\dfrac{4x^2-4x+1-x^2-x-3}{\left(x^2-5x+6\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

$=\dfrac{3x^2-5x-2}{(x-2)(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=\dfrac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$

Đến đây ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}y=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3x+1}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\infty;\lim\limits_{x\to 3^+}y=+\infty.$

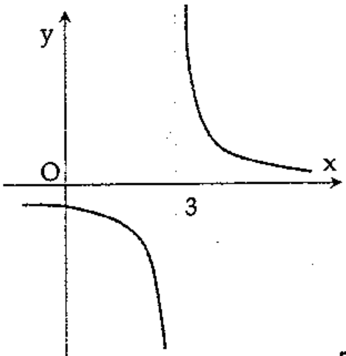
Vậy đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng là $x=3$.

<u>*Phân tích sai lầm:*</u> Nhiều độc giả không thực hiện rút gọn nhân tử $x-2$ dẫn đến chọn hai tiệm cận đứng là $x=2;x=3$ là sai.

Đây cũng chính là ứng dụng của lý thuyết về tiệm cận đứng của đồ thị hàm số ở phía trên . Một cách khác để nhanh chóng giải bài toán trên như sau:

1. Giải phương trình $x^2-5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

2. Thử xem $x=2;x=3$ có phải nghiệm của đa thức tử số hay không, thử lại thấy $x=3$ không là nghiệm (thỏa mãn).



Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

Ví dụ 11. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận là các đường thẳng $x=-2$, $x=-3$ và $y=0$

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-2$ và $x=-3$

C. Đồ thị hàm số đã cho có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-3$ và một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$

D. Đồ thị hàm số đã cho chỉ có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Đáp án C.

Lời giải

Tương tự như bài toán trên:

1. Vì đây là hàm phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.

2. Giải phương trình $x^2+5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$. Ta thấy với $x=-2$ thì $2x+4=0$

Do vậy $x=-2$ không phải là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho. Do vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-3$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

C. Một số dạng toán thường gặp liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số

Xét hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d};(ad-bc\neq 0)$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, suy ra $M\left(x_0;\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng: $x=\frac{-d}{c}$;

Tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}$;

Khi đó ta có khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận lần lượt là:

$$d_1=\left|x_o+\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|;d_2=\left|y_0-\frac{a}{c}\right|=\left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|$$

Khi đó ta có các kết quả sau:

$$d_1.d_2=\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|.\left|\frac{ad-bc}{c.(cx_0+d)}\right|=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|=p$$

STUDY TIP:
Một cách nhớ nhanh công thức này là công thức này gần giống với công thức đạo hàm của hàm , chỉ khác mẫu số ở đây chỉ có hệ số c bình phương.

$y'=\frac{ad-bc}{MS^2}$;

$d_1d_2=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|$

Ví dụ 12: Cho đường cong $(C):y=\frac{2x+3}{x-1}$ và M là một điểm nằm trên (C). Giả sử d_1,d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) khi đó tích $d_1.d_2$ bằng:

A. 4 B. 3 C. 6 D. 5

(Trích đề thi thử TTLT ĐH Diệu Hiền – Cần Thơ)

Đáp án D

Lời giải

Áp dụng công thức đóng khung vừa chứng minh phía trên thì ta có:

$$d_1.d_2=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|=\left|\frac{2.(-1)-3.1}{1^2}\right|=5.$$

Đến đây ta có bài toán:

Bài toán 1: Tìm điều kiện sao cho tổng khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ trên đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là nhỏ nhất.

Lời giải tổng quát

Từ các kết quả trên ta có tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số được tính bằng công thức:

$$\sum d=d_1+d_2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$d_1+d_2\geq 2\sqrt{d_1d_2}=2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}=2\sqrt{p}$$

Dấu bằng xảy ra khi $d_1=d_2\Leftrightarrow\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|=\left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|\boxed{\Leftrightarrow(cx_0+d)^2=|ad-bc|}$

Ví dụ 13: Tìm hoành độ dương của điểm M thuộc đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x+1}$ biết rằng tổng khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) đạt nhỏ nhất:

A. $\sqrt{3}-1$ B. $1+\sqrt{3}$ C. $2-\sqrt{3}$ D. Đáp số khác

(*Trích đề thi thử THPT Yên Phong*)

Đáp án A

Lời giải

Áp dụng công thức trên ta có để khoảng cách từ M tới hai đường tiệm cận của (C) đạt nhỏ nhất thì $(cx_0+d)^2=|ad-bc| \Leftrightarrow (x_0+1)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3}-1 \\ x=-1-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Do đề bài yêu cầu tìm hoành độ dương nên ta chọn A.

Bài toán 2: **Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ trên đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng bằng k lần khoảng cách từ M đến đường tiệm cận ngang.**

STUDY TIP:
Lưu ý $p=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|$ là công thức nên ghi nhớ, vì nó áp dụng rất nhiều trong các bài toán sau này.

Lời giải tổng quát

Ở kết quả ban đầu ta có:

$$d_1=\left|x_0+\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{cx_0+d}{c}\right|; d_2=\left|y_0-\frac{a}{c}\right|=\left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|$$

Từ đây ta có $d_1=kd_2 \Leftrightarrow \left|\frac{cx_0+d}{c}\right|=k.\left|\frac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right| \boxed{\Rightarrow x_0=-\frac{d}{c}\pm\sqrt{kp}}$

Bài toán 3: **Tìm điểm $M(x_0;y_0)$ trên đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ sao cho khoảng cách từ M đến điểm I là ngắn nhất, biết I là giao điểm của hai đường tiệm cận.**

Lời giải tổng quát

Ta có $M\left(x_0;\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$, $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$

Khi đó $IM^2=\left(x_0+\frac{d}{c}\right)^2+\left(\frac{ax_0+b}{cx_0+d}-\frac{a}{c}\right)^2=d_1^2+d_2^2\geq 2d_1d_2$ (bất đẳng thức Cauchy)

$\Leftrightarrow IM\geq\sqrt{2p}$, dấu bằng xảy ra khi $\boxed{x_0=-\frac{d}{c}\pm\sqrt{p}}$

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Bài toán liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số không chứa tham số.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$		$-$	||	$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. Hàm số không có đạo hàm tại $x=0$ nhưng vẫn đạt cực trị tại $x=0$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3$ và $y=3$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 2: Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận ngang $y=2$.

D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=-1;y=2$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\dfrac{3}{2x-1}$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG:

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\dfrac{3}{2}$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $x=\dfrac{1}{2}$.

C. Đồ thị có tiệm cận ngang là $y=0$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo)

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào đúng?

A. Đường tiệm cận ngang của (C) là đường thẳng $y=2$

B. Đường tiệm cận đứng của (C) là đường thẳng $x=1$

C. Đường tiệm cận ngang của (C) là đường thẳng $x=-1$

D. Đường tiệm cận đứng của (C) là đường thẳng $y=2$

(Trích đề thi thử THPT Tiên Du số 1)

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên các khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Với giả thiết đó, hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

A. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$

B. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$

C. Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$

D. Đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$

(Trích "đề thi thử SGD&ĐT Hưng Yên; THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa")

Câu 6: Đường thẳng $y=-1$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số:

A. $y=\dfrac{-3x+4}{3+x}$ B. $y=\dfrac{-x^2+1}{x+2}$

C. $y=\dfrac{x+5}{6-x}$ D. $y=\dfrac{-1}{x+2}$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần I)

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-9}$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG:

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\pm3$

B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận

D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo)

Câu 8: Cho đường cong $(C):y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ và M là một điểm nằm trên (C). Giả sử d_1,d_2 tương ứng là các khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) khi đó tích d_1d_2 bằng:

A. 4 B. 3 C. 6 D. 5

(Trích đề thi thử TTLT ĐH Diệu Hiên – Cần Thơ)

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=3$ và $x=-3$

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=3$ và $y=-3$

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y=0$.

C. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một tiệm cận ngang là trục hoành.

D. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần I)

Câu 11: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 1 B. 0 C. 3 D. 2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{4x-1}{2x+3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

C. Đồ thị (C) có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị (C) không có tiệm cận.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 13: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x^2+x-4}$ có:

A. một tiệm cận ngang

B. một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng

C. một tiệm cận ngang và hai tiệm cận đứng

D. hai tiệm cận đứng

(Trích "đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng; THPT Năng Khiếu THCM lần I")

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=1;\ x=-3$

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=3$.

D. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Câu 15: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x^2-7x+6}$ có số đường tiệm cận là?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 16: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Văn Trỗi – Hà Tĩnh)

Câu 17: Cho hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}$ có đồ thị là (C). Gọi m là số tiệm cận của (C) và n là giá trị của hàm số tại $x=1$ thì tích mn là:

A. $\dfrac{6}{5}$ B. $\dfrac{2}{15}$ C. $\dfrac{14}{5}$ D. $\dfrac{3}{5}$

(Trích đề thi thử TTLT ĐH Diệu Hiền – Cần Thơ)

Câu 18: Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+6}}$ là:

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Tiên Du số 1)

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-1$, có tiệm cận đứng là $x=0$.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$,

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$, có tiệm cận đứng là $x=0$.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=1$, có tiệm cận đứng là $x=0$.

(Trích "đề thi thử SGD&ĐT Hưng Yên; THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa; THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc")

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$. Chọn mệnh đề đúng.

A. Nếu $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$ thì $x=1$ là tiệm cận đứng

B. Nếu $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ thì $x=-1$ là tiệm cận đứng

C. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ thì $y=1$ là tiệm cận ngang

D. Nếu $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$ thì $y=1$ là tiệm cận ngang

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang

B. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang phân biệt

C. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$

D. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai)

Câu 22: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}$:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 23: Đồ thị hàm số nào dưới đây có đúng hai đường tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}$ B. $y=\dfrac{|x|-2}{x+1}$

C. $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$ D. $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần I)

Câu 24: Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y=\dfrac{2x^2+3x+2}{2-x}$ B. $y=\dfrac{2x-2}{x+2}$

C. $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ D. $y=\dfrac{1+x^2}{1+x}$

(Trích đề thi thử THPT Nhã Nam – Bắc Giang)

Câu 25: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên Amsterdam – Hà Nội)

Câu 26: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{2x+1}-x}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận (gồm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A. 1 B. 4 C. 3 D. 2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 27: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Câu 28: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{x^2+x+1}}{x^3+1}$.

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

B. $x=1$

C. $x=0$

D. $x=-1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP lần 2)

Câu 29: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}$. Đồ thị hàm số có mấy tiệm cận?

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

Câu 30: Đồ thị hàm số nào dưới đây không có tiệm cận ngang?

A. $y=x+\sqrt{x^2-1}$ B. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

C. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ D. $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

Câu 31: Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 32: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-4x+5}{2x+3}$ tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. $\dfrac{3}{2}$.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 33: Đồ thị của hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. B. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$.

C. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2-2x-3}$. D. $y=\dfrac{x+3}{2x-1}$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 34: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận?

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 35: Đồ thị hàm số nào sau đây có 1 đường tiệm cận.

A. $y=\sqrt{x^2-4x+10}+x$ B. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

C. $y=\dfrac{-1}{x}$ D. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-4}$

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I)

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

A. Hàm số có tiệm cận đứng là $y = 1$.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có tiệm cận ngang là $x = 2$.

D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Amsterdam HN)

Dạng 2: Bài toán liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số.

Câu 37: Cho hàm số: $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 2mx + 4}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$

B. $\begin{cases} m < -2 \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m \neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

D. $m > 2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 38: Cho hàm số: $y = \dfrac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Khi đó tổng $m+n$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{3}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn; THPT chuyên Mặt Trăng")

Câu 39: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{mx^2 - 2x + 3}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận

A. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \dfrac{1}{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} m < \dfrac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \\ m < \dfrac{1}{5} \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{1}{3} \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Mặt Trăng)

Câu 40: Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x^2 + 4x + m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba tiệm cận?

A. $m > 4$ và $m \neq 3$. B. $m < 4$.

C. $m < 4$ và $m \neq 3$. D. $m \in \mathbb{R}$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Câu 41: Tìm tất cả giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{mx^2 + 3mx + 1}}{x+2}$ có ba tiệm cận.

A. $0 < m < \dfrac{1}{2}$. B. $0 < m \leq \dfrac{1}{2}$.

C. $m \leq 0$. D. $m \geq \dfrac{1}{2}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 42: Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x} - m}{x-1}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $(-\infty; +\infty) \setminus \{1\}$. B. $(-\infty; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 43: Tìm m để hàm số $y = \dfrac{mx-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m \notin \{-1; 1\}$. B. $m \neq 1$.

C. $m \neq -1$. D. không có m.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 45: Biết đồ thị $y = \dfrac{(a-2b)x^2 + bx + 1}{x^2 + x - b}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 0$. Tính $a + 2b$.

A. 6 B. 7 C. 8 D. 10

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2 + 4x + m}$ có hai đường tiệm cận đứng.

A. $m < 4$ B. $m > 4$

C. $\begin{cases} m < 4 \\ m \neq -5 \end{cases}$ D. $m > -5$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 47: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + m}$ có 2 tiệm cận đứng

A. $m < 1$ và $m \neq -8$ B. $m \neq 1$ và $m \neq -8$

C. $m > 1$ và $m \neq -8$ D. $m > 1$

(Trích "đề thi thử SGD&ĐT Hưng Yên; THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa")

Câu 48: Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+m}$ đi qua điểm $M(2;3)$ là:

A. 0 B. -2 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Nhã Nam – Bắc Giang)

Câu 49: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$. Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giá trị của tham số m là:

A. $m=0$ B. $m=0;\ m=1$

C. $m=1$ D. Không tồn tại m

(Trích đề thi thử THPT chuyên Amsterdam – Hà Nội)

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	2	↘	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

B. Phương trình $f(x)=m$ có 3 nghiệm thực phân biệt thì $m\in(1;2)$.

C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 2.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 51: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$-$	||	$-$	
y	2	↗	5	↘	-3 || 4	↘	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Giá trị cực đại của hàm số bằng 5

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận

C. Phương trình $f(x)-1=0$ có đúng hai nghiệm thực

D. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(0;2)$ bằng 5.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai)

Câu 52: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx-2}$. Tìm a, b để đồ thị hàm số có $x=1$ là tiệm cận đứng và $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

A. $a=-1;\ b=-2$. B. $a=1;\ b=-2$.

C. $a=-1;\ b=2$. D. $a=4;\ b=4$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 53: Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-6x+m}{4x-m}$ không có tiệm cận đứng?

A. $m=2$ B. $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=8\end{array}\right.$ C. $m=16$ D. $m=1$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 54: Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+m}{x-1}$. Với giá trị nào của m thì đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

A. $m=\pm 2$ B. $m=\pm 4$ C. $m=4$ D. $m=2$

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 55: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-m}$. Để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng thì các giá trị của tham số m là:

A. $m=0$ B. $m=0;\ m=1$

C. $m=1$ D. Không tồn tại m

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hà Nội Amsterdam)

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2+mx+m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. Không có giá trị thực nào của tham số m thỏa mãn yêu cầu đề bài

B. $0\le m\le 4$ hoặc $m=-\dfrac{4}{3}$

C. $m\in\left\{0;4;-\dfrac{4}{3}\right\}$

D. $m\le 0$ hoặc $m\ge 4$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai)

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Bài toán liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số không chứa tham số.

Câu 1: Đáp án B.

Dễ thấy tại $x=1$ hàm số không xác định nên B là khẳng định sai.

Câu 2: Đáp án D.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=-1$ và $y=2$.

Câu 3: Đáp án C.

Đây là hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 4: Đáp án A.

Đây là hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên có một tiệm cận ngang là $y=2$ và một tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 5: Đáp án C.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$.

Câu 6: Đáp án C.

Phương án A. Sai: Vì là hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên có một tiệm cận ngang là $y=\frac{a}{c}=-3$.

Phương án B. Sai: Vì là hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số lớn hơn bậc của đa thức mẫu số nên không có tiệm cận ngang.

Phương án C. Đúng: Tương tự phương án A, hàm số có một tiệm cận ngang là $y=-1$.

Phương án D. Sai: Vì hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 7: Đáp án C.

Giải phương trình: $x^2-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Ta thấy tại $x=3$ hoặc $x=-3$, đa thức của tử số không xác định nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 8: Đáp án D.

Áp dụng công thức ta có:

$$d_1.d_2=\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|=\left|\frac{2.(-1)-3.1}{1^2}\right|=5$$

Câu 9: Đáp án C.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang suy ra đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=3$ và $y=-3$.

Câu 10: Đáp án C.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.

Câu 11: Đáp án C.

- Đây là hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.

- Giải phương trình: $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Ta thấy với $x=1$ hoặc $x=-3$ thì $x+1\neq 0$, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-3$ và $x=1$.

Câu 12: Đáp án D.

Đồ thị hàm số trên có hai đường tiệm cận, do vậy ta chọn D.

Câu 13: Đáp án C.

- Đây là hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.

- Giải phương trình: $x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

Ta thấy với $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ hoặc $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ thì $2x-3\neq 0$, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ và $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Câu 14: Đáp án A.

- Đây là hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất nên có một tiệm cận ngang là $y=3$.

- Giải phương trình: $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Ta thấy phương trình $3x^2-3x+1=0$ vô nghiệm, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và $x=-3$.

Câu 15: Đáp án C.

- Đây là hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.

- Giải phương trình: $x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$

Ta thấy với $x=1$ hoặc $x=6$ thì $3x-1\neq 0$, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và $x=6$.

Câu 16: Đáp án B.

- Tương tự câu 15, đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y=0$.

- Giải phương trình: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Ta thấy với $x=1$ thì $x-1=0$, do vậy $x=1$ không phải là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Do vậy đồ thị hàm số đã cho chỉ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

Câu 17: Đáp án A.

- Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ và $y=-\frac{1}{2}$.

- Điều kiện xác định của hàm số là: $\left\{\begin{array}{l} x\neq-\frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x\geq\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x\leq-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}=-\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\frac{3}{2}$ $\Rightarrow m=3$.

- Tại $x=1$ thì $y=\frac{1+\sqrt{4.1^2-3}}{2.1+3}=\frac{2}{5}$ $\Rightarrow n=\frac{2}{5}$.

Vậy $m.n=3.\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

Câu 18: Đáp án C.

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}=-1$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Câu 19: Đáp án B.

- Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1}=-1$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

- Điều kiện xác định của hàm số là: $\left[\begin{array}{l} x\geq1 \\ x\leq-1 \end{array}\right.$

Do vậy, $x=0$ không phải là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 20: Đáp án C.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận đứng và tiệm cận ngang nên suy ra mệnh đề C là mệnh đề đúng.

Câu 21: Đáp án A.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận ngang suy ra phương án A là khẳng định đúng.

Câu 22: Đáp án C.

- Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-2$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

- Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+2}=0 \Rightarrow x\in\varnothing$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 23: Đáp án B.

Phương án A. Sai:

Vì: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{1+\frac{2}{x}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{-1+\frac{2}{x}}=1$

Vậy đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2-x}}{|x|+2}$ có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

Phương án B. Đúng: Vì

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$ và

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-1$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{|x|-2}{x+1}$ có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Phương án C. Sai:

Vì: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$ không tồn tại.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Phương án D. Sai:

Vì: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-2}$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 24: Đáp án C.

Xét đa thức mẫu số của các hàm số ta thấy chỉ có đáp án C là với $x=1$ thì mẫu số bằng 0 và tử số khác 0.

Câu 25: Đáp án C.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=-1$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Câu 26: Đáp án D.

- Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{2x+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3+\dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+2}}{\sqrt{2x+1}-x}$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=-\sqrt{3}$

- Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}-x=0$

Điều kiện xác định: $x\ge-\dfrac{1}{2}$

PT $\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\2x+1=x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x^2-2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}+1$

Ta thấy với $x=\sqrt{2}+1$ thì $\sqrt{3x^2+2}\ne0$, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\sqrt{2}+1$.

Câu 27: Đáp án D.

- Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}}{1-\dfrac{2}{x}}=-1$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

- Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l}x\ge0\\x\le-2\\x\ne2\end{array}\right.$

Giải phương trình: $x-2=0\Leftrightarrow x=2$

Ta thấy với $x=2$ thì $\sqrt{x^2+2x}\ne0$, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$.

Câu 28: Đáp án D.

Giải phương trình: $x^3+1=0\Leftrightarrow x=-1$

Ta thấy với $x=-1$ thì $1-\sqrt{x^2+x+1}\ne0$, do vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Câu 29: Đáp án C.

- Ta có:

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=-1$

Vậy đường thẳng hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

- Điều kiện xác định: $\left[\begin{array}{l}x\ge2\\x\le-2\end{array}\right.$

Giải phương trình: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Ta thấy với $x=1$ thì đa thức của tử số không xác định nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to3^+}y$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 30: Đáp án A.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}y=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 31: Đáp án C.

- Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Vậy đường thẳng hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

- Giải phương trình: $\sqrt{x^2+1}=0 \Rightarrow x\in\varnothing$

Vậy hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 32: Đáp án C.

Diện tích của hình chữ nhật tạo bởi các đường tiệm cận của đồ thị hàm số và 2 trục tọa độ chính là tích khoảng cách từ gốc tọa độ đến 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Vậy $S=\left|\frac{a}{c}.\frac{d}{c}\right| = \left|\left(-\frac{4}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = 3.$

Câu 33: Đáp án B.

Phương án A. Sai vì:

- Ta có: $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

- Giải phương trình: $\sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2\end{array}\right.$

Ta thấy với $x=2$ hoặc $x=-2$ thì $x\neq 0$, do vậy $x=2$ và $x=-2$ là 2 phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Phương án B. Đúng vì:

- Ta có: $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2-3x+2}$ không tồn tại.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

- Giải phương trình: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\end{array}\right.$

Ta thấy với $x=1$ hoặc $x=2$ thì $\sqrt{x}\neq 0$, do vậy $x=1$ và $x=2$ là 2 phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Phương án C. Sai vì:

- Tương tự câu B, đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

- Giải phương trình: $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3\end{array}\right.$

Ta thấy với $x=1$ thì đa thức tử số không xác định và với $x=3$ thì $\sqrt{x}\neq 0$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=3$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Phương án D. Sai vì đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên đều có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 34: Đáp án B.

- Ta có: $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = 2$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = -2$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và $y=-2$.

- Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x-3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3\end{array}\right.$

Ta thấy với $x=-1$ hoặc $x=3$ thì $2x-3\neq 0$, do vậy $x=-1$ và $x=3$ là 2 đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 35: Đáp án A.

Phương án A. Ta có:

$$y=\sqrt{x^2-4x+10}+x = \frac{x^2-4x+10-x^2}{\sqrt{x^2-4x+10}-x} = \frac{-4x+10}{\sqrt{x^2-4x+10}-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+10}+x\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+10}{\sqrt{x^2-4x+10}-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{10}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x}-\frac{10}{x^2}}-1} = 2$$

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

Câu 36: Đáp án B.

Áp dụng định nghĩa, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$, một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Dạng 2: Bài toán liên quan đến tiệm cận của đồ thị hàm số chứa tham số.

Câu 37: Đáp án C.

- Đây là hàm số phân thức có bậc của đa thức tử số nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu số nên có một tiệm cận ngang là $y=0$.
- Để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 2 tiệm cận đứng hay phương trình $x^2-2mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(-1)^2-2.m.(-1)+4\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4>0\\1+2m+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.\\m\neq-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Câu 38: Đáp án A.

Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=m$, 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-3n-1$.

Để đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì

$$\begin{cases}m=0\\-3n-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\n=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow m+n=-\frac{1}{3}$$

Câu 39: Đáp án A.

Tương tự câu 37, để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 2 tiệm cận đứng hay phương trình $mx^2-2x-3=0$ là phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\\Delta'>0\\m-2+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\1-3m>0\\m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m<\dfrac{1}{3}\\m\neq -1\end{cases}$$

Câu 40: Đáp án C.

Tương tự câu 37, để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 2 tiệm cận đứng hay phương trình $x^2+4x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq -3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\(-3)^2+4.(-3)+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\9-12+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<4\\m\neq 3\end{cases}$$

Câu 41: Đáp án A.

- Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{mx^2+3mx+1}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{m+\dfrac{3m}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x^2}}$$

- Giải phương trình: $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

Vậy để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 2 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\sqrt{m}$ và $y=-\sqrt{m}$ và 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\mx^2+3mx+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\(-2)^2.m+3.(-2).m+1>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\4m-6m+1\end{cases}>0\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\m<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{2}$$

Câu 42: Đáp án A.

- Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-m}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\dfrac{m}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x}-m}{x-1}$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$.

- Giải phương trình: $x-1=0\Leftrightarrow x=1$

Để đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có 1 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow x-1$ là phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\Leftrightarrow\sqrt{x}-m\neq 0$ khi $x=1$ $\Leftrightarrow m\neq 1$

Vậy $m\in(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 43: Đáp án A.

Giải phương trình: $x-m=0\Leftrightarrow x=m$.

Để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng thì đường thẳng $x=m$ phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\Leftrightarrow mx-1\neq 0$ khi $x=m$ $\Leftrightarrow m^2-1\neq 0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow m\notin\{-1;1\}.$$

Câu 45: Đáp án C.

Đây là hàm số phân thức bậc hai trên bậc hai nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=a-2b \Rightarrow a-2b=0$ (1)

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường $x=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PT\ x^2+x-b=0 \text{ có 1 nghiem } x=1 \\ (a-2b)x^2+bx+1\neq 0 \text{ khi } x=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-b=0 \\ a-2b+b+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a\neq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$

Vậy $a+2b=4+2.2=8$.

Câu 46: Đáp án C.

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ PT $x^2+4x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 1+4+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m>0 \\ m+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m\neq -5 \end{cases}$$

Câu 47: Đáp án A.

Giải phương trình: $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ PT $x^2-2x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 và 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ 1-2+m\neq 0 \\ (-2)^2-2.(-2)+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m\neq 1 \\ m\neq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ m\neq -8 \end{cases}$$

Câu 48: Đáp án C.

Đây là hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-m$.

Để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(2;3)$ thì $-m=2 \Leftrightarrow m=-2$.

Câu 49: Đáp án B.

Giải phương trình: $x-m=0 \Leftrightarrow x=m$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì phương trình $2x^2-3x-m=0$ có 1 nghiệm $x=m$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m+m=0 \Leftrightarrow 2m^2-2m=0$

$\Leftrightarrow 2m(m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$

Câu 50: Đáp án B.

- Áp dụng định nghĩa về tiệm cận, ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$; một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.
- Hàm số không có giá trị lớn nhất.
- Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)\setminus\{-1\}$.

Câu 51: Đáp án B.

Áp dụng định nghĩa về tiệm cận, ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$ và hai tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1; x=2$.

Câu 52: Đáp án B.

Đây là hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\frac{a}{b}$ và 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=\frac{2}{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{1}{2} \\ \frac{2}{b}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

Câu 53: Đáp án B

Giải phương trình: $4x-m=0 \Leftrightarrow x=\frac{m}{4}$

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ PT $x^3-6x+m=0$ có 1 nghiệm $x=\frac{m}{4}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{4}\right)^3-6.\frac{m}{4}+m=0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{64}-\frac{3}{2}m+m=0$

$\Leftrightarrow \frac{m^2}{64}-\frac{1}{2}m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=8 \end{array}\right.$.

Câu 54: Đáp án B.

+ Với $m=0$ thì $y=0$, khi đó không tồn tại tiệm cận.

+ Với $m\neq 0$: Đây là hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ và 1 tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2m$.

Khi đó diện tích tạo bởi 2 đường tiệm cận và 2 trục tọa độ là tích khoảng cách từ gốc tọa độ tới hai đường tiệm cận

$\Rightarrow S=|1.2m|=|2m|=8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m=8 \\ 2m=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-4 \end{array}\right.$

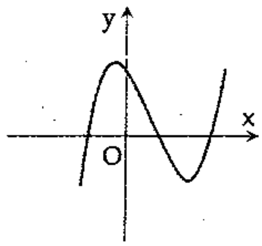
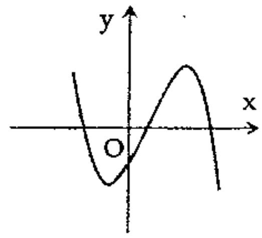
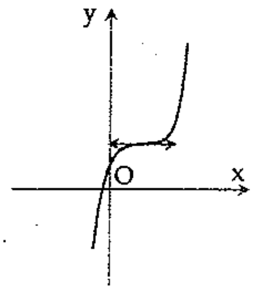
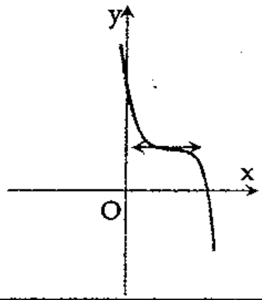
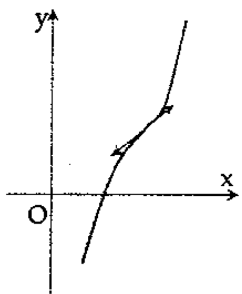
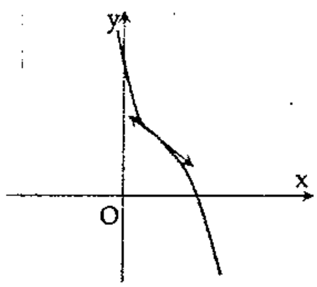
Câu 55: (trùng câu 49)

Câu 56: (trùng VD6)

I.IV. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp.

1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right)$. .

Dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right)$

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

Các kết quả đáng chú ý về đồ thị hàm bậc ba:

Kết quả 1: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$) hoặc là có hai điểm cực trị, hoặc là không có điểm cực trị nào.

+ Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac > 0$.

+ Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$

Kết quả 2: Đồ thị hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm.

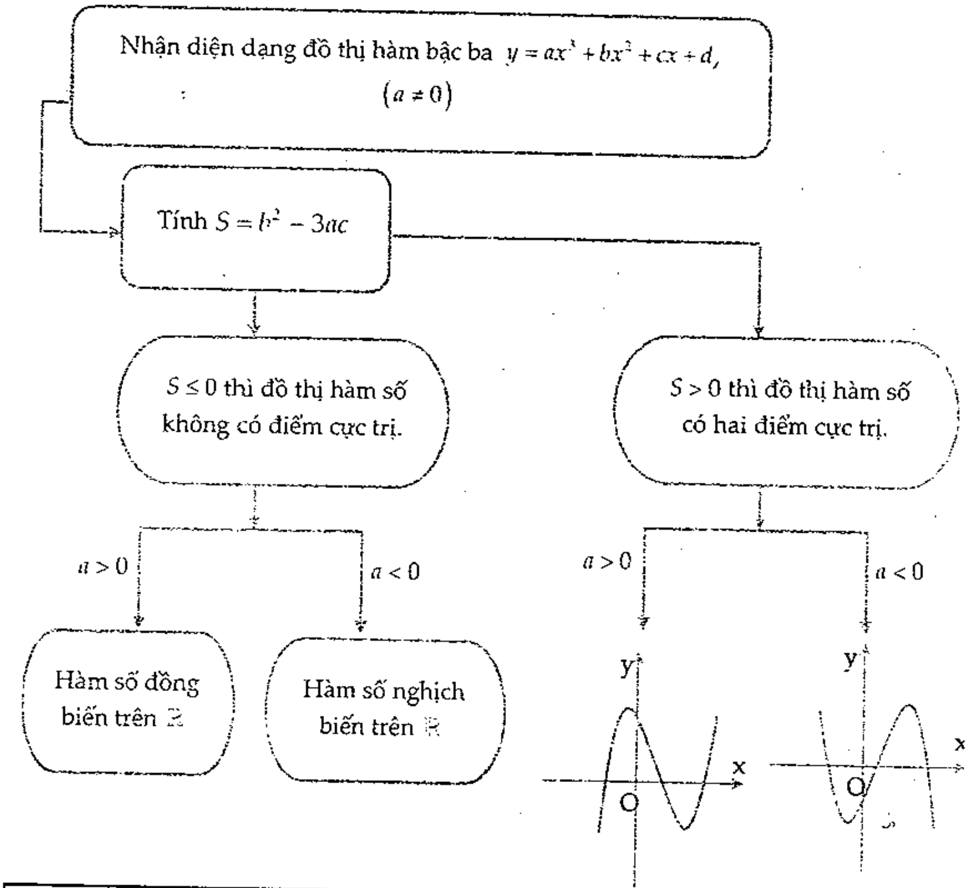
Kết quả 3: Đồ thị hàm số bậc ba nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

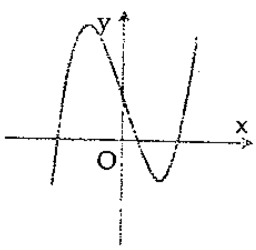
Lưu ý: Các kết quả trên rất quan trọng trong việc nhận dạng đồ thị.

Các bước nhận biết đồ thị hàm số bậc ba:

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \left(a \neq 0\right)$, nhận dạng đồ thị hàm số.

Ta có các bước làm được biểu thị trong sơ đồ sau:





Ví dụ 1: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^2 + x - 1$ B. $y = -x^3 + 3x + 1$

C. $y = x^4 - x^2 + 1$ D. $y = x^3 - 3x + 1$

(Trích đề minh họa lần I – BGD&ĐT)

Đáp án D.

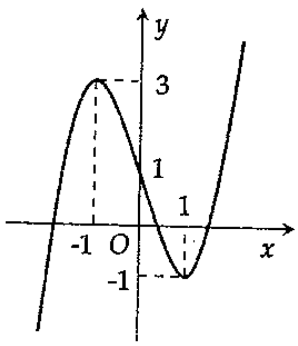
Lời giải

Nhận thấy đây không phải đồ thị hàm bậc bốn trùng phương, do vậy ta loại luôn phương án C.

Đây cũng không phải parabol nên ta loại A.

Với B và D: Bình thường ta sẽ tính $b^2 - 3ac$ và xét, tuy nhiên ở đây ta thấy chỉ có hai phương án, hệ số a của x^3 ở hai phương án lại khác nhau, cho nên ở đây ta không cần xét $b^2 - 3ac$ mà kết luận luôn đáp án D.

(Bởi ta thường có mẹo: Nếu $b^2 - 3ac > 0$: khi $a > 0$ thì đồ thị dạng chữ N, khi $a < 0$ thì ngược lại).



Ví dụ 2: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A. $y = x^3 - 3x - 1$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

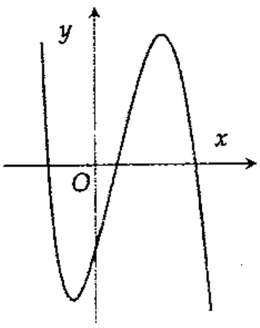
C. $y = x^3 - 3x + 1$. D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Đáp án C.

Lời giải

Đây là bài toán phức tạp hơn ví dụ 1, bởi ở tất cả các phương án A, B, C, D đều là các hàm số bậc ba. Do vậy ta cần xét từng bước một cách kĩ lưỡng.
Từ mẹo ở cuối ví dụ 1, ta có thể loại luôn hai phương án nhiễu là B, D do hệ số $a<0$.
Với hai phương án A, và C ta có thể không xét b^2-3ac bởi ta nhận thấy đồ thị hàm số ở hình bên đã cung cấp đủ các dữ kiện, giao với trục hoành, trục tung,...
Nhận thấy với $x=0$ thì $y=1$, do vậy ta chọn C.
Ở đây ta xét luôn $x=0$ bởi hai hàm số này khác nhau ở mỗi hệ số $d=1$ và $d=-1$.



Ví dụ 3: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $a<0,b>0,c>0,d<0.$ B. $a<0,b<0,c>0,d<0.$
C. $a>0,b<0,c<0,d>0.$ D. $a<0,b>0,c<0,d<0.$

(Trích đề minh họa lần II – BGD&ĐT)

Đáp án A.

Phân tích

Với bài toán nhận dạng đồ thị hàm số, trước tiên ta quan sát những đặc điểm sau:

1. Hình dáng đồ thị: với hàm bậc ba thì là chữ N hay ngược lại.

2. Vị trí của hai điểm cực đại, cực tiểu.

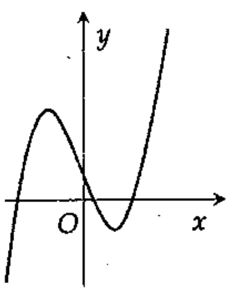
Lời giải

STUDY TIP:
Các vấn đề ưu tiên
1. Hình dáng đồ thị.
2. Vị trí các điểm cực trị.
3. Khoảng đồng biến, nghịch biến.

Ta thấy đồ thị hàm số có dạng chữ N ngược, do vậy hệ số $a<0$. Đến đây ta loại C.
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Đồ thị hàm số có hai hoành độ điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung, do vậy:

$$\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ \dfrac{c}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow c>0 \text{ (do } a<0 \text{ nên } b^2-3ac>0\text{), đến đây ta loại D.}$$

Chỉ còn lại A và B.
Tiếp theo ta có thể xét về vị trí của hai điểm là nằm về hai phía trục hoành thì $y_1y_2<0$. Tuy nhiên ta thấy nếu xét như vậy khá là lâu, trong khi ta chỉ còn hai phương án là A và B, và hai phương án này chỉ khác nhau ở điều kiện của *b*, do vậy ta xét $b<0$ và $b>0$.
Nhận thấy nếu $b>0$ thì $x_1+x_2=\dfrac{-2b}{6a}>0$ (thỏa mãn, do $a<0$ và nhìn vào đồ thị ta thấy nếu kí hiệu $x_1<0<x_2$ thì $|x_1|<|x_2|$ nên $x_1+x_2>0$).



Ví dụ 4: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây về dấu của a, b, c, d là đúng nhất ?

A. $a,\ d>0.$ B. $a>0,\ c>0>b.$
C. $a,\ b,\ c,\ d>0.$ D. $a,\ d>0,\ c<0.$

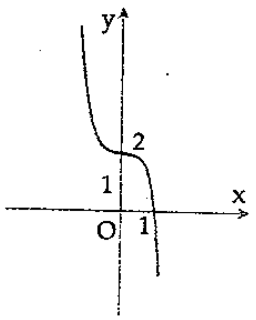
(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong)

Đáp án D.

Lời giải

1. Do đồ thị hàm số có dạng chữ N và có hai điểm cực trị nên $a>0; b^2-3ac>0$.
2. Tiếp theo, hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về hai phía của trục Ox, do vậy $x_1x_2<0 \Leftrightarrow \frac{c}{3a}<0 \Rightarrow c<0$ (do $a>0$).
3. Tiếp theo ta thấy khi $x=0$ thì $y=d>0$. Từ các kết quả trên ta chọn D.

STUDY TIP:
Ta cần chú ý đến giao điểm của đồ thị hàm bậc ba với trục Oy từ đó đưa ra kết luận về hệ số d.



Ví dụ 5: Đồ thị hàm số ở hình bên là của hàm số nào dưới đây?

A. $y=-x^3+2x+2$ B. $y=-x^3-x+2$

C. $y=-x^3+1$ D. $y=-x^3+2$

Đáp án D.

Lời giải

Ta loại luôn C bởi theo đồ thị hàm số thì khi $x=0$ thì $y=2$.

Với các phương án A, B, D ta lần lượt xét:

Với phương án A: ta có $b^2-3ac=0^2-3.2.(-1)=6>0$ (loại)

Với B, D ta nhận thấy:

Với phương án B: $b^2-3ac=0^2-3.(-1).(-1)=-3<0$

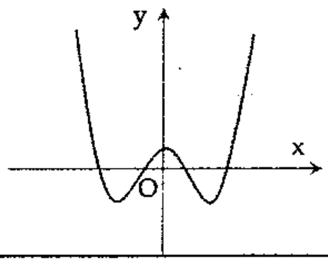
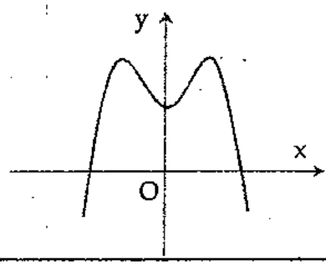
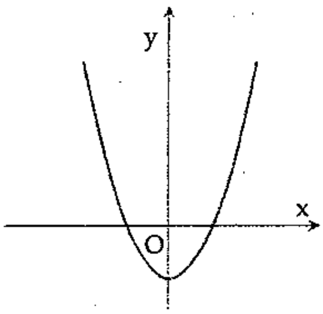
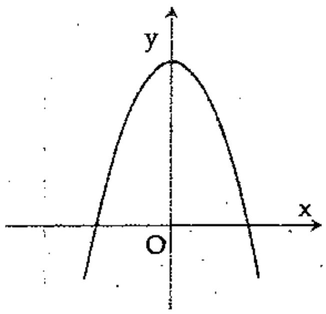
Với phương án D: $b^2-3ac=0^2-3.(-1).0=0$

Tuy nhiên nhìn vào đồ thị thì ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$ nên ta loại luôn D, do khi $x=1$ thì $y=0$.

STUDY TIP:
Ta cần chú ý đến giao điểm của đồ thị hàm bậc ba với trục Oy từ đó đưa ra kết luận về hệ số d và các điểm thuộc đồ thị hàm số.

2. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c\left(a\neq 0\right)$..

Dạng của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c\left(a\neq 0\right)$

	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt		
Phương trình $y'=0$ có một nghiệm		

Các kết quả đáng chú ý về hàm số bậc bốn trùng phương:

Kết quả 1: Hàm số trùng phương hoặc có ba điểm cực trị khi $\left(ab<0\right)$, hoặc có duy nhất một điểm cực trị khi $ab>0$.

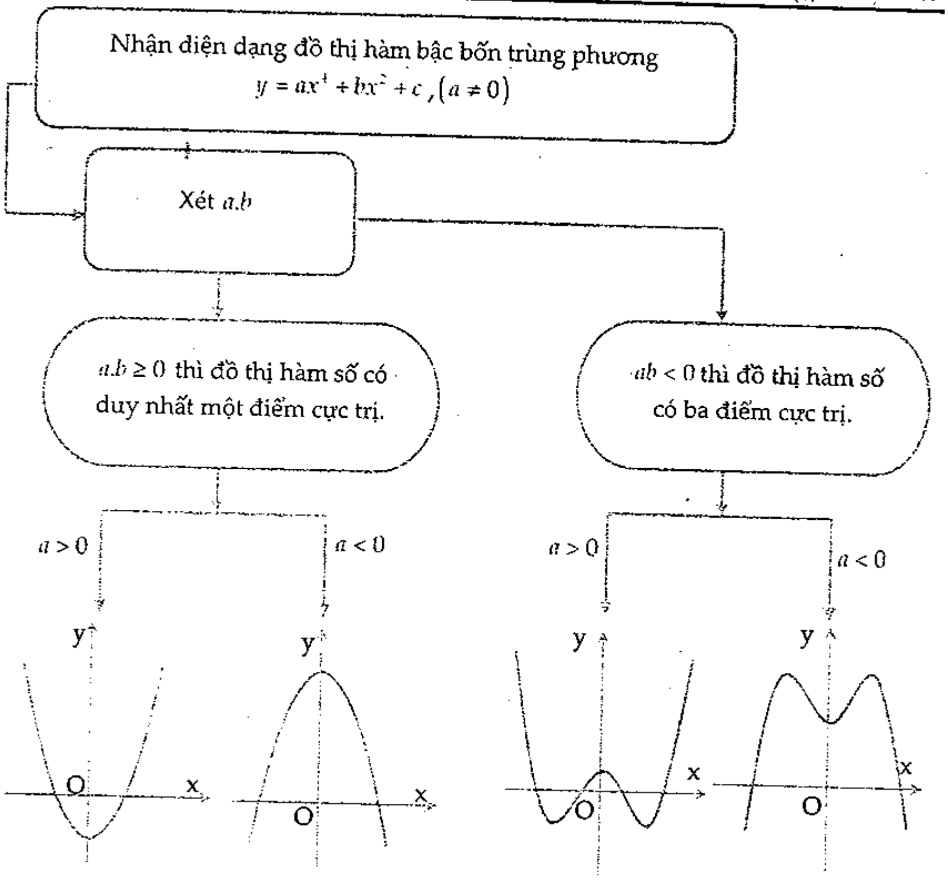
Kết quả 2: Đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương nhận trục tung làm trục đối xứng.

Kết quả 3: Nếu đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có ba điểm cực trị thì ba điểm cực trị này tạo thành một tam giác cân tại đỉnh thuộc trục tung.

Kết quả 8: (đọc thêm) Đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow \begin{cases} ab<0; ac>0 \\ b^2=\dfrac{100}{9}ac \end{cases}$

Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d, \left(a\neq 0\right)$, nhận dạng đồ thị hàm số.

Ta có các bước làm được biểu thị trong sơ đồ sau:



Ví dụ 6: Hỏi a và b thỏa mãn điều kiện nào để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị dạng như hình bên?

A. $a > 0$ và $b > 0$.
B. $a > 0$ và $b < 0$.
C. $a <$ và $b > 0$.
D. $a < 0$ và $b < 0$.

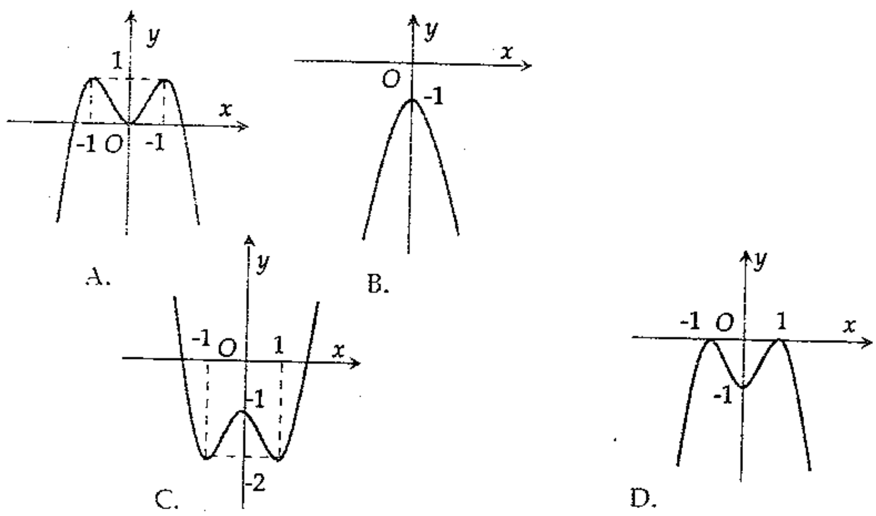
(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Đáp án B

Lời giải

Đồ thị hàm số có dạng W, có ba điểm cực trị nên $a > 0; b < 0$.

Ví dụ 7: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ có đồ thị nào trong các đồ thị sau:



(Trích đề thi thử Sở GD &ĐT Lâm Đồng)

Đáp án D

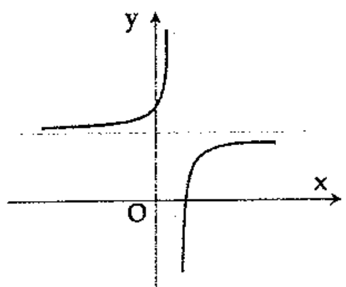
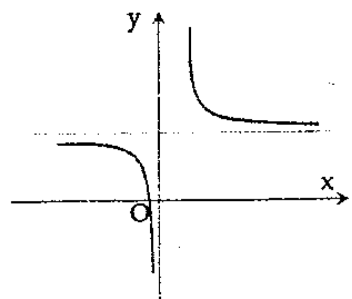
Lời giải

STUDY TIP:
Về việc xét các điểm trên đồ thị ta nên ưu tiên xét điểm có hoành độ $x=0$. Khi đó ta dễ dàng nhẩm, đồng thời việc phân biệt cũng nhanh hơn.

Theo thứ tự các bước: Ta thấy $ab=(-1).2=-2<0$, từ đây suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị, mặt khác $a=-1<0$ nên đồ thị hàm số có dạng **M.** Loại B và C.

Ở đây để tìm nhanh nhất thì ta dựa vào $y(0)=-1$ từ đây ta chọn D.

3. Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$

$D=ad-bc>0$	$D=ad-bc<0$
	

Các kết quả đáng chú ý về hàm bậc phân thức bậc nhất trên bậc nhất.

Kết quả 1: Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên từng khoảng xác định (hay nói cách khác là đồng biến hoặc nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$.

Kết quả 2: Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ không có cực trị.

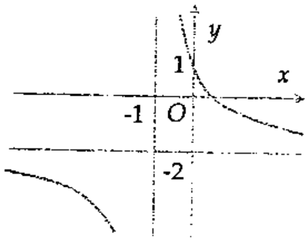
Kết quả 3: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$.

Kết quả 4: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nhận giao điểm $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Kết quả 5: Tích hai khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ đến hai đường tiệm cận của đồ thị đó là một số không đổi và bằng $\left|\dfrac{bc-ad}{c^2}\right|$.

Kết quả 6: Đường thẳng $y = mx + n$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tại hai điểm phân biệt M, N và cắt hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số tại A, B thì ta có $MA = MB$.

Ví dụ 7: Đồ thị hình bên là của hàm số:



A. $y = \frac{3-2x}{x+1}$ B. $y = \frac{1-2x}{x-1}$ C. $y = \frac{1-2x}{1-x}$ D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I – Thanh Hóa)

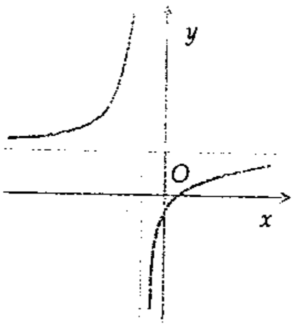
STUDY TIP
Với bài toán nhận diện hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất thì ta nên xét tính đồng biến nghịch biến, và chú ý các đường tiệm cận.

Đáp án D

Lời giải

Nhìn vào đồ thị ta thấy hai nhánh của đồ thị hàm số đều đi xuống, tức là hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow ad - bc < 0$. Từ đây ta loại được B. Tiếp theo, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = -2$, từ đây ta loại được A, C.

Ví dụ 8: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $bd < 0, ab > 0$. B. $ad > 0, ab < 0$. C. $bd > 0, ad > 0$. D. $ab < 0, ad < 0$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần I)

Đáp án B

Phân tích: *Đây là bài toán khá tổng quát, việc xác định lời giải của bài này sẽ giúp ta kết luận được tư duy nhận dạng nhanh đồ thị hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất.*

Lời giải

Nhận thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, do đồ thị hàm số đi lên cho nên ta kết luận $ad - bc > 0 \Leftrightarrow ad > bc$

Tiếp theo ta thấy đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ nằm bên trái trục Oy nên $-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$.

Đường tiệm cận ngang $y=\frac{a}{c}$ nằm phía trên trục Ox nên $ac>0$.

Từ đây ta có $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>0;c>0\\a<0;c<0\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}d>0;c>0\\d<0;c<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a>0;c>0;d>0\\a<0;c<0;d<0\end{array}\right.$

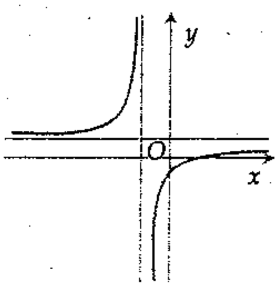
Mặt khác đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ nhỏ hơn 0 nên $bd<0$.

Giao của đồ thị hàm số với trục Ox là một điểm có hoành độ dương nên

$-\frac{b}{a}>0\Rightarrow ab<0$.

Từ các dữ kiện trên ta thấy b luôn khác dấu với a, d nên ta chọn B.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\begin{cases}ad<0\\bc<0\end{cases}$. B. $\begin{cases}ad>0\\bc>0\end{cases}$. C. $\begin{cases}ad>0\\bc<0\end{cases}$. D. $\begin{cases}ad<0\\bc>0\end{cases}$.

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Nội)

Đáp án C.

Lời giải

Nhận thấy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $ad-bc>0$, từ đây ta loại D bởi ở phương án D có $ad<0;bc>0\Rightarrow ad-bc<0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy nên $-\frac{d}{c}<0\Rightarrow cd>0$

$\Rightarrow c,d$ cùng dấu.

Tương tự như bài ví dụ 8, ta suy ra $ad>0$.

Tiếp theo ta thấy đồ thị hàm số cắt trục Ox tại một điểm có hoành độ dương

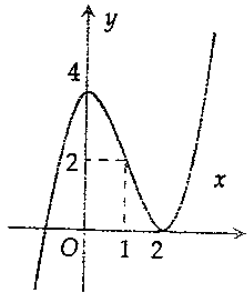
$\Rightarrow -\frac{b}{a}>0\Leftrightarrow ab<0\Rightarrow b$ trái dấu với a, d.

Tiếp theo đồ thị hàm số cắt trục Oy tại một điểm có tung độ âm nên $\frac{b}{d}<0$.

Vậy từ đây ta suy ra b, c trái dấu. Tức là $bc<0$. Từ đây ta chọn C.

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Đồ thị như hình bên là đồ thị của hàm số nào?

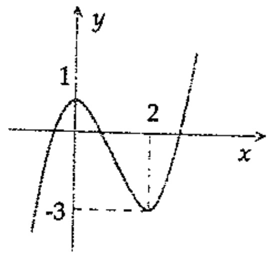


A. $y=x^3-3x+4$. B. $y=x^3-3x^2$.

C. $y=x^3-3x^2+4$. D. $y=x^3-3x$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 2: Đồ thị hình bên là của hàm số:

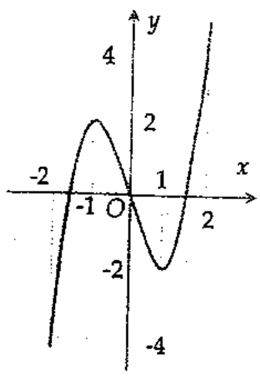


A. $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$. B. $y=x^3-3x^2+1$.

C. $y=x^3+3x^2+1$. D. $y=-x^3-3x^2+1$.

(Trích đề thi thử THPT Công Nghiệp – Hòa Bình)

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

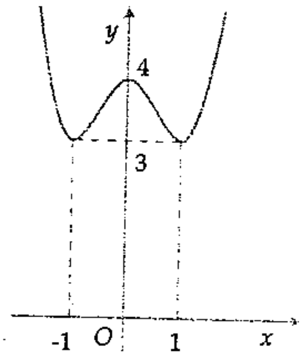


A. $x=-2$. B. $x=-1$.

C. $x=1$. D. $x=2$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị (C) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

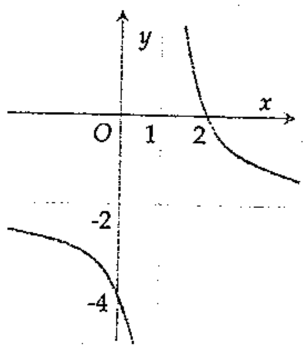
B. Giá trị lớn nhất của hàm số là 4.

C. Tổng các giá trị cực trị của hàm số bằng 7.

D. Đồ thị (C) không có điểm cực đại nhưng có hai điểm cực tiểu là $(-1;3)$ và $(1;3)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 5: Hàm số có đồ thị (hình vẽ sau) là đồ thị của một trong 4 hàm số sau đây, đó là hàm số nào?

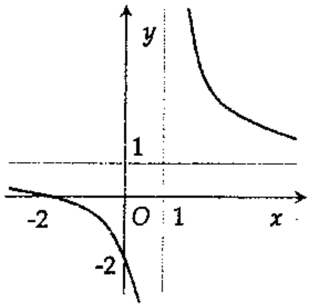


A. $y=\dfrac{2x-4}{1-x}$ B. $y=\dfrac{4-2x}{1+x}$

C. $y=\dfrac{2x+4}{1-x}$ D. $y=\dfrac{2x-4}{x-1}$

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 6: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

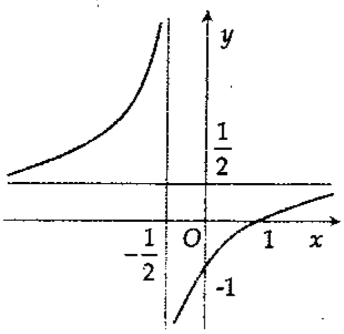


A. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ B. $y=\dfrac{x+2}{1-x}$

C. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ D. $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 7: Đồ thị trong hình bên là của hàm số nào sau đây?

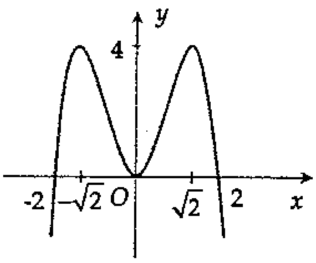


A. $y=\dfrac{x-1}{1-2x}$ B. $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$

C. $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$ D. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây sai?



A. Đồ thị (C) nhận Oy là trục đối xứng

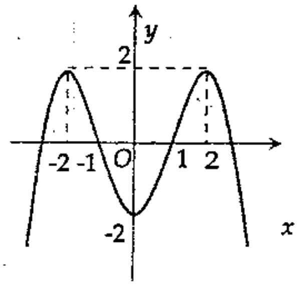
B. (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt

C. Hàm số có 3 điểm cực trị

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x=\pm\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Hỏi điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=f(x)$ là điểm nào

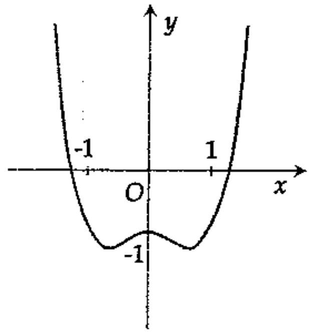


A. $x=-2$. B. $y=-2$.

C. $M(0;-2)$. D. $N(2;2)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 10: Đường cong hình dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.



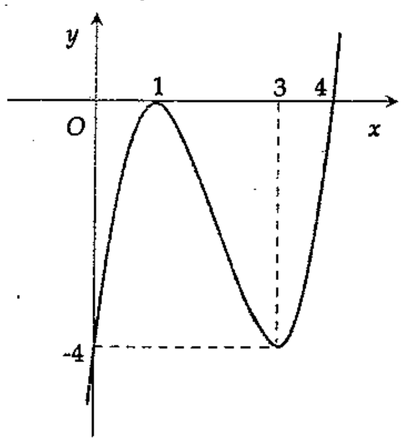
Hãy chọn phương án đúng.

A. $y=x^3+2x-1$. B. $y=x^4-x^2-1$.

C. $y=-x^4+x^2-1$. D. $y=x^4+x^2-1$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Hà Nam)

Câu 11: Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

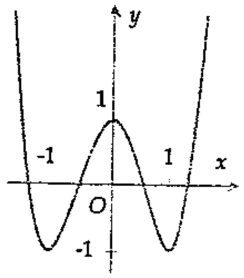


A. $y=x^3-6x^2+9x+4$ B. $y=x^3+6x^2+9x-4$

C. $y=x^3-6x^2+9x-4$ D. $y=x^3-4$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 12: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

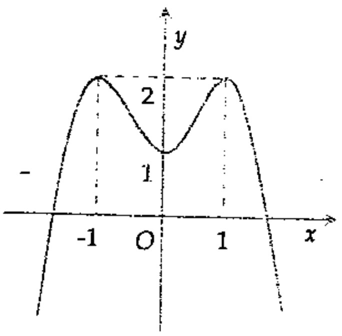


A. $y=x^3-3x^2+1$ B. $y=2x^4-4x^2+1$

C. $y=-x^3+3x^2+1$ D. $y=-2x^4+4x^2+1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần 1)

Câu 13: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê bên dưới. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

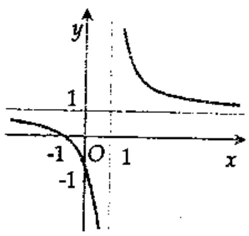


A. $y=x^4+2x^2+1$ B. $y=-x^4+1$

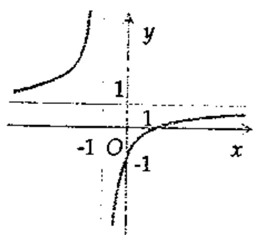
C. $y=x^4+1$ D. $y=-x^4+2x^2+1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

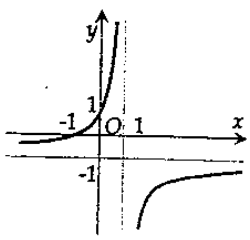
Câu 14: Trong các hình vẽ sau (Hình 1, Hình 2, Hình 3, Hình 4), hình nào biểu diễn đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{-x+1}$.



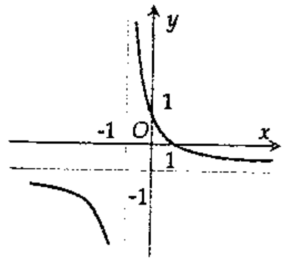
Hình 1



Hình 2



Hình 3



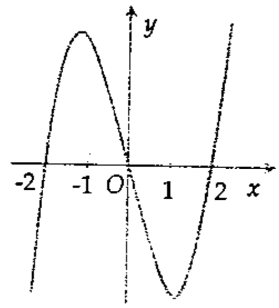
Hình 4

A. Hình 2 B. Hình 1

C. Hình 3 D. Hình 4

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$

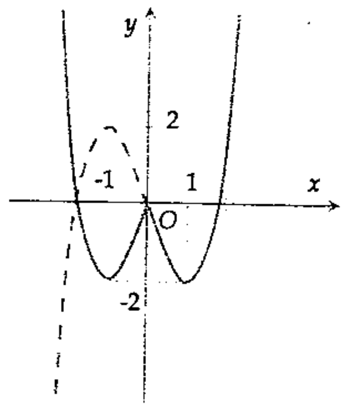
B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$

D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 16: Cho đường cong (Γ) được vẽ bởi nét liền trong hình vẽ:



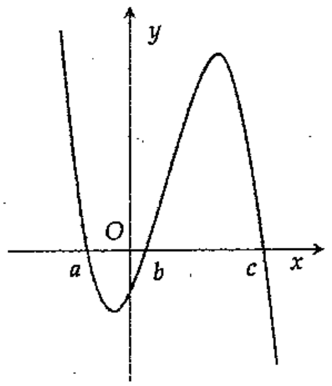
Hỏi (Γ) là dạng đồ thị của hàm số nào?

A. $y=-|x|^3+3|x|$ B. $y=|x^3-3x|$

C. $y=x^3-3x$ D. $y=|x^3|-3|x|$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ.



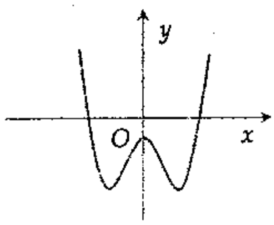
Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(c)>f(a)>f(b)$ B. $f(c)>f(b)>f(a)$

C. $f(a)>f(b)>f(c)$ D. $f(b)>f(a)>f(c)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 18: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Xác định dấu của a,b,c.

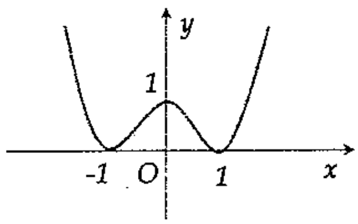


A. $a>0,b>0,c<0$ B. $a>0,b<0,c>0$

C. $a>0,b<0,c<0$ D. $a<0,b<0,c<0$

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 5)

Câu 19: Hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D sau?

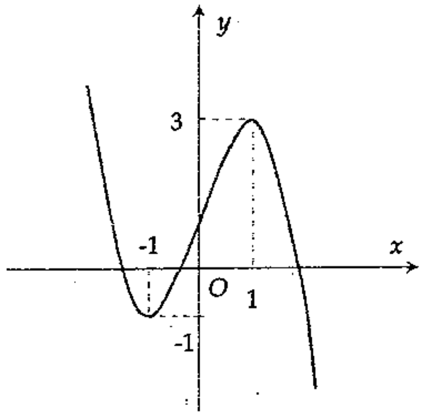


A. $y=x^3-3x+2$ B. $y=x^4-2x^2+1$

C. $y=x^2+2x-3$ D. $y=-2x^4+3x^2-1$

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 4)

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, các khẳng định sau khẳng đinh nào là đúng?



A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 và đạt giá trị lớn nhất bằng 3

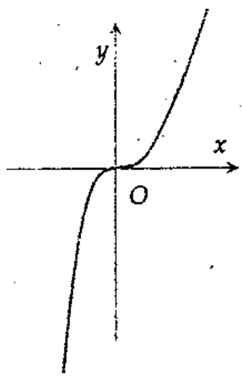
B. Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(-1;-1)$ và điểm cực đại $B(1;3)$

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $A(-1;-1)$ và cực đại tại $B(1;3)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn)

Câu 21: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên:

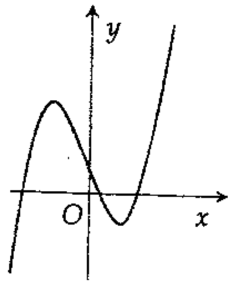


A. $y=x^3$ B. $y=x^4$

C. $y=\sqrt{x}$ D. $y=x^{\frac{1}{5}}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN lần 1)

Câu 22: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây về dấu của a, b, c, d là đúng nhất?

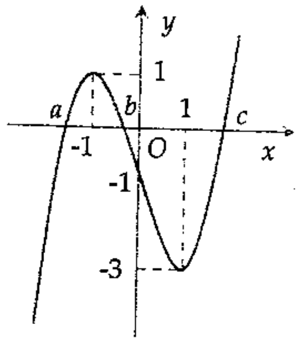


A. $a,\ d>0.$ B. $a>0,\ c>0>b.$

C. $a,\ b,\ c,\ d>0.$ D. $a,\ d>0,\ c<0.$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong)

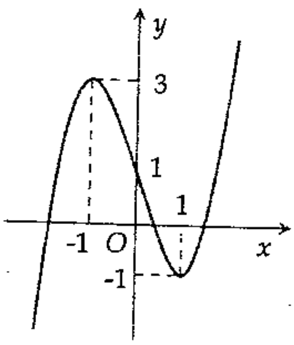
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Biết $f(a)>0$, hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất bao nhiêu điểm?



A. 4 điểm. B. 3 điểm. C. 1 điểm. D. 2 điểm.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hưng Yên lần 2)

Câu 24: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

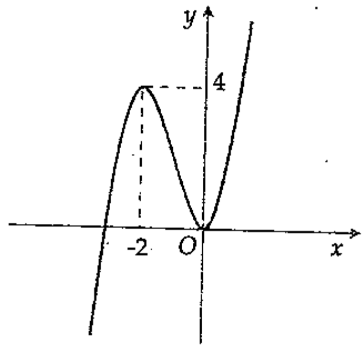


A. $y=x^3-3x-1.$ B. $y=-x^3+3x^2+1.$

C. $y=x^3-3x+1.$ D. $y=-x^3-3x^2-1.$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Nam Định)

Câu 25: Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ có dạng như sau:

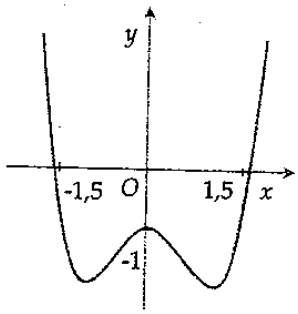


Hỏi đồ thị hàm số $y=\left|x^3+3x^2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN HN lần 3)

Câu 26: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

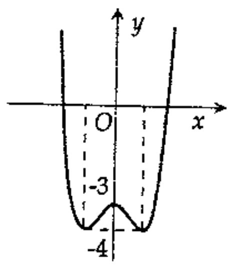


A. $y=-x^4+2x^2-1.$ B. $y=x^4-2x^2-1.$

C. $y=x^4-2x^2+1.$ D. $y=-x^4-2x^2-1.$

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng lần I)

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left|f(x)\right|=m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt.

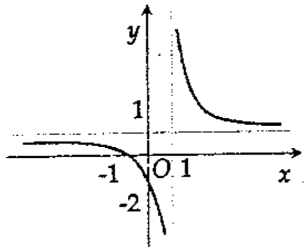


A. $m>4; m=0$ B. $3<m<4$

C. $0<m<3$ D. $-4<m<0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 28: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

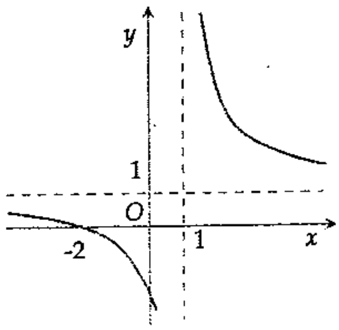


A. $y = x^4 - 2x^2$ B. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

C. $y = x^3 + 3x^2 - 4$ D. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Câu 29: Đồ thị trong hình bên dưới là một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

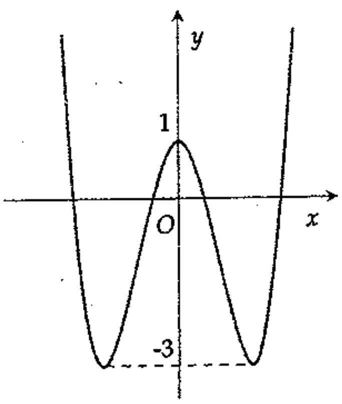


A. $y = \dfrac{x+2}{1-x}$ B. $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

C. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ D. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 30: Hình vẽ bên là đồ thị của một hàm trùng phương. Giá trị của m để phương trình $|f(x)| = m$ có 4 nghiệm đôi một khác nhau là:

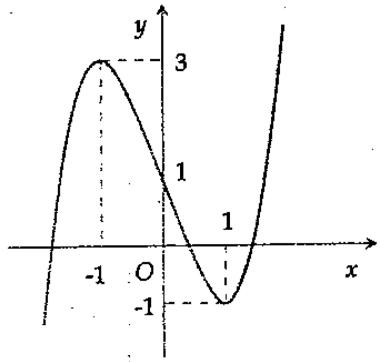


A. $-3 < m < 1$ B. $m = 0$

C. $m = 0; m = 3$ D. $1 < m < 3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần I)

Câu 31: Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

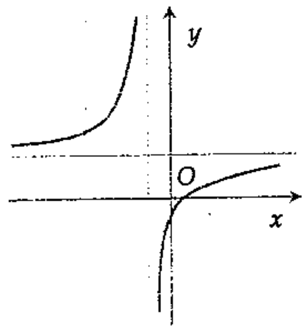


A. $-1 < m < 3$ B. $m > 3$

C. $-1 \le m \le 3$ D. $m < -1$

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 32: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

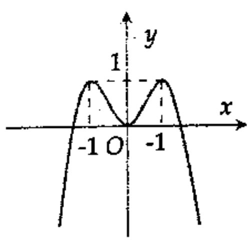


A. $bd < 0, ab > 0.$ B. $ad > 0, ab < 0.$

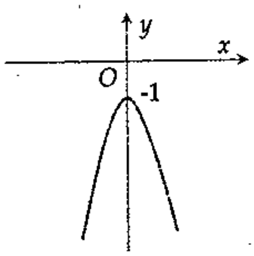
C. $bd > 0, ad > 0.$ D. $ab < 0, ad < 0.$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần I)

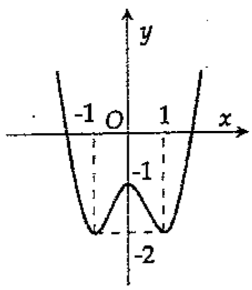
Câu 33: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ có đồ thị nào trong các đồ thị sau:



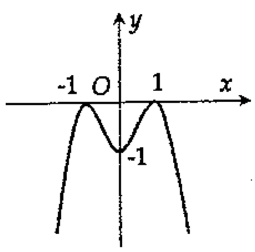
A.



B.



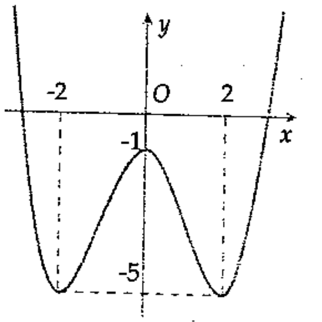
C.



D.

(Trích đề thi thử Sở GD &ĐT Lâm Đồng)

Câu 34: Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của một trong 4 hàm số dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

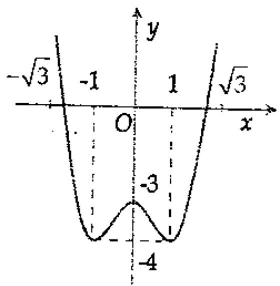


A. $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-1$ B. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2-1$

C. $y=\frac{x^4}{4}-x^2-1$ D. $y=-\frac{x^4}{4}+x^2-1$

(Trích đề thi thử THPT Ngô Sỹ Liên – Bắc Giang lần 2)

Câu 35: Cho đồ thị hàm số như hình bên. Hãy chọn khẳng định sai.



A. Hàm số có 3 điểm cực trị

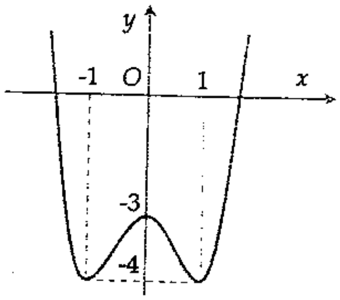
B. Với $-4<m\le -3$ thì đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số tại bốn điểm phân biệt

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$

D. Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;-3)$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

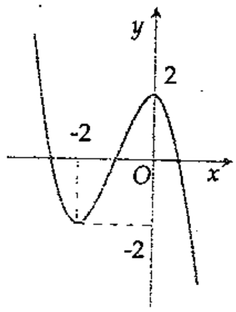
Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.



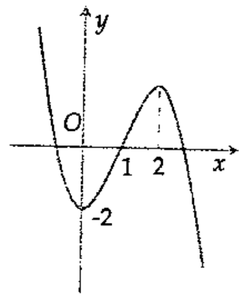
A. $0<m<4$ B. $m=-4;\ m>-3$

C. $3<m<4$ D. $0<m<3$

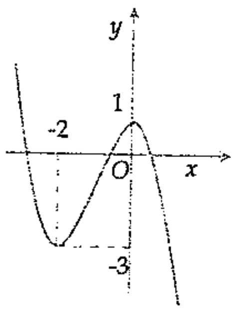
Câu 37: Hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ có đồ thị nào dưới đây?



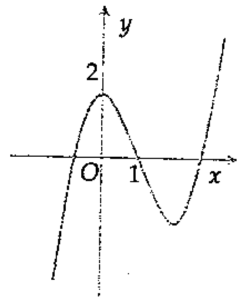
A.



B.



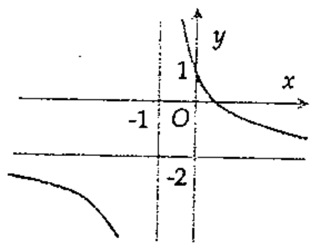
C.



D.

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I – Thanh Hóa)

Câu 38: Đồ thị hình bên là của hàm số:

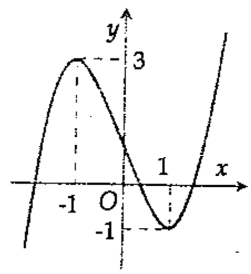


A. $y=\frac{3-2x}{x+1}$ B. $y=\frac{1-2x}{x-1}$

C. $y=\frac{1-2x}{1-x}$ D. $y=\frac{1-2x}{x+1}$

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I – Thanh Hóa)

Câu 39: Đồ thị như hình bên là của hàm số nào?

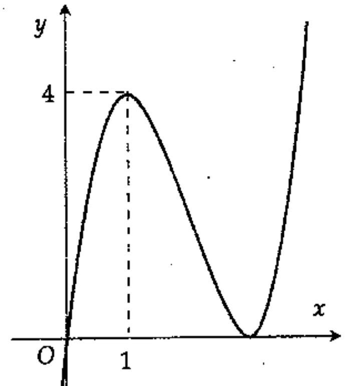


A. $y=x^3-3x+1$ B. $y=-x^3+3x^2+1$

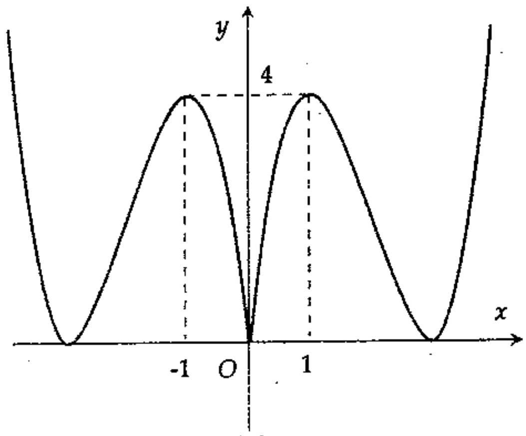
C. $y=-x^3-3x^2-1$ D. $y=x^3-3x-1$

(Trích đề thi thử THPT Lam Kinh)

Câu 40: Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



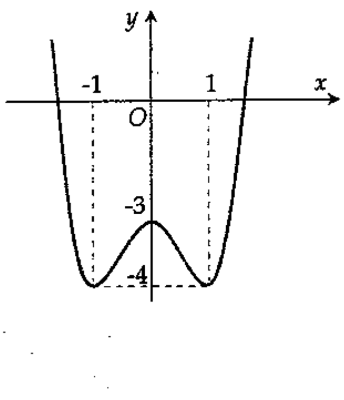
Hình 2

A. $y=|x|-6x^2+9|x|$ B. $y=-x^3+6x^2-9x$

C. $y=|x^3-6x^2+9x|$ D. $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$

(Trích đề thi thử THPT Hai Bà Trưng)

Câu 41: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m-2$ có bốn nghiệm phân biệt.

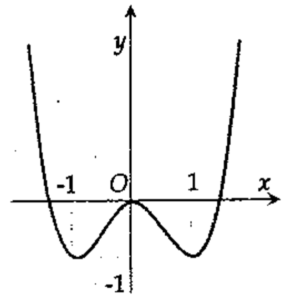


A. $-4<m<-3$ B. $-4\le m\le -3$

C. $-2<m<-1$ D. $-2\le m\le -1$

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Bắc Ninh)

Câu 42: Biết đường thẳng $y=x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt x_A, x_B. Khi đó x_A+x_B là:

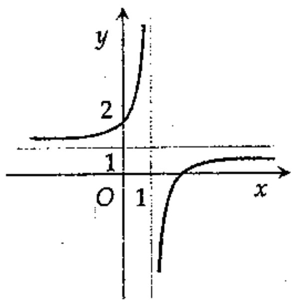


A. $x_A+x_B=5$. B. $x_A+x_B=2$.

C. $x_A+x_B=1$. D. $x_A+x_B=3$.

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương 1)

Câu 43: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ B. $y=\dfrac{x-2}{x+1}$

C. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$ D. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Bắc Ninh)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

Đây là dạng đồ thị của phương trình bậc ba:

$$y=x^3+bx^2+cx+d$$

Do hàm số có 2 điểm cực trị $(0;4)$ và $(2;0)$ và $y'=3x^2+2bx+c$ nên ta có:

$$\begin{cases}y'(0)=0\\y'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\12+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\b=-3\end{cases}$$

$\Rightarrow y=x^3-3x^2+d$

Đồ thị đi qua điểm $(0;4)$ $\Rightarrow d=4$.

Vậy đồ thị đề bài cho là của hàm số $y=x^3-3x^2+4$.

Câu 2: Đáp án B.

Nhận thấy đồ thị có dạng chữ N nên hệ số của x^3 là số dương nên ta loại A, D.

Giả sử hàm số có dạng $y=x^3+bx^2+cx+d$

$\Rightarrow y'=3x^2+2bx+c$

Hàm số đạt cực trị tại $(0;1)$ và $(2;0)$

$$\Rightarrow\begin{cases}y'(0)=0\\y'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\12+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\b=-3\end{cases}$$

$\Rightarrow y=x^3-3x^2+d$

Mà đồ thị đi qua điểm $(0;1)\Rightarrow 1=d$.

Vậy $y=x^3-3x^2+1$.

Câu 3: Đáp án B.

Ta chỉ xét hàm số trên đoạn $[-2;2]$.

Nhận thấy tại $x=-1$ hàm số đổi dấu y' từ dương sang âm. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 4: Đáp án A.

Dễ thấy đây là đồ thị hàm bậc bốn.

Phương án A. Đúng: Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng nên 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.

Phương án B. Sai: Giá trị cực đại là 4 không phải giá trị lớn nhất.

Phương án C. Sai: Tổng các giá trị cực trị là:

$$3+3+4=10.$$

Phương án D. Sai: Đồ thị có điểm cực đại là $(0;4)$.

Câu 5: Đáp án A.

Nhận thấy đây là đồ thị hàm phân thức $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc<0$.

Đồ thị nhận $x=-2$ là tiệm cận ngang $\Rightarrow a=-2$.

Đồ thị nhận $y=1$ là tiệm cận đứng $\Rightarrow c=1;\ d=-1$

$\Rightarrow -2.(-1)-b.1<0\Leftrightarrow b>2$

Do vậy $b=4$.

Câu 6: Đáp án A.

Đồ thị của hàm phân thức có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc<0$.

Đồ thị nhận $x=1$ làm tiệm cận đứng $\Rightarrow \dfrac{a}{c}=1$.

Đồ thị nhận $y=1$ làm tiệm cận ngang $\Rightarrow c+d=0$

$\Rightarrow a=c=-d$ nên loại D, B $\Rightarrow y=\dfrac{x+b}{x-1}$

Do đồ thị đi qua điểm $(0;-2)\Rightarrow y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 7: Đáp án D.

Đồ thị nhận $x=\dfrac{-1}{2}$ làm tiệm cận đứng $\Rightarrow \dfrac{-d}{c}=-\dfrac{1}{2}$

Ta loại A, B

Đồ thị nhận $y=\dfrac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang

$\Rightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $y=\dfrac{x-1}{1-2x}$.

Đồ thị của hàm phân thức có dạng $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc>0$ do hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, do vậy ta chọn D.

Câu 8: Đáp án B.

Dễ thấy đây là đồ thị hàm bậc bốn.

Phương án A. Đúng.

Phương án B. Sai: (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.

Phương án C. Đúng.

Phương án D. Đúng.

Câu 9: Đáp án C.

Điểm cực tiểu của hàm số là $M(0;-2)$ vì y' đổi dấu từ âm sang dương.

Câu 10: Đáp án B.

Nhìn vào đồ thị ta thấy: Đây là đồ thị hàm bậc bốn nên loại A.

Hệ số của x^4 phải dương nên loại C.

Với hai phương án B và D, thử $(-1;1)$ là nghiệm của phương trình ở phương án B (không thỏa mãn D).

Câu 11: Đáp án C.

Nhìn vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm bậc 3 dạng: $y=x^3+bx^2+cx+d$.

$y'=3x^2+2bx+c$.

Hàm số có 2 điểm cực trị là $(1;0)$ và $(3;-4)$

$\Rightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2b+c=0 \\ 27+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-6 \\ c=9 \end{cases}$

$\Rightarrow y=x^3-6x^2+9x+d$

Đồ thị đi qua điểm $(1;0) \Rightarrow 0=1-6+9+d \Leftrightarrow d=-4$.

Câu 12: Đáp án B.

Đây là đồ thị hàm bậc 4 có hệ số của x^4 dương nên loại các phương án A, C, D.

Câu 13: Đáp án D.

Đây là đồ thị hàm bậc 4 có hệ số của x^4 âm nên loại các phương án A, C.

Đồ thị đi qua điểm $(1;2)$ nên chọn phương án D.

Câu 14: Đáp án B.

$\lim\limits_{x\to\infty} y=-1 \Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nên loại phương án C, D.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-} y=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên chọn phương án B.

Câu 15: Đáp án B.

Chú ý đây là đồ thị hàm số $y=f'(x)$.

Nhận thấy $f'(x)>0$ với $x\in(-2;0)\cup(2;+\infty)$

$f'(x)<0$ với $x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$

Do vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(0;2)$.

Câu 16: Đáp án D.

Nhận thấy đồ thị ban đầu (phần nét đứt) có dạng chữ N là đồ thị hàm bậc 3.

Vì ta xóa phần bên trái trục Oy và lấy đối xứng qua Ox nên loại các phương án B, C.

Nhận thấy $x\in(-\infty;-1)$, đồ thị đi từ $+\infty$ về -2 nên chọn phương án D.

Câu 17: Đáp án A.

Nhận thấy $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;a)$ và $(b;c)$

nghịch biến trên $(a;b)$ và $(c;+\infty)$

$\Rightarrow \begin{cases} f(a)>f(b) \\ f(b)<f(c) \end{cases}$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗		↘		↗		↘	

Câu 18: Đáp án C.

Dễ thấy $a>0$ nên loại D.

$y'=4ax^3+2bx$

$y'=0 \Leftrightarrow 2x(2ax^2+b)=0$

Vì hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow 2ax^2+b=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow b<0$.

Với $x=0: y=c \Rightarrow c<0$, chọn phương án C.

Câu 19: Đáp án B

Phân tích: Nhận thấy đây là dạng đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương, nên phương án A, C loại. Với B, C ta thấy. Hàm số ở phương án B có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$. Nhìn vào đồ thị thì ta thấy hoành độ hai điểm cực tiểu , cực đại thỏa mãn, nên chọn B.

Câu 20: Đáp án B.

Phương án A. Sai: Hàm số đạt cực tiểu là -1.

Hàm số đạt cực tiểu là 3.

Phương án B. Đúng.

Phương án C. Sai: Hàm số có giá trị cực đại là 3.

Phương án D. Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 21: Đáp án A.

Nhận thấy đây là đồ thị hàm bậc 3 nên chọn phương án A.

Câu 22: Đáp án D.

Nhận thấy $a>0$

$y(0)=d \Rightarrow d>0$

$y'=3ax^2+2bx+c$

Xét $3ax^2+2bx+c=0$ $(*)$

$\Rightarrow \Delta'>0$ (vì hàm số có 2 điểm cực trị) $\Rightarrow b^2>3ac$

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $(*)$

$\Rightarrow x_1x_2=\dfrac{c}{3a}$.

Do 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu $\Rightarrow \dfrac{c}{3a}<0 \Rightarrow c>0$ (vì $a>0$)

Câu 23: Đáp án C.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f'(x)>0$ với $x\in(a;b)\cup(c;+\infty)$

$f'(x)>0$ với $x\in(-\infty;a)\cup(b;c)$

$f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt a,b,c

Mà y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x=a$.

Suy ra: Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=a$.

Vậy đồ thị cắt trục hoành nhiều nhất tại 1 điểm.

Câu 24: Đáp án C

Dễ thấy đây là đồ thị hàm bậc 3 với hệ số của x^3 dương nên loại B, D.

Đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ là 1 nên $y(0)=1$.

Câu 25: Đáp án D.

Xóa phần đồ thị bên dưới trục hoành và lấy đối xứng phần bị xóa qua trục hoành

Dễ thấy đồ thị hàm số $y=\left|x^3+3x^2\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 26: Đáp án B.

Nhận thấy đây là dạng đồ thị hàm bậc 4 có hệ của x^4 dương nên loại A, D.

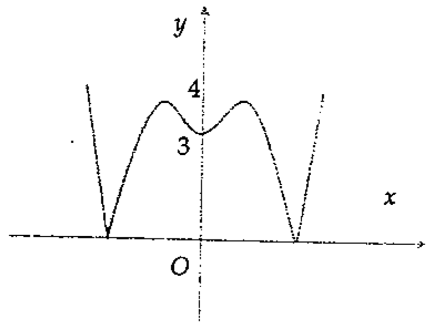
$y(0)=-1$ nên ta chọn B.

Câu 27: Đáp án A.

Ta sẽ xác định đồ thị hàm số $y=|f(x)|$

Xóa phần đồ thị bên dưới trục Ox và lấy đối xứng phần bị xóa qua Ox

Đồ thị $y=|f(x)|$ có dạng:



Phương trình $|f(x)|=m$ có 2 nghiệm thực phân biệt khi $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m=0 \end{array}\right.$

Câu 28: Đáp án D.

Dễ thấy đây là đồ thị hàm phân thức nên loại A, C.

Vì đồ thị nhận $x=1$ làm tiện cận đứng nên chọn D.

Câu 29: Đáp án D.

Đồ thị nhận $y=1$ làm tiệm cận ngang nên loại A, B.

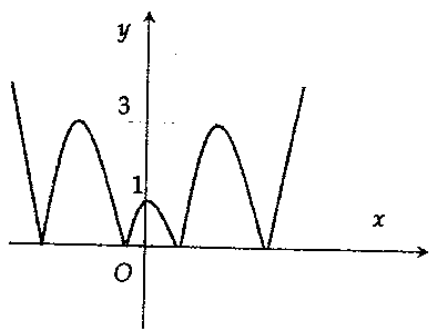
Đồ thị cắt Ox tại điểm $(-2;0)$ nên chọn D.

Câu 30: Đáp án C.

Xác định đồ thị của hàm $y=|f(x)|$

Xóa phần đồ thị dưới trục Ox và lấy đối xứng phần bị xóa qua Ox

Đồ thị có dạng:



Để $y=|f(x)|=m$ có 4 nghiệm phân biệt suy ra $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Câu 31: Đáp án A.

Xét phương trình $x^3-3x-m=0 \Leftrightarrow x^3-3x+1=m+1$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y=m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ tại 3 điểm phân biệt $\Rightarrow -1<m+1<3 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 32: Đáp án D.

Nhận thấy đồ thị nhận $y=\alpha(\alpha>0)$ làm tiệm cận ngang $\Rightarrow \frac{a}{c}>0 \Rightarrow ac>0(1)$

Đồ thị nhận $x=\beta(\beta<0)$ làm tiệm cận đứng nên $cd<0(2)$.

Từ $(1),(2) \Rightarrow ad<0$.

Mà đồ thị cắt Ox tại điểm có hoành độ dương suy ra $ab<0$.

Vậy chọn D.

Câu 33: Đáp án D.

Đây là hàm bậc 4 trùng phương nên đồ thị có dạng chữ M hoặc W nên ta loại B.

Do hệ số của x^4 âm nên loại C.

$y(0)=-1 \Rightarrow$ Đồ thị cắt Oy tại $(0;-1)$ nên chọn D.

Câu 34: Đáp án B.

Đây là đồ thị hàm số bậc 4 với hệ số của x^4 dương nên loại D.

Đồ thị đi qua điểm $(2;-5)$ nên chỉ có B thỏa mãn.

Câu 35: Đáp án B

A đúng

B sai với $m=-3$. thì $y=m$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.

C, D đúng.

Câu 36: Đáp án B

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\left[\begin{array}{l} m=-4. \\ -3<m \end{array}\right.$

Câu 37: Đáp án A.

Nhận thấy $y(0)=2$ nên loại B, C.

Hệ số của x^3 âm nên loại D.

Vậy chọn A.

Câu 38: Đáp án D.

Đồ thị nhận $y=-2$ là tiệm cận ngang nên loại C.

Đồ thị nhận $x=-1$ là tiệm cận đứng nên loại B.

Và đồ thị cặt Oy tại $(0;1)$

Vậy ta chọn D.

Câu 39: Đáp án A.

Nhận thấy đây là dạng đồ thị của hàm bậc 3 với hệ số của x^3 dương nên loại B, C.

Mà đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên chọn A.

Câu 40: Đáp án D.

Nhận thấy phần đồ thị bên trái trục Oy bị xóa đi và phần còn lại được lấy đối xứng qua trụ Oy.

Suy ra: Đây là dạng đồ thị $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|$

Câu 41: Đáp án C.

Để $f(x)=m-2$ có 4 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow -4<m-2<-3 \Leftrightarrow -2<m<-1$.

Câu 42: Đáp án C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=x+2$ và đồ thị hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$:

$$x+2=\frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ (x+2)(x-1)=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x^2-x-3=0 \end{cases}$$

Theo Vi-ét ta có: $x_A+x_B=1$.

Câu 43: Đáp án C.

Do đồ thị hàm số nhận $y=1$ là tiệm cận ngang nên loại D.

Đồ thị hàm số nhận $x=1$ là tiệm cận đứng nên loại A, B.

Chủ đề 2: Hàm số lũy thừa, hàm số mũ – hàm số logarit

I. Lũy thừa hàm số lũy thừa.

1. Lũy thừa với số mũ nguyên.

$a^n = a.a.a...a$ (n thừa số)

Với n là số nguyên dương lớn hơn 1. Quy ước $a^1 = a$

2. Lũy thừa với số mũ 0 – số mũ nguyên âm.

Với $a \neq 0$; n nguyên dương thì $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{n}$

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như lũy thừa với các số mũ nguyên dương.

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

Cho a là số thực dương và số hữu tỷ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lũy thừa của a với số mũ r được xác định bởi

$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ.

Cho α là số vô tỉ, r_n là số hữu tỉ và $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ thì $a^\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} a^{r_n}$

5. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực.

Cho a, b là những số thực dương; m, n là những số thực tùy ý. Khi đó

$$a^m.a^n = a^{m+n} ;\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ;\ \left(a^m\right)^n = a^{mn} ;\ \left(ab\right)^m = a^m.b^m ;\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} ;$$

Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.

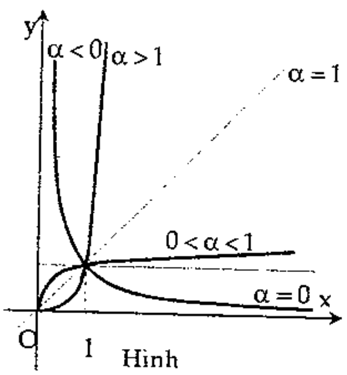
Nếu $a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

7. Căn bậc n.

Với n là số nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Từ định nghĩa, ta thừa nhận hai khẳng định sau đây

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n, kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n, một số dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, số kia là số đối $-\sqrt[n]{a}$.



Hình

Ghi nhớ

1. Căn bậc 1 của a là a.
2. Căn bậc n của 0 là 0 với mọi n nguyên dương.
3. Số âm không có căn bậc chẵn.
4. Với n là số nguyên dương lẻ, ta có $\sqrt[n]{a} > 0 \Leftrightarrow a > 0$ và $\sqrt[n]{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$.
5. $\sqrt[n]{a^n} = a$ nếu n lẻ, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ nếu n chẵn.

6. Hàm số lũy thừa.

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Ví dụ: $y = x$; $y = x^2$; $y = x^{\sqrt{2}}$;... là các hàm số lũy thừa.

Chú ý:

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể,

Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;

Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

STUDY TIP:
Sự khác nhau giữa hàm số lũy thừa và hàm số mũ, hai hàm này có sự khác biệt giữa cơ số và số mũ.
1. Hàm lũy thừa có số mũ không đổi, cơ số biến thiên.
2. Hàm số mũ có số mũ biến thiên, cơ số không đổi.

a. Đạo hàm: $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$.

b. Dạng của đồ thị hàm số lũy thừa: Xét trên khoảng $(0;+\infty)$ thì

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $(1;1)$.

Trong **hình 2.1** là đồ thị hàm số lũy thừa trên $(0;+\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α.

c. Bảng tóm tắt tính chất của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
Đạo hàm	$y' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$y' = \alpha.x^{\alpha-1}$
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là trục *Ox*, tiệm cận đứng là trục *Oy*.
Đồ thị	Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$	Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$

II. Hàm số mũ.

Cho số thực dương a thỏa mãn $0 < a \neq 1$

Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

STUDY TIP:
Đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra khi $x > 0$. Do đó hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ không đồng nhất với hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Đạo hàm

$$\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$$

Đối với hàm hợp $y = a^{u(x)}$, ta có

$$\left(a^u\right)' = a^u.\ln a.u'$$

b. Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số mũ $y = a^x\,(a > 0; a \neq 1)$.

Tập xác định	$(-\infty;+\infty)$
Đạo hàm	$y' = a^x.\ln a$
Chiều biến thiên	$a > 1$ thì hàm số luôn đồng biến; $0 < a < 1$ thì hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Trục *Ox* là tiệm cận ngang.
Đồ thị	Đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm phía trên trục hoành $\left(y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}\right)$

III. Logarit: Hàm số logarit

A. Logarit

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. $\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b}$

2. Tính chất

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có các tính chất sau: $\boxed{\log_a 1 = 0. \log_a a = 1, \; a^{\log_a b} = b, \log_a\left(a^\alpha\right) = \alpha}$

3. Quy tắc tính logarit

Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có quy tắc sau:

$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$; $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$;

$\log_a b_1^\alpha = \alpha \log_a b_1$; $\boxed{\log_a \sqrt[n]{b_1} = \frac{1}{n}\log_a b_1}$

4. Đổi cơ số

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Từ điều trên ta rút ra các công thức đặc biệt:

$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)}$; $\boxed{\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b, (\alpha \neq 0)}$

5. Logarit thập phân, logarit tự nhiên

Logarit thập phân là logarit cơ số 10, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

Logarit tự nhiên (logarit Neper): Logarit cơ số e được gọi là logarit tự nhiên, $\log_e N (N > 0)$, được viết là $\ln N$.

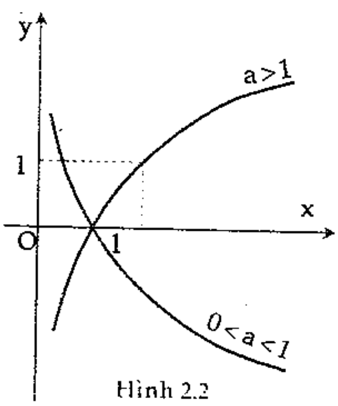
B. Hàm số logarit

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Đạo hàm

$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$; $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$; $y = \log_a u(x) \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$.



Hình 2.2

3. Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số logarit $y = \log_a x (a > 0; a \neq 1)$

Tập xác định	$(0; +\infty)$
Đạo hàm	$y' = \frac{1}{x.\ln a}$
Chiều biến thiên	$a > 1$: hàm số luôn đồng biến. $0 < a < 1$: hàm số luôn nghịch biến.
Tiệm cận	Trục Oy là tiệm cận đứng.
Đồ thị	đi qua các điểm $(1;0)$ và $(a;1)$; nằm phía bên phải trục tung.

Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ trong hai trường hợp $a>1$ hoặc $0<a<1$ được biểu diễn ở hình 2.2.

IV. Ứng dụng của hàm số mũ, hàm số logarit trong thực tế.

a. Dạng toán gửi lãi suất ngân hàng

Gửi lãi suất

Dạng 1: **Gửi vào ngân hàng một số tiền a đồng với lãi suất $r\%$ mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Gửi theo phương thức không kỳ hạn. Tính số tiền lãi thu được sau n tháng.**

Lời giải tổng quát

Cuối tháng thứ nhất số tiền trong tài khoản là $A_1=a+a.r\%=a(1+r\%)$

Cuối tháng thứ hai, số tiền trong tài khoản là

$A_2=a(1+r\%)+a(1+r\%).r\%=a(1+r\%)^2$

...

Cuối tháng thứ n số tiền thu được là $A_n=a(1+r\%)^n$ đồng.

Số tiền lãi thu được sau n tháng là $\boxed{a(1+r\%)^n-a \text{ đồng}}$.

Ví dụ 1: Ông A gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 năm với lãi suất $7,65\%/$ năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau 5 năm, ông A thu được cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu triệu đồng?

A. $15.(0,0765)^5$ triệu đồng B. $15.\left[1+2.(0.0765)\right]^5$ triệu đồng

C. $15.(1+0.765)^5$ triệu đồng D. $15.(1+0.0765)^5$ triệu đồng.

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Tất Thành – Hà Nội)

Đáp án D.

Lời giải

Áp dụng công thức tổng quát ở trên ta được

Số tiền ông A thu về sau 5 năm là $A=15.\left(1+\frac{7,65}{100}\right)^5=15.(1+0.0765)^5$

Dạng 2: **Gửi vào ngân hàng một số tiền a đồng với lãi suất $x\%=r$ mỗi tháng theo hình thức lãi kép. Gửi theo phương thức có kỳ hạn m tháng. Tính số tiền cả gốc lẫn lãi A sau n kỳ hạn.**

STUDY TIP:
Lãi suất sẽ không được cộng dồn từng tháng để tính lãi cho tháng tiếp theo trong một kỳ hạn. Chỉ được cộng dồn khi hết kỳ hạn gửi mà người gửi không lĩnh tiền thì ngân hàng sẽ tự động gia hạn với một kỳ hạn mới bằng với kỳ hạn mà người gửi gia hạn trước đó.

Từ **"STUDY TIP"** ở bên ta thấy đưa về một ghi nhớ quan trọng: Trong cùng một kỳ hạn, lãi suất sẽ giống nhau mà không được cộng vào vốn để tính lãi kép. Ví dụ kỳ hạn là 3 tháng thì lãi suất tháng 1 là ar, tháng 2 , tháng 3 cũng là ar, sau hết kỳ hạn 3 tháng mà không rút ra thì số tiền lãi một kỳ hạn sẽ được cộng dồn vào tiền gốc.

Lời giải tổng quát

Sau kỳ hạn thứ nhất, số tiền nhận được là: $A_1=a+amr=a(1+mr)$

Sau kỳ hạn thứ hai, số tiền nhận được là:

$A_2=a(1+mr)+a(1+mr).mr=a(1+mr)^2$

....

Sau kỳ hạn thứ n, số tiền nhận được là: $\boxed{A_n=a(1+mr)^n}$

Ví dụ 2: Một người có 10 triệu đồng gửi vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng (1 quý là 3 tháng), lãi suất 6%/ 1 quý theo hình thức lãi kép (sau 3 tháng sẽ tính lãi cộng vào gốc). Sau đúng 3 tháng, người đó gửi thêm vào 20 triệu đồng cũng với hình thức lãi suất như vậy. Hỏi sau 1 năm, tính từ lần gửi đồng tiên, người đó nhận được số tiền gần nhất với kết quả nào?

A. 35 triệu B. 37 triệu C. 36 triệu D. 38 triệu

(Trích đề thi thử THPT Quang Trung – Hà Nội)

Đáp án C

Lời giải

Sau quý thứ nhất, số tiền trong tài khoản của người đó là:

$10.(1+6\%)+20=30,6$ triệu đồng (do người đó gửi thêm vào 20 triệu).

Sau quý thứ hai số tiền có trong tài khoản của người đó là

$30,6+30,6.6\%=30,6(1+6\%)$ triệu đồng.

Sau 1 năm số tiền người đó thu được là $30,6.(1+6\%)^3\approx 36,445$ triệu đồng.

Do ở đây số thập phân nhỏ hơn phẩy 5 do đó ta chọn 36 triệu đồng là gần nhất.

*Trên đây là bài toán có kỳ hạn mà người gửi rút ra đúng kỳ hạn, vậy nếu rút ra không kỳ hạn thì sẽ ra sao. Theo quy ước của ngân hàng thì " **Nếu người gửi rút tiền trước kỳ hạn trước ngày đến hạn) dù chỉ một ngày thì toàn bộ số tiền lãi của người gửi cũng sẽ quy về lãi suất không kỳ hạn với tiền lãi rất ít thường là** $<1\%$"*

Ta đến với ví dụ tiếp theo:

Ví dụ 3: Một bác nông dân vừa bán một con trâu được số tiền là 20.000.000 đồng. Do chưa cần dùng đến tiền nên bác nông dân mang toàn bộ số tiền đó đi gửi tiết kiệm ngân hàng loại kỳ hạn 6 tháng với lãi suất kép là $8,5\%$ một năm. Hỏi sau 5 năm 8 tháng bác nông dân nhận được bao nhiêu tiền cả vốn lẫn lãi (làm tròn đến hàng đơn vị)? Biết rằng bác nông dân đó không rút vốn cũng như lãi trong tất cả các định kỳ trước và nếu rút trước thời hạn thì ngân hàng trả lãi suất theo không kỳ hạn $0,01\%$ một ngày (1 tháng tính 30 ngày).

A. 31803311 B. 32833110 C. 33083311 D. 30803311

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần II)

Đáp án A.

STUDY TIP:
Nếu người gửi rút tiền trước kỳ hạn thì toàn bộ số tiền lãi của người gửi quy về lãi suất không kỳ hạn theo quy định của ngân hàng.

Lời giải

Một kỳ hạn có 6 tháng, mà môt năm có 12 tháng với lãi suất là 8,5% một năm, do vậy lãi suất một kỳ hạn là $\frac{8,5}{2}\%=4,25\%$.

5 năm 8 tháng = 5 năm 6 tháng + 2 tháng = 11 kỳ hạn + 2 tháng.

Vậy sau 11 kỳ hạn thì số tiền người đó nhận được là:

$A=20.000.000(1+4,25\%)^{11}$ đồng

Vì người đó rút khi chưa hết kỳ hạn thứ 12, do vậy 2 tháng không còn kỳ hạn sẽ được tính theo lãi suất không kỳ hạn $0,01\%$ một ngày, do vậy kết thúc kỳ hạn số tiền bác nông dân nhận được là

$B=A.(1+0.01\%)^{60}\approx 31803310.72$ đồng.

Dạng 3: Mỗi tháng đều gửi vào số tiền là a đồngtheo thể thức lãi kép với lãi suất là $x\% = r$ mỗi tháng. Tính số tiền thu được sau n tháng.

Lời giải tổng quát

Cuối tháng thứ nhất, số tiền nhận được là $A_1 = a(1+r)$

Cuối tháng thứ hai số tiền nhận được là

$$A_2 = [a(1+r)+a](1+r) = a(1+r)^2 + a(1+r)$$

...

Cuối tháng thứ n số tiền nhận được là

$$A_n = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + ... + a(1+r)$$

$$= a(1+r)\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + 1\right] \boxed{= a(1+r).\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$$

"Giải thích bước rút gọn ở trên đó là:

$$1 + x + x^2 + x^3 + .. + x^k = S$$

Khi đó $S.x = x + x^2 + x^3 + ... + x^{k+1}$. *Từ đó suy ra* $S(x-1) = x^{k+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}$ *Với*

$x = 1 + r$ *và* $k = n - 1$ *thì ta được rút gọn* $1 + (1+r) + ... + (1+r)^{n-1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ "

Ví dụ 4: Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng người này tiết kiệm một số tiền cố định là a đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kì hạn một tháng với lãi suất 0,6%/tháng. Tìm a để sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên người đó có được tổng số tiền là 400 triệu đồng. (Biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi)

A. a = 9.799.882 đồng
B. a = 9.292.288 đồng
C. a = 9.729.288 đồng
D. a = 9.927.882 đồng

(Trích đề thi thử THPT Huỳnh Thúc Kháng)

Đáp án D

<u>Lời giải</u>

Áp dụng công thức tổng quát phía trên thì ta có sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên số tiền nhận được sẽ là:

$$A = a.(1+0,6\%).\frac{(1+0,6\%)^{36} - 1}{0,6\%} = 400.000.000 \Rightarrow a \approx 9.927.881,582$$

Ví dụ 5: Ông An gửi gói tiết kiệm tích lũy cho con tại một ngân hàng với số tiền tiết kiệm ban đầu là 200.000.000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20.000.000 VNĐ. Ông không rút lãi định kỳ hàng năm. Biết rằng, lãi suất định kỳ hàng năm không thay đổi. Hỏi sau 18 năm, số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?

A. 1.335.967.000 VNĐ
B. 1.686.898.000 VNĐ
C. 743.585.000 VNĐ
D. 739.163.000 VNĐ

(Trích đề thi thử THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội)

Phân tích: Đây lại là bài toán khác với bài toán trên, bởi ban đầu ông đã có sẵn vốn ở trong tài khoản, do vậy ta thử làm bài toán này dưới dạng xây dựng mô hình công thức như dưới lời giải sau.

Đáp án A.

Lời giải

Sau năm thứ nhất số tiền mà ông An nhận được là $200.(1+7\%)=214$ triệu đồng.

Đầu năm thứ hai, ông An gửi vào 20 triệu, nên đến cuối năm 2 số tiền ông nhận được là $(214+20).(1+7\%)$ triệu đồng.

Đầu năm thứ 3, ông An gửi vào 20 triệu đồng, nên đến cuối năm thứ 3, số tiền ông nhận được là:

$$\left[(214+20).(1+7\%)+20\right].(1+7\%)=(214+20).(1+7\%)^2+20.(1+7\%)$$

Đầu năm thứ 4, ông An gửi vào 20 triệu đồng nên đến cuối năm thứ 4, số tiền ông nhận được là:

$$\left\{\left[(214+20).(1+7\%)^2+20.(1+7\%)\right]+20\right\}.(1+7\%)$$

$=(214+20).(1+7\%)^3+20.(1+7\%)^2+20.(1+7\%)$ triệu đồng.

...

Sau năm thứ 18, số tiền ông An nhận được là

$$A=(214+20).(1+7\%)^{17}+20.(1+7\%).\left(1+(1+7\%)+(1+7\%)^2+...+(1+7\%)^{15}\right)$$

$=(214+20).(1+7\%)^{17}+20.(1+7\%).\dfrac{(1+7\%)^{16}-1}{7\%}\approx 1335.967105$ triệu đồng.

Đến đây ta có công thức tổng quát cho bài toán, vốn có A đồng, bắt đầu từ tháng thứ 1 mỗi tháng gửi thêm a đồng với lãi suất $r\%$ thì sau n tháng số tiền thu được sẽ là: $\boxed{S=(A+a).(1+r\%)^n+a.(1+r\%).\dfrac{(1+r\%)^{n-1}-1}{r\%}}$

Vay lãi suất

b. Dạng toán vay lãi suất ngân hàng và dạng toán mua trả góp.

Dạng 4: Vay A đồng từ ngân hàng với lãi suất $x\%=r$ mỗi tháng. Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu để sau n tháng hết nợ. (Trả tiền vào cuối tháng).

Lời giải tổng quát

Cuối tháng thứ nhất, số tiền người đó còn nợ là $N_1=A(1+r)-a$ đồng

Cuối tháng thứ hai, số tiền người đó còn nợ là

$N_2=N_1.(1+r)-a=A(1+r)^2-a(1+r)-1$

Cuối tháng thứ ba, số tiền người đó còn nợ là:

$N_3=N_2(1+r)-a=A(1+r)^3-a(1+r)^2-a.(1+r)-a$

...

Cuối tháng thứ n số tiền người đó còn nợ là:

$N_n = A(1+r)^n - a\left(1+(1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^{n-1}\right) \boxed{= A(1+r)^n - a.\frac{(1+r)^n-1}{r}}$

Để hết nợ sau n tháng thì số tiền còn nợ sau n tháng là 0, tức là ta giải phương trình $\boxed{A(1+r)^n - a.\frac{(1+r)^n-1}{r} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{A(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}}$ (số tiền phải trả mỗi tháng).

Ví dụ 6: Chị Minh vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả 5,5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên?

A. 64 tháng B. 54 tháng C. 63 tháng D. 55 tháng.

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Bắc Ninh)

Đáp án A.

Lời giải

Áp dụng công thức vừa thiết lập ở bài toán tổng quát thì ta có phương trình

$$300.(1+0,5\%)^n - 5,5.\frac{(1+0,5\%)^n-1}{0,5\%} = 0 \Leftrightarrow 300.1,005^n - 1100.(1,005^n-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{1,005}\frac{11}{8} \approx 63,84984073.$$

Ví dụ 7: Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/ năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \frac{100.(1,01)^3}{3}$ triệu đồng.

B. $m = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ triệu đồng

C. $m = \frac{100.1,03}{3}$ triệu đồng

D. $m = \frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ triệu đồng.

(Trích đề minh họa lần I môn Toán của BGD&ĐT)

Đáp án B

Lời giải

Lãi suất 12%/ năm nên mỗi tháng lãi suất là 1% một tháng.

Áp dụng công thức đã chứng minh ở trên thì mỗi tháng số tiền ông A phải trả là: $\boxed{a = \frac{A(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}}$

$$= \frac{100.(1+0,01)^3.0,01}{(1+0,01)^3-1} = \frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}.$$

c. Ứng dụng trong đời sống xã hội.

Theo nghiên cứu thì hằng năm dân số thế giới tăng theo hàm mũ theo thời gian có dạng như sau: $P(t)=P(0).e^{kt}$ trong đó $P(0)$ là dân số tại thời điểm chọn làm mốc, $P(t)$ là dân số thế giới sau t năm, và k là hệ số được xác định theo từng khoảng thời gian.

Ta có ví dụ về hàm tăng trưởng dân số ở bài toán sau:

Ví dụ 8: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=A.e^{r.N}$ trong đó: A là dân số của năm lấy mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2001, dân số Việt Nam có khoảng 78.685.000 người và tỷ lệ tăng dân số hằng năm là 1,7% một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi thì đến năm nào dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người?

A. 2020. B. 2024. C. 2026. D. 2022.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội)

Đáp án C.

Lời giải

Áp dụng công thức đã cho thì ta có $120\,000\,000=78\,685\,000.e^{1,7\%.N}$

$$\Leftrightarrow e^{1,7\%.N}=\frac{120\,000\,000}{78\,685\,000}\Leftrightarrow 1,7\%.N=\ln\left(\frac{120\,000\,000}{78\,685\,000}\right)$$

$$\Leftrightarrow N=\frac{\ln\left(\frac{120\,000\,000}{78\,685\,000}\right)}{1,7\%}\approx 24,82583545\approx 25$$

Như vậy sau 25 năm, tức là năm 2026 thì dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người.

Đọc thêm: *Hàm số tính độ gia tăng dân số thế giới trên càng về sau có độ chính xác không nhiều nên để dự đoán các năm tiếp theo, ta cập nhật lại mốc thời gian và tính toán. Các hàm số mũ và logarit thể hiện một cách rất rõ ràng mức độ biến thiên của các đại lượng đặc trưng tương ứng trong từng dạng.*

d. Ứng dụng trong khoa học kĩ thuật.

Trong vật lý, khái niệm nghiên cứu phóng xạ rất quen thuộc và trở thành ngành đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của thế giới các năm trở lại đây. Trong chương trình Vật lý lớp 12, chúng ta cũng đã làm quen với dạng toán về phóng xạ, bài toán xác định tuổi của gỗ, xác định thời gian tồn tại,...

Bài toán thường gặp như sau:

Giả sử tại thời điểm đầu, một loại chất phóng xạ có khối lượng m_0 thì công thức để tính khối lượng chất phóng xạ còn lại sau thời gian t là $m(t)=m_0.e^{-kt}$ với k gọi là hằng số phóng xạ phụ thuộc vào từng loại chất.

Chu kì bán rã là khoảng thời gian mà chất phóng xạ chỉ còn lại một nửa lượng chất ban đầu được tính bằng công thức: $T=\frac{\ln 2}{k}$.

Ví dụ 9: Bom nguyên tử là loại bom chứa Uranium-235 được phát nổ khi ghép các khối Uranium-235 thành một khối chứa 50kg tinh khiết. Uranium-235 có chu kỳ bán rã là 704 triệu năm. Nếu quả bom ban đầu chứa 64kg Uranium-235 tinh khiết và sau t triệu năm thì quả bom không thể phát nổ. Khi đó t thỏa mãn phương trình:

A. $\frac{50}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$ B. $\frac{64}{50}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$ C. $\frac{64}{50}=(2)^{\frac{t}{704}}$ D. $\frac{50}{64}=(2)^{\frac{t}{704}}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Văn Linh)

Đáp án A.

Lời giải

Ở đây, sau t triệu năm quả bom không thể phát nổ, tức là trong khoảng thời gian t triệu năm đó thì quả bom không nổ, quả bom nổ vào năm thứ t triệu tính từ thời điểm ban đầu.

Do chu kì bán rã của Uranium – 235 là 704 triệu năm nên ta có

$$704=\frac{\ln 2}{k}\Rightarrow k=\frac{\ln 2}{704}$$

Sau t triệu năm quả bom không phát nổ nên $64.e^{-\frac{\ln 2}{704}.t}=50\Leftrightarrow e^{-\frac{\ln 2}{704}.t}=\frac{50}{64}$

$$\Leftrightarrow\frac{50}{64}=\left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{704}}\Leftrightarrow\frac{50}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}.$$

Ví dụ 10: Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó mất 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó bao nhiêu tuổi, biết chu kì bán rã của ^{14}C là 5730 năm.

A. 2378 năm B. 11460 năm C. 2371 năm D. 11461 năm

Đáp án A

Lời giải

Giả sử tại thời điểm ban đầu thì mẫu đồ cổ có chứa lượng Cacbon là m_0 và tại thời điểm t (tính từ thời điểm ban đầu), khối lượng đó là $m(t)$ thì ta có

$$m(t)=m_0.e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}\Leftrightarrow 75\%m_0=m_0e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}\Leftrightarrow\frac{3}{4}=e^{\frac{-\ln 2}{5730}t}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right).5730}{-\ln 2}\approx 2378\text{ năm.}$$

e. Ứng dụng khác.

[Đọc thêm]

a. Trong đời sống, một loại logarit được ứng dụng rất nhiều đó là logarit nhị phân (logarit với cơ số 2). Trong tin học, hệ nhị phân được dùng xuyên suốt trong tất cả các nội dung lí thuyết và ứng dụng. Những bài toán có độ phức tạp được đánh giá theo đại lượng là Big – O thường có giá trị là $\log_2 n$

b. Bài toán vật lý về chu kì bán rã cũng có xuất hiện dạng logarit này.

Ví dụ 11: Trong tin học, độ hiệu quả của một thuật toán tỉ lệ thuận với thời gian thực thi chương trình tương ứng và được tính theo công thức

$E(n)=\frac{n}{P(n)}$ với n là số lượng dữ liệu đưa vào và $P(n)$ là độ phức tạp của thuật toán ứng với giá trị n. Biết rằng một thuật toán có độ phức tạp là $P(n)=\log_2 n$ và khi $n=300$ thì để chạy nó, máy tính mất 0,02 giây. Hỏi khi $n=90000$ thì phải mất bao lâu để thực thi chương trình tương ứng?

A. 3 giây B. 2 giây C. 1 giây D. 0,06 giây

Đáp án A.

Phân tích

1. Thời gian tỉ lệ thuận với độ hiệu quả.

2. Cho thời gian khi $n=300$, tính thời gian khi $n=90000$. Vậy ta dùng biểu thức tỉ lệ, từ đó tìm ra thời gian chạy khi $n=90000$.

Lời giải

Với $n=300$ thì độ hiệu quả của thuật toán là $E(300)=\dfrac{300}{\log_2 300}$.

Với $n=90000$ thì độ hiệu quả của thuật toán là

$$E(90000)=\frac{90000}{\log_2 90000}=\frac{300^2}{\log_2 300^2}=\frac{300}{2}.\frac{300}{\log_2 300}=150.E(300).$$

Vì tốc độ chạy của chương trình tỉ lệ thuận với độ hiệu quả của thuật toán nên

$$\frac{t}{0,02}=\frac{E(300).150}{E(300)}\Rightarrow t=3 \text{ giây}.$$

Ví dụ 12: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

A. 1000 lần B. 10 lần C. 2 lần D. 100 lần

(Trích đề thi thử "Sở GD- ĐT Hưng Yên; THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa; THPT Can Lộc – Hà Tĩnh")

Đáp án D.

Lời giải

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là:

$$M_1=\log A_1-\log A_0=\log\frac{A_1}{A_0}=8$$

Ở Nhật Bản, trận động đất có cường độ là:

$$M_2=\log\frac{A_2}{A_0}=6$$

Khi đó $8-6=\log\dfrac{A_1}{A_0}-\log\dfrac{A_2}{A_0}\Leftrightarrow 2=\log\dfrac{A_1}{A_2}\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=10^2=100.$

Ví dụ 13: Cường độ của ánh sáng đi qua một môi trường không khí, chẳng hạn như nước, sương mù,... sẽ giảm dần tùy theo mức độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu tùy thuộc môi trường theo công thức như sau: $I=I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó, với x tính bằng mét. Biết rằng môi trường nước biển có $\mu=1,4$. Hãy tính xem cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m?

A. $e^{-25,2}$ B. $e^{25,2}$ C. $e^{12,6}$ D. $e^{-12,6}$

Đáp án B

Phân tích

Đây là bài toán yêu cầu tìm tỉ lệ giữa cường độ ánh sáng giữa hai độ sâu. Sau đó kiểm tra cách rút gọn biểu thức lũy thừa.

Lời giải

- Ở độ sâu $2m$ thì cường độ ánh sáng là $I_1 = I_0.e^{-\mu.2}$

- Ở độ sâu $20m$ thì cường độ ánh sáng là $I_2 = I_0.e^{-\mu.20}$.

Khi đó ta có tỉ số $\frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-2\mu}}{e^{-20\mu}} = \frac{e^{-2\mu}}{\left(e^{-2\mu}\right)^{10}} = \frac{1}{e^{-18\mu}} = e^{18\mu} = e^{25,2}$

Cũng với bài toán như ở ví dụ 3, thì ta có bài toán ngược như sau để kiểm tra cách giải phương trình mũ.

Ví dụ 14: Cường độ của ánh sáng đi qua một môi trường không khí, chẳng hạn như nước, sương mù,… sẽ giảm dần tùy theo mức độ dày của môi trường và một hằng số μ gọi là khả năng hấp thu tùy thuộc môi trường theo công thức như sau: $I = I_0.e^{-\mu x}$ với x là độ dày của môi trường đó, với x tính bằng mét. Biết rằng môi trường nước biển cường độ ánh sáng giảm đi $e^{25,2}$ lần từ độ sâu 2 m xuống đến độ sâu 20 m, tìm hằng số μ là khả năng hấp thu ánh sáng trong môi trường nước biển?

Lời giải

Từ ví dụ 3, ta có phương trình sau: $e^{18\mu} = e^{25,2} \Rightarrow \mu = 1,4$

Ngoài các bài toán trên, ta có một số bài toán đơn giản ứng dụng khác của hàm số mũ và hàm số logarit như sau:

Ví dụ 15: Chi phí tổng cộng của một công ty được tính như sau $C(t) = 90 - 50e^{-t}$ (tỉ VNĐ) với t là thời gian tính bằng số năm kể từ khi công ty thành lập. Chi phí công ty đã chi ra sau 10 năm xấp xỉ:

A. 89 tỉ VNĐ

B. 90 tỉ VNĐ

C. 1101233 tỉ VNĐ

D.1101232 tỉ VNĐ

Đáp án B.

Lời giải

Đây là bài toán khá đơn giản khi ta chỉ cần thay số vào.

Chi phí công ty phải chi ra trong 10 năm là

$C(10) = 90 - 50.e^{-10} \approx 90$

Ví dụ 16: Một nghiên cứu đã cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20.\ln(t+1), t \geq 0$ (%). Hỏi sau khoảng bao lâu thì nhóm học sinh nhớ danh sách đó là dưới 10%?

A. 24 tháng B. 25 tháng C.23 tháng D. 22 tháng

Đáp án B

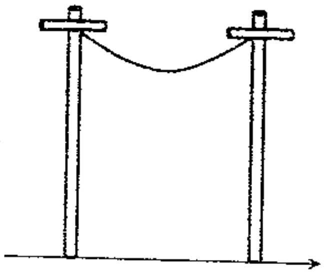
Phân tích: Bài toán là ứng dụng của giải phương trình logarit.

Lời giải

Ta có $75 - 20.\ln(t+1) = 10 \Leftrightarrow 20.\ln(t+1) = 65 \Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{13}{4}$

$\Leftrightarrow t = e^{\frac{13}{4}} - 1 \approx 24,79$ tháng.

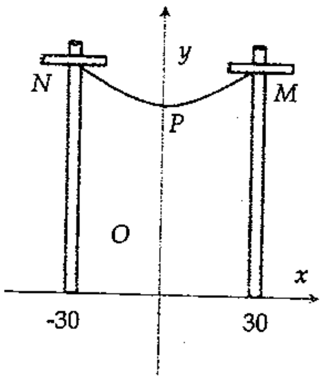
Bài toán tiếp theo đưa ra hàm số trong đó chứa các hàm số mũ tự nhiên. Trong ví dụ này, ta cần chú ý cách giải phương trình mũ, chú ý tính chất $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.



Ví dụ 17 (đọc thêm): Một thành phố có các đường dây điện được treo giữa các cột điện liên tiếp cách nhau 60 (đơn vị) ở bên đường, đoạn dây giữa hai cột điện tạo nên một đường cong thường được gọi là các mắt xích tiếp nối nhau. Khi đó, giả sử đồ thị hàm số $y = 30\left(e^{\frac{x}{60}} + e^{-\frac{x}{60}}\right)$, $(-30 \le x \le 30)$ là đồ thị của đường cong dây điện (mắt xích) giữa hai cột điện. Biết rằng khoảng cách giữa điểm thấp nhất trên đường mắt xích và trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh của cột điện được gọi là độ trùng của dây điện (nếu độ trùng dây vượt quá 8 đơn vị thì sẽ vượt ra khỏi ngưỡng an toàn). Hỏi ở thành phố này độ trùng của dây là bao nhiêu đơn vị độ dài?

A. 7,7 đơn vị B. 7 đơn vị C. 8 đơn vị D. 8,7 đơn vị

Đáp án A.



Lời giải

Bài toán là sự kết hợp kiểm tra giữa khảo sát hàm số, tìm GTNN của hàm số, kiểm tra các tính chất của hàm mũ. Để tính được độ trùng của dây thì ta tìm tọa độ điểm thấp nhất trên đồ thị hàm số trong đoạn $[-30;30]$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ bên.

Ta có $y' = 30\left[\frac{1}{60}e^{\frac{x}{60}} - \frac{1}{60}.e^{-\frac{x}{60}}\right] = \frac{1}{2}.\left(e^{\frac{x}{60}} - e^{\frac{-x}{60}}\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{60}} - e^{-\frac{x}{60}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{60} = -\frac{x}{60} \Leftrightarrow x = 0$

Nhận xét, khi $x = 0$ thì $y = 30.\left(e^0 + e^0\right) = 60$ (đơn vị).

Kí hiệu như hình vẽ ta có:

Tung độ của điểm P bằng với tung độ điểm M, N. Do vậy ta chỉ cần tìm tung độ của N.

Mặt khác N nằm trên đồ thị hàm số $y = 30\left(e^{\frac{x}{60}} + e^{-\frac{x}{60}}\right)$, $(-30 \le x \le 30)$, do vậy

$y_N = y(30) = 30.\left(e^{\frac{30}{60}} + e^{-\frac{30}{60}}\right) \approx 67,7$ (đơn vị)

Vậy độ trùng dây điện là $67,7 - 60 = 7,7$ (đơn vị).

Bài tập rèn luyện kỹ năng

1. Bài toán lãi suất ngân hàng

Câu 1: Ông B gửi vào ngân hàng số tiền là 120 triệu đồng với lãi suất định kỳ hàng năm là 12%/năm. Nếu sau mỗi năm, ông không đến ngân hàng lấy lãi thì tiền lãi sẽ cộng dồn vào vốn ban đầu. Hỏi sau đúng 12 năm kể từ ngày gửi, số tiền lãi L (không kể vốn) ông sẽ nhận được là bao nhiêu? (Giả sử trong thời gian đó, lãi suất ngân hàng không thay đổi).

A. $L=12.10^7\left[(1,12)^{12}-1\right]$ (VNĐ)

B. $L=12.10^7\left[(1,12)^{12}+1\right]$ (VNĐ)

C. $L=12.10^7.(1,12)^{12}$ (VNĐ)

D. $L=12.10^7.0,12$ (VNĐ)

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 2: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4 % năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu tháng người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu (lấy giá trị quy tròn)?

A. 96 B. 97 C. 98 D. 99

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 3: Anh Phúc đầu tư 100 triệu đồng vào một công ty theo thể thức lãi kép với lãi suất 15% một năm. Giả sử lãi suất hàng năm không thay đổi. Hỏi sau 3 năm, số tiền lãi của anh Phúc gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 52,1 triệu B. 152,1 triệu

C. 4,6 triệu D. 104,6 triệu

(Trích đề thi thử THPT Phạm Hồng Thái – Hà Nội)

Câu 4: Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng người này tiết kiệm một số tiền cố định là a đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kì hạn một tháng với lãi suất 0,6%/tháng. Tìm a để sau ba năm kể từ ngày gửi lần đầu tiên người đó có được tổng số tiền là 400 triệu đồng. (Biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi)

A. a = 9.799.882 đồng B. a = 9.292.288 đồng

C. a = 9.729.288 đồng D. a = 9.927.882 đồng

(Trích đề thi thử THPT Huỳnh Thúc Kháng)

Câu 5: Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên một tháng (chuyển vào tài khoản của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2016 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi suất 1% trên một tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2016 mẹ rút toàn bộ số tiền (gồm số tiền của tháng 12 và số tiền đã gửi từ tháng 1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (Kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).

A. 50 triệu 730 nghìn đồng

B. 50 triệu 640 nghìn đồng

C. 53 triệu 760 nghìn đồng

D. 48 triệu 480 nghìn đồng

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lương Văn Tụy)

Câu 6: Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 0,5% một tháng, sau mỗi tháng lãi suất được nhập vào vốn. Hỏi sau một năm người đó rút tiền thì tổng số tiền người đó nhận được là bao nhiêu?

A. $100.(1,005)^{12}$ (triệu đồng)

B. $100.(1+12\times 0,005)^{12}$ (triệu đồng)

C. $100\times 1,005$ (triệu đồng)

D. $100.(1,05)^{12}$ (triệu đồng)

Câu 7: Bác Bình cần sửa lại căn nhà với chi phí 1 tỷ đồng. Đặt kế hoạch sau 5 năm phải có đủ số tiền trên thì mỗi năm bác Bình cần gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiết kiệm như nhau gần nhất bằng giá trị nào sau đây, biết lãi suất ngân hàng là 7%/ năm và lãi được nhập vào vốn.

A. 162 triệu đồng B. 162,5 triệu đồng

C. 162,2 triệu đồng D. 162,3 triệu đồng

(Trích đề thi THPT Yên Hòa – Hà Nội)

Câu 8: Biết rằng khi đỗ vào trường đại học X, mỗi sinh viên phải nộp một khoản tiền lúc nhập học là 5 triệu đồng. Bố mẹ Minh tiết kiệm để đầu mỗi tháng đều gửi một số tiền như nhau vào ngân hàng theo hình thức lãi kép. Hỏi mỗi tháng, họ phải gửi số tiền là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn) để sau 9 tháng, rút cả gốc lẫn lãi được 5 triệu đồng, biết lãi suất hiện tại là 0,5%/ tháng.

A. 542.000 đồng B. 555.000 đồng

C. 556.000 đồng D. 541.000 đồng

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng – Hà Nội)

Câu 9: Chị Minh vay ngân hàng 300 triệu đồng theo phương thức trả góp để mua nhà. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất chị Minh trả 5,5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu, chị Minh trả hết số tiền trên?

A. 64 tháng B. 54 tháng
C. 63 tháng D. 55 tháng

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Bắc Ninh)

Câu 10: Một sinh viên X trong thời gian học 4 năm đại học đã vay ngân hàng mỗi năm 10 triệu đồng với lãi suất 3%/ năm (thủ tục vay một năm 1 lần vào thời điểm đầu năm học). Khi ra trường X thất nghiệp chưa trả được tiền cho ngân hàng nhưng chịu lãi suất 8%/ năm. Sau 1 năm thất nghiệp, sinh viên X cũng tìm được việc làm và bắt đầu trả nợ dần. Tính tổng số tiền sinh viên X nợ ngân hàng trong 4 năm đại học và 1 năm thất nghiệp?

A. 46.538.667 đồng B. 43.091.358 đồng
C. 48.621.980 đồng D. 45.188.656 đồng

(Trích đề thi thử THPT Tiên Du – Bắc Ninh)

Câu 11: Một người vay ngân hàng 40 triệu đồng để mua một chiếc xe với lãi suất là 0,85%/tháng và hợp đồng thoả thuận là trả 500 ngàn đồng mỗi tháng. Sau một năm mức lãi suất của ngân hàng được điều chỉnh lên là 1,15%/tháng và người vay muốn nhanh chóng hết nợ nên đã thoả thuận trả 1 triệu 500 ngàn đồng trên một tháng (trừ tháng cuối). Hỏi phải mất bao nhiêu lâu người đó mới trả dứt nợ.

A. 31 tháng B. 43 tháng
C. 30 tháng D. 42 tháng

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Bạc Liêu)

Câu 12: Theo hình thức lãi kép, một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 1,75% (giả sử lãi suất trong hằng năm không đổi) thì sau hai năm người đó thu được số tiền là:

A. 103351 triệu đồng B. 103530 triệu đồng
C. 103531 triệu đồng D. 103500 triệu đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 13: Ông Pep là một công chức và ông quyết định nghỉ hưu sớm trước hai năm nên ông được nhà nước trợ cấp 150 triệu. Ngày 17 tháng 12 năm 2016 ông đem 150 triệu gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,6% một tháng. Hàng tháng ngoài tiền lương hưu ông phải đến ngân hàng rút thêm 600 nghìn để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 17 tháng 12 năm 2017, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông Pep còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suất thời gian ông Pep gửi không thay đổi.

A. $\left(50.1,006^{12}+100\right)$ triệu

B. $\left(250.1,006^{11}-100\right)$ triệu

C. $\left(50.1,006^{11}+100\right)$ triệu

D. $\left(150.1,006^{12}-100\right)$ triệu.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần I)

Câu 14: Anh Thành vay 20 triệu đồng của ngân hàng để mua laptop và phải trả góp trong vòng 3 năm với lãi suất 1,1% mỗi tháng. Hàng tháng anh Thành phải trả một số tiền cố định là bao nhiêu để sau 3 năm hết nợ? (làm tròn đến đơn vị đồng)

A. 673808 đồng. B. 674808 đồng.
C. 675808 đồng. D. 676808 đồng.

(Trích đề thi thử lần I – Sở GD&ĐT Vũng Tàu)

Câu 15: Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 535.000 đồng B. 635.000 đồng
C. 613.000 đồng D. 643.000 đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 16: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó rút được là:

A. $100.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ triệu đồng

B. $101.\left[(1,01)^{26}-1\right]$ triệu đồng

C. $101.\left[(1,01)^{27}-1\right]$ triệu đồng

D. $100.\left[(1,01)^{26}-1\right]$ triệu đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vĩnh Phúc lần 3)

Câu 17: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,5% /năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Hỏi để sau 3 năm người đó thu được cả vốn lẫn lãi tối thiểu 500 triệu đồng thì số tiền cần gửi lúc đầu ít nhất là bao nhiêu đồng? (làm tròn đến đơn vị trăm nghìn đồng).

A. 391.400.000 đồng B. 391.500.000 đồng
C. 391.600.000 đồng D. 391.300.000 đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Quý Đôn)

Câu 18: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6,5%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi khoảng bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 11 năm. B. 9 năm.
C. 8 năm. D. 12 năm.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 19: Một người gửi tiết kiệm 10000000 (đồng) vào một ngân hàng với lãi suất 0,56%/tháng. Giả sử cuối mỗi tháng người đó phải rút ra 200000 (đồng) để trả tiền điện. Hỏi số tiền còn lại của người đó sau 1 năm là bao nhiêu (làm tròn sau dấu phẩy ba chữ số).

A. 8217771,484 (đồng) B. 8217771,483 (đồng)

C. 8217772,484 (đông) D. 8217772,483 (đồng)

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 20: Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhung vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi nam 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng B. 309604 đồng

C. 215456 đồng D. 232289 đồng

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 21: Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau ba năm thì ông An lại được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

A. 726,74 triệu đồng B. 716,74 triệu đồng

C. 858,72 triệu đồng D. 768,37 triệu đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 22: Kể từ năm 2017 giả sử mức lạm phát ở nước ta với chu kỳ 3 năm là 12%. Năm 2017 một ngôi nhà ở thành phố X có giá là 1 tỷ đồng . Một người ra trường đi làm vào ngày 1/1/2017 với mức lương khởi điểm là P triệu đồng / 1 tháng và cứ sau 3 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng là 50% của lương. Với P bằng bao nhiêu thì sau đúng 21 năm đi làm anh ta mua được nhà ở thành phố X, biết rằng mức lạm phát và mức tăng lương không đổi.(kết quả quy tròn đến chữ số hàng đơn vị)

A. 9.588.833 đồng B. 11 .558.431 đồng

C. 13.472.722 đồng D. 12.945.443 đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Văn Trỗi lần 3)

Câu 23: Một người gửi tiết kiệm 10000000 (đồng) vào một ngân hàng với lãi suất 0,56%/tháng. Giả sử cuối mỗi tháng người đó phải rút ra 200000 (đồng) để trả tiền điện. Hỏi số tiền còn lại của người đó sau 1 năm là bao nhiêu (làm tròn sau dấu phẩy ba chữ số).

A. 8217771,484 (đồng) B. 8217771,483 (đồng)

C. 8217772,484 (đông) D. 8217772,483 (đồng)

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 24: Ông Năm gửi 320 triệu đồng ở hai ngân hàng X và Y theo phương thức lãi kép. Số tiền thứ nhất gửi ở ngân hàng X với lãi suất 2,1% một quý trong thời gian 15 tháng. Số tiền còn lại gửi ở ngân hàng Y với lãi suất 0,73% một tháng trong thời gian 9 tháng. Tổng lợi tức đạt được ở cả hai ngân hàng là 27507768,13 đồng (chưa làm tròn). Hỏi số tiền ông Năm lần lượt gửi ở ngân hàng X và Y là bao nhiêu?

A. 120 triệu và 200 triệu

B. 180 triệu và 140 triệu

C. 140 triệu và 180 triệu

D. 200 triệu và 120 triệu

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 25: Bạn Hùng trúng tuyển vào trường đại học A nhưng vì do không đủ nộp học phí nên Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi năm vay 3.000.000 đồng để nộp học phí với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học bạn Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T hàng tháng mà bạn Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến kết quả hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng. B. 309604 đồng.

C. 215456 đồng. D. 232289 đồng.

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

2. Bài toán tăng trưởng dân số.

Câu 26: Số lượng của một loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút B. 19 phút

C. 7 phút D. 12 phút.

(Trích đề minh họa lần II – Bộ GD & ĐT)

Câu 27: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=A.e^{r.N}$ trong đó: A là dân số của năm lấy mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2001, dân số Việt Nam có khoảng 78.685.000 người và tỷ lệ tăng dân số hằng năm là 1,7% một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi thì đến năm nào dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người?

A. 2020. B. 2024. C. 2026. D. 2022.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội)

Câu 28: Kết quả thống kê cho ở thời điểm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là 1,1%/năm. Nếu mức tăng dân số ổn định ở mức như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

A. Năm 2050 B. Năm 2077

C. Năm 2093 D. Năm 2070

(Trích đề thi thử trường THPT chuyên Lam Sơn)

Câu 29: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam duy trì ở mức 1,06%. Theo số liệu của Tổng cục thống kê, dân số Việt Nam năm 2014 là 90.728.600 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2050 dân số Việt Nam là:

A. 160.663.675 người B. 132.616.875 người

C. 153.712.400 người D. 134.022.614 người

(Trích đề thi thử lần I – THPT Lương Thế Vinh)

Câu 30: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 1,2% và tỉ lệ ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

A. 104,3 triệu người B. 103,3 triệu người

C. 105,3 triệu người D. 106,3 triệu người

(Trích đề thi thử THPT Tiên Du số 1)

Câu 31: Biết dân số Việt Nam vào năm 2005 vào khoảng 80 triệu người. Tỉ lệ tăng dân số vào khoảng 1,5% mỗi năm. Tốc độ tăng trưởng dân số theo công thức $S = A.e^{nr}$, trong đó n là số năm, A là dân số từ thời điểm tính, r là tỉ lệ gia tăng dân số. Hỏi khoảng bao nhiêu năm sau, dân số đạt 100 triệu người?

A. 15 năm B. 10 năm

C. 23 năm D. 20 năm

(Trích đề thi thử THPT Việt Nam – Ba Lan)

Câu 32: Kết quả thống kê cho ở thời điểm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là 1,1%/năm. Nếu mức tăng dân số ổn định ở mức như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

A. Năm 2050 B. Năm 2077

C. Năm 2093 D. Năm 2070

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 33: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của In-đô-nê-xi-a là 1,5%. Cuối năm 1998, dân số nước này là 212.942.000 người. Dân số của In-đô-nê-xi-a vào năm cuối năm 2017 là:

A. 134 190 551 (người) B. 278.387.730 (người)

C. 219.093.477(người) D. 282.563.546 (người)

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Văn Trỗi)

Câu 34: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = Ae^{ni}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau n năm, i là tỷ lệ tăng dân số hằng năm. Theo thống kê dân số thế giới tính đến tháng 01/2017, dân số Việt Nam có 94,970,597 người và có tỉ lệ tăng dân số là 1,03%. Nếu tỷ lệ tăng dân số không đổi thì đến năm 2020 dân số nước ta có bao nhiêu triệu người, chọn đáp án gần nhất.

A. 98 triệu người. B. 100 triệu người.

C. 102 triệu người. D. 104 triệu người

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 3)

Câu 35: Ngày 1/7/2016, dân số Việt Nam khoảng 91,7 triệu người. Nếu tỉ lệ tăng dân số Việt Nam hàng năm là 12% và tỉ lệ ổn định 10 năm liên tiếp thì ngày 1/7/2026 dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

A. 104,3 triệu người B. 103,3 triệu người

C. 105,3 triệu người D. 106,3 triệu người

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN lần 1)

Câu 36: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, s(t) là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con ?

A. 48 phút. B.19phút.

C. 7 phút. D. 12 phút.

(Trích đề minh họa lần 2 – BGD&ĐT)

Câu 37: Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sao bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

A. 35 (giờ). B. 45 (giờ).

C. 25 (giờ). D. 15 (giờ).

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng lần I)

Câu 38: Với mức tiêu thụ thức ăn của trang trại A không đổi như dự định thì lượng thức ăn dự trữ sẽ hết sau 100 ngày. Nhưng thực tế, mức tiêu thụ thức ăn tăng thêm 4% mỗi ngày (ngày sau tăng 4% so với ngày trước đó). Hỏi thực tế lượng thức ăn dự trữ đó sẽ hết sau khoảng bao nhiêu ngày? (làm tròn số đến hàng đơn vị).

A. 43 ngày B. 41 ngày

C. 40 ngày D. 37 ngày

(Trích đề thi thử lần I – THPT Chu Văn An)

Câu 39: Biết rằng tỉ lệ lạm phát hàng năm của một quốc gia từ 1994 đến 2004 là không thay đổi và bằng *a*%. Một xe ôtô đổ đầy bình xăng năm 1995 hết 24,95 USD, vẫn ô tô đó đổ đầy bình xăng năm 2001 hết 33,44 USD. Giá xăng biến động không bị tác động bởi yếu tố gì khác ngoài tỉ lệ lạm phát. Khi đó ta có:

A. $5,5<a<6,5$ B. $4,5<a<5,5$

C. $3,5<a<4,5$ D. $6,5<a<7,5$

(Trích đề thi thử THPT Hàn Thuyên lần I)

Câu 40: Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau?

A. 535.000 đồng B. 635.000 đồng

C. 613.000 đồng D. 643.000 đồng

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

3. Công thức tính khối lượng chất phóng xạ bị phân rã trong Vật Lý cũng cho ta một ví dụ về hàm số mũ với biến số là thời gian t, tức là biến liên tục.

Câu 41: Bom nguyên tử là loại bom chứa Uranium-235 được phát nổ khi ghép các khối Uranium-235 thành một khối chứa 50kg tinh khiết. Uranium-235 có chu kỳ bán rã là 704 triệu năm. Nếu quả bom ban đầu chứa 64kg Uranium-235 tinh khiết và sau t triệu năm thì quả bom không thể phát nổ. Khi đó t thỏa mãn phương trình:

A. $\frac{50}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$ B. $\frac{64}{50}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}$

C. $\frac{64}{50}=(2)^{\frac{t}{704}}$ D. $\frac{50}{64}=(2)^{\frac{t}{704}}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Văn Linh)

Câu 42: Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4.10^5 m^3$. Biết tốc độ sinh trưởng của cây trong rừng là 4%/ năm. Sau 5 năm thì khu rừng đó có số m^3 gỗ là

A. 8.10^5 B. 6.10^5

C. $4,8.10^5$ D. $4.(10,4)^5$

(Trích đề thi thử THPT Đống Đa – Hà Nội)

Câu 43: Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị cacbon). Khi một bộ phận của cây đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức:

$$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}(\%).$$

Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21(%). Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 năm B. 3754 năm

C. 3475 năm D. 3547 năm

(Trích đề thi thử Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần V)

Câu 44: Gọi *N (t)* là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ *t* năm trước đây thì ta có công thức $N(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{A}}A(\%)$ với *A* là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3574 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65% . Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 63%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

A. 3674 năm B. 3833 năm

C. 3656 năm D. 3754 năm

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I)

4. Một số ứng dụng khác.

Câu 45: Một người quan sát một đám bèo phát triển trên mặt hồ thì thấy cứ sau một giờ diện tích của đám bèo lớn gấp 10 lần diện tích đám bèo trước đó, với tốc độ tăng không đổi thì sau 9 giờ đám bèo ấy phủ kín mặt hồ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì đám bèo ấy phủ kín một phần ba mặt hồ?

A. 3 B. $\frac{10^3}{3}$ C. $9-\log 3$ D. $\frac{9}{\log 3}$

(Trích đề thi thử THPT Gia Viễn B)

Câu 46: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

A. 1000 lần   B. 10 lần
C. 2 lần   D. 100 lần

(Trích đề thi thử "Sở GD- ĐT Hưng Yên; THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa")

Câu 47: Một người thả 1 lá bèo vào một cái ao, sau 12 giờ thì bèo sinh sôi phủ kín mặt ao. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt ao, biết rằng sau mỗi giờ thì lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi.

A. $12-\log 5$ (giờ).   B. $\frac{12}{5}$ (giờ).
C. $12-\log 2$ (giờ).   D. $12+\ln 5$ (giờ).

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 48: Một lon nước soda 80^0F được đưa vào một máy làm lạnh chứa đá tại 32^0F. Nhiệt độ của soda ở phút thứ t được tính theo định luật Newton bởi công thức $T(t)=32+48.(0,9)^t$. Phải làm mát soda trong bao lâu để nhiệt độ là 50^0F?

A. 4 phút.   B. 1,56 phút.
C. 2 phút.   D. 9,3 phút.

Câu 49: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M=\log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A=3$ Ben và $L_B=5$ Ben. Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

A. 3,52 Ben   B. 3,06 Ben
C. 3,69 Ben   D. 4 Ben

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 50: Chuyện kể rằng: Ngày xưa, có ông vua hứa sẽ thưởng cho một vị quan món quà mà vị quan được chọn. Vị quan tâu: "Hạ thần chỉ xin Bệ hạ thưởng cho một hạt thóc thôi ạ! Cụ thể như sau: Bàn cờ vua có 64 ô thì với ô thứ nhất thần xin thêm 1 hạt, ô thứ 2 thì gấp đôi ô đầu, ô thứ 3 lại gấp đôi ô thứ 2,... ô sau nhận số hạt thóc gấp đôi phần thưởng dành cho ô liền trước". Giá trị nhỏ nhất của n để tổng số hạt thóc mà vị quan xin từ n ô đầu tiên (từ ô thứ 1 đến ô thứ n) lớn hơn 1 triệu là

A. 21   B. 19   C. 18   D. 20

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN)

Câu 51: Giả sử cứ sau một năm diện tích rừng của nước ta giảm x phần trăm diện tích hiện có. Hỏi sau 4 năm diện tích rừng của nước ta sẽ là bao nhiêu phần diện tích hiện nay?

A. $1-\left(\frac{x}{100}\right)^4$ B. 100%
C. $1-\frac{4x}{100}$ D. $\left(1-\frac{x}{100}\right)^4$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 52: Một bể nước có dung tích 1000 lít. Người ta mở vòi cho nước chảy vào bể, ban đầu bể cạn nước. Trong giờ đầu vận tốc nước chảy vào bể là 1 lít/1phút. Trong các giờ tiếp theo vận tốc nước chảy giờ sau gấp đôi giờ liền trước. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu thì bể đầy nước (kết quả gần đúng nhất).

A: 3,14 giờ   B. 4,64 giờ
C. 4,14 giờ   D. 3,64 giờ

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 53: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) tại độ cao x (đo bằng mét) so với mực nước biển được tính theo công thức $P=P_0e^{xl}$, trong đó $P_0=760$ mmHg là áp suất không khí ở mức nước biển, l là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 mét thì áp suất không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất ở đỉnh Fanxipan là bao nhiêu?

A. 22,24 mmHg.   B. 519,58mmHg.
C. 517,94 mmHg.   D. 530,23 mmHg.

(Trích đề thi thử THPT Phan Đình Phùng lần I)

Câu 54: Một công ty thời trang vừa tung ra thị trường một mẫu quần áo mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường uy tín cho thấy, nếu sau t lần quảng cáo được phát trên truyền hình thì số phần trăm người xem quảng cáo mua sản phẩm này là: $P=\frac{100}{1+49e^{-0,015t}}(\%)$. Hỏi cần phát quảng cáo trên truyền hình tối thiểu bao nhiêu lần để số người xem mua sản phẩm đạt hơn 80%?

A. 356 lần   B. 348 lần
C. 352 lần   D. 344 lần

(Trích đề thi thử THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh)

Hướng dẫn giải chi tiết

1. Bài tập lãi suất ngân hàng

Câu 1: Đáp án A.

Số tiền lãi L ông B nhận được sau 12 năm là:

$L = a(1+r\%)^n - a$

$= 12.10^7(1+0.12)^{12} - 12.10^7$

$= 12.10^7\left[(1.12)^{12} - 1\right]$

Câu 2: Đáp án D.

Giả sử: số tiền ban đầu đem gửi là a(đồng)

Từ yêu cầu bài ra thì số tiền thu được là 2a(đồng)

Vì một năm lãi suất là 8,4 % , mà một năm có 12 tháng nên số lãi một tháng là: $r = \frac{8.4\%}{12} = 0.7\%$

Ta có: $2a = a(1+r\%)^n$

$\Leftrightarrow 2 = (1+0.7\%)^n$

$\Leftrightarrow n = \log_{1.007} 2 \approx 99$

Câu 3: Đáp án A.

Sau ba năm số tiền lãi của anh Phúc là:

$L = a\left[(1+r\%)^n - 1\right]$

$= 10.10^7\left[(1+15\%)^3 - 1\right] = 52087500$ đồng

Câu 4: Đáp án D.

Số tiền người này gửi mỗi tháng là:

$a = \frac{A_n r\%}{(1+r\%)\left[(1+r\%)^n - 1\right]}$

$= \frac{40.10^7.0.6\%}{(1+0.6\%)\left[(1+0.6\%)^{3.12} - 1\right]}$

$= 9927881.582 \approx 9927882$

Câu 5: Đáp án A.

Số tiền mẹ Linh là:

$A_{12} = a(1+r\%).\frac{(1+r\%)^{11} - 1}{r\%} + a$

$= 4.10^6(1+1\%).\frac{(1+1\%)^{11} - 1}{1\%} + 4.10^6$

$= 50730012.05$

Câu 6: Đáp án A.

Sau một năm tổng số tiền người đó lấy được là:

$A_{12} = a(1+r\%)^{12}$

$= 10.10^7(1+0.5\%)^{12}$

$= 10.10^7.(1.005)^{12}$

Câu 7: Đáp án B.

Khoản tiền hằng năm bác Bình cần phải gửi vào ngân hàng là:

$a = \frac{A_5 r\%}{(1+r\%)\left[(1+r\%)^5 - 1\right]}$

$= \frac{10.10^8.7\%}{(1+7\%)\left[(1+7\%)^5 - 1\right]}$

$= 162514667.7$

Câu 8: Đáp án A.

Đây là bài toán dạng 3:

Khoản tiền hằng năm bác Bình cần phải gửi vào ngân hàng là a thì

$a(1+r).\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 5.10^6$

$\Leftrightarrow a = \frac{5.10^6.0,005}{1,005.(1,005^9 - 1)} \approx 542.000$ đ.

Câu 9: Đáp án A.

Ta có số tiền mỗi tháng chị Minh phải trả ngân hàng là:

$5,5.10^6 = \frac{300.10^6.(1+0.5\%)^n.0,5\%}{(1+0.5\%)^n - 1}$

$\Leftrightarrow \frac{11}{3} = \frac{1,005^n}{1,005^n - 1}$

$\Leftrightarrow 1,005^n = \frac{11}{8}$

$\Leftrightarrow n = \log_{1,005} 1,375 \approx 64$

Câu 10: Đáp án A.

Số tiền sinh viên X vay ngân hàng trong thời gian đi học là:

$A = a(1+r\%).\frac{(1+r\%)^n - 1}{r\%}$

$= 10.10^6.(1+3\%).\frac{(1+3\%)^4 - 1}{3\%}$

Số tiền sinh viên phải trả cho ngân hàng là:

$T = A(1+r_1\%) = A(1+8\%) = 46538666,75$

Câu 11: Đáp án C.

Số tiền người đó cần trả sau một năm là:

$40.10^6(1+0,85\%)^{12} - 5.10^5\frac{(1+0,85\%)^{12} - 1}{0,85\%}$

$= 37987647,49 = B$

Sau đó, thời gian hoàn trả đủ tiền cho ngân hàng là:

$B(1+1,15\%)^n - 15.10^5.\frac{(1+1,15\%)^n - 1}{1,15\%} = 0$

$\Leftrightarrow B.1,0115^n = 15.10^5.\frac{1,0115^n - 1}{0,0115} \Leftrightarrow n \approx 30$

Vậy người đó cần 42 tháng để trả hết nợ ngân hàng

Câu 12: Đáp án C.

Số tiền người đó thu được sau hai năm là:

$$A = a.(1+r\%)^n = 100.10^6.(1+1{,}75\%)^2 = 103530625$$

(đồng)

Câu 13: Đáp án A.

Sau một năm số tiền tiết kiệm còn lại của ông Pep là:

$$L = A(1+r\%)^n - a\frac{(1+r\%)^n - 1}{r\%}$$

$$= 150.10^6(1+0{,}6\%) - 6.10^5\frac{(1+0{,}6\%)^{12} - 1}{0{,}6\%}$$

$$= 153721208{,}4$$

Câu 14: Đáp án C.

Hàng tháng, số tiền anh Thành phải trả là:

$$a = \frac{A(1+r\%)^n.r\%}{(1+r\%)^n - 1}$$

$$= \frac{20.10^6.(1+1{,}1\%)^{3.12}.1{,}1\%}{(1+1{,}1\%)^{3.12} - 1}$$

$$= 675807{,}3033$$

Câu 15: Đáp số B.

Số tiền mỗi tháng người đó gửi vào ngân hàng là:

$$T = \frac{Ar\%}{(1+r\%)\left[(1+r\%)^n - 1\right]}$$

$$= \frac{10.10^6.0{,}6\%}{(1+0{,}6\%)\left[(1+0{,}6\%)^{15} - 1\right]} = 635301{,}4591$$

Câu 16: Đáp án C.

Số tiền người đó rút được là:

$$A = \frac{a}{r\%}\left[(1+r\%)^n - 1\right](1+r\%)$$

$$= \frac{10^6}{1\%}\left[(1+1\%)^{27} - 1\right](1+1\%)$$

$$= 101.10^6\left[(1{,}01)^{27} - 1\right]$$

Câu 17: Đáp án B.

Số tiền ban đầu ít nhất là:

$$a = \frac{A}{(1+r\%)^n} = \frac{500.10^6}{(1+8{,}5\%)^3} = 391454049{,}2$$

Câu 18: Đáp số A.

Do số tiền thu được gấp đôi số tiền ban đầu nên ta có:

$$n = \frac{\ln\frac{A}{a}}{\ln(1+r\%)} = \frac{\ln\frac{2a}{a}}{\ln(1+6{,}5\%)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}065)} \approx 11$$

Câu 19: Đáp án A.

Số tiền của người đó còn lại sau một năm là:

$$L = A(1+r\%)^n - a\frac{(1+r\%)^n - 1}{r\%}$$

$$= 10.10^6.(1+0{,}56\%)^{12} - 2.10^5\frac{(1+0{,}56\%)^{12} - 1}{0{,}56\%}$$

$$= 8217771{,}484$$

Câu 20: Đáp án D.

Số tiền Hùng vay ngân hàng để đi học là:

$$A = a.(1+r\%)\frac{(1+r\%)^n - 1}{r\%} = 3.10^6.(1+3\%).\frac{(1+3\%)^4 - 1}{3\%}$$

Số tiền Hùng phải trả cho ngân hàng mỗi tháng là:

$$T = \frac{A(1+r\%)^n r\%}{(1+r\%)^n - 1} = 232288{,}5852$$

Câu 21: Đáp án D.

$a = 1$ triệu, $r = 40\%$.

- 3 năm đầu số tiền ông An nhận được là 36a.
- 3 năm thứ 2 số tiền lãi ông An nhận được là $36a(1+r)$.
- 3 năm thứ 3 số tiền lãi ông An nhận được là $36a(1+r)^2$.

.....

- 3 năm thứ n, số tiền lãi ông An nhận được là $36a(1+r)^{n-1}$.

Vì chu kì tăng lương là 3 năm một lần nên ta có: $20 = 3.6 + 2$.

Vậy số tiền ông An nhận được sau 20 năm là:

$$36.100.\sum_{x=0}^{6}(1+r)^x + 24.a.(1+r)^6 = A$$

$$\Rightarrow A = 36.10^6.\sum_{x=0}^{6}(1+40\%) + 24.10^6(1+40\%)^6$$

$= 768367104$ (đồng).

Câu 22: Đáp án D.

$a = 1$ tỉ, $r_1 = 12\%; r_2 = 10\%; r_3 = 50\%$.

$n' = 21$ năm nên chu kì 3 năm $\Rightarrow n = 7$.

Sau 21 năm, ngôi nhà có giá thành là

$A = a(1+r_1)^n = 10^9(1+12\%)^7 = 10^9.1{,}12^7$ (đồng).

Khi đó: Số tiền người đó kiếm được sau 21 năm là:

$$A = 36\left[P\sum_{x=0}^{n-1}(1+r_\alpha)^x - r_3.P\sum_{x=0}^{n-1}(1+r_\alpha)^x\right]$$

$$\Leftrightarrow 36.P\sum_{x=0}^{n-1}(1+r_\alpha)^x(1-r_3)$$

$$\Rightarrow P = \frac{A}{36.\sum_{x=0}^{n-1}(1+r_\alpha)^x(1-r_3)} = \frac{10^9.1{,}12^7}{36.\sum_{x=0}^{6}(1+12\%)^x(1-50\%)}$$

$= 12945443{,}25$ (đồng)

Câu 23: Đáp án A.

Đặt số tiền của người đó là A.

Sau tháng đầu tiên số tiền còn trong ngân hàng của người đó là: $A(1+r)-a$ đồng

Sau tháng thứ hai số tiền còn trong ngân hàng của người đó là:

$\left(A(1+r)-a\right).(1+r)-a = A(1+r)^2 - a.(1+r)-a$

Sau tháng thứ n, số tiền còn trong ngân hàng của người đó là:

$A.(1+r)^n - a\left[1+(1+r)+...+(1+r)^{n-1}\right]$

$$\boxed{= A.(1+r)^n - a.\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)} = A(1+r)^n + a.\frac{1-(1+r)^n}{r}}$$

Vậy số tiền còn lại của người đó sau một năm là:

$$10^7.(1+0,056)^{12} + 2.10^5.\frac{1-(1+0,056)^{12}}{0,056} = 8217771,484$$

Câu 24: Đáp án C.

Giả sử số tiền gửi ở ngân hàng X và Y lần lượt là X đồng và Y đồng. Khi đó:

$X(1+2,1\%)^5 + Y(1+0,73\%)^9 = 27507768,13 + 320.10^6\ (1)$.

$X+Y = 320.10^6\ (2)$

$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} X = 140.000.000 \\ Y = 180.000.000 \end{cases}$ (đồng)

Câu 25: Đáp án D.

$a = 3.10^6$ (đồng); $r_1 = 3\%; r_2 = 0,25\%$.

Số tiền Hùng vay ngân hàng là:

$A = \frac{a}{r_1}\left[(1+r_1)^{n_1} - 1\right](1+r) = 12927407,43$ (đồng).

Số tiền Hùng trả ngân hàng mỗi tháng là:

$T = \frac{A.r_2(1+r_2)^{n_2}}{(1+r_2)^n - 1} = 232288,5852$ (đồng)

2. Bài toán tăng trưởng dân số

Câu 26: Đáp án C.

Số lượng vi khuẩn ban đầu là:

$S(0) = \frac{S(3)}{2^3} = \frac{625}{8}$ (nghìn vk)

Thời gian để số lượng vk đạt 10 triệu con tính từ lúc ban đầu là: $t = \log_2\left(\frac{s(t)}{s(0)}\right) = \log_2 128 = 7(\min)$

Câu 27: Đáp án C.

Dân số nước ta ở mức khoảng 120 triệu người sau:

$N = \frac{\ln\left(\frac{S}{A}\right)}{r} \approx 24,825835$ năm $\approx$ 25 năm.

Câu 28: Đáp án B.

Thời gian kể từ thời điểm 2013, dân số đạt 180 triệu người là: $N = \frac{\ln 2}{\ln(1+1,1\%)} = 63,359$ (năm)

Câu 29: Đáp án B.

N = 36 năm; r= 1,06%; A = 90728600 người

Dân số VN năm 2050 là $S = A(1+r)^N = 132616875$ (người).

Câu 30: Đáp án B

Tỉ lệ lạm phát hằng năm chính là % tăng của năm sau so với năm trước:

Do vậy sau năm thứ nhất, thì giá xăng sẽ là $24,95.(1+a\%)$

...

Bài toán này tương tự như bài toán lãi kép. Từ đây ta có:

Dân số VN ngày 1/7/2026 là: $91,7(1+1,2\%)^{10} = 103,3$ (triệu người).

Câu 31: Đáp án A.

Dân số đạt 100 triệu người sau:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{A}\right)}{r} \approx 15 \text{ (năm)}.$$

Câu 32: Đáp án B.

Thời gian kể từ thời điểm 2013, dân số đạt 180 triệu người là: $N = \frac{\ln 2}{\ln(1+1,1\%)} = 63,359$ (năm)

Câu 33: Đáp án D.

Dân số Indonesia vào cuối năm 2017 là:

$A = 212942000(1+1,5\%) \approx 2822563546$ (người).

Câu 34: Đáp án A.

Dân số nước ta năm 2020 là:

$S = 94970597(1+1,03\%)^3 \approx 98$ (triệu người).

Câu 35 : Đáp án B

Dân số VN ngày 1/7/2026 là: $91,7(1+1,2\%)^{10} = 103,3$ (triệu người).

Câu 36: Đáp án C.

Số lượng vi khuẩn ban đầu là:

$S(0) = \frac{S(3)}{2^3} = \frac{625}{8}$ (nghìn vk)

Thời gian để số lượng vk đạt 10 triệu con tính từ lúc ban đầu là: $t=\log_2\left(\dfrac{s(t)}{s(0)}\right)=\log_2 128=7(\text{min})$

Câu 37: Đáp án D.

Tỷ lệ tăng trưởng của vi khuẩn là:

$$r=\frac{\ln\left(\dfrac{S}{A}\right)}{t}=\frac{\ln 3}{5.60}\approx 0,3662\%.$$

Thời gian để số lượng vi khuẩn đạt 12150000

$$t=\frac{\ln\left(\dfrac{S}{A}\right)}{r}=15(h).$$

Câu 38: Đáp án B.

Gọi lượng thức ăn tiêu thụ ban đầu không đổi như dự định là x. Thì lượng thức ăn dữ trữ là: $A=100x$

Thực tế lượng thức ăn tăng thêm 4% sau mỗi ngày, tức là:

$$100x=x+x.(1+4\%)+x.(1+4\%)^2+...+x.(1+4\%)^n$$

$$\Leftrightarrow 100=\frac{1-(1+4\%)^{n+1}}{1-(1+4\%)}\Leftrightarrow n=\log_{1+4\%}(5)\approx 41 \text{ ngày}$$

Câu 39: Đáp án A.

Ta có $33,44=24,95.(1+a\%)^6\Leftrightarrow a=5\%$

Câu 40: Đáp án B.

$r=0,6\%; n=15$ (tháng), A = 10 triệu.

Theo bài ra ta có:

$$T=\frac{A.r}{(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}=635301,4591 \text{ (đồng)}$$

3. Công thức tính khối lượng chất phóng xạ bị phân rã trong vật lí

Câu 41: Đáp án B.

Ta có: $m_1=50kg; m_2=64kg$

Suy ra: $m_2=m_1.2^{\frac{-t}{T}}\Leftrightarrow 64=50.2^{\frac{t}{704}}\Leftrightarrow\dfrac{64}{50}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{704}}.$

Câu 42: Đáp án C.

Sau 5 năm khu rừng có:

$A=4.10^5(1+4\%)^5=4,8666.10^5(m^3).$

Câu 43: Đáp án D.

Ta có: $65,21=100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{-t}{5750}}=0,06521\Leftrightarrow t\approx 3546,8$ (năm)

Câu 44: Đáp án B.

T = 3574 năm

Màu gỗ có tuổi khoảng 3574 năm thì lượng C 14 còn lại là 65%

Suy ra: $65=100.2^{\frac{-t}{A}}$

$$\Leftrightarrow -\frac{t}{A}=\log 0,65\Leftrightarrow A=-\frac{t}{\log_2 0,65}=-\frac{3574}{\log_2 0,65}$$

Tuổi của mẫu gỗ được lấy là:

$$t=A\left(-\log_2\frac{63}{100}\right)$$

$$=\frac{3574}{\log_2 0,65}.\log_2 0,63=3833,287419 \text{ (năm)}$$

4. Một số ứng dụng khác

Câu 45: Đáp án C.

$S=S_0(1+r)^n$

Giả sử diện tích ban đầu của đám bèo là a.

$\Rightarrow 10a=a(1+r)\Rightarrow(1+r)=10$

Thời gian bèo phủ kín $\dfrac{1}{3}$ mặt hồ là:

$\dfrac{1}{3}a.10^9=a.10^n\Rightarrow\dfrac{10^9}{3}=10^n$

$\Leftrightarrow n=\log\dfrac{10^9}{3}\Rightarrow\log 10^9-\log 3=9-\log_3(h).$

Câu 46: Đáp án D.

Biên độ động đất ở San Francisco là A_1.

Biên độ động đất ở Nhật Bản là A_2.

Có:

$+)8=\log A_1-\log A_0\Rightarrow A_1=10^{(8+\log A_0)}$

$+)6=\log A_2-\log A_0\Rightarrow A_2=10^{(6+\log A_0)}$

Suy ra: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{10}{10^{(8+\log A_0)}.10^{-2}}=100\Rightarrow A_1\approx 100A_2.$

Câu 47: Đáp án A.

Sau 12h bèo phủ kín mặt ao với lượng bèo tăng mỗi giờ gấp 10 lần trước đó $\Rightarrow A=a.10^{12}$.

Do tốc độ tăng không đổi nên để phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt ao, ta có công thức:

$$\frac{1}{5}A=\frac{1}{5}a.10^{12}=a.10^n\Leftrightarrow n=12-\log 5(h)$$

Vậy chọn A.

Câu 48: Đáp án D.

Theo công thức bài đưa ra, ta cần thời gian để làm mát sô đa ở nhiệt độ 50^0F là:

$$t=\log\left(\frac{T(t)-32}{48}\right)\approx 9,3 \text{ (phút)}$$

Câu 49: Đáp án A

$$L_A=\log\frac{k}{R_A^2};L_B=\log\frac{k}{R_B^2}$$

$$\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=\sqrt{\frac{10^{L_A}}{10^{L_B}}}=10\Rightarrow R_A=10R_B.$$

Giả sử I là trung điểm AB

$$\Rightarrow R_I=\frac{R_A+R_B}{2}=\frac{11R_B}{2}.$$

$$\Rightarrow L_I=\log\frac{10^{L_B}.4}{121}\approx 3,519(B).$$

Câu 50: Đáp án B.

Số thóc ở các ô từ 1 đến n lần lượt là $1,2,4,8,16,...,2^n$

$\Rightarrow$ Đây là 1 cấp số nhân với $\begin{cases}u_1=2\\q=2\end{cases}$

$$S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1).$$

Yêu cầu bài toán $S^n>10^6\Leftrightarrow 2(2^n-1)>10^6$.

$$\Leftrightarrow 2^n-1>\frac{10^6}{2}\Leftrightarrow 2^n>\frac{10^6}{2}+1$$

$$\Leftrightarrow n>\log\left(\frac{10^6}{2}+1\right)\approx 18,93.$$

Câu 51: Đáp án D.

Giả sử diện tích rừng hiện nay của chúng ta là a

Số rừng nước ta sau 1 năm là $a-a.x\%=a(1-x\%)$

Số rừng nước ta sau 2 năm là:

$$a(1-x\%)-a(1-x\%)x=a(1-x\%)^2$$

Số rừng nước ta sau n năm là $a(1-x\%)^n$.

Vậy: Sau 4 năm diện tích rừng của nước ta so với hiện nay là: $\frac{a(1-x\%)^4}{a}=\left(1-\frac{x}{100}\right)^4$.

Câu 52: Đáp án C.

Lượng nước chảy vào bể lập thành một dãy số cấp số nhân nên ta có lượng nước chảy vào bể sau $n(\min)$

là: $S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}$ với $\begin{cases}u_1=60\,lit\\q=2\\n(h)\end{cases}$

Theo bài ra: $S_n=1000$ (lít).

$$\Rightarrow 1000=60(2^n-1)\Leftrightarrow n=\log_2\frac{53}{3}=4,14(h)$$

Câu 53: Đáp án C.

Đỉnh fanxipan cao 3143 mét so với mực nước biển.

Tại độ cao 1000 m có:

$$672,71=P_0e^{1000l}\Leftrightarrow l=10^{-3}\ln\left(\frac{672,71}{760}\right)$$

Tại độ cao 3143 m:

$$P=P_0.e^{3143.l}\Rightarrow\frac{672,71}{P}=\frac{P_0e^{1000l}}{P_0e^{3143l}}$$

$$\Leftrightarrow P=\frac{672,71.e^{3143l}}{e^{1000l}}=517,94\,mmHg.$$

Câu 54: Đáp án C.

Để đạt yêu cầu đề bài $P(\%)>80(\%)$.

$$\Rightarrow\frac{100}{1+49.e^{-0,015t}}>80\Leftrightarrow\frac{1}{1+49.e^{-0,015t}}>\frac{4}{5}.$$

$$\Leftrightarrow 1+49.e^{-0,015t}<\frac{5}{4}\Leftrightarrow t>351,87.$$

V. Phương trình mũ, logarit.

Một số tính chất cơ bản cần biết về các phương trình mũ, logarit:

1. Phương trình $a^x = m, 0 < a \neq 1$

- Nếu $m \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \log_a m$.

2. Phương trình $\log_a x = m, 0 < a \neq 1$ luôn có nghiệm duy nhất là $x = a^m$.

Ví dụ mở đầu: Giải các phương trình sau:

a) $10^x = 1$. b) $2^x = 8$. c) $4^x = -4$. d) $e^x = 5$.

e) $3^x = 2$. f) $3^x = \frac{1}{27}$. g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 9$. h) $5^{x^2-5x+1} = 1$.

Lời giải

STUDY TIP:
Chú ý: Với phương trình dạng $\boxed{a^x = m}$ với $0 < a \neq 1$ chú ý xét dấu của m.
+ Nếu $m \le 0$ thì phương trình vô nghiệm.
Nếu $m > 0$ thì
$a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$

a. $10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 = 0$.

b. $2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 = 3$.

c. $4^x = -4$ vô nghiệm, vì $4^x > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

d. $e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$.

e. $3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$.

f. $3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = \log_3\left(\frac{1}{27}\right) \Leftrightarrow x = \log_3 3^{-3} = -3$.

g. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 9 \Leftrightarrow x = -\log_2 9 \Leftrightarrow x = -2\log_2 3$.

h. $5^{x^2-5x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = \log_5 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

1. Các phương pháp giải phương trình, bất phương trình mũ logarit.

A. Đưa về cùng cơ số.

Dạng 1: **Giải phương trình mũ logarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số.**

Dùng các phép biến đổi về lũy thừa và logarit bằng phương pháp đưa về một trong các dạng sau:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$ **(Nếu cơ số a không đổi)**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0 \end{cases}$$ **(Nếu cơ số a thay đổi)**

$$\log_a\left[f(x)\right] = \log_a\left[g(x)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \vee g(x) > 0 \end{cases}$$ **($\vee$ là kí hiệu hoặc)**

Chú ý: Đây là phương pháp cơ bản để giải phương trình dạng này, nhưng chỉ giải được một số không nhiều các phương trình, đối với phương trình logarit, hoặc phương trình mũ có cơ số chứa ẩn thì nên đặt điều kiện để phương trình có nghĩa rồi mới biến đổi.

Độc giả hay nhầm khi áp dụng các nhóm công thức sau:

Nếu $0<a\neq 1, b_1b_2>0$ thì:

a. $\log_a(b_1b_1)=\log_a|b_1|+\log_a|b_2|$.

b. $\log_a\dfrac{b_1}{b_2}=\log_a|b_1|-\log_a|b_2|$.

c. $\log_a b^{2k}=2k.\log_a|b|, k\in \mathbb{Z}^+, b\neq 0$

Ví dụ 1: Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$

A. $x=63$ B. $x=65$ C. $x=80$ D. $x=82$

(Trích đề minh họa môn Toán –BGD)

Đáp án B.

Ta có $\log_4(x-1)=3\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x=3^4+1\end{cases}\Leftrightarrow x=65$

Ngoài ra ta có thể nhập biểu thức $\log_4(X-1)-3$ vào máy tính và CALC từng giá trị từ đó đưa ra kết quả, tuy nhiên đây là bài toán đơn giản, việc sử dụng máy tính làm cho bài toán trở nên lâu hơn.

Dạng 1 là dạng toán khá đơn giản, nên ta sẽ làm luôn bài tập tự luyện:

Câu 1 : Nghiệm của phương trình $x^{\log 4}+4^{\log x}=32$ là

A. $x=100$. B. $x=10; x=100$. C. $x=10$. D. $x=20; x=100$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $3^{x-4}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x-1}$ là

A. $x=\dfrac{1}{3}$. B. $x=1$. C. $x=\dfrac{6}{7}$. D. $x=\dfrac{7}{6}$.

Câu 3: Nghiệm của phương trình $5^{|4x-6|}=25^{3x-4}$ là

A. $x=1$. B. $x=2$. C. $x=\dfrac{14}{5}$. D. $x=\dfrac{7}{5}$.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+1}=125^{2x}$ bằng

A. $\{1\}$. B. $\{4\}$. C. $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$. D. $\left\{-\dfrac{1}{8}\right\}$.

Câu 5: Gọi x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2+x_2^2$ bằng

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 6: Nghiệm của phương trình $5^{x+1}-5^x=2.2^x+8.2^x$ là

A. $x=\log_{\frac{5}{2}}4$. B. $x=\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{8}{3}$. C. $x=1$. D. $x=\log_{\frac{5}{2}}\dfrac{5}{3}$.

Câu 7: Phương trình $7.3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$ có nghiệm là

A. $x=-1$. B. $x=1$. C. $x=-2$. D. $x=2$.

Câu 8: Phương trình $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3.5^{\lg x-1}-13.7^{\lg x-1}$ có nghiệm là

A. $x=100$. B. $x=1$. C. $x=10$. D. $x=\frac{1}{10}$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$ là

A. $x=-1;x=\frac{2}{7}$. B. $x=-1,x=-\frac{2}{7}$. C. $x=1,x=-\frac{2}{7}$. D. $x=1,x=\frac{2}{7}$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $0,125.4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$ là

A. $x=4$. B. $x=5$. C. $x=6$. D. $x=7$.

Câu 11: Nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\left(\frac{25}{8}\right)^{x}=\frac{125}{64}$ là

A. $x=2$. B. $x=3$. C. $x=1$. D. $x=4$.

Câu 12: Tích hai nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{3}.243^{\frac{2x+3}{x+8}}=\frac{1}{9}.9^{\frac{x+8}{x+2}}$ là

A. $-\frac{102}{41}$. B. $-\frac{186}{41}$. C. $-\frac{248}{41}$. D. $-\frac{62}{41}$.

Câu 13: Cho các phương trình: $(\mathrm{I}):3^{x+2}+3^{x-2}=0;$ $(\mathrm{II}):3^{x^2+1}=\sqrt[3]{6};$ $(\mathrm{III}):5^{x-2}=2^{2-x}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (I) và (II) đều vô nghiệm và (III) có nghiệm duy nhất.

B. (I) và (III) đều vô nghiệm và (II) có nghiệm duy nhất.

C. (II) và (III) đều vô nghiệm và (I) có nghiệm duy nhất.

D. Cả 3 phương trình (I), (II), (III) đều vô nghiệm.

Câu 14: Giải phương trình $(x+2)^{x^2-x-5}=(x+2)^{x+10}$, ta được tập nghiệm là

A. $\{-1;-5;3\}$. B. $\{-1;5\}$. C. $\{-1;3\}$. D. $\{-1;-3;5\}$.

Đáp án

1A	2C	3D	4C	5C	6C	7A
8A	9D	10C	11B	12C	13A	14B

8. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Loại 1: Phương trình dạng $P\left(a^{f(x)}\right)=0$

Đặt $t=a^{f(x)},(t>0)$. Phương trình trở thành $P(t)=0$

Ví dụ 2: Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị của $A=2x_1+3x_2$ là

A. 0 B. $4\log_3 2$ C. $3\log_3 2$ D. 2

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Đáp án C.

Lời giải

Nhận thấy ở đây $a^{f(x)}$ chính là 3^x

Vậy nếu đặt $3^x = t$ thì phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Lúc này ta được $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$t = 2 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$

Vậy $A = 2x_1 + 3x_2 = 3\log_3 2$.

STUDY TIP:
Chú ý: Ở đây ta có thể nhẩm nhanh được $9^x = 3^{2x}$ và nhập máy tính giải phương trình bậc hai với các hệ số $a = 1; b = -3; c = 2$.

Ví dụ 3: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $4^x - 8.2^x + 4 = 0$.

A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 8$. D. $T = 0$.

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Nội)

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ở đây nhiều độc giả sẽ bấm máy tính giải phương trình sau đó cộng hai nghiệm vào như sau:

$$4^x - 8.2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \log_2\left(4 + 2\sqrt{3}\right) \\ 2^x = 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \log_2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) \end{array}\right.$$

Sau đó ta có $T = \log_2\left(4 + 2\sqrt{3}\right) + \log_2\left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 2$

Nhận xét: Đây là cách giải khá dài, mà lại không nắm bắt được cách suy luận nhanh, thụ động vào máy tính với nghiệm lẻ.

Cách 2:

Ta thấy phương trình hỏi tổng các nghiệm của phương trình tức là $x_1 + x_2$.

Mặt khác ta lại có $2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}$

Mặt khác nếu coi phương trình đã cho là phương trình bậc hai đối với 2^x thì ta suy ra ngay $2^{x_1}.2^{x_2} = \frac{4}{1} = 4$ (định lý Viet cho hai nghiệm của phương trình bậc hai).

Vậy từ đây ta có $2^{x_1}.2^{x_2} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$.

STUDY TIP:
Chú ý: Cho phương trình $a.m^{2x} + b.m^x + c = 0$ nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt thì tổng hai nghiệm của phương trình là $x_1 + x_2 = \log_m\left(\frac{c}{a}\right)$

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Nghiệm của phương trình $e^{6x} - 3e^{3x} + 2 = 0$ là

A. $x = 0$; $x = \frac{1}{3}\ln 2$. B. $x = -1$; $x = \frac{1}{3}\ln 2$.

C. $x = -1$; $x = 0$. D. Đáp án khác.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$ là

A. $x = 0$. B. Phương trình vô nghiệm.

C. $x = 3$. D. $x = \pm 1$.

Câu 3: Giải phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^x - 3.\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + 2 = 0$, ta có tập nghiệm bằng

A. $\{-2;2\}$. B. $\{1;0\}$. C. $\{0\}$. D. $\{1;2\}$.

Câu 4: Phương trình $5^{x-1} + 5.0,2^{x-2} = 26$ có tổng các nghiệm là

A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 5: Phương trình $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$

A. có hai nghiệm âm. B. vô nghiệm.

C. có hai nghiệm dương. D. có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

Câu 6: Phương trình $3^{2x+1} - 4.3^x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < x_2$, chọn phát biểu **đúng**.

A. $2x_1+x_2=0$. B. $x_1+2x_2=-1$. C. $x_1+x_2=-2$. D. $x_1.x_2=-1$.

Câu 7: Phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$ có nghiệm

A. $x=1;\ x=2$. B. $x=-1;\ x=1$. C. $x=0;\ x=1$. D. $x=-1;\ x=0$.

Câu 8: Phương trình $2^{x^2-x}-2^{2+x-x^2}=3$ có tổng các nghiệm bằng

A. 1. B. 0. C. –1. D. –2.

Câu 9: Cho phương trình $\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tổng x_1+x_2 bằng

A. $\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$. B. 2. C. 4. D. $6+4\sqrt{2}$.

Câu 10: Tích hai nghiệm của phương trình $2^{2x^4+4x^2-6}-2.2^{x^4+2x^2-3}+1=0$ bằng

A. –9. B. –1. C. 1. D. 9.

1A	**2D**	**3C**	**4A**	**5D**
6. B	**7.C**	**8.A**	**9B**	**10B**

Loại 2: Phương trình dạng $m\log_a^2 f(x)+n\log_a f(x)+p=0$

Cách giải: Đặt $t=\log_a f(x)$. Dẫn đến phương trình $mt^2+nt+p=0$, tìm t suy ra x.

Ví dụ 4: Cho phương trình $2\log_4\left(x^2-x\right)+3\sqrt{\log_4\left(x-1\right)^2}-2\log_4 x=4$. Phương trình trên có một nghiệm $x=x_0$ nằm trong khoảng

A. $(2;4)$ B. $(1;3)$ C. $(2;3)$ D. $(3;4)$

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1:

Điều kiện: $x\ge 2$

Ta có $pt\Leftrightarrow 2\log_4\left(x(x-1)\right)+3\sqrt{\log_4\left(x-1\right)^2}-2\log_4 x=4$

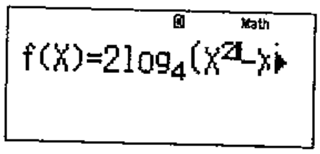
$\Leftrightarrow 2\log_4\left(x-1\right)+3\sqrt{2\log_4\left(x-1\right)}-4=0$

(ở đây ta biến đổi $\log_4\left(x^2-x\right)=\log_4\left(x(x-1)\right)=\log_4 x+\log_4\left(x-1\right)$)

Vậy phương trình đã cho trở về dạng tổng quát, coi phương trình trên là phương trình bậc hai với $\sqrt{2\log_4\left(x-1\right)}$, lúc này bấm máy giải phương trình bậc hai ta được: $\sqrt{2\log_4\left(x-1\right)}=1\ \Leftrightarrow \log_4\left(x-1\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=3$. Vậy ta chọn A.

Cách 2: Với các bài toán tìm xem nghiệm của phương trình này có nằm trong khoảng đã cho hay không, ta có thể nhanh chóng áp dụng định lý:

"Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$."



Vậy như ở chủ đề 1, tôi đã giới thiệu về chức năng TABLE của máy tính cầm tay là lập ra các giá trị của hàm số trong một bảng. Ở đây ta sử dụng TABLE để xét xem hàm số có đổi dấu trong khoảng cho trước không.

Do đề bài cho khoảng hẹp, nên ở đây ta chỉ cần xét khoảng $(1;4)$ là có thể bao hàm được hết các phương án A, B, C, D.

Dùng máy tính nhập $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{7: TABLE}}$ Lúc này nhập

$$Fx = 2\log_4\left(X^2 - X\right) + 3\sqrt{2\log_4\left(X-1\right)} - 2\log_4 X - 4$$

STUDY TIP:
Chú ý: Nếu nhập vào máy tính $\log_a x^2$ máy sẽ nhận dạng thành $(\log_a x)^2$.

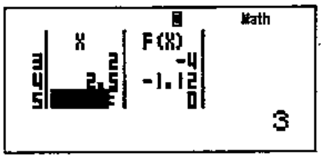
Lưu ý: Ở đây ta nhập $\sqrt{2\log_4\left(X-1\right)}$ vào máy mà không nhập $\sqrt{\log_4\left(X-1\right)^2}$ bởi ở đây dấu mũ hai máy sẽ nhận là $\left(\log_4\left(X-1\right)\right)^2$ chứ không phải nghĩa như ban đầu.

Ấn 2 lần = bỏ qua Gx.

Lúc máy hiện START? ấn 1=

END? 4=

STEP? 0.5=



Máy hiện như hình bên. Lúc này ta thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình. Tuy nhiên với các bài toán khác ta có thể thấy hàm số đổi dấu khi đi qua 3 thì ta cũng có kể kết luận được phương án A.

Ví dụ 5: Cho phương trình $\log_{3x+7}\left(4x^2+12x+9\right)+\log_{2x+3}\left(6x^2+23x+21\right)=4$.
Số nghiệm của phương trình trên là

A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

Đáp án B.

Lời giải

Điều kiện: $-\dfrac{3}{2} < x \ne -1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_{3x+7}\left(2x+3\right)^2 + \log_{2x+3}\left[\left(2x+3\right)\left(3x+7\right)\right] = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}\left(2x+3\right) + \log_{2x+3}\left(3x+7\right) - 3 = 0 \left(2\right)$$

Do $\log_{3x+7}\left(2x+3\right).\log_{(2x+3)}\left(3x+7\right) = 1$, nên nếu đặt $t = \log_{3x+7}\left(2x+3\right), t \ne 0$ thì $\log_{2x+3}\left(3x+7\right) = \dfrac{1}{t}$.

Do đó phương trình $\left(2\right)$ trở thành:

$$2t + \frac{1}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$t = 1 \Leftrightarrow \log_{3x+7}\left(2x+3\right) = 1 \Leftrightarrow x = -4$$

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_{3x+7}\left(2x+3\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(2x+3\right)^2 = 3x+7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{4} \\ x = -2 \end{array}\right.$$

STUDY TIP:
Chú ý: Ta cần chú ý xét điều kiện của bài toán giải phương trình logarit để loại nghiệm.

Đến đây nhiều độc giả có thể chọn A, hoặc D. Tuy nhiên so với điều kiện xác định thì $x = -2; x = -4$ không thỏa mãn. Do vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{1}{4}$.

Nhận xét: Nếu trong phương trình có các số hạng $\log_{f(x)} g\left(x\right)$ và $\log_{g(x)} f\left(x\right)$ thì ta có điều kiện tương ứng là $0 < f\left(x\right) \ne 1$, $0 < g\left(x\right) \ne 1$. Lúc đó nếu đặt $t = \log_{f(x)} g\left(x\right)$ thì $\log_{g(x)} f\left(x\right) = \dfrac{1}{t}$.

Loại 3: Phương trình dạng $m.a^{3f(x)}+n.(ab)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}=0$ **(hoặc** $m.a^{3f(x)}+n.a^{2f(x)}.b^{f(x)}+p.a^{f(x)}.b^{2f(x)}+q.b^{3f(x)}=0$)

Cách giải: Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ **(hoặc** $b^{3f(x)}$**) rồi đặt** $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}\ (t>0)$.

Ví dụ 6: Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình

$$4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log x}.$$

A. 100 B. 10 C. 1 D. $\frac{1}{10}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Đáp án C.

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

Ta có $4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log x}$

$\Leftrightarrow 4.3^{2\log(10x)}+9.2^{2\log(10x)}-13.(2.3)^{\log(10x)}=0$

$\Leftrightarrow 4.\left(3^{\log(10x)}\right)^2-13.3^{\log(10x)}.2^{\log(10x)}+9.\left(2^{\log(10x)}\right)^2=0$

Với bài toán tự luận thông thường thì ta thường thực hiện đặt t, , tuy nhiên ta có thể thấy đây là dạng phương trình đẳng cấp bậc hai, do vậy nếu ta nhập các hệ số vào máy ta sẽ được kết quả là tỉ số giữa hai biến.

Vậy đến đây ta có thể sử dụng MODE 5:EQN chọn giải phương trình bậc hai và lần lượt nhập các hệ số $a=4;b=-13;c=9$ thì ta được hai nghiệm là: $\frac{9}{4}$ và 1.

STUDY TIP:
Chú ý: Khi đã hiểu bản chất của dạng toán, ta có thể bỏ qua các bước đặt và giải luôn phương trình bằng máy tính.

Tức là $\left[\begin{array}{l}3^{\log(10x)}=\frac{9}{4}.2^{\log(10x)}\Leftrightarrow 3^{\log(10x)-2}=2^{\log(10x)-2}\Leftrightarrow \log(10x)=2\Leftrightarrow x=10\\ 3^{\log(10x)}=2^{\log(10x)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{10}\end{array}\right.$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $10.\frac{1}{10}=1$.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Phương trình $9^{x+1}-6^{x+1}=3.4^x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 2: Phương trình $64.9^x-84.12^x+27.16^x=0$ có nghiệm là

A. $x=1;\ x=2$. B. $x=\frac{9}{16};\ x=\frac{3}{4}$. C. $x=-1;\ x=-2$. D. Vô nghiệm.

Câu 3: Phương trình $6.2^{2x}-13.6^x+6.3^{2x}=0$ có tập nghiệm là tập con của tập

A. $\left\{-\frac{3}{2};-1;4;5\right\}$. B. $\left\{-\frac{2}{3};-1;\frac{1}{3};2\right\}$. C. $\{-4;-3;1;0\}$. D. $\{-2;-1;1;3\}$.

Câu 4: Phương trình $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$ có nghiệm là

A. $x=\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\frac{3}{2}$. B. $x=\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

C. $x=\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\frac{2}{3}$. D. $x=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Câu 5: Phương trình $3.8^x+4.12^x-18^x-2.27^x=0$ có tập nghiệm là

A. $\{1\}$. B. $\{-1;1\}$. C. $\{0;1\}$. D. $\varnothing$.

Câu 6: Nghiệm của phương trình: $4^{\log_2 2x} - x^{\log_2 6} = 2.3^{\log_2 4x^2}$ là

A. $x=0; x=\frac{1}{4}$. B. $x=\frac{1}{4}$. C. $x=-\frac{2}{3}$. D. Vô nghiệm.

1.D	**2.A**	**3.D**
4.C	**5. A**	**6.B**

Loại 4: Phương trình dạng $m.a^{f(x)} + m.b^{f(x)} + p = 0$, với $ab = 1$

Cách giải: Giả sử $a > 1$, ta đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$, khi đó $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

Ví dụ 7: Phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x + 16.\left(3-\sqrt{5}\right)^x = 2^{x+3}$ có nghiệm

A. $x=1$ B. $x = \log_{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} 4$ C. $x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$ D. 0

Đáp án C

Phân tích: Do ở vế phải của phương trình chưa về dạng hằng số và $\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right) = 4 \neq 1$, nên ta phải biến đổi sao cho mất x ở vế phải đồng thời $\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}.\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{2} = 1$. Vậy ta sẽ chia cả hai vế của phương trình cho 2^x.

STUDY TIP:

Chú ý: Với các bài toán chưa đúng dạng cơ bản, chúng ta cần biến đổi chia hoặc nhân hai vế với một đại lượng sao cho thỏa mãn bài toán tổng quát.

Lời giải

Chia hai vế của phương trình cho 2^x, ta được

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + 16.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8 \quad (*)$$

Đặt $t = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x, (t>0) \Rightarrow \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành: $t + \frac{16}{t} = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Với $t=4$ thì $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} 4$.

<u>Bài tập rèn luyện kĩ năng.</u>

Câu 1: Phương trình $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$ có nghiệm là

A. $x=\pm 2$. B. $x=\pm 1$. C. $x=\pm 4$. D. $x=\pm\frac{1}{2}$.

Câu 2: Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x + \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\sqrt{2} = 0$ có tích các nghiệm bằng

A. -1. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 3: Phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x + \left(3-\sqrt{5}\right)^x = 7.2^x$ có tập nghiệm là

A. $\{-1;1\}$. B. $\left\{\frac{1}{2};4\right\}$. C. $\left\{\frac{1}{2};2\right\}$. D. $\{-2;2\}$.

Câu 4: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m$ có nghiệm khi

A. $m \in (-\infty;5)$. B. $m \in (-\infty;5]$. C. $m \in (2;+\infty)$. D. $m \in [2;+\infty)$.

1.A	**2.A**	**3.D**	**4.C**

C. Phương pháp logarit hóa.

Loại 1: Phương trình dạng $a^{f(x)}.b^{g(x)}=c$, **với** $a,b,c>0$.

Cách giải: Ta lấy logarit hai vế cơ số a **đưa về phương trình dạng** $f(x)+g(x).\log_a b=\log_a c$.

Loại 2: Phương trình dạng $a^{\log_b(x+c)}=x$

Ví dụ 8: Phương trình $3^{x-2}.5^{x-1}.7^x=245$ có nghiệm là:

A. $x=2$ B. $x=3$ C. $x=-2$ D. $x=-3$

Đáp án A.

Lời giải

Do hai vế của phương trình đều dương nên lấy logarit cơ số 3 hai vế ta được:

$\log_3\left(3^{x-2}.5^{x-1}7^x\right)=\log_3\left(7^2.5\right)$

$\Leftrightarrow x-2+(x-1)\log_3 5+x\log_3 7=2\log_3 7+\log_3 5$

$\Leftrightarrow (x-2)\log_3 105=0\Leftrightarrow x=2$.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Giải phương trình $3^{4^x}=4^{3^x}$, ta có tập nghiệm là

A. $\left\{\log_{\frac{3}{4}}(\log_3 4)\right\}$. B. $\left\{\log_{\frac{2}{3}}(\log_3 2)\right\}$ C. $\left\{\log_{\frac{4}{3}}(\log_4 3)\right\}$ D. $\left\{\log_{\frac{4}{3}}(\log_3 4)\right\}$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $3^{x-1}.5^{\frac{2x-2}{x}}=15$ là

A. $x=1$. B. $x=2$; $x=-\log_3 5$. C. $x=4$. D. $x=3$; $x=\log_3 5$.

Câu 3: Phương trình $3^{x-1}.5^{\frac{2x-2}{x}}=15$ có một nghiệm dạng $x=-\log_a b$, với a và b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 13. B. 8. C. 3. D. 5.

Câu 4: Nghiệm của phương trình $9.x^{\log_9 x}=x^2$ là

A. $x=12$. B. $x=9$. C. $x=6$. D. $x=3$.

Câu 5: Nghiệm của $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$ cũng là nghiệm của phương trình

A. $2x^2+x-3=0$. B. $2x^2-5x+3=0$.

C. $3x^2-5x+2=0$. D. $3x^2-5x-2=0$.

1.D	2.B	3.A	4B	5B

D. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Phương trình đưa được về dạng $f(u)=f(v)$.

Cách giải: Sử dụng tính chất: Cho hàm số $y=f(x)$ **đơn điệu trên tập D. Khi đó** $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$ **với mọi** $u,v\in D$.

Các dạng khác:

Ví dụ 9: Phương trình $2^{x^2-x}+9^{3-2x}+x^2+6=4^{2x-3}+3^{x-x^2+5x}$ có số nghiệm là

A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

Đáp án A.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$2^{x^2-x}+9^{3-2x}+x^2+6=4^{2x-3}+3^{x-x^2}+5x$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}+x^2-x-3^{x-x^2}=2^{4x-6}+4x-6-3^{6-4x}\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=2^t+t-3^{-t}$

Có $f'(t)=2^t.\ln 2+1+3^{-t}.\ln 3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(x^2-x)=f(4x-6)\Leftrightarrow x^2-x=4x-6\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

VI. Các bài toán biến đổi logarit.

A. Tính một logarit theo một logarit đã cho:

Bài toán: Cho $\alpha=\log_a x$ với $0<a,x,y$ và $a\neq 1$. Tính $\log_a y$ theo α.

Lời giải

Giả sử tồn tại hai số $m,n\in\mathbb{R}$ sao cho $y=a^m.x^n$, khi đó ta có

$$\boxed{\log_a y=\log_a\left(a^m.x^n\right)=\log_a a^m+\log_a x^n=m+n.\log_a x=m+n.\alpha}$$

Ví dụ 1: Nếu $a=\log_5 3$ thì

A. $\log_{25}15=\dfrac{3}{5(1-a)}$.

B. $\log_{25}15=\dfrac{5}{3(1-a)}$.

C. $\log_{25}15=\dfrac{1}{2(1+a)}$.

D. $\log_{25}15=\dfrac{1}{5(1-a)}$.

Đáp án C

Lời giải

Ta có $\log_{25}15=\dfrac{1}{2}\log_5 15$

Đến đây trở về bài toán gốc, ta có $15=3.5\Rightarrow \log_5 15=1+1.a=1+a$

$\Rightarrow \log_{25}15=\dfrac{1}{2(1+a)}$.

STUDY TIP:
Chú ý: Ta biến đổi logarit cần tìm về cùng cơ số với logarit đã cho.

Ví dụ 2: Nếu $\log 3=a$ thì $\dfrac{1}{\log_{81}100}$ bằng

A. a^4.

B. $16a$.

C. $\dfrac{a}{8}$.

D. $2a$.

Đáp án D

Lời giải

Ta thấy cơ số của log3 là 10. Do vậy ta sẽ biến đổi

$\dfrac{1}{\log_{81}100}=\log_{100}81=\dfrac{1}{2}\log 81=2\log 10=2a$.

B. Tính một logarit theo hai logarit đã cho:

Bước 1: Quy các logarit đã cho về một cơ số nếu cần.

Bước 2: Phân tích các cơ số và đối số về dạng thừa số nguyên tố.

Bước 3: Biểu diễn theo logarit đã cho.

Ví dụ 3: Nếu $a=\log_{30}3$ và $b=\log_{30}5$ thì

A. $\log_{30}1350=2a+b+2$. B. $\log_{30}1350=a+2b+1$.

C. $\log_{30}1350=2a+b+1$. D. $\log_{30}1350=a+2b+2$.

Đáp án C

Lời giải

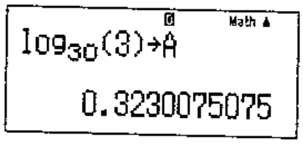
Do đã cùng cơ số nên ta phân tích 1350 về dạng thừa số nguyên tố:

Ta có $1350=3^3.2.5^2$

Ta thấy số 2 xuất hiện ở đây là không hợp lý, do vậy ta sẽ biến đổi, do cơ số 30 nên ta có thể biến đổi như sau: $1350=3^2.5.(2.3.5)=3^2.5.30$

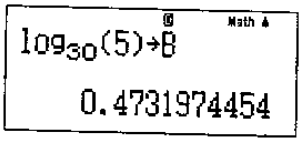
Lúc này ta có

$\log_{30}1350=\log_{30}(3^2.5.30)=\log_{30}3^2+\log_{30}5+\log_{30}30=2a+b+1$



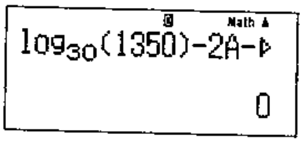
C. Sử dụng máy tính cầm tay.

Trong các dạng toán biểu diễn logarit ta có thể sử dụng lệnh SHIFT STO (gán giá trị) để giải quyết bài toán này.



Trong ví dụ 3 ở trên ta có thể giải quyết như sau:

Nhập $\log_{30}3$ SHIFT STO A



Nhập $\log_{30}5$ SHIFT STO B.

Lúc này hai giá trị đã được gán vào máy tính. Ta lần lượt thử từng phương án.

Với C: Nhập vào máy $\log_{30}1350-2A-B-1$ máy hiện 0, thỏa mãn, chọn C.

Bài tập rèn luyện kĩ năng:

Câu 1: Biểu diễn $\log_{36}24$ theo $a=\log_{12}27$ ta được

A. $\log_{36}24=\frac{9-a}{6-2a}$. B. $\log_{36}24=\frac{9-a}{6+2a}$.

C. $\log_{36}24=\frac{9+a}{6+2a}$. D. $\log_{36}24=\frac{9+a}{6-2a}$.

Câu 2: Nếu $a=\log_2 3$ và $b=\log_2 5$ thì

A. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}a+\frac{1}{6}b$. B. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}a+\frac{1}{3}b$.

C. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b$. D. $\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b$.

Câu 3: Cho hai số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=7ab$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $3\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$. B. $\log(a+b)=\frac{3}{2}(\log a+\log b)$.

C. $2(\log a+\log b)=\log(7ab)$. D. $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

Câu 4: Nếu $\log_{27}5=a$; $\log_8 7=b$; $\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ bằng

A. $\frac{3b+2ac}{c+2}$. B. $\frac{3b+3ac}{c+2}$. C. $\frac{3b+2ac}{c+3}$. D. $\frac{3b+3ac}{c+1}$.

1B	**2C**	**3D**	**4B**

Bài tập rèn luyện kỹ năng

Dạng 1: Các dạng toán tìm tập xác định, các bài toán đồ thị, và tính chất của các hàm logarit.

Câu 1: Tập xác định của hàm số:

$y=\sqrt{\ln(x-1)+\ln(x+1)}$ là:

A. $(1;+\infty)$. B. $\left(-\infty;\sqrt{2}\right)$.

C. $\varnothing$. D. $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)e^{x+1}$ tại $\ln 3$ là:

A. $3e\left(1+\ln^2 3\right)^2$ B. $3e\ln^2 3$

C. $3e\left(1+\ln 3\right)$ D. $3e\left(1+\ln 3\right)^2$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

B. $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$.

C. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

D. $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 4: Tập xác định của hàm số:

$y=\left(x+3\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt[4]{5-x}$ là:

A. $D=\left(-3;+\infty\right)$ B. $D=\left(-3;5\right)$

C. $D=\left(-3;+\infty\right)\backslash\left\{5\right\}$ D. $D=\left[-3;5\right]$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y=\ln|x|$ có đạo hàm tại mọi $x\neq 0$ và $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{|x|}$.

B. $\log_{0,02}(x-1)>\log_{0,02}x\Leftrightarrow x-1<x$.

C. Đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$ nằm phía bên trái trục tung.

D. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_2 x=-\infty$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 6: Hàm số $y=\sqrt{3-2^{x+1}-4^x}$ có tập xác định là:

A. $\mathbb{R}$. B. $[0;+\infty)$.

C. $[-3;1]$. D. $(-\infty;0]$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log\left(x^2-4\right)$.

A. $D=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

B. $D=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

C. $D=\left(2;+\infty\right)$

D. $D=\left(-2;2\right)$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{9^x}$.

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$ B. $y'=\dfrac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}$

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}$ D. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 9: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực $x_1;x_2$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)<0$

B. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)>0$

C. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $x_1<x_2$

D. Nếu $a^{x_1}<a^{x_2}$ thì $x_1>x_2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

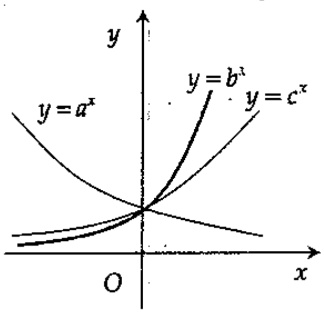
Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_5\left(x^2+x+1\right)$.

A. $y'=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 5}$. B. $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

C. $y'=(2x+1)\ln 5$. D. $y'=\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 5}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 11: Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $a<b<c$. B. $a<c<b$.

C. $b<c<a$. D. $c<a<b$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 12: Hàm số $y = x\ln|x|$ có đạo hàm là:

A. $\ln|x|$ B. $\dfrac{1}{x}$ C. $1+\ln|x|$ D. 1

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y=(2x-1)^{\frac{1}{2}}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ B. $\mathbb{R}$

C. $\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$ D. $\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 14: Cho a là số dương khác 1, b là số dương và α là số thực bất kì.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a b^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b.$ B. $\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b.$

C. $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b.$ D. $\log_{a^\alpha} b = \alpha\log_a b.$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y=\log_{2018}\dfrac{x+3}{2-x}$ là:

A. $(-\infty;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$ B. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

C. $(-3;\ 2)$ D. $[-3;\ 2)$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln(2x-x^2)$ với $0<x<2$ là:

A. $y'=\dfrac{2-2x}{2x-x^2}$ B. $y'=(2-2x)(2x-x^2)$

C. $y'=\dfrac{1}{2x-x^2}$ D. $y'=2x-x^2$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 17: Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=2^{3-x}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

B. Hàm số $y=\log_2(x^2+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$ đạt cực đại tại $x=0$

D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^x+2^{2-x}$ bằng 4

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

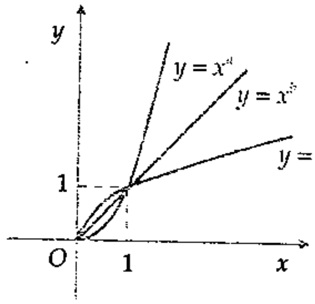
Câu 18: Tập xác định của hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$ là:

A. $[0;+\infty)$ B. $\mathbb{R}$

C. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ D. $(0;+\infty)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Đại học Sư Phạm – HN)

Câu 19: Hình vẽ bên là đồ thị các hàm số $y=x^a, y=x^b, y=x^c$ trên miền $(0;+\infty)$. Hỏi trong các số a,b,c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0;1)$?



A. Số b. B. Số a và số c.

C. Số c. D. Số a.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hưng Yên lần 2)

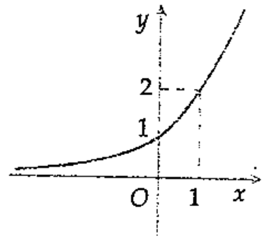
Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y=7^x$.

A. $y'=x.7^{x-1}$ B. $y'=7^x$

C. $y'=\dfrac{7^x}{\ln 7}$ D. $y'=7^x.\ln 7$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần 1)

Câu 21: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=2^x$ B. $y=2^{-x}$

C. $y=\log_2 x$ D. $y=-\log_2 x$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 22: Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau đây.

A. Nếu ba số thực x,y,z có tổng không đổi thì $2016^x, 2016^y, 2016^z$ có tích không đổi

B. Nếu ba số thực x,y,z theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số nhân thì $\log x, \log y, \log z$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp trong một cấp số cộng

C. Đạo hàm của hàm số $y=\ln|2x-1|$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ là $y'=\dfrac{2}{2x-1}$

D. Mỗi hàm số $y=a^x, y=\log_a x$ đồng biến trên tập xác định khi $a>1$ và nghịch biến trên tập xác định khi $0<a<1$ (a là hằng số)

(Trích đề thi thử tạp chí TH & TT lần 5)

Câu 23: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $2017^x > \frac{1}{2017} \Leftrightarrow x > -1$.

B. Hàm số $y = \log_2 2x$ xác định khi $x > 0$

C. Đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ đối xứng nhau qua trục tung.

D. Nếu $\ln(x-1)(x-2) = \ln(x-1) + \ln(x-2)$ thì x phải nghiệm đúng bất phương trình $(x-1)(x-2) > 0$

(Trích đề thi thử tạp chí TH & TT lần 3)

Câu 24: Tìm các giá trị của m để hàm số:
$y = \log_7\left[(m-1)x^2 + 2(m-3)x + 1\right]$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có kết quả:

A. $m \ge 2$ B. $2 \le m \le 5$
C. $2 < m < 5$ D. $1 < m < 5$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 25: Cho $a > 0$, $a \ne 1$ và x, y là hai số dương. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$
B. $\log_a(x+y) = \log_a x.\log_a y$
C. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
D. $\log_a(xy) = \log_a x.\log_a y$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 26: Tìm tập xác định D của hàm số:
$$f(x) = \ln\sqrt{-x^2 - x + 2}.$$

A. $D = (-2;1)$ B. $D = [-2;1]$
C. $D = (-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$ D. $D = (-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$

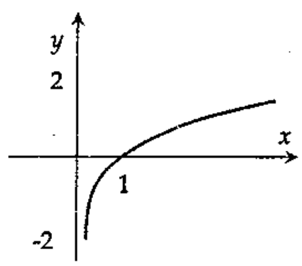
(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 27: Điều nào sau đây không đủ để suy ra $\log_2 x + \log_2 y = 10$?

A. $y = 2^{10-\log_2 x}$ B. $\log_2(xy) = 10$
C. $\log_2 x^3 + \log_2 y^3 = 30$ D. $x = 2^{10-\log_2 y}$

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 5)

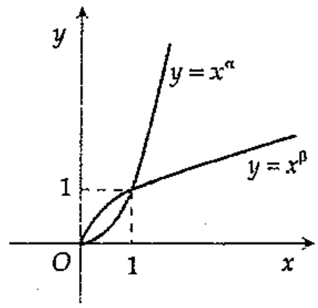
Câu 28: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị phù hợp với hình vẽ bên:



A. $y = e^x$ B. $y = e^{-x}$
C. $y = \log_{\sqrt{7}} x$ D. $y = \log_{0,5} x$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP HN lần 1)

Câu 29: Cho α, β là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào đây là đúng?



A. $0 < \beta < 1 < \alpha$. B. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.
C. $0 < \alpha < 1 < \beta$. D. $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH Vinh lần 1)

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2017}(x^2+1)$.

A. $y' = \frac{2x}{2017}$ B. $y' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 2017}$
C. $y' = \frac{1}{(x^2+1)\ln 2017}$ D. $y' = \frac{1}{(x^2+1)}$

Câu 31: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{10}}}$ là:

A. $\mathbb{R}\backslash\{10\}$ B. $[10;+\infty)$
C. $(\ln 10;+\infty)$ D. $(10;+\infty)$

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 5)

Câu 32: Hàm số nào sau đây có đạo hàm là:
$$y' = 3^x\ln 3 + 7x^6.$$

A. $y = 3^x + x^7$ B. $y = 3^x + 7^x$
C. $y = x^3 + x^7$ D. $y = x^3 + 7^x$

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 5)

Câu 33: Hỏi đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ (với $0 < a \ne 1$) đối xứng với nhau qua đường thẳng nào dưới đây?

A. $x = 0$ B. $y = x$
C. $y = -x$ D. $y = 1$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x+1) - 2\ln(x-1) + 2x$ tại điểm $x = 2$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3\ln 3} + 2$
C. $\frac{1}{3\ln 3} - 1$ D. $\frac{1}{3\ln 3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 35: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\sqrt{\frac{-\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-8}}}.$$

A. $(4;+\infty)$ B. $\left(2;\frac{5}{2}\right]$

C. $(2;+\infty)$ D. $(-2;4]$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 36: Tìm tập xác định của hàm số:

$y=\log_3\left(x^2-5x+6\right)$ là:

A. $D=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ B. $D=(2;3)$

C. $D=[2;3]$ D. $D=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 37: Kết quả tính đạo hàm nào sau đây sai?

A. $\left(e^{5x}\right)'=e^{5x}$. B. $\left(2^x\right)'=2^x\ln 2$.

C. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. D. $(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 38: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\left(x^2-4x+3\right)^{\pi}.$$

A. $\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ B. $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

C. $\mathbb{R}$ D. $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần 1)

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $y'=\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2}$

B. $y'=\sqrt{2}\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{2}-1}$

C. $y'=\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{2}}\ln\left(x^2+x+1\right)$

D. $y'=\sqrt{2}(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt{2}-1}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần 1)

II, Dạng 2: Các phép biến đổi mũ, logarit

Câu 1: Biết $\log_{27}5=a$, $\log_8 7=b$, $\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ tính theo a, b, c bằng:

A. $\frac{3(b+ac)}{c+2}$. B. $\frac{3b+2ac}{c+1}$.

C. $\frac{3b+2ac}{c+2}$. D. $\frac{3(b+ac)}{c+1}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 2: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. B. $\ln(ab)=\ln a.\ln b$.

C. $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$. D. $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 3: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b$.

B. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$.

C. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a+\log_2 b$.

D. $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 4: Cho số thực a thoả mãn $0<a\neq 1$. Kết quả rút gọn của biểu thức $A=\frac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}$ là:

A. a B. $1-a$ C. $1+a$ D. $2a$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 5: Cho biểu thức $P=x.\sqrt[5]{x.\sqrt[3]{x.\sqrt{x}}}$, $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{2}{3}}$. B. $P=x^{\frac{3}{10}}$.

C. $P=x^{\frac{13}{10}}$. D. $P=x^{\frac{1}{2}}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 6: Cho $\log 3=m$; $\ln 3=n$. Hãy biểu diễn $\ln 30$ theo m và n.

A. $\ln 30=\frac{n}{m}+1$ B. $\ln 30=\frac{m}{n}+n$

C. $\ln 30=\frac{n+m}{n}$ D. $\ln 30=\frac{n}{m}+n$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 7: Xét các số thực a,b thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{min} của biểu thức $P=\log^2_{\frac{a}{b}}+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{min}=19$. B. $P_{min}=13$.

C. $P_{min}=14$. D. $P_{min}=15$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 8: Cho hai số dương a,b thỏa mãn $a^2+b^2=7ab$. Chọn đẳng thức đúng.

A. $\log\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$

B. $\log a+\log b=\dfrac{1}{2}\log 7ab$

C. $\log a^2+\log b^2=\log 7ab$

D. $\log a+\log b=\dfrac{1}{7}\log\left(a^2+b^2\right)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 9: Cho $a=\log_4 3$, $b=\log_{25} 2$. Hãy tính $\log_{60}\sqrt{150}$ theo a, b.

A. $\log_{60}\sqrt{150}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2+2b+ab}{1+4b+2ab}$.

B. $\log_{60}\sqrt{150}=\dfrac{1+b+2ab}{1+4b+4ab}$.

C. $\log_{60}\sqrt{150}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1+b+2ab}{1+4b+2ab}$.

D. $\log_{60}\sqrt{150}=4.\dfrac{1+b+2ab}{1+4b+4ab}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 10: Cho a,b dương và $a\neq 1$. Các khẳng định nào sau đây đúng:

A. $\log_{a^3}(a.b)=3+3\log_a b$

B. $\log_{a^3}(a.b)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\log_a b$

C. $\log_{a^3}(a.b)=\dfrac{1}{3}\log_a b$

D. $\log_{a^3}(a.b)=3\log_a b$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 11: Nếu $(0,1a)^{\sqrt{3}}<(0,1a)^{\sqrt{2}}$ và $\log_b\dfrac{2}{3}<\log_b\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thì:

A. $\begin{cases}a>10\\ b<1\end{cases}$. B. $\begin{cases}0<a<10\\ 0<b<1\end{cases}$.

C. $\begin{cases}0<a<10\\ b>1\end{cases}$. D. $\begin{cases}a>10\\ 0<b<1\end{cases}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 12: Cho $a=\log_{30}3, b=\log_{30}5$.

Biểu diễn $\log_{30}1350$ theo a và b.

A. $a+2b+1$ B. $2(a+b)$

C. $2a+b+1$ D. Kết quả khác

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 5)

Câu 13: Với các số thực dương x, y bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

B. $\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$.

C. $\log_2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)=2\log_2 x-\log_2 y$.

D. $\log_2(xy)=\log_2 x.\log_2 y$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 14: Tính $\log_{36}24$ theo $a=\log_{12}27$ là:

A. $\dfrac{9-a}{6-2a}$ B. $\dfrac{9+a}{6+2a}$

C. $\dfrac{9-a}{6+2a}$ D. $\dfrac{9+a}{6-2a}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 15: Cho số thực a thoả mãn $0<a\neq 1$ và biểu thức $\left(a^4\right)^{\log_{a^2}3}$ có giá trị là :

A. 16 B. 12 C. 9 D. 3

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 16: Nếu $a=\log_{12}3$ thì khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{24}18=\dfrac{3a-1}{3+a}$ B. $\log_{24}18=\dfrac{3a+1}{a-3}$

C. $\log_{24}18=\dfrac{3a+1}{3-a}$ D. $\log_{24}18=\dfrac{3a}{3-a}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 17: Viết biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}$ $(x>0)$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $P=x^{\frac{1}{12}}$ B. $P=x^{\frac{5}{12}}$

C. $P=x^{\frac{1}{7}}$ D. $P=x^{\frac{5}{4}}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 18: Rút gọn biểu thức: $P=\dfrac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{-\sqrt{3}+2}.a^{2+\sqrt{3}}}$ $(a>0)$. Kết quả là:

A. 1 B. a^6 C. a^4 D. $\dfrac{1}{a^2}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 19: Cho $n>1$ là một số nguyên. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{\log_2 n!}+\dfrac{1}{\log_3 n!}+...+\dfrac{1}{\log_n n!}$ bằng

A. 0. B. n. C. $n!$. D. 1.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 20: Cho các số dương a,b,c,d.

Biểu thức: $S=\ln\dfrac{a}{b}+\ln\dfrac{b}{c}+\ln\dfrac{c}{d}+\ln\dfrac{d}{a}$ bằng:

A. 1 B. 0

C. $\ln(abcd)$. D. $\ln\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{e}\right)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 21: Cho a,b là các số hữu tỉ thỏa mãn $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + a.\log_2 3 + b.\log_2 5$. Tính $a+b$.

A. $a+b=5$ B. $a+b=0$

C. $a+b=\frac{1}{2}$ D. $a+b=2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 22: Cho $a=\log_2 m$ với $m>0$ và $m \neq 1$ và $A=\log_m(8m)$. Khi đó mối quan hệ giữa A và a là:

A. $A=\frac{3+a}{a}$ B. $A=(3+a)a$

C. $A=\frac{3-a}{a}$ D. $A=(3-a).a$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 23: Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{4^{4+3\sqrt[3]{2}}}{32.8^{2\sqrt[3]{2}}}$.

A. $2^{1-24\sqrt[3]{2}}$. B. 2^{11}. C. 8. D. 2.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 24: Cho biểu thức $P=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}:\sqrt[8]{x^5}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{4}}$ B. $P=x^{\frac{3}{2}}$

C. $P=x^{\frac{2}{3}}$ D. $P=x^{\frac{1}{3}}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 25: Nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. B. 2^{18}. C. 8. D. 2.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 26: Cho $P=\log_m 16m$ và $a=\log_2 m$ với m là số dương khác 1.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=3-a^2$. B. $P=\frac{4+a}{a}$.

C. $P=\frac{3+a}{a}$. D. $P=3+a.\sqrt{a}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 27: Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)$$

A. $P=2$ B. $P=1$ C. $P=\sqrt{3}$ D. $P=\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 28: Mọi số thực dương a,b. Mệnh đề nào đúng?

A. $\log_{\frac{3}{4}} a<\log_{\frac{3}{4}} b \Leftrightarrow a>b$

B. $\log_2\left(a^2+b^2\right)=2\log(a+b)$

C. $\log_{a^2+1} a \geq \log_{a^2+1} b$

D. $\log_2 a^2=\frac{1}{2}\log_2 a$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 29: Cho số thực a thỏa mãn $a^2-5a+6\leq 0$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a^{3\sqrt{3}}>a^{2\sqrt{5}}$ B. $a^{2\sqrt{3}}>a^{\sqrt{13}}$

C. $\sqrt[7]{a^8}=-a\sqrt[7]{a}$ D. $\sqrt[6]{a^6}=-a$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 30: Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\log_4\left(2^{-2016}.2^{16}.\sqrt{2}\right).$$

A. $T=\frac{-3999}{4}$ B. $T=-2016$

C. $T=\frac{-3999}{2}$ D. T không xác định

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 31: Cho $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ là:

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Dạng 3: Giải phương trình và bất phương trình mũ, logarit.

Câu 1: Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}}$, với $x\neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $P=x^{\frac{1}{2}}$. B. $P=x^{\frac{13}{24}}$.

C. $P=x^{\frac{1}{4}}$. D. $P=x^{\frac{2}{3}}$

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 2: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x+(3-x)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$. B. $[2;4]$. C. $(4;10)$. D. $(3;4)$.

Câu 3: Giải phương trình: $3^x-8.3^{\frac{x}{2}}+15=0$

A. $\left[\begin{array}{l}x=\log_3 5\\ x=\log_3 25\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\log_3 5\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\log_3 25\end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right.$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\log_3(x^2-2x)$. Tập nghiệm S của phương trình $f'(x)=0$ là:

A. $S=\varnothing$ B. $S=\{1\pm\sqrt{2}\}$

C. $S=\{0;2\}$ D. $S=\{1\}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 5: Phương trình $2\log_9 x+\log_3(10-x)=\log_2 9.\log_3 2$ có hai nghiệm. Tích của hai nghiệm đó bằng

A. 10. B. 4. C. 9. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{2x}{x-1}}\le\left(\sqrt{5}+2\right)^x$ là:

A. $(-\infty;-1]\cup[0;1]$. B. $[-1;0]$.

C. $(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$. D. $[-1;0]\cup(1;+\infty)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 7: Phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x=3.2^x$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. m tùy ý. B. $m\neq-\frac{4}{3}$.

C. $m<-\frac{3}{2}$. D. $m\le-\frac{3}{2}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình sau có đúng 3 nghiệm thực phân biệt $9^{x^2}-2.3^{x^2+1}+3m-1=0$.

A. $m=\frac{10}{3}$. B. $2<m<\frac{10}{3}$.

C. $m=2$. D. $m<2$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 10: Bất phương trình:

$3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\le 3$ có tập nghiệm là:

A. $(1;2]$ B. $[1;2]$ C. $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ D. $\left(-\frac{1}{2};2\right]$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 11: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng:

A. 0. B. 5. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 12: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

A. $S=(2;+\infty)$. B. $S=(-\infty;2)$.

C. $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. D. $S=(-1;2)$.

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 13: Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2+x}+3^{2-x}=30$.

A. 3 B. $\frac{10}{3}$ C. 0 D. $\frac{1}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 14: Nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}}\le 2^{x-1}$ là:

A. $x\le-1$ B. $0\le x\le 2$ C. $x\ge 2$ D. $x\le 0$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 15: Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị của $A=2x_1+3x_2$ là

A. 0 B. $4\log_3 2$ C. $3\log_3 2$ D. 2

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 16: Phương trình $5^{2x+1}-13.5^x+6=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2, khi đó, tổng x_1+x_2 bằng:

A. $1-\log_5 6$. B. $-2+\log_5 6$.

C. $2-\log_5 6$. D. $-1+\log_5 6$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 17: Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x\right\} < 3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;27)$.
B. $(8;27)$.
C. $\left(\frac{1}{8};27\right)$.
D. $(27;+\infty)$.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 18: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-3)+\log_2 x \ge 2$.

A. $(3;+\infty)$.
B. $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.
C. $[4;+\infty)$.
D. $(3;4]$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 19: Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(2^x+1)+\log_3(4^x+5)=1$ có tập nghiệm là tập nào sau đây?

A. $\{1;2\}$
B. $\left\{3;\frac{1}{9}\right\}$
C. $\left\{\frac{1}{3};9\right\}$
D. $\{0;1\}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 20: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $16^{x+1}+4^{x-1}-5m=0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=0$
B. $m<0$
C. $m>0$
D. Không có giá trị nào của m

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 21: Phương trình: $\log_2 x.\log_4 x.\log_6 x$ $=\log_2 x.\log_4 x+\log_2 x.\log_6 x+\log_4 x.\log_6 x$ có tập nghiệm là:

A. $\{1\}$.
B. $\{2;4;6\}$.
C. $\{1;12\}$.
D. $\{1;48\}$.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 22: Giải phương trình:

$$x^2.5^{x-1}-\left(3^x-3.5^{x-1}\right)x+2.5^{x-1}-3^x=0.$$

A. $x=1, x=2$
B. $x=0, x=1$
C. $x=\pm1$
D. $x=\pm2$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_5(25^x-\log_5 m)=x$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$
B. $m=1$
C. $\left[\begin{array}{l} m\ge1 \\ m=\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{array}\right.$
D. $m\ge1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 24: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1).$$

A. $S=(4;+\infty)$
B. $S=\left(\frac{3}{2};4\right)$
C. $S=\left(-\frac{3}{2};4\right)$
D. $S=(-\infty;4)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=2^{x-1}.5^{x^2-3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $f(x)<10\Leftrightarrow(x-1)\ln2+(x^2-3)\ln5<\ln2+\ln5$
B. $f(x)<10\Leftrightarrow(x-1)\log2+(x^2-3)\log5<\log2+\log5$
C. $f(x)<10\Leftrightarrow x-1+(x^2-3)\log_2 5<1+\log_2 5$
D. $f(x)<10\Leftrightarrow(x-1)\log_5 2+(x^2-3)\log_2 5<\log_2 5+1$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long lần 1)

Câu 26: Giải phương trình $3^x.2^{x^2}=1$. Lời giải sau đây sai bắt đầu từ bước nào?

Bước 1: Biến đổi $3^x.2^{x^2}=1\Leftrightarrow 3^x(2^x)^x=1$

Bước 2: Biến đổi $3^x.(2^x)^x=1\Leftrightarrow(3.2^x)^x=1$

Bước 3: Biến đổi $(3.2^x)^x=1\Leftrightarrow(3.2^x)^x=(3.2^x)^0$

Bước 4: Biến đổi $(3.2^x)^x=(3.2^x)^0\Leftrightarrow x=0$

Bước 5: Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$

A. Bước 2
B. Bước 3
C. Cả 5 bước đều đúng
D. Bước 4

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ lần 5)

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\le m.\log_{5-\sqrt{4-x}}3.$$

A. $m>2\sqrt{3}$
B. $m\ge2\sqrt{3}$
C. $m\ge12\log_3 5$
D. $2\sqrt{3}\le m\le12\log_3 5$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình:

$\log_2(x^2-1)=\log_2 2x$ là

A. $\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right\}$
B. $\{2,4\}$.
C. $\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$
D. $\{1+\sqrt{2}\}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 29: Gọi Ω là tập nghiệm của bất phương trình: $(x^2+2x+1)^{\frac{x-1}{x+1}}\le1$. Hỏi khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $(-2;-1)\subset\Omega$
B. $[0;1]\subset\Omega$
C. $[-2;3]\subset\Omega$
D. $[0;+\infty)\subset\Omega$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 30: Tìm số nghiệm của phương trình:

$$\log_{\sqrt{3}} x.\log_3 x.\log_9 x = 8.$$

A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 31: Tập nghiệm của bất phương trình:

$$\left(2^{x^2-4}-1\right).\ln x^2 < 0 \text{ là}$$

A. $(-2;-1)\cup(1;2)$ B. $\{1;2\}$

C. $(1;2)$ D. $[1;2]$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Đại học Sư Phạm – HN)

Câu 32: Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2^{2+\frac{1}{4x}}+2^{\frac{x}{4}+\frac{1}{x}}=4$ là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 33: Phương trình $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15$ có một nghiệm dạng $x=-\log_a b$ với a, b là các số nguyên dương thuộc khoảng $(1;\ 8)$. Khi đó $a+2b$ bằng:

A. 5 B. 8 C. 3 D. 13

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 34: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Giá trị biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2$ bằng bao nhiêu?

A. 20 B. 5 C. 36 D. 25

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 35: Cho hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x\right)$. Tập nghiệm của bất phương trình $y'>0$ là:

A. $(-\infty;1)$ B. $(-\infty;0)$ C. $(1;+\infty)$ D. $(2;+\infty)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 36: Tìm tích tất cả các nghiệm của phương trình $4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log x}$.

A. 100 B. 10 C. 1 D. $\frac{1}{10}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 37: Cho $\log_{140} 63 = \dfrac{x.\log_x 3.\log_7 x+1}{\log_x 3.\log_3 5.\log_7 x + x\log_7 x+1}$ xác định x.

A. $x=2$ B. $x=4$ C. $x=3$ D. $x=5$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Lâm Đồng)

Câu 38: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x^2-4x+3)=\log_2(4x-4)$

A. $S=\{1;7\}$. B. $S=\{7\}$.

C. $S=\{1\}$. D. $S=\{3;7\}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 39: Số nghiệm thực của phương trình $\log(x-1)^2=2$ là

A. 2. B. 1.

C. 0. D. một số khác.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\left(7-3\sqrt{5}\right)^{x^2}+m\left(7+3\sqrt{5}\right)^{x^2}=2^{x^2-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m<\frac{1}{16}$ B. $0\le m<\frac{1}{16}$

C. $-\frac{1}{2}<m\le\frac{1}{16}$ D. $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}<m<0 \\ m=\frac{1}{16}\end{array}\right.$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Hướng dẫn giải chi tiết

Dạng 1: Các dạng toán tìm tập xác định, các bài toán đồ thị, và tính chất của các hàm logarit.

Câu 1: Đáp án D.

Điều kiện

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ \ln(x-1)+\ln(x+1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \ln(x^2-1)\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-1\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow D=\left[\sqrt{2};+\infty\right)$$

Câu 2: Đáp án D.

$$y'=\left(x^2+1\right)'.e^{x+1}+\left(x^2+1\right).\left(e^{x+1}\right)'$$

$$=2x.e^{x+1}+\left(x^2+1\right).e^{x+1}=\left(x+1\right)^2.e^{x+1}$$

$$y'_{(\ln 3)}=\left(\ln 3+1\right)^2.e^{\ln 3+1}=\left(\ln 3+1\right)^2.e^{\ln 3e}=3e.\left(\ln 3+1\right)^2.$$

Câu 3: Đáp án A.

$$y'=\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

Câu 4: Đáp án D.

$$y=\sqrt{\left(x+3\right)^3}-\sqrt[4]{5-x}$$

Suy ra điều kiện: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-3;5\right].$

Câu 5: Đáp án D.

A sai

B sai do $\log_{0,02}\left(x-1\right)>\log_{0,02}x \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1<x \end{cases}$

C sai do $a=2>1$ nên đồ thị hàm số luôn nằm bên phải trục tung.

D đúng do khi $a>1$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$

Câu 6: Đáp án D.

Điều kiện: $3-2^{x+1}-4^x\ge 0.$

$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2+2.2^x-3\le 0 \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(2^x+3\right)\le 0$

$\Leftrightarrow 2^x\le 1.$

$\Rightarrow D=\left(+\infty;0\right]$

Câu 7: Đáp án B.

Điều kiện: $x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right).$

Câu 8: Đáp án A.

$$y'=\frac{\left(x+1\right)'.9^x-\left(x+1\right)\left(9^x\right)'}{\left(9^x\right)^2}$$

$$=\frac{9^x-\left(x+1\right)9^x\ln 9}{\left(9^x\right)^2}=\frac{1-\left(x+1\right)\ln 9}{9^x}=\frac{1-2\left(x+1\right)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 9: Đáp án A.

Nếu $0<a<1; a^{x_1}<a^{x_2}\to x_1>x_2 \Rightarrow \left(a-1\right)\left(x_1-x_2\right)<0$

Nếu $a>1; a^{x_1}<a^{x_2}\Rightarrow x_1<x_2$

$\left(a-1\right)\left(x_1-x_2\right)<0.$

Câu 10: Đáp án A.

$$\log_5\left(x^2+x+1\right)'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)\ln 5}=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 5}$$

Câu 11: Đáp án B.

Nhìn vào đồ thị $y=a^x$ nghịch biến ta suy ra $0<a<1$.

$y=b^x; y=c^x$ đồng biến suy ra $b;c>1$.

Với $x>0; b^x>c^x\Rightarrow b>c\Rightarrow a<c<b$.

Câu 12: Đáp án C

$$y'=x'\ln|x|+x\left(\ln|x|\right)'=\ln|x|+x.\frac{1}{x}=1+\ln|x|$$

Câu 13: Đáp án C.

Ta có ghi nhớ sau:

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể,

Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;

Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{0\}$;

Với α không nguyên, tập xác định là $\left(0;+\infty\right)$.

Vậy ở đây:

$$2x-1>0. \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\Rightarrow D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Câu 14: Đáp án B.

A sai do $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$

B đúng

C sai do α là một số thực bất kì, vậy nếu $\alpha=0$ thì $a^\alpha=1$. Lúc này $\log_{a^\alpha} b$ sẽ không tồn tại.

D sai tương tự C, đồng thời sai cả công thức.

Câu 15: Đáp án C.

Điều kiện: $\frac{x+3}{2-x}>0\Leftrightarrow\left(x+3\right)\left(2-x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-3;2\right)$

$\Rightarrow D=\left(-3;2\right).$

Câu 16: Đáp án A.

$$y=\ln\left(2x-x^2\right)\Rightarrow y'=\frac{\left(2x-x^2\right)'}{2x-x^2}=\frac{2-2x}{2x-x^2}$$

Câu 17: Đáp án B.

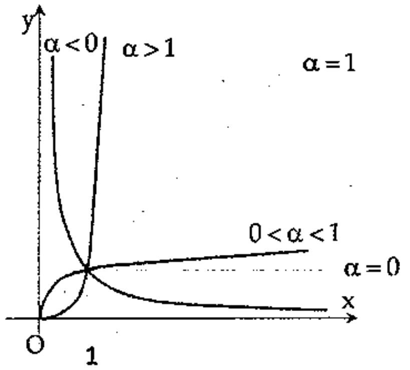
Vì $y'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right).\ln 2}$ đổi dấu qua $x=0$ nên hàm số không thể đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 18: Đáp án D.

Từ ghi nhớ mà tôi vừa nhắc ở câu 13 ta thấy $\frac{1}{3}$ không phải số nguyên nên ta chọn D.

Câu 19: Đáp án C.

Liên hệ với phần lí thuyết ở đầu chủ đề, ta nhắc lại kiến thức bằng đồ thị sau:



Từ đây so sánh với đề bài thì ta chọn C. số c

Câu 20: Đáp án D.

Ta có $(7^x)' = 7^x.\ln 7$

Câu 21: Đáp án A.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;\infty)$ nên ta chọn A. Xem lại lý thuyết về hàm số mũ.

Câu 22: Đáp án B.

Với phương án A: Đây là phương án đúng bởi : $2016^x.2016^y.2016^z = 2016^{x+y+z}$. Do *x, y, z* có tổng không đổi nên 2016^{x+y+z} không đổi.

Với phương án B: Nếu đặt $y = xr$ thì $z = xr^2$ (với $r \neq 0$). Khi đó

Với $r > 0$ thì $\log y = \log xr = \log x + \log r$

$\log z = \log xr^2 = \log x + 2\log r$ thỏa mãn là cấp số cộng, tuy nhiên với $r < 0$ thì không thỏa mãn, bởi khi đó log không tồn tại. Vậy B sai. Chọn B.

Sai lầm: Nhiều độc giả không xét trường hợp $r < 0$ nên cho rằng B đúng.

Câu 23: Đáp án D.

Ta có:

Nếu chỉ có điều kiện $(x-1)(x-2) > 0$ thì không đủ bởi khi đó sẽ có TH $(x-1)$ và $(x-2)$ cùng nhỏ hơn 0. Do đó $\ln(x-1)$ và $\ln(x-2)$ không tồn tại.

Câu 24: Đáp án C.

Hàm số đã cho xác định $\forall x \in R$.

$\Rightarrow (m-1)x^2 + 2(m-3)x + 1 > 0 \forall x \in R$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-3)^2 - (m-1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - 7m + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2 < m < 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2 < m < 5.$

Câu 25: Đáp án C.

Câu 26: Đáp án A.

Điều kiện:

$-x^2 - x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) < 0$

$\Leftrightarrow -2 < x < 1 \Rightarrow D = (-2;1)$

Câu 27: Đáp án B.

Ở đây ta có thể chọn luôn B bởi điều kiện để logarit tồn tại là $xy > 0$, tức x, y cùng dấu. Mà điều kiện để tách $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$ là $x, y > 0$. Do vậy B không đủ điều kiện để suy ra.

Với các phương án còn lại:

Với A: Do VP là hàm mũ luôn lớn hơn 0, do đó ta có thể lấy logarit cơ số 2 của hai vế và suy ra được

$pt \Leftrightarrow \log_2 x = 10 - \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y = 10$

Với C: Thì

$\Leftrightarrow 3(\log_2 x + \log_2 y) = 30 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y = 10$.

D tương tự A.

Câu 28: Đáp án C.

Đồ thị đã cho có $x > 0$.

Suy ra loại A và B

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên chọn C.

Vì hàm số $y = \log_{0,5} x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$

Câu 29: Đáp án A.

Từ phần lý thuyết được nhắc lại ở câu 19, ta chọn A.

Câu 30: Đáp án B

$$y' = \left(\log_{2017}(x^2+1)\right)' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 2017}$$

Câu 31: Đáp án D.

Điều kiện: $e^x - e^{10} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{10} \Leftrightarrow x > 10.$

Suy ra: $D = (10;+\infty)$.

Câu 32: Đáp án A.

$\int (3^x \ln 3 + 7.x^6)dx = 3^x + x^7 + C.$

Câu 33: Đáp án B.

Câu 34: Đáp án D.

$$y' = \frac{1}{(x+1)\ln 3} - \frac{2}{x-1} + 2$$

$$\Rightarrow y'(2) = \frac{1}{3\ln 3} - \frac{2}{2-1} + 2 = \frac{1}{3\ln 3}.$$

Câu 35: Đáp án C.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ \log_{0,3}(x-1) < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-2) \cup (4;+\infty) \\ x - 1 > 1 \\ x > 1 \end{cases}$$

$x>2\Rightarrow D=(2;+\infty)$.

Câu 36: Đáp án A.

Điều kiện:

$x^2-5x+6>0\Leftrightarrow(x-2)(x-3)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 37: Đáp án A

$\left(e^{5x}\right)'=e^{5x}(5x)'=5.e^{5x}$.

Dạng 2: Các phép biến đổi mũ, logarit.

Câu 1: Đáp án A.

Cách 1: Đối với dạng toán này, cách nhanh nhất là thử từng đáp án.

Gán $\log_{27}5\to A;\ \log_8 7\to B;\ \log_2 3\to C$.

Sau đó nhập từng biểu thức của đáp án.

Cách 2: Ta có $\log_3 5=3a;\log_2 7=3b$

$$\log_{12}35=\log_{3.2^2}5.7=\frac{\log_3 5+\dfrac{\log_2 7}{\log_2 3}}{\log_3 3+2\log_3 2}=\frac{3a+\dfrac{3b}{c}}{1+\dfrac{2}{c}}$$

$$=\frac{3(b+ac)}{c+2}$$

Câu 2: Đáp án A.

Câu 3: Đáp án A.

$$\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=\log_2 2+\log_2\left(a^3\right)-\log_2 b$$

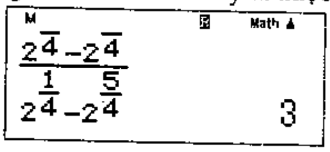
$$=1+3\log_2 a-\log_2 b$$

Câu 4: Đáp án C.

Cách 1:

$$A=\frac{a^{\frac14}-a^{\frac14}.a^2}{a^{\frac14}-a^{\frac14}.a}=\frac{1-a^2}{1-a}=\frac{(1-a)(1+a)}{1-a}=1+a.$$

Cách 2: thử giá trị $a=2$ bấm máy ta được:



Ta thấy $3=2+1$. Chọn C.

Câu 5: Đáp án C.

Nhập vào máy tính $\log_x\left(x\sqrt[5]{x.\sqrt[3]{x.\sqrt{x}}}\right)$.

Ấn "=" thì màn hình cho kết quả $\frac{13}{10}$.

Câu 6: Đáp án D.

Cách 1: Tương tự cách thử của câu 1.

Cách 2: $\log 3=m\Rightarrow\log_3 10=\frac{1}{m}$

$$\ln 3=n\Rightarrow\log_3 e=\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\ln 10=\frac{\log_3 10}{\log_3 e}=\frac{n}{m}.$$

$\ln 30=\ln(3.10)=\ln 3+\ln 10=n+\frac{n}{m}$.

Câu 38: Đáp án D.

Điều kiện: $x^2-4x+3>0\Rightarrow D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

Câu 39: Đáp án D

$$y'=\sqrt2\left(x^2+x+1\right)'\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt2-1}$$

$$=\sqrt2(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{\sqrt2-1}.$$

Câu 7: Đáp án D.

Trước tiên ta đi rút gọn biểu thức P:

$$P=\left(2\log_{\frac{a}{b}}a\right)^2+3\log_b a-3\log_b b$$

$$=\left(\frac{2\log_b a}{\log_b\dfrac{a}{b}}\right)^2+3\log_b a-3$$

$$=\left(\frac{2\log_b a}{\log_b a-1}\right)^2+3(\log_b a-1)$$

Đặt $\log_a b=t\ (t>0)$, khi đó:

$P=f(t)=\left(\frac{2t}{t-1}\right)^2+3(t-1)$ có

$$f'(t)=\frac{8t.(t-1)^2-2.(t-1).4t^2}{(t-1)^4}+3=\frac{-8t+3(t-1)^3}{(t-1)^3}.$$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=3$. Khi đó $P_{\min}=f(3)=15$.

Câu 8: Đáp án A.

$$a^2+b^2=7ab\Leftrightarrow(a+b)^2=9ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab$$

$$\Leftrightarrow\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=\log ab\Leftrightarrow\log\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac12(\log a+\log b)$$

Câu 9: Đáp án B.

Cách 1: Tương tự cách thử của câu 1.

Cách 2: $\log_4 3=a\Rightarrow\log_2 3=2a$

$$\log_{25}2=b\Rightarrow\log_2 25=\frac1b\Rightarrow\log_2 5=\frac{1}{2b}$$

$$\log_{60}\sqrt{150}=\frac12.\log_{60}150=\frac12.\frac{\log_2 150}{\log_2 60}$$

$$=\frac12.\frac{\log_2(25.3.2)}{\log_2(3.5.2^2)}=\frac12.\frac{\log_2 25+\log_2 3+1}{\log_2 5+2+\log_2 3}$$

$=\frac{1}{2}.\frac{\frac{1}{b}+2a+1}{\frac{1}{2b}+2+2a}=\frac{1}{2}.\frac{1+2ab+b}{\frac{1}{2}+2b+2ab}$

$=\frac{1}{2}.\frac{2+4ab+2b}{1+4b+4ab}=\frac{1+2ab+b}{1+4ab+4b}$

Câu 10: Đáp án B.

$\log_{a^3}(a.b)=\frac{1}{3}.\log_a(a.b)=\frac{1}{3}.(\log_a a.\log_a b)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_a b$

Câu 11: Đáp án C.

$(0,1a)^{\sqrt{3}}<(0,1a)^{\sqrt{2}}\Rightarrow 0<0,1a<1\Leftrightarrow 0<a<10$

$\log_b\frac{2}{3}<\log_b\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow b>1$

Câu 12: Đáp án C.

Cách 1: Tương tự cách thử của câu 1.

Cách 2:

$\log_{30}(1350)=\log_{30}(3^2.30.5)$

$=2\log_{30}3+\log_{30}30+\log_{30}5=2a+b+1$

Câu 13: Đáp án C.

Câu 14: Đáp án C.

$\log_{12}27=a\Leftrightarrow 3\log_{12}3=a$

$\Leftrightarrow\log_3 12=\frac{3}{a}\Leftrightarrow\log_3(3.2^2)=\frac{3}{a}$

$\Leftrightarrow 2\log_3 2+1=\frac{3}{a}\Leftrightarrow\log_3 2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}-1\right)$

$\log_{36}24=\frac{\log_3 24}{\log_3 36}=\frac{\log_3 12+\log_3 2}{\log_3 12+\log_3 3}$

$=\frac{\frac{3}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{a}-1\right)}{\frac{3}{a}+1}=\frac{\frac{9}{2}a-\frac{1}{2}}{\frac{3}{a}+1}=\frac{9-a}{6+2a}$

Câu 15: Đáp án C.

Nhập vào máy tính: $(X^4)^{\log_{X^2}3}$

Chọn giá trị x bất kì, máy tính đều cho kết quả là 9.

Câu 16: Đáp án C.

$\log_{12}3=a\Rightarrow\log_3 12=\frac{1}{a}\Leftrightarrow 2\log_3 2+1=\frac{1}{a}$

$\Rightarrow\log_3 2=\left(\frac{1}{a}-1\right).\frac{1}{2}$

$\log_{24}18=\frac{\log_3 18}{\log_3 24}=\frac{\log_3 12+\log_3 3-\log_3 2}{\log_3 12+\log_3 2}$

$=\frac{\frac{1}{a}+1-\left(\frac{1}{a}-1\right).\frac{1}{2}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{a}-1\right)}=\frac{\frac{1}{2a}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2a}-\frac{1}{2}}=\frac{1+3a}{3-a}$

Câu 17: Đáp án B.

$\log_x\left(\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x}}\right)=\frac{5}{12}.$

Câu 18: Đáp án D.

Sử dụng máy tính: $\log_x\left(\frac{\left(x^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{x^{-\sqrt{3}+2}.x^{2+\sqrt{3}}}\right)=-2$

$\Rightarrow$ Kết quả: $P=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$

Câu 19: Đáp án D.

$P=\frac{1}{\log_2 n!}+\frac{1}{\log_3 n!}+...+\frac{1}{\log_n n!}$

$=\log_{n!}2+\log_{n!}3+...+\log_{n!}n$

$=\log_{n!}(2.3.....n)=\log_{n!}n!=1$

Câu 20: Đáp án B.

$S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$

$=\ln\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}\right)=\ln 1=0$

Câu 21: Đáp án C.

$\log_2\sqrt[6]{360}=\frac{1}{6}.\log_2(2^3.3^2.5)$

$=\frac{1}{6}.3.\log_2 2+\frac{1}{6}.2.\log_2 3+\frac{1}{6}.\log_3 5$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.\log_2 3+\frac{1}{3}\log_3 5$

$\Rightarrow a=\frac{1}{3};\ b=\frac{1}{6}\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$

Câu 22: Đáp án A.

$A=\log_m(8m)=\log_m 8+\log_m m$

$=3.\log_m 2+1=\frac{3}{\log_2 m}+1$

$=\frac{3}{a}+1=\frac{3+a}{a}$

Câu 23: Đáp án C

Sử dụng máy tính

Câu 24: Đáp án A.

$\log_x\left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}:\sqrt[8]{x^5}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow P=x^{\frac{1}{4}}.$

Câu 25: Đáp án A.

$\log_8 a+\log_4 b^2=5\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b=5$

$\log_4 a^2+\log_8 b=7\Leftrightarrow\log_2 a+\frac{1}{3}.\log_2 b=7$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 a=6\\ \log_2 b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=64\\ b=8\end{cases}$

$\Rightarrow ab=512=2^9$

Câu 26: Đáp án B.

$\log_m 16m=\log 16+1=4\log_m 2+1$

$\Leftrightarrow P=\frac{4}{a}+1=\frac{4+a}{a}.$

Câu 27: Đáp án B.

$$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)$$

$$=\log_a\left(a^5b\right)+\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)-6$$

$$=\log_a\left(a^7\right)-6=7-6=1$$

Câu 28: Đáp án A.

Câu 29: Đáp án A.

$a^2-5a+6\le 0(a-2)(a-3)\le 0$

$2\le a\le 3.$

$3\sqrt{3}>2\sqrt{5}\ \Rightarrow a^{3\sqrt{3}}>a^{2\sqrt{5}}.$

Câu 30: Đáp án A.

$$\log_4\left(2^{-2016}.2^{16}.\sqrt{2}\right)=\log_4\left(2^{-2016+16+\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\log_4 2^{\frac{-3999}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 2^{\frac{-3999}{2}}=\frac{-3999}{4}.$$

Câu 31: Đáp án C.

Đặt $\log_9 x=\log_{12}y=\log_{16}(x+y)=t.$

Suy ra: $9^t=x;12^t=y;16^t=x+y.$

$$\Leftrightarrow 16^t=12^t+9^t\Leftrightarrow\left[\left(\frac{3}{4}\right)^t\right]^2+\left(\frac{3}{4}\right)^t-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Có $\dfrac{x}{y}=\dfrac{9^t}{12^t}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^t$. Mà $x>0;y>0\Rightarrow\dfrac{x}{y}>0.$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Dạng 3: Giải phương trình và bất phương trình mũ, logarit.

Câu 1: Đáp án B.

Cách 1: Ta có:

$$P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}}=\sqrt[4]{x^{\frac{7}{6}}.x}=x^{\frac{13}{24}}.$$

Cách 2: Nhập máy tính: $\log_x\left(\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}\right)$

Màn hình cho kết quả là $\dfrac{13}{24}\ \Rightarrow P=x^{\frac{13}{24}}.$

Câu 2: Đáp án C

Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 6^x+(3-x).2^x=m(*)$

Đặt $f(x)=6^x+(3-x).2^x$

Xét $f(x)$ trên $(0;1)$:

$f'(x)=6^x.\ln 6-2^x+(3-x).2^x.\ln 2$

$=2^x\left[3^x.\ln 6-1+(3-x).\ln 2\right]>0\ \ \forall x\in(0;1)$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Rightarrow f(0)<f(x)<f(1)$

$\Leftrightarrow f(0)<m<f(1)$

$\Leftrightarrow 4<m<10\quad\Rightarrow m\in(4;10)$

Câu 3: Đáp án C.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\left(\sqrt{3^x}\right)^2-8.\sqrt{3^x}+15=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{3^x}=3\\ \sqrt{3^x}=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\log_3 25\end{array}\right.$$

Câu 4: Đáp án A.

$f(x)=\log_3\left(x^2-2x\right)$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'}{\left(x^2-2x\right).\ln 3}=\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right).\ln 3}$$

Đến đây để giải quyết bài toán nhanh, nhập màn hình máy tính biểu thức:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\times\ln 3}\right)\Bigg|_{x=A}$$

Bấm tiếp CALC. Màn hình hỏi $x?\ \Rightarrow$ Ấn =

$A?\ \Rightarrow$ Nhập 0

Nhận được kết quả $\neq 0\ \Rightarrow 0$ không là nghiệm của phương trình $f''(x)=0.$

Tương tự thử các đáp án B, C, D đều không thỏa mãn.

Câu 5: Đáp án C.

Điều kiện: $x\in(0;10)$

$2\log_9 x+\log_3(10-x)=\log_2 9.\log_3 2$

$\Leftrightarrow\log_3 x+\log_3(10-x)=2$

$\Leftrightarrow x(x-10)=3^2$

$\Leftrightarrow x^2-10x+9=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=9\end{array}\right.$$

Vậy tích của hai nghiệm là 9.

Câu 6: Đáp án D.

Điều kiện: $x\neq 1$

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{2x}{x-1}}\le\left(\sqrt{5}+2\right)^x$$

Với $x=0$ thỏa mãn

Với $x\neq 0$ thì bất phương trình tương đương với:

$\frac{1}{\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{2x}{x-1}}} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x+\frac{2x}{x-1}} \ge 1$

$\Leftrightarrow x+\frac{2x}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x-1} \ge 0$

Lập bảng xét dấu, ta suy ra $x\in\left[-1;0\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Kết hợp với trường hợp $x=0$ thì ta có

$$x\in\left[-1;0\right]\cup\left(1;+\infty\right).$$

Câu 7: Đáp án A.

- Bài toán này chúng ta có thể thử trực tiếp các đáp án để tìm ra kết quả. Tuy nhiên nếu người ra đề thay câu hỏi thì phương án thử không thể áp dụng. Ví dụ như đề bài hỏi tổng bình phương các nghiệm.

- Giải chi tiết:

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 3$

Đặt $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = t > 0$, ta có: $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x . \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1$

$\Rightarrow t+\frac{1}{t}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Câu 8: Đáp án D.

Đặt $t=3^x$, $t>0$

ycbt $\Leftrightarrow t^2-2(m+1)t-3-2m>0, \forall t>0$

$\Leftrightarrow m<\frac{t^2-2t-3}{2t+2}, \forall t>0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}(t-3), \forall t>0$

$f(t)=\frac{1}{2}(t-3), f'(t)=\frac{1}{2}>0, \forall t>0$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0,+\infty)$

Vậy *ycbt* $\Leftrightarrow m<f(t), \forall t>0 \Leftrightarrow m\le f(0)=-\frac{3}{2}$.

Câu 9: Đáp án C.

$9^{x^2}-2.3^{x^2+1}+3m-1=0$

$\Leftrightarrow \left(3^{x^2}\right)^2-6.3^{x^2}+3m-1=0$

Đặt $3^{x^2}=t>0 \Rightarrow t^2-6t+3m-1=0$ $(*)$

- Với $t=1 \Rightarrow x=0$

- Với $t<1 \Rightarrow x^2<0$ $\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

- Với $t>1$ $\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm của x đối nhau.

Phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt khi $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt $t_1=1$ và $t_2>1$.

Khi $t=1 \Rightarrow 1-6+3m-1=0 \Leftrightarrow m=2$

Thử lại: $t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m=2$.

Câu 10: Đáp án A.

Điều kiện: $x>1$

Phương trình $\Leftrightarrow 3\log_3(x-1)+3\log_3(2x-1)\le 3$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)(2x-1)\le 1$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x-1)\le 3$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-1\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};2\right]$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\left(1;2\right]$.

Câu 11: Đáp án B.

$5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2} \Leftrightarrow 5^{3x-2}=\left(5^{-1}\right)^{-x^2}$

$\Leftrightarrow 5^{3x-2}=5^{x^2} \Rightarrow x^2=3x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 5.

Câu 12: Đáp án C.

Dễ nhận thấy điều kiện: $x>\frac{1}{2}$ nên loại đáp án B và D.

Thử lại giữa hai đáp án A và C thì đáp án C đúng.

Câu 13: Đáp án C.

$3^{2+x}+3^{2-x}=30$

$\Leftrightarrow 3^2.3^x+\frac{3^2}{3^x}=30 \Leftrightarrow 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow 3\left(3^x\right)^2-10.3^x+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=3 \\ 3^x=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm bằng 0.

Câu 14: Đáp án C.

Điều kiện: $x\in\left(-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right)$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{x-1}.2^{\sqrt{x^2-2x}}\ge 1 \Leftrightarrow 2^{x-1+\sqrt{x^2-2x}}\ge 1$

$$\Leftrightarrow x-1+\sqrt{x^2-2x}\ge 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}\ge 1-x$

- Nếu $x\in\left[2;+\infty\right) \Rightarrow 1-x<0 \Rightarrow$ Bất phương trình đúng.

- Nếu $x\in\left(-\infty;0\right] \Rightarrow x^2-2x\ge x^2-2x+1 \Leftrightarrow 0\ge 1$ (vô nghiệm).

Vậy $x\ge 2$.

Câu 15: Đáp án C.

$9^x - 3.3^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 3.3^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_3 2 \end{array}\right. \Rightarrow A = 2.0 + 3.\log_3 2 = 3\log_3 2$

Câu 16: Đáp án D.

$5^{2x+1} - 13.5^x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 5.(5^x)^2 - 13.5^x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x = 2 \\ 5^x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_5 2 \\ x = \log_5\left(\dfrac{3}{5}\right) = \log_5 3 - 1 \end{array}\right.$

Vậy tổng hai nghiệm là: $\log_5 2 + \log_5 3 - 1 = \log_5 6 - 1$.

Câu 17: Đáp án C.

- Nếu $x > 1 \Rightarrow \log_3 x > \log_{\frac{1}{2}} x$

$\Rightarrow$ Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3 x < 3 \Leftrightarrow x < 27$

$\Rightarrow x \in (1;27)$.

- Nếu $x \le 1 \Rightarrow \log_3 x \le \log_{\frac{1}{2}} x$

$\Rightarrow$ Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x < 3 \Leftrightarrow x > \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{1}{8};27\right)$.

Câu 18: Đáp án C.

Điều kiện: $x > 3$

$\log_2(x-3) + \log_2 x \ge 2$

$\Leftrightarrow \log_2\left[x(x-3)\right] \ge 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x \ge 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \ge 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty;-1] \cup [4;+\infty)$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x \in [4;+\infty)$

Câu 19: Đáp án D.

Phương trình $\Leftrightarrow -\log_3(2^x+1) + \log_3(4^x+5) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{4^x+5}{2^x+1}\right) = 1$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 5 = 3(2^x+1)$

$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3.2^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Câu 20: Đáp án C.

Đặt $4^x = t > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow 16t^2 + \dfrac{t}{4} - 5m = 0 \ (*)$

1 nghiệm $t > 0$ cho một nghiệm x.

Trường hợp 1: 1 nghiệm duy nhất dương

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 4.5m.16 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{5120}$

$\Rightarrow t = -\dfrac{1}{4.2.16} < 0 \Rightarrow$ không thỏa mãn

Trường hợp 2: $x_1 > 0,\ x_2 \le 0$

$\Rightarrow 16.(-5m) \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0$

Thử lại $m = 0$ không thỏa mãn $\Rightarrow m > 0$

Câu 21: Đáp án D.

$\log_2 x.\log_4 x.\log_6 x = \log_2 x.\log_4 x + \log_2 x.\log_6 x + \log_4 x.\log_6 x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\log_2 6}.\log_2^3 x = \dfrac{\log_2^2 x}{2} + \dfrac{\log_2^2 x}{\log_2 6} + \dfrac{\log_2^2 x}{2.\log_2 6}$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x\left(\dfrac{\log_2 x}{2\log_2 6} - \dfrac{1}{\log_2 6} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\log_2 6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x\left(\dfrac{\log_2 x - 1 - \log_2 6 - 2}{2\log_2 6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_2 x = \log_2 6 + 3 = \log_2 48 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 48 \end{array}\right.$

Câu 22: Đáp án C.

$x^2.5^{x-1} - (3^x - 3.5^{x-1})x + 2.5^{x-1} - 3^x = 0$

$\Leftrightarrow 5^{x-1}(x^2+3x+2) - 3^x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow 5^{x-1}(x+1)(x+2) - 3^x = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left[5^{x-1}(x+2) - 3\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(\dfrac{x+2}{5} - \dfrac{3^x}{5^x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \ (1) \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^x - \dfrac{x+2}{5} = 0 \ (*) \end{array}\right.$

Xét $f(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x - \dfrac{x+2}{5}$ trên ℝ

$f'(x) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^x.\ln\left(\dfrac{3}{5}\right) - \dfrac{1}{5} < 0\ \forall x \in$ ℝ

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên ℝ

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $x = 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = \pm 1$.

Câu 23: Đáp án C.

Điều kiện: $\begin{cases} m > 0 \\ 25^x - \log_5 m > 0 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow (5^x)^2 - \log_5 m = 5^x$

$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 5^x = \log_5 m \ (*)$

Đặt $5^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - t = \log_5 m \ (**)$

$(*)$ có nghiệm duy nhất

$\Rightarrow(**)$ có 1 nghiệm kép $t_0>0$ hoặc có 2 nghiệm $t_1>0,\ t_2\le 0$.

- Trường hợp 1:

$t_0=\frac{1}{23}(t/m)\Rightarrow \log_5 m=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

- Trường hợp 2: $t_1>0,\ t_2\le 0$.

+ Nếu $t_2=0\Rightarrow m=1\Rightarrow$ Thử lại thỏa mãn

+ Nếu $t_2<0\Rightarrow t_1t_2<0\xrightarrow{Vi-et}\log_5 m>0\Leftrightarrow m>1$

Vậy $m\ge 1$ hoặc $m=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$.

Câu 24: Đáp án B.

Điều kiện: $x>\frac{3}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x-3<x+1$ (vì $\frac{1}{3}<1$)

$\Leftrightarrow x<4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{3}{2};4\right)$.

Câu 25: Đáp án A.

$f(x)<10\Leftrightarrow 2^{x-1}.5^{x^2-3}<10$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^{x-1}.5^{x^2-3}\right)<\ln 10$

$\Leftrightarrow \ln 2^{x-1}+\ln 5^{x^2-3}<\ln 2+\ln 5$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln 2+(x^2-3)\ln 5<\ln 2+\ln 5$

Câu 26: Đáp án B.

Sai ở bước 3 vì từ $(3.2^x)^x=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3.2^x=1\\ x=0\end{array}\right.$.

Câu 27: Đáp án B.

Điều kiện: $x\in[0;4]$

BPT $\Leftrightarrow f(x)=\log_3\left(5-\sqrt{4-x}\right).\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}\right)\le m$

BPT có nghiệm $\Rightarrow m\ge \min\limits_{[0;4]} f(x)$

Với $4\ge x_1\ge x_2\ge 0$

$\Rightarrow\begin{cases}x_1\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1+12}>x_2\sqrt{x_2}+\sqrt{x_2+12}\\ 5-\sqrt{4-x_1}>5-\sqrt{4-x_2}\end{cases}$

$\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;4]$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0;4]} f(x)=f(0)=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Vậy điều kiện của m để bất phương trình có nghiệm là $m\ge 2\sqrt{3}$.

Câu 28: Đáp án D.

Điều kiện: $x>1$

$\log_2(x^2-1)=\log_2 2x$

$\Leftrightarrow x^2-1=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{2}\ (l)\\ x=1+\sqrt{2}\ (t/m)\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1+\sqrt{2}$.

Câu 29: Đáp án A.

Điều kiện: $x\ne -1$

$(x^2+2x+1)^{\frac{x-1}{x+1}}\le 1$

$\Leftrightarrow\left[(x+1)^2\right]^{\frac{x-1}{x+1}}\le 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^{2\frac{x-1}{x+1}}\le 1\ \ (*)$

Nếu $-1\le x+1\le 1\Rightarrow(*)$ luôn đúng.

Vì $a\in[-1;1]\Rightarrow a^n\le 1$

$\Rightarrow x\in[-2;0]$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình.

Dễ dàng nhận thấy A đúng vì $(-2;-1)\subset[-2;0]$.

Câu 30: Đáp án C.

Điều kiện: $x>0$

$\log_{\sqrt{3}}x.\log_3 x.\log_9 x=8$

$\Leftrightarrow 2.\log_3 x.\log_3 x.\frac{1}{2}.\log_3 x=8$

$\Leftrightarrow \log_3^2 x=8$

$\Leftrightarrow \log_3 x=2\Leftrightarrow x=9$

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Câu 31: Đáp án A.

Điều kiện: $x\ne 0$

$\left(2^{x^2-4}-1\right).\ln x^2<0$

Trường hợp 1: $\begin{cases}2^{x^2-4}-1>0\\ \ln x^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{x^2-4}>2^0\\ x^2<1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>4\\ x^2<1\end{cases}\Rightarrow$ Vô nghiệm.

Trường hợp 2: $\begin{cases}2^{x^2-4}-1<0\\ \ln x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4<0\\ x^2>1\end{cases}$

$\Leftrightarrow 1<x^2<4\Leftrightarrow x\in(-2;-1)\cup(1;2)$

Câu 32: Đáp án

Câu 33: Đáp án D.

Điều kiện: $x\ne 0$

$3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15$

$\Leftrightarrow \ln\left(3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}\right)=\ln 15$

$\Leftrightarrow x.\ln 3+\frac{2x-1}{x}.\ln 5=\ln 3+\ln 5$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln 3+\left(\frac{2x-1}{x}-1\right).\ln 5=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\ln 3+\dfrac{(x-1).\ln 5}{x}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(\ln 3+\dfrac{\ln 5}{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=-\dfrac{\ln 5}{\ln 3}=-\log_3 5 \end{array}\right.$

Vậy $a=3;b=5\Rightarrow a+2b=3+10=13.$

Câu 34: Đáp án A.

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 x-3\log_2 x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy $P=2^2+4^2=20.$

Câu 35: Đáp án B.

Điều kiện: $x^2-2x>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

$y'=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x).\ln\frac{1}{3}}$

$y'>0\Leftrightarrow \dfrac{2x-2}{x^2-2x}<0$

Vì $x^2-2x>0\Rightarrow 2x-2<0\Leftrightarrow x<1$

Vậy $x\in(-\infty;0).$

Câu 36: Đáp án C.

$4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{1+\log_x}$

$\Leftrightarrow 4.3^{2\log(10x)}+9.4^{\log(10x)}=13.6^{\log(10x)}$

$\Leftrightarrow 4.\left[3^{\log(10x)}\right]^2+9.\left[2^{\log(10x)}\right]^2=13.2^{\log(10x)}.3^{\log(10x)}$

$\Leftrightarrow 4.\dfrac{3^{\log(10x)}}{2^{\log(10x)}}+9.\dfrac{2^{\log(10x)}}{3^{\log(10x)}}=13$

Đặt $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}=t>0\Rightarrow 4t+\dfrac{9}{t}=13$

$\Leftrightarrow 4t^2-13t+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log(10x)=0 \\ \log(10x)=2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x=1 \\ 10x=100 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{10} \\ x=10 \end{array}\right.$

Vậy tích các nghiệm bằng 1.

Câu 37: Đáp án

Sử dụng chức năng SHIFT SOLVE của máy tính hoặc thử chọn các đáp án.

Câu 38: Đáp án B.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ 4x-4>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>3$

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-4x+3=4x-4$

$\Leftrightarrow x^2-8x+7=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (l) \\ x=7\ (t/m) \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{7\}$.

Câu 39: Đáp án A.

Điều kiện: $x\neq 1$

$\log(x-1)^2=2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=10^2$

$\Leftrightarrow (x-11)(x+9)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=-9 \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực.

Câu 40: Đáp án C.

Phương trình $\Leftrightarrow m.\left(\dfrac{7+3\sqrt5}{2}\right)^{x^2}+\left(\dfrac{7-3\sqrt5}{2}\right)^{x^2}=\dfrac{1}{2}$

Đặt $\left(\dfrac{7+3\sqrt5}{2}\right)^{x^2}=t>0$

$\Rightarrow mt+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow mt^2-\dfrac{1}{2}t+1=0\ (*)$

- Nếu $t\in(0;1)\Rightarrow x^2<0\Rightarrow$ vô nghiệm.

- Nếu $t=1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$.

- Nếu $t>1\Rightarrow x^2>0\Rightarrow$ có 2 nghiệm x đối nhau.

Để 2 phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt:

TH1: $(*)$ có duy nhất 1 nghiệm >1.

+ $m=0\Rightarrow t=2\Rightarrow$ thỏa mãn.

+ $m\neq 0;\ \Delta=0=m=\dfrac{1}{16}\Rightarrow t=4>1\Rightarrow$ thỏa mãn.

TH2: $(*)$ có 2 nghiệm $t_1>1,\ t_2<1$

$\Rightarrow \begin{cases} (t_1-1)(t_2-1)<0 \\ \Delta>0 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0 \\ \dfrac{1}{4}-4m>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{2m}+1<0 \\ m<\dfrac{1}{16} \end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-\dfrac{1}{2} \\ m<\dfrac{1}{16} \end{array}\right.$

Vậy $-\dfrac{1}{2}<m\le\dfrac{1}{16}$.

Chủ đề 3: Nguyên hàm – tích phân và ứng dụng

I. Nguyên hàm và các tính chất cơ bản.

Kí hiệu K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng.

Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của hàm số f trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

STUDY TIP:
Từ định nghĩa nguyên hàm ta có được
$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

Định lý 1

1. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì với mỗi hằng số C, hàm $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm f trên K.

2. Đảo lại nếu F và G là hai nguyên hàm của hàm số f trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $F(x)=G(x)+C$.

Kí hiệu: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Người ta chứng minh được rằng: "Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K."

Tính chất của nguyên hàm

Định lý 2 sau đây cho ta một số tính chất cơ bản của nguyên hàm

Định lý 2

1. Nếu f, g là hai hàm số liên tục trên K thì

$\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

$\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ với mọi số thực a khác 0.

2. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

Bài toán tìm nguyên hàm là bài toán ngược với bài toán tìm đạo hàm. Việc tìm nguyên hàm của một hàm số thường được đưa về tìm nguyên hàm của một số hàm số đơn giản hơn. Dưới đây ta có bảng một số nguyên hàm:

$\int dx=x+C$	$\int(ax+b)dx=\frac{1}{2a}(ax+b)^2+C,a\neq0$
$\int(x+a)^\alpha dx=\frac{(x+\alpha)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(a\in ,\alpha\neq-1)$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{1}{\alpha+1}(ax+b)^{\alpha+1}+C,$ $(\alpha\neq-1)$
$\int\frac{1}{x+a}dx=\ln\lvert x+a\rvert+C$	$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C,a\neq0.$
$\int e^x dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C,a\neq0$
$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+C,(a>0,a\neq1)$	$\int a^{px+q}dx=\frac{1}{p.\ln a}a^{px+q}+C,(a>0,a\neq1)\ p\neq0$
$\int\sin xdx=-\cos x+C$	$\int\sin axdx=\frac{-\cos ax}{a}+C,(a\neq0)$
$\int\cos xdx=\sin x+C$	$\int\cos axdx=\frac{\sin ax}{a}+C,(a\neq0)$
$\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\tan x+C,\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	$\int\frac{1}{\sin^2x}dx=-\cot x+C\ (x\neq k\pi)$

II. Hai phương pháp cơ bản để tìm nguyên hàm.

a, Phương pháp đổi biến số.

Định lí 3

Cho hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y=f(u)$ liên tục sao cho hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f thì $\int f[u(x)]u'(x)dx=F[u(x)]+C$

Ví dụ 1: Tìm nguyên hàm $\int(x-1)^{10}dx$.

STUDY TIP:
Với phương pháp đổi biến ta cần chú trọng công thức mà suy ra từ định lý như sau:
Nếu $u=f(x)$, khi đó $du=f'(x)dx$

Lời giải

Theo định lý trên thì ta cần viết về dạng $\int f(u)du$.

Mà $u'=(x-1)'=1$, do vậy

$$\int(x-1)^{10}dx=\int(x-1)^{10}.(x-1)'dx=\int(x-1)^{10}d(x-1)=\frac{(x-1)^{11}}{11}+C.$$

Từ ví dụ trên ta có các bước gợi ý để xử lý bài toán tìm nguyên hàm theo phương pháp đổi biến

1. Đặt $u=g(x)$.
2. Biến đổi x và dx về u và du.
3. Giải bài toán dưới dạng nguyên hàm hàm hợp $\int f(u)du$, sau đó thay biến x vào nguyên hàm tìm được và kiểm tra lại kết quả.

Ta đến với ví dụ 2

Ví dụ 2: Tìm $\int x^2(1-x)^7dx$.

Ở bài toán này, ta thấy số mũ 7 khá cao mà lại có biểu thức trong ngoặc phức tạp hơn là x^2. Do vậy ta sẽ đặt $(1-x)^7$ để đổi biến, dưới đây là lời giải áp dụng gợi ý các bước trên.

Lời giải

Đặt $u=1-x\Leftrightarrow du=(1-x)'dx\Leftrightarrow du=-dx$

ta có $\int x^2(1-x)^7dx=\int(1-u)^2.u^7(-1)du=-\int(u^7-2u^8+u^9)du$

$$=-\frac{u^8}{8}+\frac{2u^9}{9}-\frac{u^{10}}{10}+C=-\frac{(1-x)^8}{8}+\frac{2(1-x)^9}{9}-\frac{(1-x)^{10}}{10}+C.$$

b, Phương pháp lấy nguyên hàm từng phần.

Định lý 4

Nếu u và v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì
$\int u(x)v'(x)dx=u(x).v(x)-\int v(x)u'(x)dx$.

Công thức trên thường được viết gọn dưới dạng $\int udv=uv-\int vdu$.

Nếu nguyên hàm có dạng $\int p(x).q(x)dx$ thì ta có thể nghĩ đến phương pháp nguyên hàm từng phần. Bảng sau gợi ý cách đặt ẩn phụ để tính nguyên hàm $\int p(x).q(x)dx$:

Hàm dưới dấu tích phân	Cách đặt
$p(x)$ là đa thức, $q(x)$ là hàm lượng giác	$\begin{cases}u=p(x)\\ dv=q(x)dx\end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x)=f'(e^x).e^x$	$\begin{cases}u=p(x)\\ dv=q(x)dx\end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x)=f(\ln x)$	$\begin{cases}u=q(x)\\ dv=p(x)dx\end{cases}$
$p(x)$ là hàm lượng giác, $q(x)=f(e^x)$	$\begin{cases}u=q(x)\\ dv=p(x)dx\end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x)=f'(\ln x)\frac{1}{x}$	$\begin{cases}u=p(x)\\ dv=q(x)dx\end{cases}$
$p(x)$ là đa thức, $q(x)=f'(u(x)).(u(x))'$, $u(x)$ là các hàm lượng giác $(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x)$	$\begin{cases}u=p(x)\\ dv=q(x)dx\end{cases}$

Ví dụ 3: Thầy Điệp Châu cho bài toán " Tìm $\int \sin x\cos xdx$ " thì ba bạn Huyền, Lê và Hằng có ba cách giải khác nhau như sau:

Bạn Huyền giải bằng phương pháp đổi biến số như sau:	Bạn Lê giải bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần như sau:	Bạn Minh Hằng chưa học đến hai phương pháp trên nên làm như sau:
"Đặt $u=\sin x$, ta có: $du=\cos xdx$ Vậy $\int \sin x.\cos xdx=\int udu$ $=\frac{u^2}{2}+C=\frac{\sin^2 x}{2}+C$"	"Đặt $u=\cos x, v'=\sin x$. Ta có $u'=-\sin x, v=-\cos x$. Công thức nguyên hàm từng phần cho ta $\int \sin x\cos xdx=-\cos^2 x-\int \sin x\cos xdx$ Giả sử F là một nguyên hàm của $\sin x.\cos x$. Theo đẳng thức trên ta có $F(x)=-\cos^2 x-F(x)+C$. Suy ra $F(x)=-\frac{\cos^2 x}{2}+\frac{C}{2}$. Điều này chứng tỏ $-\frac{\cos^2 x}{2}$ là một nguyên hàm của $\sin x.\cos x$. Vậy $\int \sin x.\cos xdx=-\frac{\cos^2 x}{2}+C$."	" $\int \sin x.\cos xdx$ $=\int \frac{\sin 2x}{2}dx=-\frac{\cos 2x}{4}+C$."

Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Bạn Hằng giải đúng, bạn Lê và Huyền giải sai.

B. Bạn Lê sai, Huyền và Hằng đúng.

C. Ba bạn đều giải sai.

D. Ba bạn đều giải đúng.

STUDY TIP:
Bài toán củng cố về định lý 1 đã nêu ở trên, và củng cố các cách giải nguyên hàm cơ bản.

Nhận xét: Sau khi soát kĩ cả ba lời giải, ta thấy ba lời giải trên đều không sai ở bước nào cả, tuy nhiên, tại sao đến cuối cùng đáp án lại khác nhau? Ta xem giải thích ở lời giải sau:

Lời giải

Cả ba đáp số đều đúng, tức là cả ba hàm số $\frac{\sin^2 x}{2}; -\frac{\cos^2 x}{2}$ và $-\frac{\cos 2x}{4}$ đều là nguyên hàm của $\sin x.\cos x$ do chúng chỉ khác nhau về một hằng số. Thật vậy

$$\frac{\sin^2 x}{2}-\left(-\frac{\cos^2 x}{2}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\frac{\sin^2 x}{2}-\left(-\frac{\cos 2x}{4}\right)=\frac{2\sin^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)}{4}=\frac{1}{4}.\square$$

III. Khái niệm và các tính chất cơ bản của tích phân.

a. Định nghĩa

Cho hàm số f liên tục trên K và a, b là hai số bất kì thuộc K. Tích phân của f từ a đến b, kí hiệu là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, là một số xác định bởi công thức sau

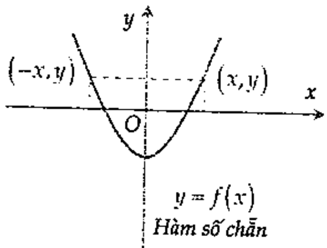
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ trong đó F là nguyên hàm của f trên K.

b. Các tính chất của tích phân.

Định lý 1

Giả sử các hàm số f, g liên tục trên K và a, b, c là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có

1. $\int_a^a f(x)dx=0$.
2. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$.
4. $\int_a^b \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
5. $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \left(k\in\mathbb{R}\right)$.



Hình 3.1

Định lý 2

Cho f là hàm số xác định trên K và a là một điểm cố định thuộc K. Xét hàm số $G(x)$ xác định trên K bởi công thức

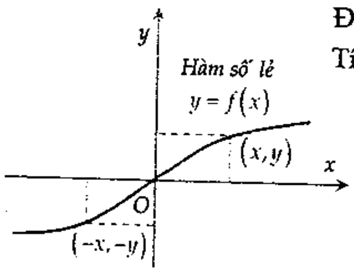
$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Khi đó G là một nguyên hàm của f.

Định lý 3

Tích phân của hàm lẻ và hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

1. Nếu f là một hàm số chẵn, khi đó $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
2. Nếu f là một hàm số lẻ, khi đó $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$.



Hình 3.2

Đọc thêm

Ta vừa đưa ra 3 tính chất của tích phân theo chương trình chuẩn. Dưới đây là các tính chất bổ sung:

1. $\int_a^b 0\mathrm{d}x = 0$

2. $\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a)$

3. Nếu $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

<u>*Hệ quả 3:*</u> Nếu hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và thỏa mãn

$f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

<u>***Chú ý:***</u> Nếu $f(x)$ liên tục và dương trên $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

4. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)\mathrm{d}x|, (a \le b)$.

5. Nếu $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]; m, M$ là các hằng số thì

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$ hay $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M$.

IV. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân.

a. Phương pháp đổi biến số.

Quy tắc đổi biến số

1. Đặt $u = u(x)$,
2. Biến đổi $f(x)\mathrm{d}x = g(u)\mathrm{d}u$.
3. Tìm một nguyên hàm $G(u)$ của $g(u)$.
4. Tính $\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(u)\mathrm{d}u = G(u(b)) - G(u(a))$.
5. Kết luận $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = G(u(b)) - G(u(a))$.

b. Phương pháp tích phân từng phần.

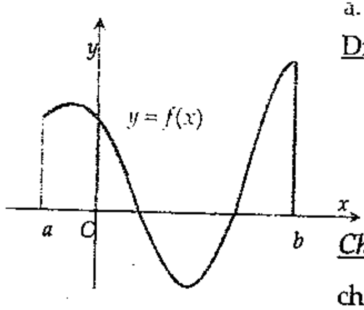
Cho hai hàm số *u, v* có đạo hàm liên tục trên *K* và *a, b* là hai số thuộc *K*. Khi đó

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\mathrm{d}u$$

$$= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b u'(x).v(x)\mathrm{d}x.$$

V. Ứng dụng hình học của tích phân.

a. Tính diện tích hình phẳng.



Hình 3.3

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.

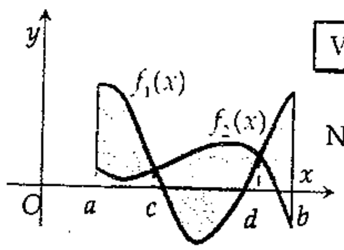
Diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức $\boxed{S = \int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x}$.

Chú ý: Trong trường hợp dấu của $f(x)$ thay đổi trên đoạn $[a;b]$ thì ta phải chia đoạn $[a;b]$ thành một số đoạn con để trên đó dấu của $f(x)$ không đổi, do đó ta có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối trên đoạn đó.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $\boxed{S = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x}$.

Tương tự như chú ý ở trên thì ở bài toán này ta cũng phải xét đoạn mà dấu của $f(x) - g(x)$ không đổi.



Hình 3.4

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng (hình được tô màu) ở biểu diễn ở hình 3.4.

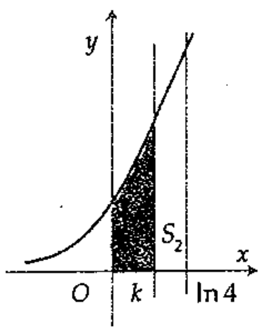
Lời giải

Nhận thấy trên $[a;c]$ và $[d;b]$ thì $f_1(x) \geq f_2(x)$; trên $[c;d]$ thì $f_1(x) \leq f_2(x)$

Do vậy

$$S=\int_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|=\int_a^c\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx+\int_c^d\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx+\int_d^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$$

(Trên đây là cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối)



Ví dụ 5: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ và $x=ln4$. Đường thẳng $x=k(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên.

Tìm k để $S_1=2S_2$.

A. $k=\frac{2}{3}ln4$ B. $k=ln2$ C. $k=ln\frac{8}{3}$ D. $k=ln3$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – Bộ GD&ĐT)

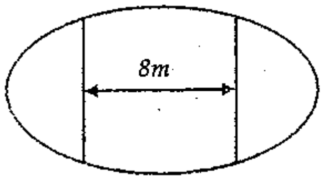
Lời giải

Đáp án D.

Nhìn vào hình vẽ ta có được các công thức sau:

$$\int_0^k e^x dx=2.\int_k^{\ln 4}e^x dx \Leftrightarrow e^x\Big|_0^k=2.e^x\Big|_k^{\ln 4}\Leftrightarrow e^k-e^0=2.e^{\ln 4}-2.e^k\Leftrightarrow 3e^k=9$$

$\Leftrightarrow e^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$.



Ví dụ 6: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/1 m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó ? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

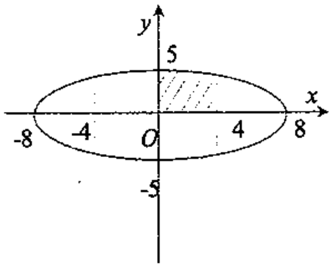
A. 7.862.000 đồng. B.7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – Bộ GD&ĐT)

Lời giải

Đáp án B.



Nhận thấy đây là bài toán áp dụng ứng dụng của tích phân vào tính diện tích hình phẳng. Ta có hình vẽ bên:

Ta thấy, diện tích hình phẳng cần tìm gấp 4 lần diện tích phần gạch chéo, do đó ta chỉ cần đi tìm diện tích phần gạch chéo.

Ta có phương trình đường elip đã cho là $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$. Xét trên $[0;4]$ nên $y>0$ thì $y=\frac{5}{8}\sqrt{8^2-x^2}$. Khi đó $S_{cheo}=\int_0^4\frac{5}{8}\sqrt{8^2-x^2}dx$, vậy diện tích trồng hoa của ông An trên mảnh đất là $S=4.\int_0^4\frac{5}{8}\sqrt{8^2-x^2}dx\approx 76,5289182$

Math ▲

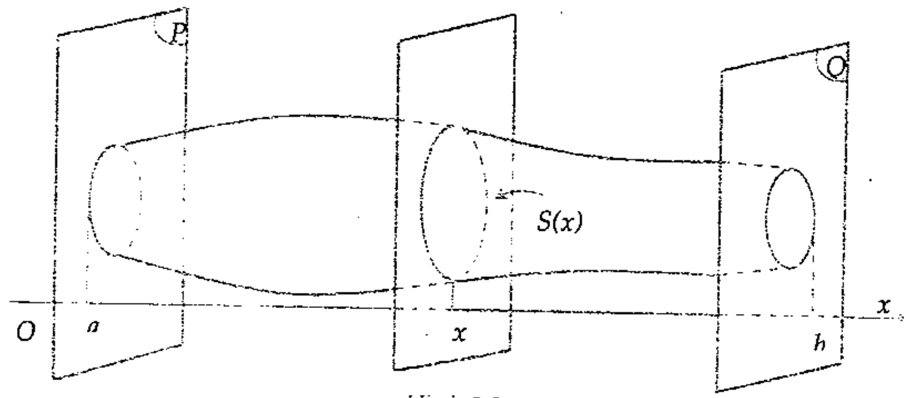
$$\int_0^4\frac{5}{2}\sqrt{8^2-X^2}dx$$

76.5289182

Khi đó số kinh phí phải trả của ông An là $76,5289182.100000\approx 7.653.000$ đồng.

b. Tính thể tích vật thể.

Cho H là một vật thể nằm giới hạn giữa hai mặt phẳng $x=a$ và $x=b$. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là một hàm liên tục. Khi đó thể tích V của H là $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.}$ (hình 3.5)



Hình 3.5

Ví dụ 7: Tính thể tích vật thể tạo được khi lấy giao vuông góc hai ống nước hình trụ có cùng bán kính đáy bằng a. (hình 3.6)

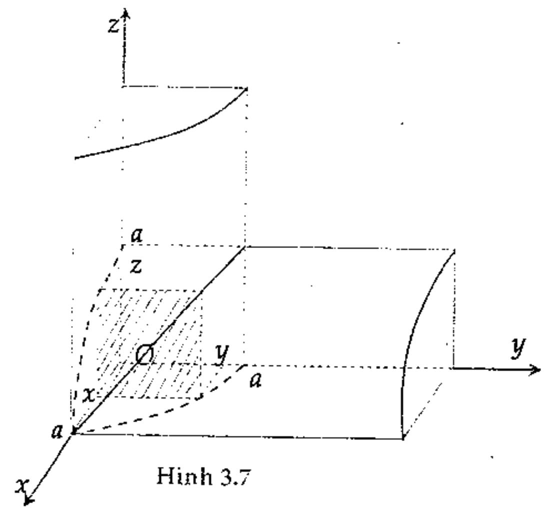
A. $V=\frac{16a^3}{3}$ B. $V=\frac{2a^3}{3}$ C. $V=\frac{4a^3}{3}$ D. $V=a^3$

(Trích sách bộ đề tinh túy ôn thi THPT QG môn Toán)


Hình 3.6

Lời giải

Ta sẽ gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào vật thể này, tức là ta sẽ đi tính thể tích vật thể V giới hạn bởi hai mặt trụ: $x^2+y^2=a^2$ và $x^2+z^2=a^2$ $(a>0)$.



Hình 3.7

Hình vẽ trên mô tả một phần tám thứ nhất của vật thể này, với mỗi $x\in[0;a]$, thiết diện của vật thể (vuông góc với trục Ox) tại x là một hình vuông có cạnh $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (chính là phần gạch chéo trong hình 3.7). Do đó diện tích thiết diện sẽ là:

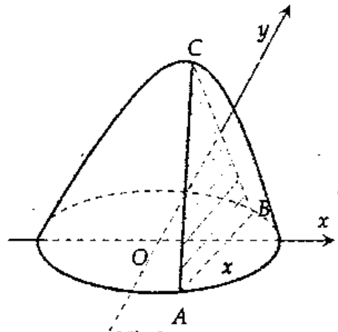
$$S(x)=\sqrt{a^2-x^2}.\sqrt{a^2-x^2}=a^2-x^2 \quad x\in[0;a].$$

Khi đó áp dụng công thức (*) thì thể tích vật thể cần tìm sẽ bằng:

$$V = 8\int_0^a S(x)dx = 8\int_0^a (a^2 - x^2)dx = 8\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{16a^3}{3}.$$

Ví dụ 8: Tính thể tích của vật thể H biết rằng đáy của H là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành luôn là tam giác đều.

Lời giải



Hình 3.8

Giả sử mặt phẳng vuông góc với trục hoành chứa thiết diện là tam giác đều ABC tại điểm có hoành độ là $x(-1 \le x \le 1)$ với AB chứa trong mặt phẳng xOy (hình 3.8).

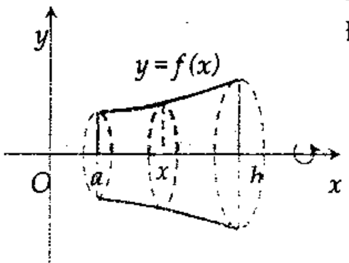
Ta có $AB = 2\sqrt{1-x^2}$. Do đó $S(x) = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1-x^2)$. Vậy

$$V = \int_{-1}^{1} S(x)dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-x^2)dx = \sqrt{3}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (đvtt)}.$$

c. Tính thể tích khối tròn xoay.

Một hình phẳng quay quanh một trục nào đó tạo nên một khối tròn xoay.

Định lý 4

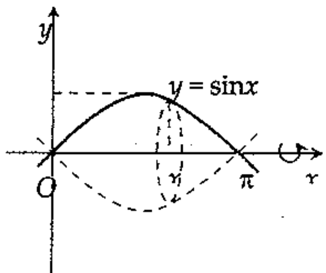


Hình 3.9

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a,b]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn xoay đó là $\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.}$

Ví dụ 9: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$ (hình 3.10) quanh trục Ox là

A. $\frac{\pi}{2}$ (đvtt) B. $\frac{\pi^2}{2}$ (đvtt) C. π (đvtt) D. π^2 (đvtt)



Hình 3.10

Lời giải

Đáp án B.

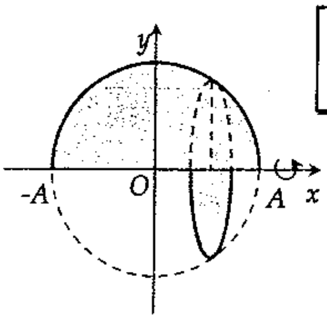
Áp dụng công thức ở định lý 4 ta có

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Tiếp theo dưới đây là một bài toán thường xuất hiện trong các đề thi thử, bài toán có thể đưa về dạng quen thuộc và tính toán rất nhanh

Ví dụ 10: Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{A^2 - x^2}$ và trục hoành quanh trục hoành.

Lời giải tổng quát



Hình 3.11

Ta thấy $y = \sqrt{A^2 - x^2} \Leftrightarrow y^2 = A^2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = A^2$

Do $\sqrt{A^2 - x^2} \ge 0$ với mọi x, do vậy đây là phương trình nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = A$ nằm phía trên trục Ox. Khi quay quanh trục Ox thì hình phẳng sẽ tạo nên một khối cầu tâm O, bán kính $R = A$ (hình 3.11). Do vậy ta có luôn $\boxed{V = \frac{4}{3}.\pi.A^3}$

Vậy với bài toán dạng này, ta không cần viết công thức tích phân mà kết luận luôn theo công thức tính thể tích khối cầu.

Đọc thêm

Định lý 5

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[a, b\right]$ $\left(a \geq 0\right)$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ quay quanh trục tung tạo nên một khối tròn xoay. Thể tích V của khối tròn xoay đó là $\boxed{V = 2\pi\int_a^b xf\left(x\right)\mathrm{d}x.}$

Bổ sung một số dạng về nguyên hàm – tích phân

1. Tích phân và nguyên hàm một số hàm lượng giác

a. Dạng $\int \sin^m x.\cos^n x dx$ trong đó m,n là các số tự nhiên.

Trường hợp 1: Trong hai số *m, n* có ít nhất một số lẻ.

Lũy thừa của $\cos x$ là số lẻ, $n=2k+1$ thì đổi biến $u=\sin x$	Lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ, $m=2k+1$ thì đổi biến $u=\cos x$
$\int \sin^m x.\cos^n x dx=\int \sin^m x\left(\cos^2 x\right)^k \cos x dx$ $=\int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k.(\sin x)' dx$ $\boxed{=\int u^m\left(1-u^2\right)^k du}$	$\int \sin^m x.\cos^n x dx=\int \cos^n x\left(\sin^2 x\right)^k \sin x dx$ $=-\int \cos^n x.\left(1-\cos^2 x\right)^k (\cos x)' dx$ $\boxed{=-\int\left(1-u^2\right)^k.u^n du}$

Ví dụ 1: Tìm $\int \sin^5 x.\cos^2 x dx$.

Lời giải

Vì lũy thừa của $\sin x$ là số lẻ nên ta đổi biến $u=\cos x \Rightarrow du=(\cos x)' dx$.

$$\int \sin^5 x.\cos^2 x dx=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^2.\cos^2 x.(\cos x)' dx$$

$$=-\int\left(1-u^2\right)^2.u^2 du=\int\left(2u^4-u^2-u^6\right)du=\frac{2u^5}{5}-\frac{u^3}{3}-\frac{u^7}{7}+C$$

$$=\frac{2\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^7 x}{7}+C.$$

Trường hợp 2: Cả hai số *m, n* đều là số chẵn: Ta sử dụng công thức hạ bậc để giảm một nửa số mũ của $\sin x;\cos x$, để làm bài toán trở nên đơn giản hơn.

b. Dạng $\int \sin mx.\cos nx dx$, $\int \sin mx.\sin nx dx$, $\int \cos mx.\cos nx dx$.

Ta sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng trong lượng giác.

c. Dạng $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx$ trong đó m,n là các số nguyên.

Lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn, $n=2k$ thì ta đổi biến $u=\tan x$	Lũy thừa của $\tan x$ là số nguyên dương lẻ, $m=2k+1$ thì ta đổi biến $u=\frac{1}{\cos x}$
$\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx=\int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k-2}}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $=\int \frac{\tan^m x}{\left(\cos^2 x\right)^{k-1}}.(\tan x)' dx$ $=\int \tan^m x.\left(1+\tan^2 x\right)^{k-1}.d(\tan x)$ $\boxed{=\int u^m.\left(1+u^2\right)^{k-1} du}$	Khi đó $u'=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, do đó $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}dx=\int \frac{\tan^{2k}}{\cos^{n-1}}.\frac{\tan x}{\cos x}dx$ $=\int \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k}{\cos^{n-1}}.\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ $\boxed{=\int\left(u^2-1\right)^k u^{n-1}.du}$

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm

a. $\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx$ b. $\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x}dx$.

Lời giải

a. Do lũy thừa của $\cos x$ là số nguyên dương chẵn nên đặt $u = \tan x$. Từ công thức tổng quát đã chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx = \int u^6.\left(1+u^2\right)^1 du = \frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\tan^9}{9} + \frac{\tan^7}{7} + C.$$

b. Do lũy thừa của $\tan x$ là một số lẻ nên ta đặt $u = \frac{1}{\cos x}$, do vậy, từ công thức tổng quát chứng minh ở trên ta có

$$\int \frac{\tan^5 x}{\cos^7 x}dx = \int \left(u^2-1\right)^2.u^6 du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{2u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{1}{11\cos^{11} x} - \frac{2}{9\cos^9 x} + \frac{1}{\cos^7 x} + C.$$

2. Đổi biến lượng giác

Khi nguyên hàm, tích phân của các hàm số mà biểu thức của nó có chứa các dạng $\sqrt{x^2+a^2}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{a^2-x^2}$, thì ta có cách biến đổi lượng giác như sau:

Biểu thức có chứa	Đổi biến
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x = \lvert a\rvert \tan t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ Hoặc $x = \lvert a\rvert \cos t, t \in (0;\pi)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t}, t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ Hoặc $x = \frac{\lvert a\rvert}{\cos t}, t \in [0;\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = \lvert a\rvert \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ Hoặc $x = \lvert a\rvert \cos t, t \in [0;\pi]$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \vee \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t, t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

3. Nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ

STUDY TIP: Kí hiệu $\deg(P(x))$ là bậc của đa thức $P(x)$.

Cho hàm số $y = f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó P và Q là các đa thức, và P không chia hết cho Q.

Hàm f được gọi là hàm phân thức hữu tỉ thực sự nếu $\deg(P) < \deg(Q)$.

Trong các bài toán tìm nguyên hàm và tích phân của hàm phân thức hữu tỉ, nếu $f(x)$ chưa phải là hàm phân thức hữu tỉ thực sự thì ta thực hiện chia đa thức tử số cho đa thức mẫu số để được:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}=S(x)+h(x),$$

Khi đó, $h(x)$ sẽ là hàm phân thức hữu tỉ thực sự.

Định lý: Một phân thức thực sự luôn phân tích được thành tổng các phân thức đơn giản hơn.

Đó là các biểu thức có dạng $\frac{1}{x-a};\frac{1}{(x-a)^k};\frac{ax+b}{x^2+px+q};\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ là các hàm số có thể tìm nguyên hàm một cách dễ dàng.Để tách được phân thức ta dùng phương pháp hệ số bất định.

a. Trường hợp phương trình $Q(x)=0$ không có nghiệm phức và các nghiệm đều là nghiệm đơn.

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_kx_k+b_k)$$

(Số nhân tử chính bằng bậc của đa thức $Q(x)$).

Trong trường hợp này, g có thể biểu diễn dưới dạng

$$g(x)=\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+...+\frac{A_k}{a_kx+b_k}$$

Sau khi biểu diễn được $g(x)$ về dạng này, bài toán trở thành bài toán cơ bản.

Ví dụ 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{4x-3}{x^2-3x+2}$ là

A. $F(x)=4\ln|x-2|+\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$

B. $F(x)=4\ln|x-2|-\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$

C. $F(x)=-4\ln|x-2|-\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

D. $F(x)=4\ln|x-2|-\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C$

Phân tích

Đáp án B.

Ta có $\frac{4x-3}{x^2-3x+2}=\frac{4x-3}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}$.

Khi đó $(A+B)x-2A-B=4x-3$, đồng nhất hệ số thì ta được

$$\begin{cases}A+B=4\\2A+B=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=5\end{cases}$$

Lời giải

Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 3:
Tìm
$$\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$$

Ta có $\int\frac{4x-3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)dx=-\ln|x-1|+5.\ln|x-2|+C$

$=4.\ln|x-2|+\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C=4.\ln|x-2|-\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C.$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng:
$$\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx=\frac{1}{2}.\ln|x|+\frac{1}{10}.\ln|2x-1|-\frac{1}{10}.\ln|x+2|+D$$

Ví dụ 4: Biết $I=\int_4^5\frac{x^3+2}{x^4-5x^2+4}dx=a\ln2+b\ln3+c\ln5+d\ln6+e\ln7$. Khi đó $6a+3b+6c+3d+2e$ có giá trị là

A. -8 B. $-\frac{19}{6}$ C. 16 D. $\frac{19}{6}$

Phân tích

Đáp án A.

Ta có $\frac{x^3+2}{x^4-5x^2+4}=\frac{x^3+2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x+2}$

$\Rightarrow x^3+2=A(x^2-4)(x+1)+B(x^2-1)(x+2)$

$+C(x^2-4)(x-1)+D(x^2-1)(x-2),\forall x\ (*)$

STUDY TIP: đây là dạng toán tích phân đã gặp trong đề minh họa lần 2.

Thay $x=1$ vào $(*)$ ta có $A=-\frac{1}{2}$.

Thay $x=2$ vào $(*)$ ta có $B=\frac{5}{6}$

Thay $x=-1$ vào $(*)$ ta có $C=\frac{1}{6}$

Thay $x=-2$ vào $(*)$ ta có $D=\frac{1}{2}$

Lời giải

$\Rightarrow I_{16}=\int_4^5\frac{x^3+2}{x^4-5x^2+4}dx$

$=-\frac{1}{2}\int_4^5\frac{dx}{(x-1)}+\frac{5}{6}\int_4^5\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{6}\int_4^5\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int_4^5\frac{dx}{x+2}$

$=\left(-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{6}\ln|x-2|+\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|\right)\Big|_4^5$

$=-\ln2+\frac{5}{6}\ln3+\frac{1}{6}\ln6+\frac{1}{2}\ln7-\left(-\frac{1}{2}\ln3+\frac{5}{6}\ln2+\frac{1}{6}\ln5+\frac{1}{2}\ln6\right)$

$=-\frac{11}{6}\ln2+\frac{4}{3}\ln3-\frac{1}{6}\ln5-\frac{1}{3}\ln6+\frac{1}{2}\ln7$

Khi đó $6a+3b+6c+3d+2e=-11+4-1-1+1=-8$.

b. Trường hợp $Q(x)=0$ không có nghiệm phức, nhưng có nghiệm thực là nghiệm bội.

Nếu phương trình $Q(x)=0$ có các nghiệm thực $a_1;a_2;...;a_n$ trong đó a_1 là nghiệm bội k thì ta phân tích $g(x)=\frac{R(x)}{Q(x)}$ về dạng

$$g(x)=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a_1)^k}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{x-a_3}+...+\frac{B_{n+1}}{x-a_n}$$

Trên đây là phần lý thuyết khá phức tạp, ta đến với bài tập ví dụ đơn giản sau:

Ví dụ 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$ là

A. $F(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+C$ B. $F(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$

C. $F(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4(1-x)^4}+C$ D. $F(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{4(1-x)^4}+C$

Phân tích

Nhận thấy $x=1$ là nghiệm bội ba của phương trình $(x-1)^3=0$, do đó ta biến đổi

$$\frac{2x}{(1-x)^3}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}=\frac{A(x^2-2x+1)+B(1-x)+C}{(1-x)^3}$$

$$=\frac{Ax^2+(-2A-B)x+A+B+C}{(1-x)^3}$$

Từ đây ta có $\begin{cases}A=0\\-2A-B=2\\A+B+C=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=-2\\C=2\end{cases}$

Lời giải

Ta có $\int\frac{2x}{(1-x)^3}dx=\int\left(\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C$

Kiểm tra khả năng vận dụng từ ví dụ 4:
Tìm
$\int\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

Đáp số bài tập kiểm tra khả năng vận dụng ví dụ 4:

$$\int\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

TỔNG QUÁT: **Việc tính nguyên hàm của hàm phân thức hữu tỉ thực sự được đưa về các dạng nguyên hàm sau:**

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A.\ln|x-a|+C, k\neq 1$

2. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=-\frac{A}{k-1}.\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$

5. Bảng một số nguyên hàm thường gặp

1) $\int k.\mathrm{d}x = k.x + C$

2) $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$

4) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

5) $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$

6) $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}.\ln|ax+b| + C, (a \neq 0)$

7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

8) $\cos x dx = \sin x + C$

9) $\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C, a \neq 0$

10) $\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C, (ax+b \neq k\pi)$

11) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x = \tan x + C,$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

12) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int (1+\cot^2 x)\mathrm{d}x = -\cot x + C$

13) $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C,$ $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

14) $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

15) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$

16) $\int e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$

17) $\int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C, (a \neq 0)$

18) $\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C(n \neq 1),$ $(a \neq 0)$

19) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0; a \neq 1)$

20) $\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

21) $\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

22) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \arctan\frac{x}{a} + C$

23) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

24) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

25) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

26) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$

27) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

28) $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$ $-a < x < a$

29) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}.\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Một số bài toán tích phân gốc thường gặp

Bài toán 1: **Cho f là hàm số chẵn và liên tục trên $[-b;b]$ với $b>0$. Chứng minh rằng** $\boxed{\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}f(x)dx}$ **(với $a>0$ và $a\neq 1$) (1)**

Lời giải tổng quát

Đặt $x=-t$ thì $dx=-dt$; $f(-t)=f(t)$ nên

$$\int_{-b}^{0}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{b}^{0}\frac{-f(-t)}{a^{-t}+1}dt=\int_{0}^{b}\frac{a^t f(t)}{a^t+1}dt=\int_{0}^{b}\frac{a^x f(x)}{a^x+1}dx.$$

Do đó

$$\int_{-b}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}\frac{a^x f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}\frac{f(x)}{a^x+1}dx=\int_{0}^{b}f(x)dx.$$

Ví dụ 1: Tính tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^2+1}{2^x+1}dx$

A. $\frac{23}{15}$ B. $\frac{15}{23}$ C. 1 D. -1

Đáp án A.

Lời giải

Ta thấy hàm số $f(x)=x^4+x^2+1$ là hàm số chẵn, áp dụng bài toán 1 ở trên ta có:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^2+1}{2^x+1}dx=\int_{0}^{1}\left(x^4+x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{23}{15}.$$

Bài toán 2*: **Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Chứng minh rằng:**

$$\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx \quad (2)$$

Đặc biệt $\int_{0}^{b}f(b-x)dx=\int_{0}^{b}f(x)dx$ **(3)**

Lời giải tổng quát

Đặt $t=a+b-x$ thì $dt=-dx$. Khi đó

$$\int_{a}^{b}f(a+b-x)dx=\int_{b}^{a}-f(t)dt=\int_{a}^{b}f(x)dx.$$

Khi $a=0$, ta nhận được công thức (3).

Ví dụ 2: Cho $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi}{a}.\ln b,(a\neq 0;b>0)$. Khi đó tổng $a+b$ bằng

A. 8 B. 10 C. 5 D. 4

Đáp án B.

Lời giải

Nhận xét: $f(x)=\ln(1+\tan x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, áp dụng (3) với bài toán này ta có:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\ln 2-\ln(1+\tan x)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx-I\Leftrightarrow 2I=\ln 2.x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{8}.\ln 2.$$

Vậy $a+b=10$.

Bài toán 3: **Cho hàm số f liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx \quad (4)$$

Lời giải tổng quát

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ thì $dt=-dx$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f(\cos t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx.$

Ví dụ 3: Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[2011]{\sin x^{2011}}}{\sqrt[2011]{\cos x^{2011}}+\sqrt[2011]{\sin x^{2011}}}dx$

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 1 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{8}$

Đáp án C

Lời giải

Sử dụng công thức (4) ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[2011]{\cos x^{2011}}}{\sqrt[2011]{\sin x^{2011}}+\sqrt[2011]{\cos x^{2011}}}dx$

Từ đây suy ra $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$

** Bài toán 4: (đọc thêm) **Cho f là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thỏa mãn $f(x)=f(a+b-x)$. Chứng minh rằng:** $\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ (8)

Đặc biệt $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$ (9)

Lời giải tổng quát

Thực hiện phép biến đổi $x=a+b-t$ thì

$$\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b(a+b-t)f(t)(-dt)=(a+b)\int_a^b f(x)dx-\int_a^b xf(x)dx$$

Từ đó suy ra (8). Chọn $a=0$, $b=\pi$ ta có (9).

1. Nguyên hàm – chọn lọc các bài tập về nguyên hàm trong các đề thi thử

Câu 1: Tìm nguyên hàm $I=\int(2x-1)e^{-x}dx$.

A. $I=-(2x+1)e^{-x}+C$ B. $I=-(2x-1)e^{-x}+C$

C. $I=-(2x+3)e^{-x}+C$ D. $I=-(2x-3)e^{-x}+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

Câu 2: Tìm nguyên hàm $I=\int x\ln(2x-1)dx$.

A. $I=\dfrac{4x^2-1}{8}\ln|2x-1|+\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

B. $I=\dfrac{4x^2+1}{8}\ln|2x-1|+\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

C. $I=\dfrac{4x^2-1}{8}\ln|2x-1|-\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

D. $I=\dfrac{4x^2+1}{8}\ln|2x-1|-\dfrac{x(x+1)}{4}+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

Câu 3: Tìm nguyên hàm $I=\int(x-1)\sin 2x dx$.

A. $I=\dfrac{(1-2x)\cos 2x+\sin 2x}{2}+C$

B. $I=\dfrac{(2-2x)\cos 2x+\sin 2x}{2}+C$

C. $I=\dfrac{(1-2x)\cos 2x+\sin 2x}{4}+C$

D. $I=\dfrac{(2-2x)\cos 2x+\sin 2x}{4}+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

Câu 4: Cho $f(x),g(x)$ là các hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $\int k.f(x)dx=k.\int f(x)dx$ với k là hằng số

B. $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

C. $\int[f(x).g(x)]dx=\int f(x)dx.\int g(x)dx$

D. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Kim Thành – Hải Dương)

Câu 5: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{-2017x}$ là:

A. $\dfrac{1}{2017}e^{-2017x}+C$ B. $e^{-2017x}+C$

C. $-2017.e^{-2017x}+C$ D. $\dfrac{-1}{2017}e^{-2017x}+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 6: Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2 3x}$ biết $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\sqrt{3}$.

A. $F(x)=\dfrac{4}{3}\tan 3x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B. $F(x)=4\tan 3x-3\sqrt{3}$

C. $F(x)=\dfrac{4}{3}\tan 3x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D. $F(x)=-\dfrac{4}{3}\tan 3x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sqrt{x}$.

A. $\int f(x)dx=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ B. $\int f(x)dx=\dfrac{2}{5}x\sqrt{x}+C$

C. $\int f(x)dx=\dfrac{1}{2}x^2\sqrt{x}+C$ D. $\int f(x)dx=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+C$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần 2)

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$.

A. $\int f(x)dx=\dfrac{(2x-3)^3}{3}+C$

B. $\int f(x)dx=(2x-3)^3+C$

C. $\int f(x)dx=\dfrac{(2x-3)^3}{6}+C$

D. $\int f(x)dx=\dfrac{(2x-3)^3}{2}+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 9: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=3\sin 3x-\cos 3x$.

A. $\int f(x)dx=\cos 3x-\sin 3x+C$

B. $\int f(x)dx=\cos 3x+\sin 3x+C$

C. $\int f(x)dx=-\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$

D. $\int f(x)dx=-\dfrac{1}{3}\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-e^{-x}$.

A. $\int f(x)dx=e^x+e^{-x}+C$

B. $\int f(x)dx=-e^x+e^{-x}+C$

C. $\int f(x)dx=e^x-e^{-x}+C$

D. $\int f(x)dx=-e^x-e^{-x}+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 11: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sqrt{3x+4}$, biết $F(0)=8$.

A. $F(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{3x+4}+\dfrac{38}{3}$

B. $F(x)=\dfrac{2}{3}(3x+4)\sqrt{3x+4}+\dfrac{16}{3}$

C. $F(x)=\frac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4}+\frac{56}{9}$

D. $F(x)=\frac{2}{3}(3x+4)\sqrt{3x+4}+\frac{8}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 12: Tìm nguyên hàm $I=\int\frac{1}{4-x^2}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$ B. $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

C. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$ D. $I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – Hà Nội)

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-3}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Chọn phương án sai.

A. $F(x)=\frac{\ln|2x-3|}{2}+10$ B. $F(x)=\frac{\ln|4x-6|}{4}+10$

C. $F(x)=\frac{\ln(2x-3)^2}{4}+5$ D. $F(x)=\frac{\ln\left|x-\frac{3}{2}\right|}{2}+1$

2. Tích phân – chọn lọc các bài tập về tích phân trong các đề thi thử.

Câu 1: Biết tích phân $I=\int_0^1(2x+1)e^x dx=a+be$ $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{Z})$. Khi đó tích $a.b$ có giá trị bằng:

A. 1 B. −1 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 2: Biết $\int_0^1 f(x)dx=2$ và $f(x)$ là hàm số lẻ. Khi đó $I=\int_{-1}^0 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. $I=1$ B. $I=0$ C. $I=-2$ D. $I=2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 3: Tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ có giá trị bằng:

A. $I=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ B. $I=\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $I=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $I=\frac{2}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 4: Cho tích phân $I=\int_0^3\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$ nếu đặt $t=\sqrt{x+1}$ thì $I=\int_1^2 f(t)dt$ trong đó:

A. $f(t)=t^2+t$ B. $f(t)=2t^2+2t$

C. $f(t)=t^2-t$ D. $f(t)=2t^2-2t$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 5: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

A. $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Cái Bè)

Câu 6: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{a}}\frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx=\frac{1}{4}\ln 3$. Tìm giá trị của a là:

A. 3 B. 2 C. 4 D. 6

(Trích đề thi thử THPT Cái Bè)

Câu 7: Tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$ bằng:

A. $\frac{1}{4}-\ln\sqrt{2}$ B. $-\frac{1}{4}-\ln\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{4}+\ln\sqrt{2}$ D. $-\frac{1}{4}+\ln\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 8: Tích phân $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$ bằng:

A. $\frac{e-1}{2}$ B. $\frac{e+1}{2e}$ C. $\frac{e+1}{2}$ D. $\frac{e-1}{2e}$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 9: Tính tích phân: $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

A. $\frac{1}{6}-\ln 2$ B. $2\ln 2-\frac{5}{3}$ C. $\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ D. $\ln 2-\frac{1}{6}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 10: Giá trị dương a sao cho:

$\int_0^a\frac{x^2+2x+2}{x+1}dx=\frac{a^2}{2}+a+\ln 3$ là:

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 11: Giả sử $\int_1^5\frac{dx}{2x-1}=\ln c$. Giá trị của c là:

A. 9 B. 3 C. 81 D. 8

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 12: Tích phân $I=\int_0^1\frac{x}{(x+1)^3}dx$ có giá trị là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{4}$

(Trích đề thi thử THPT Diệu Hiền)

Câu 13: Giả sử $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 5$ và $\int_{-1}^{3} f(r)dr = 6$. Tính $I = \int_{1}^{3} f(u)du$.

A. $I=4$ B. $I=3$ C. $I=2$ D. $I=1$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

Câu 14: Tính tích phân $I = \int_{0}^{\pi} |\cos x| dx$.

A. $I=0$ B. $I=1$ C. $I=2$ D. $I=3$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

Câu 15: Cho biết $\int_{0}^{f(x)} t^2 dt = x\cos(\pi x)$. Tính $f(4)$.

A. $f(4)=2\sqrt{3}$ B. $f(4)=-1$

C. $f(4)=\frac{1}{2}$ D. $f(4)=\sqrt[3]{12}$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

Câu 16: Đẳng thức $\int_{0}^{a} \cos(x+a^2)dx = \sin a$ xảy ra nếu:

A. $a=\pi$ B. $a=\sqrt{\pi}$ C. $a=\sqrt{3\pi}$ D. $a=\sqrt{2\pi}$

(Trích đề thi thử Sở GD – ĐT Phú Thọ)

Câu 17: Tính tích phân $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx$.

A. $I=3$ B. $I=2$ C. $I=1$ D. $I=-1$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 18: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

A. $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$; B. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}-2}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 19. Nếu $\int_{0}^{a} xe^x dx = 1$ thì giá trị của a bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. e

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

Câu 20: Nếu $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

Câu 21: Giá trị của $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{1+e^x} dx$ bằng:

A. -1 B. 1 C. e D. 0

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN)

Câu 22: Tích phân $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, x dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

Câu 23: Tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cot x.dx$ có giá trị bằng

A. $-\ln\sqrt{2}$ B. $\ln 2$ C. $\ln 4$ D. $\ln\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

Câu 24: Tích phân $\int_{0}^{1} e^{-x^2} x dx$ có giá trị bằng:

A. $\frac{e-1}{2}$ B. $\frac{2e+1}{2e}$ C. $-\frac{e-1}{2}$ D. $\frac{e-1}{2e}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Văn Đồng)

Câu 25: Tích phân $I = \int_{1}^{e} 2x(1-\ln x)dx$ bằng:

A. $\frac{e^2-1}{2}$ B. $\frac{e^2}{2}$ C. $\frac{e^2-3}{4}$ D. $\frac{e^2-3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

Câu 26: Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$?

A. $\frac{x^2+x-1}{x+1}$ B. $\frac{x^2-x-1}{x+1}$

C. $\frac{x^2+x+1}{x+1}$ D. $\frac{x^2}{x+1}$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

3. Ứng dụng của tích phân trong hình học– chọn lọc các bài tập trong các đề thi thử

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2$ và $y=3x$:

A. 1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 2: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(2-x)e^{\frac{x}{2}}$ và hai trục tọa độ là:

A. $2e^2-10$ B. $2e^2+10$

C. $\pi(2e^2-10)$ D. $\pi(2e^2+10)$

(Trích đề thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu)

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-2}$ và các trục tọa độ. Chọn kết quả đúng nhất?

A. $3\ln 6$ B. $3\ln\frac{3}{2}$ C. $3\ln\frac{3}{2}-2$ D. $3\ln\frac{3}{2}-1$

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2x$. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=3$

A. $S=\frac{10}{4}$ B. $S=\frac{12}{4}$ C. $S=\frac{11}{4}$ D. $S=\frac{9}{4}$

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 5. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $0x$ tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9-x^2}$.

A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 6. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=2^x$ và $y=3-x$, trục hoành và trục tung.

A. $S=\frac{1}{\ln 2}-\frac{5}{2}$ B. $S=2$

C. $S=2-\frac{1}{\ln 2}$ D. $S=4$

Câu 7: Công thức tính diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi hai đồ thị

$y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$, $(a<b)$

A. $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

B. $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

C. $S=\int_a^b (f(x)-g(x))^2dx$

D. $S=\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))dx$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=-2x^3+x^2+x+5$ và đồ thị (C') của hàm số $y=x^2-x+5$ bằng:

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-1)e^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=2$.

A. $\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}$ B. $\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}$

C. $\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}$ D. $\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}+\frac{3}{4}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – HN)

Câu 10: Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-2x$ và $y=-x^2$ quay quanh trục Ox.

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN – HN)

4. Tích phân nâng cao

Câu 1: Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx=a\ln\sqrt{12}+b\ln\sqrt{7}$, với a,b là các số nguyên. Tính tổng $a+b$ bằng:

A. −1. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 2: Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx=\frac{1}{64}$ và $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1}=\ln m$, với n, m là các số nguyên dương. Khi đó:

A. $n>m$. B. $1<n+m<5$.

C. $n<m$. D. $n=m$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 3: Biết $\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$

A. $S=6$ B. $S=2$ C. $S=-2$ D. $S=0$

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 4: Kết quả tích phân $I=\int_0^1 (2x+3)e^x dx$ được viết dưới dạng $I=ae+b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tìm khẳng định đúng.

A. $a^3+b^3=28$. B. $a+2b=1$.

C. $a-b=2$. D. $ab=3$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 5: Xét tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos x}}$. Nếu đặt $t=\sqrt{1+\cos x}$, ta được:

A. $I=\int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{4t^3-4t}{t}dt$ B. $I=-4\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt$

C. $I=\int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{-4t^3+4t}{t}dx$ D. $I=4\int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)dx$

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4};2\pi\right]$ thỏa mãn $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\frac{2}{3}$.

A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 7: Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;1]$. Có $g(-1)=3$ và tích phân $I=\int_{-1}^{1} g'(x)dx=-2$. Tính $g(1)$.

A. 1 B. −5 C. −6 D. $-\frac{3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 8: Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3$, tính $I = \int_2^4 f\left(\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. -6 B. $-\dfrac{3}{2}$ C. -1 D. 5

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 9: Biết rằng:

$$\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^a 2 + b\ln 2 + c\ln\frac{5}{3}.$$

Trong đó a,b,c là những số nguyên. Khi đó $S = a+b-c$ bằng:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 10: Có bao nhiêu số $a \in (0;20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x.\sin 2x\mathrm{d}x = \dfrac{2}{7}$.

A. 20 B. 19 C. 9 D. 10

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 11: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$. Tìm đẳng thức đúng:

A. $I = -(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$

B. $I = -(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$

C. $I = -\dfrac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$

D. $I = -\dfrac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 12: Tìm tất cả các số thực m dương thỏa mãn $\int_0^m \dfrac{x^2dx}{x+1} = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$:

A. $m=3$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m>3$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 13: Biết $I = \int_0^4 x\ln(2x+1)\mathrm{d}x = \dfrac{a}{b}\ln 3 - c$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a+b+c$.

A. $S=60$. B. $S=70$. C. $S=72$. D. $S=68$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa –Đồng Nai)

Câu 15: Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)} = a\ln\dfrac{b}{c}$, với a,b,c là các số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a+b+c$.

A. $S=7$ B. $S=8$ C. $S=10$ D. $S=9$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 16: Nếu $\int_0^a xe^x\mathrm{d}x = 1$ thì giá trị của a bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. e.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 17: Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{64}$ thì n bằng:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 18: Giá trị của $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{1+e^x}dx$ bằng:

A. -1. B. 1. C. e. D. 0.

(Trích đề thi thử tạp chí TH&TT lần 7)

Câu 19: Biết rằng: $\int e^{2x}.\cos 3x.\mathrm{d}x = e^{2x}(a\cos 3x + b\sin 3x) + c$, trong đó a,b,c là các hằng số, khi đó tổng $a+b$ có giá trị là:

A. $-\dfrac{1}{13}$ B. $-\dfrac{5}{13}$ C. $\dfrac{5}{13}$ D. $\dfrac{1}{13}$

(Trích đề THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 20: Biết tích phân $I = \int_0^1(2x+1)e^x dx = a+be$ $(a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{Z})$. Khi đó tích ab có giá trị bằng:

A. 1 B. -1 C. 2 D. 3

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

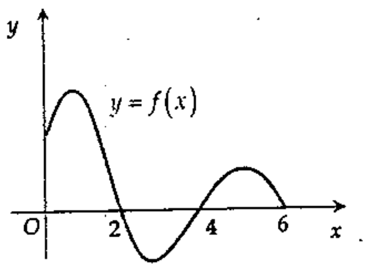
Câu 21: Cho tích phân $I = \int_0^3\dfrac{x}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ nếu đặt $t = \sqrt{x+1}$ thì $I = \int_1^2 f(t)dt$ trong đó:

A. $f(t) = t^2+t$ B. $f(t) = 2t^2+2t$

C. $f(t) = t^2-t$ D. $f(t) = 2t^2-2t$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 22: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;6]$ như hình vẽ.



Biểu thức nào dưới đây có giá trị lớn nhất:

A. $\int_0^1 f(x)dx$ B. $\int_0^2 f(x)dx$ C. $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ D. $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$

Câu 23: Tính tích phân: $I = \int_1^5\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a\ln 3 + b\ln 5$. Giá trị $a^2+ab+3b^2$ là:

A. 4 B. 1 C. 0 D. 5

Hướng dẫn giải chi tiết

1. Nguyên hàm- chọn lọc trong các đề thi thử

Câu 1: Đáp án A.

Đặt $u=2x-1 \Rightarrow du=2dx$;

$e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=-e^{-x}$

Lúc này ta có

$\int(2x-1)e^{-x}dx=-(2x-1).e^{-x}+\int 2e^{-x}dx$

$=-(2x-1).e^{-x}-2e^{-x}+C=-(2x+1)e^{-x}+C$

Câu 2:Đáp án C.

Đặt

$u=\ln(2x-1)\Rightarrow du=\frac{2}{2x-1}dx;\ vdv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

Khi đó $\int x\ln(2x-1)dx=\frac{x^2}{2}.\ln|2x-1|-\int\frac{x^2}{2}.\frac{2}{2x-1}dx$

$=\frac{x^2}{2}.\ln|2x-1|-\int\frac{x^2}{2x-1}dx$

$=\frac{x^2}{2}.\ln|2x-1|-\int\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x-1)}\right)dx$

$=\frac{x^2}{2}.\ln|2x-1|-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{8}.\ln|(2x-1)|\right)+C$

$=\frac{4x^2-1}{8}.\ln|2x-1|-\frac{x(x+1)}{4}+C$.

Câu 3: Đáp án D.

$I=\int(x-1)\sin 2xdx$.

Đặt $x-1=u\Rightarrow dx=du$;

$\sin 2xdx=vdv\Rightarrow v=-\frac{1}{2}.\cos 2x$

Khi đó $F(x)=\frac{-(x-1)}{2}.\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx$

$=\frac{(1-x)\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}.\sin 2x+C$

Câu 4: Đáp án C

Câu 5: Đáp án D

Ta có $\int e^{-2017x}dx=\frac{1}{-2017}e^{-2017x}+C$

Câu 6: Đáp án A

Ta có $F(x)=\int\frac{4}{\cos^2 3x}dx=\frac{4}{3}.\tan 3x+C$

Mà $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{4}{3}.\tan\frac{\pi}{3}+C=\sqrt{3}\Leftrightarrow C=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 7: Đáp án C

$\int x\sqrt{x}dx=\int\sqrt{x}^3dx=\frac{2\sqrt{x}}{4}.\sqrt{x}^4+C=\frac{1}{2}.x^2\sqrt{x}+C$

Câu 8: Đáp án C

Ta có $\int f(x)dx=\frac{1}{3.2}(2x-3)^3+C$

Câu 9: Đáp án C

$\int(3\sin 3x-\cos 3x)dx=\frac{3}{3}.(-\cos 3x)-\frac{1}{3}.\sin 3x+C$

Câu 10: Đáp án A

Câu 11: Đáp án D

$F(x)=\int\sqrt{3x+4}dx=\int(3x+4)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}.(3x+4)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}.(3x+4)\sqrt{3x+4}+C$

Mà $F(0)=8\Rightarrow C=\frac{8}{3}$, ta chọn D.

Câu 12:Đáp án D.

Ta có

$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\int\frac{1}{(a+x)(a-x)}dx=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx$

$=\frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$

Áp dụng vào bài ta chọn D.

Câu 13:Đáp án B.

Ta có $F(x)=\int\frac{1}{2x-3}dx=\int\frac{1}{2}.\frac{1}{(2x-3)}.d(2x-3)$

$=\frac{\ln|2x-3|}{2}+C$

Từ đây ta thấy A đúng.

Với B ta thấy

$\frac{\ln|4x-6|}{4}+10=\frac{\ln 2+\ln|2x-3|}{4}+10\neq F(x)$, C sai.

2. Tích phân – chọn lọc các bài tập về tích phân trong đề thi thử

Câu 1: Đáp án A.

$I=\int_0^1(2x+1)e^xdx=\int_0^1 2xe^xdx+\int_0^1 e^xdx$

$=\int_0^1 2xe^xdx+e-1.$

Đặt $\begin{cases}e^xdx=dx\\x=u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=e^x\\dx=du\end{cases}$

$I=2\int_0^1 udv+e-1=2uv\Big|_0^1-2\int_0^1 vdu+e-1$

$=2x.e^x\Big|_0^1-2\int_0^1 e^xdx+e-1=e+1.$

$\Rightarrow a=b=1\Rightarrow ab=1.$

Câu 2: Đáp án C

$f(x)$ là hàm số lẻ

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{1} f(x)dx = -2$

Câu 3: Đáp án A

$I = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx.$

Ta thử bằng máy tính để tìm ra kết quả.

Câu 4: Đáp án D

$I = \int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx$

$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2tdt = dx$

$I = \int_0^3 \frac{x\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{1-(x+1)}dx = \int_0^3\left(\sqrt{x+1}-1\right)dx$

$I = 2\int_1^2 (t-1)tdt = \int_1^2 \left(t^2-t\right)2dt \Rightarrow f(t) = 2t^2-2t.$

Câu 5: Đáp án B

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\sin x\right)dx = -\cot x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{-2+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{2}.$

Câu 6: Đáp án C

$I = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}dx = \frac{\pm 1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x d2x}{1+2\sin 2x}$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{d(\sin 2x)}{1+2\sin 2x}$

$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{d(2\sin 2x+1)}{1+2\sin 2x} = \frac{1}{4}\ln|2\sin 2x+1|\Big|_0^{\frac{\pi}{a}}$

$= \frac{1}{4}\ln\left|2\sin\frac{2\pi}{a}+1\right| = \frac{1}{4}\ln 3.$

Suy ra: $\left|2\sin\frac{2\pi}{a}+1\right| = 3.$

Trong các đáp án $\Rightarrow a = 4.$

Câu 7: Đáp án D

Cách 1: thử

Cách 2: Đặt $\sin x = t.$

Câu 8: Đáp án D

Cách 1: Thử bằng máy tính

Cách 2: $I = \int_0^1 x.e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1(-2x)e^{-x^2}dx$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2e} = \frac{e-1}{2e}$

Câu 9: Đáp án C

Cách 1: Thử trực tiếp bằng máy tính.

Cách 2: Đặt $\sqrt{x+1} = t$, biến đổi

Câu 10: Đáp án D

$I = \int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1}dx = \int_0^a \frac{(x+1)^2+1}{x+1}dx$

$= \int_0^a x+1+\frac{1}{x+1}\,d(x+1)$

$= \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_0^a + \ln|x+1|\Big|_0^a = \frac{(a+1)^2}{2}-\frac{1}{2}+\ln|a+1|$

$= \frac{a^2}{2}+a+\ln|a+1|$

$\Rightarrow a+1 = 3 \Rightarrow a = 2.$

Câu 11: Đáp án B.

Câu 12: Đáp án B.

Thử máy tính.

Gợi ý: $I = \int_0^1\left[\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}\right]d(x+1)$

Câu 13: Đáp án D

$I = \int_1^3 f(u)du = \int_{-1}^3 f(u)du - \int_{-1}^1 f(u)du = 6-5 = 1$

Câu 14: Đáp án C

$I = \int_0^{\pi}|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= 1+1 = 2$

Câu 15: Đáp án D.

Ta có: $\int_0^{f(x)} t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{f(x)} = \frac{f^3(x)}{3} \Rightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x.\cos(\pi x)$

Thay $x = 4 \Rightarrow \frac{f^3(4)}{3} = 4.\cos(4\pi)$

$\Rightarrow f^3(4) = 12 \Rightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}.$

Câu 16: Đáp án D.

$\int_0^a \cos\left(x+a^2\right)dx = \sin a$

$\Leftrightarrow \sin\left(a+a^2\right)-\sin a^2 = \sin a$

Trong 4 phương án, chỉ có phương án D thỏa mãn.

Câu 17: Đáp án C

Cách 1: Thử bằng máy tính

Cách 2: Tích phân thành phần: $\begin{cases}\sin x dx = dv\\ x = u\end{cases}$

Câu 18: giống câu 5

Câu 19: Đáp án B

Theo như biến đổi câu 1, ta có:

$$I=\int_0^a x.e^x\mathrm{d}x=x.e^x\Big|_0^a-\int_0^a e^x\mathrm{d}x$$

$$=a.e^a-e^a+1=1$$

$$\Rightarrow a=1$$

Câu 20: Đáp án A.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n x.\cos x\mathrm{d}x$$

Đặt $\sin x=t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$

$$x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\mathrm{d}t=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\frac{1}{n+1}=\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow n=3.$$

Câu 21: Đáp án D.

Cách 1: Thử bằng máy tính

Lấy giá trị n càng lớn càng tốt. Giả sử $n=100$.

Nhập biểu thức $\int_{100}^{101}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$

Máy tính cho kết quả $\approx 2.35\times10^{-44}\approx 0$.

Cách 2: Giải chi tiết

$$I=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}1\mathrm{d}x-\int_n^{n+1}\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x=1-\int_n^{n+1}\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow I=1-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}\left(e^x+1\right)}{1+e^x}=1-\ln\left|1+e^x\right|\Big|_n^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow I=1+\ln\left|1+e^n\right|-\ln\left|1+e^{n+1}\right|$$

Ta luôn có $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^n\right)}{n}=1$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x=\lim\left[1+\ln\left(1+e^n\right)-\ln\left(1+e^{n+1}\right)\right]$$

$$=1+\lim\frac{\ln\left(1+e^n\right)}{n}.n-\frac{\ln\left(1+e^{n+1}\right)}{n+1}.(n+1).$$

$$=1+n-(n+1)=0$$

Câu 22: Đáp án C

Cách 1: Thử bằng máy tính

Cách 2: Đặt $\sqrt{4-x^2}=t$

Câu 23: Đáp án D

Cách 1: Thử bằng máy tính

Cách 2: Đặt $\sin x=t\Rightarrow I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$

Câu 24: Giống câu 8

Câu 25: Đáp án D.

$$I=\int_1^e 2x(1-\ln x)\mathrm{d}x=-\int_1^e 2x.\ln x\mathrm{d}x+\int_1^e 2x\mathrm{d}x$$

$$=e^2-1-2\int_1^e x.\ln x\mathrm{d}x$$

Đặt $\begin{cases}\ln x=u\\ x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ \frac{x^2}{2}=v\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x=\int_1^e u\mathrm{d}v=uv\Big|_1^e-\int_1^e v\mathrm{d}u$$

$$=\ln x.\frac{x^2}{2}\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow I=e^2-1-\frac{e^2+1}{2}=\frac{e^2-3}{2}$$

Câu 26: Đáp án A.

Dễ nhận thấy $\frac{x^2}{x+1}+1=\frac{x^2+x+1}{x+1}$

$$\frac{x^2}{x+1}-1=\frac{x^2-x-1}{x+1}$$

Ta thấy 3 phương án B, C, D có cùng đạo hàm.

Vậy phương án A sai.

3. Ứng dụng của tích phân trong hình học

Câu 1: Đáp án C

Giao điểm tại $x^2+2=3x \Rightarrow x=1 \vee 2$

$$S=\int_1^2\left|x^2+2-3x\right|dx$$

$$=\left|\int_1^2\left|x^2+2-3x\right|dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\Big|_1^2\right|=\frac{1}{6}$$

Câu 2: Đáp án C

$y=(2-x)e^{\frac{x}{2}}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2

Thể tích $V=\pi\int_0^2(2-x)^2e^x dx$

Sử dụng phương pháp tích phân thành phần

$\Rightarrow V=\pi\left(2e^2-10\right)$

Câu 3: Đáp án D

$$S=\int_{-1}^0\left|\frac{x+1}{x-2}\right|dx=\left|\int_{-1}^0\left(1+\frac{3}{2-x}\right)dx\right|$$

$$=\left|x\Big|_{-1}^0+3\ln|x-2|\Big|_{-1}^0\right|=\left|1+3\ln2-3\ln3\right|$$

$$=\left|1+3\ln\frac{2}{3}\right|=-3.\ln\frac{2}{3}-1$$

$$=3\ln\frac{3}{2}-1$$

Câu 4: Đáp án C

$$S=\int_0^1\left|x^3-3x^2+2x\right|dx$$

$$=\int_0^1\left(x^3-3x^2+2x\right)dx-\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx+\int_2^3\left(x^3-3x^2+2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{11}{4}$$

Câu 5: Đáp án A.

$$V=\int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}dx=18$$

Câu 6: Đáp án A.

Giao điểm $2^x=3-x \Rightarrow$ Nhẩm được nghiệm 1

$$S=\int_0^1\left|2^x+x-3\right|dx=\left|\frac{2^x}{\ln2}+\frac{x^2}{2}-3x\right|_0^1$$

$$=\frac{2}{\ln2}+\frac{1}{2}-3-\frac{1}{\ln2}=\frac{1}{\ln2}-\frac{5}{2}$$

Câu 7: Đáp án B.

Câu 8: Đáp án B.

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm

$-2x^3+x^2+x+5=x^2-x+5$

$$\Leftrightarrow -2x^3+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$$

Lúc này ta có $S=\int_{-1}^1\left|-2x^3+2x\right|dx=1$

Ta bấm máy và cũng được kết quả như trên:

$$\int_{-1}^1\left|-2X^3+2X\right|dx \qquad 1$$

Câu 9: Đáp án A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $(x-1).e^{2x}=0 \Leftrightarrow x=1$. Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-1).e^{2x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=2$ được tính bởi công thức:

$$S=-\int_0^1(x-1).e^{2x}dx+\int_1^2(x-1).e^{2x}dx$$

$$=\int_1^0(x-1).e^{2x}dx+\int_1^2(x-1).e^{2x}dx$$

Đặt $I_1=\int_1^0(x-1).e^{2x}dx; I_2=\int_1^2(x-1)e^{2x}dx$

Đặt $x-1=u \Rightarrow dx=du$; $vdv=e^{2x}dx \Rightarrow v=\frac{1}{2}.e^{2x}$

Khi đó $I_0=\frac{1}{2}.e^{2x}.(x-1)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b e^{2x}.dx$

$$=\frac{1}{2}.e^{2x}.(x-1)\Big|_a^b-\frac{1}{4}.e^{2x}\Big|_a^b.$$

Vậy từ đây ta có $I_1=-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}.e^0-\frac{1}{4}.e^2\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}$.

$$I_2=\frac{1}{2}.e^4-\left(\frac{1}{4}.e^4-\frac{1}{4}.e^2\right)=\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}.$$

Suy ra $I=I_1+I_2=\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{4}$.

Câu 10: Đáp án C.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2-2x=-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$$

Khi đó thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x; y=-x^2$ quay quanh trục Ox được tính bởi công thức

$$V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2-2x\right)^2-\left(-x^2\right)^2\right|dx$$

Ta thấy trên $[0;1]$ thì $\left(-x^2\right)^2 \le \left(x^2-2x\right)^2$, do vậy ta có công thức

$$V=\pi\int_0^1\left[-x^4+\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\right]dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(-4x^3+4x^2\right)dx=\pi.\left(-x^4+\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{3} \text{ (đvtt).}$$

4. Tích phân nâng cao

Câu 1: Đáp án D.

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx = \frac{1}{2}.\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7}dx$$

$$=\frac{1}{2}.\int_0^1 \frac{d\left(x^2+4x+7\right)}{x^2+4x+7} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+7\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 12 - \frac{1}{2}\ln 7 = \ln\sqrt{12} - \ln\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0$$

Câu 2: Đáp án D.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{64} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\frac{1}{n+1} = \frac{1}{64} \Rightarrow n=3$$

$$\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^5$$

$$=\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{2}\ln 1 = \ln 3$$

$$\Rightarrow m=n=3$$

Câu 3: Đáp án D.

$$I=\int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\ln|x| - \ln|x+1|\Big|_3^4 = \ln 4 - \ln 5 - (\ln 3 - \ln 4)$$

$$=-\ln 3 + 2\ln 4 - \ln 5$$

$$\Rightarrow S = a+b+c = 0$$

Câu 4: Đáp án B.

$$I=\int_0^1 (2x+3).e^x dx = 2\int_0^1 x.e^x dx + 3\int_0^1 e^x dx$$

Tương tự các bài trên

$$\Rightarrow \int_0^1 x.e^x = x.e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$\Rightarrow I = 2x.e^x\Big|_0^1 + \int_0^1 e^x dx = 2x.e^x + e^x\Big|_0^1 = 3e-1$$

$a=3; b=-1$

Suy ra, đáp án B: $a+2b=1$

Câu 5: Đáp án C.

$t=\sqrt{1+\cos x} \Rightarrow t^2 = 1+\cos x$

$\Rightarrow 2tdt = -\sin x dx$

Đổi cận:

$x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2}$

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x.\sin x dx}{\sqrt{1+\cos x}}dx$$

$$=-\int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4\left(t^2-1\right)t}{t}dt = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3+4t}{t}dt$$

Câu 6: Đáp án A.

$$I=\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$$

Đặt $\sqrt{1+3\cos x} = t$

$\Rightarrow t^2 = 1+3\cos x$

$\Rightarrow 2tdt = -3\sin x dx$

$\Leftrightarrow \frac{-2tdt}{3} = \sin x dx$

$$\Rightarrow I = -\frac{2}{3}\int_2^{\sqrt{1+3\cos a}} \frac{tdt}{t} = -\frac{2}{3}\int_2^{\sqrt{1+3\cos a}} dt$$

$$=-\frac{2}{3}\sqrt{1+\cos 3a} + \frac{2}{3}.2$$

Mà $I=\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{1+3\cos a} = 1 \Rightarrow \cos a = 0$

$\Rightarrow a = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

Suy ra, đáp án A.

Câu 7: Đáp án A.

$$I=\int_{-1}^1 g'(x)dx = -2 \Leftrightarrow g(1) - g(-1) = -2$$

$$\Rightarrow g(1) = -2 + g(-1) = -2+3 = 1.$$

Câu 8: Đáp án A.

Đặt $\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2dt$

$$\Rightarrow I = \int_1^2 2f(t)dt = 2\int_1^2 f(t)dt = 2.(-3) = -6$$

Câu 9: Đáp án C.

$$\int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx = \int_0^{\ln 2} xdx + \int_0^{\ln 2} \frac{1+2e^x-2e^x}{2e^x-1}dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}(x+1)dx - \int_0^{\ln 2}\frac{2e^x}{2e^x+1}dx$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}\frac{d\left(2e^x+1\right)}{2e^x+1}$$

$$=\frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 - \ln\left|2e^x+1\right|\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 - \ln 5 + \ln 3$$

$$=\frac{\ln^2 2}{2} + \ln 2 - \ln\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow a=2; b=1; c=-1$$

$$\Rightarrow a+b-c=4$$

Câu 10: Đáp án D.

$$I=\int_0^a \sin^5 x.\sin 2x dx = 2\int_0^a \sin^6 x.\cos x dx$$

$$=2\int_0^a \sin^6 x.d(\sin x)$$

$$=2.\frac{\sin^7 x}{7}\Big|_0^a=\frac{2\sin^7 a}{7}$$

$$I=\frac{2}{7}\Rightarrow \sin a=1\Rightarrow a=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$a>0\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+k2\pi>0\Rightarrow k2\pi>-\frac{\pi}{2}\Rightarrow k>-\frac{1}{4}$$

$$a<20\pi\Rightarrow \frac{1}{2}+2k<20\Rightarrow k<\frac{39}{4}$$

$\Rightarrow k=0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\Rightarrow$ Có 10 giá trị của a.

Câu 11: Đáp án C.

Đặt $\begin{cases}\sin 2x dx = dv\\ x-1=u\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos 2x=v\\ dx=du\end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} u dv = uv\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} v du$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx$$

Suy ra, đáp án C.

Câu 12: Đáp án C.

Thử các đáp án, suy ra $m=1$

Câu 13: Đáp án B.

$$I=\int_0^4 x\ln(2x+1)dx$$

Đặt $\begin{cases}\ln(2x+1)=u\\ xdx=dv\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2}{2x+1}dx=du\\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}=v\end{cases}$

$$I=\int_0^4 u dv = uv\Big|_0^4-\int_0^4 v du$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right)\ln(2x+1)\Big|_0^4-\int_0^4\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}\right).\frac{2}{2x+1}dx$$

$$=\frac{63}{8}\ln 9-\int_0^4\frac{4x^2-1}{4(2x+1)}dx$$

$$=\frac{63}{8}\ln 9-\frac{1}{4}\int_0^4(2x-1)dx$$

$$=\frac{63}{8}\ln 9-\frac{1}{4}(x^2-x)\Big|_0^4=\frac{63}{4}\ln 3-3$$

$\Rightarrow a=63; b=4; c=3$

$\Rightarrow S=63+4+3=70$

Câu 15: Đáp án A.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

Ta có:

$$1=\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-x\right]}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).\sin x}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sin x.\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}.\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right)$$

$$I=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x}dx-2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx$$

$$=2.\ln|\sin x|-2\ln\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2.\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\ln\frac{1}{2}-2\ln 1+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=4\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\ln 2$$

$$=2\ln\frac{3}{4}+2\ln 2=2\ln\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow S=2+3+2=7$

Câu 16: Đáp án B

Câu 17: Đáp án A

Câu 18: Đáp án D.

Câu 19: Đáp án C.

Đặt $\begin{cases}e^{2x}dx=dv\\ \cos 3x=u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\frac{e^{2x}}{2}\\ -3\sin 3x dx=du\end{cases}$

$$I=\int u dv=uv-\int v du$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}.\cos 3x-\int\frac{-e^{2x}}{2}.3\sin 3x dx$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}.\cos 3x+\frac{3}{2}\int e^{2x}.\sin 3x dx$$

Đặt $\sin 3x=u_1\Rightarrow 3\cos 3x dx=du_1$

$$\int e^{2x}.\sin 3x dx=\int u_1 dv=u_1 v-\int v du_1$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}.\sin 3x dx-\int\frac{e^{2x}}{2}.3.\cos 3x dx$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}.\sin 3x dx-\frac{3}{2}.I$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^{2x}.\cos 3x}{2} + \frac{3}{2}.\left(\frac{e^{2x}.\sin 3x}{2} - \frac{3}{2}I\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4}I = e^{2x}\left(\frac{\cos 3x}{2} + \frac{3}{4}.\sin 3x\right)$$

$$\Rightarrow I = e^{2x}\left(\frac{2\cos 3x}{13} + \frac{3}{13}.\sin 3x\right)$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{5}{13}.$$

Câu 20: Đáp án A

Câu 21: Đáp án D.

Câu 22: Đáp án B.

Câu 23: Đáp án D

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}.$$

Đặt $\sqrt{3x+1} = t \Rightarrow 3x = t^2 \Rightarrow 3dx = 2tdt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$x = 5 \Rightarrow t = 4$

$$I = \frac{2}{3}\int_2^4 \frac{tdt}{t\left(\frac{t^2-1}{3}\right)} = 2\int_2^4 \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1|\Big|_2^4 = 2\ln 3 - \ln 5$$

$$\Rightarrow a = 2;\ b = -1 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 = 5.$$

VI. Ứng dụng của nguyên hàm, tích phân trong thực tế.

1. Dạng bài toán về chuyển động.

Ví dụ 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc 10 *m/s* thì tài xế đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10(m/s)$, trong đó *t* là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2 *m* B. 2 *m* C. 10 *m* D. 20 *m*

(Trích đề minh họa lần I- BGD&ĐT)

Lời giải

Đáp án C.

Nguyên hàm của hàm vận tốc chính là quãng đường $s(t)$ mà ô tô đi được sau quãng đường *t* giây kể từ lúc tài xế đạp phanh xe.

Vào thời điểm người lái xe bắt đầu đạp phanh ứng với $t=0$.

Thời điểm ô tô dừng lại ứng với t_1, khi đó $v(t_1)=0 \Leftrightarrow t_1=2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại quãng đường ô tô đi được là:

$$s=\int_0^2(-5t+10)dt=\left(\frac{-5}{2}t^2+10t\right)\Bigg|_0^2=10\,m.$$

STUDY TIP:
Hàm số thể hiện quãng đường vật đi được tính theo thời gian là biểu thức nguyên hàm của hàm số vận tốc.

Ví dụ 2: Một chiếc ô tô đang đi trên đường với vận tốc $v(t)=2\sqrt{t}\,(0\le t\le 30)$ (*m/s*). Giả sử tại thời điểm $t=0$ thì $s=0$. Phương trình thể hiện quãng đường theo thời gian ô tô đi được là

A. $s=\frac{4}{3}\sqrt{t^3}\,(m)$ B. $s=2\sqrt{t}\,(m)$ C. $s=\frac{4}{3}t^3\,(m)$ D. $s=2t\,(m)$

Lời giải

Đáp án A.

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có $s(t)=\int 2\sqrt{t}dt=2\int t^{\frac{1}{2}}dt=2.\frac{1}{\frac{1}{2}+1}.t^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}.\sqrt{t^3}\ (m)$

Ví dụ 3: Một vật chuyển động với vận tốc đầu bằng 0, vận tốc biến đổi theo quy luật, và có gia tốc $a=0{,}3(\mathrm{m/s^2})$. Xác định quãng đường vật đó đi được trong 40 phút đầu tiên.

A. 12000m B. 240m C. 864000m D. 3200m

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Phân tích

STUDY TIP:
Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường

Nhận thấy bài toán này khác với hai ví dụ trên ở chỗ bài toán cho biểu thức gia tốc mà không cho biểu thức vận tốc, ở đây ta có thêm một kiến thức như sau: Biểu thức gia tốc là đạo hàm của biểu thức vận tốc, đến đây, kết hợp với 2 ví dụ đầu ta kết luận: " Biểu thức gia tốc là đạo hàm cấp một của biểu thức vận tốc, và là đạo hàm cấp hai của biểu thức quãng đường". Từ đây ta có lời giải:

Lời giải

Ta có $v(t)=\int 0,3dt=0,3t$ (do ban đầu vận tốc của vật bằng 0).

Vậy quãng đường vật đi được trong 40 phút đầu tiên là:

$$\int_0^{40.60}0,3tdt=\frac{0,3}{2}.t^2\Bigg|_0^{2400}=864000(m)$$

[redacted]

Câu 1: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian được tính bởi công thức $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính theo đơn vị giây, quãng đường vật đi được tính theo đơn vị m. Biết tại thời điểm $t = 2s$ thì vật đi được quãng đường là $10m$. Hỏi tại thời điểm $t = 30s$ thì vật đi được quãng đường là bao nhiêu?

A. $1410m$ B. $1140m$

C. $300m$ D. $240m$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 2: Một tàu lửa đang chạy với vận tốc 200 m/s thì người lái tàu đạp phanh; từ thời điểm đó, tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 200 - 20t$ (m/s). Trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi thời gian khi tàu đi được quãng đường 750 m (kể từ lúc bắt đầu đạp phanh) ít hơn bao nhiêu giây so với lúc tàu dừng hẳn?

A. 5 s B. 8 s C. 15 s D. 10 s

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Văn Thụ)

Câu 3: Giả sử một vật từ trạng thái nghỉ khi $t = 0(s)$ chuyển động thẳng với vận tốc $v(t) = t(5-t)(m/s)$. Tìm quãng đường vật đi được cho đến khi nó dừng lại.

A. $\frac{125}{12}(m)$ B. $\frac{125}{9}(m)$

C. $\frac{125}{3}(m)$ D. $\frac{125}{6}(m)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh lần 2)

Câu 4: Một người đi xe đạp dự định trong buổi sáng đi hết quãng đường 60km. Khi đi được 12 quãng đường, anh ta thấy vận tốc của mình chỉ bằng 23 vận tốc dự định, anh ta bèn đạp nhanh hơn vận tốc dự định 3km/h, đến nơi anh ta vẫn chậm mất 45 phút. Hỏi vận tốc dự định của người đi xe đạp là bao nhiêu?

A. $5km/h$ B. $12km/h$

C. $7km/h$ D. $18km/h$

(Trích đề thi thử THPT TVB)

Câu 5: Một ôtô đang chạy với vận tốc 10 m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v = -5t + 15$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $20m$ B. $10\ m$ C. $22{,}5\ m$ D. $5\ m$

Câu 6: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = 2t^3 - t + 1$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi t = 2s là:

A. $63m/s^2$ B. $64m/s^2$

C. $23m/s^2$ D. $24m/s^2$

(Trích đề thi thử THPT Ngọc Tộ)

Câu 7: Cho một vật chuyển động có phương trình là: $s = 2t^3 - \frac{2}{t} + 3$ (t được tính bằng giây, S tính bằng mét). Vận tốc của chuyển động thẳng $t = 2s$ là:

A. 3 B. $\frac{49}{2}$ C. 12 D. $\frac{47}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Ngọc Tộ)

Câu 8: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = 2t^4 - t + 1$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi t = 1s là:

A. 24m/s B. 23m/s C. 7m/s D. 8m/s

(Trích đề thi thử THPT Ngọc Tộ)

Câu 9: Một chiếc xe ô tô sẽ chạy trên đường với vận tốc tăng dần đều với vận tốc v = 10t (m/s) t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu chạy. Hỏi quảng đường xe phải đi là bao nhiêu từ lúc xe bắt đầu chạy đến khi đạt vận tốc 20 (m/s)?

A. 10m B. 20m C. 30m D. 40m

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 10: Một ôtô đang chạy với vận tốc $19m/s$ thì người lái hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -38t + 19(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $4{,}75m$. B. $4{,}5m$. C. $4{,}25m$. D. $5m$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 11: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc 15 m/s thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a\ m/s^2$. Biết ô tô chuyển động thêm được 20 m thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây:

A. $(3;4)$ B. $(4;5)$ C. $(5;6)$ D. $(6;7)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 12: Bổ dọc một quả dưa hấu ta được tiết diện là hình elip có trục lớn là 28cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ $1000cm^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20.000đ.

Hỏi từ quả dưa như trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố?(Biết rằng bề dày của vỏ dưa không đáng kể, kết quả đã được quy tròn)

A. 183.000đ B. 180.000đ

C. 185.000đ D. 190.000đ

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Văn Trỗi lần 3)

Câu 13: Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $29,4\,m/s$. Gia tốc trọng trường là $9,8\,m/s^2$. Tính quãng đường S viên đạn đi được từ lúc bắn lên cho đến khi chạm đất.

A. $S=88,2\,m.$ B. $S=88,5\,m.$

C. $S=88\,m.$ D. $S=89\,m.$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 14: Một chất điểm đang cuyển động với vận tốc $v_0=15m/s$ thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\left(m/s^2\right)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $68,25m$. B. $70,25m$.

C. $69,75m$. D. $67,25m$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 15: Một ca nô đang chạy trên Hồ Tây với vận tốc $20\,m/s$ thì hết xăng. Từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20\,m/s$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc dừng hẳn, ca nô đi được bao nhiêu mét?

A. $10\,m$. B. $20\,m$. C. $30\,m$. D. $40\,m$.

(Trích đề thi thử tạp chí TH &TT lần 6)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án B

$S=\int v(t)dt=\int(3t+2)dt=\frac{3t^2}{2}+2t+c.$

$S(2)=10\Rightarrow\frac{3.2^2}{2}+2.2+c=10\Rightarrow c=0.$

$\Rightarrow S=\frac{3t^2}{2}+2t.$

Suy ra: Khi $t=30s,$ vật đi được quãng đường

$s=\frac{3.30^2}{2}+2.30=1410m.$

Câu 2: Đáp án A

Khi tàu dừng hẳn: $v=0\Rightarrow t=10(s).$

$S=\int v(t)dt=\int(200-2t)dt\Rightarrow s=200t-t^2.$

$S=750\Rightarrow 200t-10t^2=750\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=15>10\Rightarrow loai\\ t=5\end{array}\right.$

$\Delta t=10-5=5(s).$

Câu 3: Đáp án D

$S=\int t(5-t)dt\Rightarrow S=\frac{5t^2}{2}-\frac{t^3}{3}.$

Khi vật dừng lại $\Rightarrow v=t(5-t)=0\Rightarrow t=5.$

Khi đó $S=\frac{5.5^2}{2}-\frac{5^3}{3}=\frac{5^3}{6}=\frac{125}{6}(m).$

Câu 4: Đáp án (gõ lỗi đề 12 -> ½; 23 -> 2/3

Vận tốc dự định là $v(km/h).$

Thời gian đi nửa quãng đường đầu $t_1=\frac{30}{\frac{2}{3}v}=\frac{45}{v}(h).$

Thời gian đi nửa quãng đường sau $t_2=\frac{30}{v+3}.$

Ta có phương trình

$t_1=t_2=\frac{60}{v}-0,75\Leftrightarrow\frac{45}{v}+\frac{30}{v+3}=\frac{60}{v}+0,75$

Giải phương trình suy ra: $v=12km/h.$

Câu 5: Đáp án C

Quãng đường vật đi từ lúc đạp phanh cho đến lúc dừng hẳn

$-5t+15=0\Leftrightarrow t=3$

$\Rightarrow\int_3^0(-5t+15)dt=\left(\frac{-5t^2}{2}+15\right)\Big|_3^0$

$=-\left(-\frac{5}{2}.3^2+15\right)+15=22,5(m)$

Câu 6: Đáp án B

$v=s'=6t^2-1$

$a=v'=12t$

Khi $t=2\Rightarrow a=24(m/s^2).$

Câu 7: Đáp án D

Ta có $v=s'=t^2-\frac{2}{t^2}.$

Với $t=2\Rightarrow v=6.2^2-\frac{2}{2^2}=\frac{47}{2}$

Câu 8: Đáp án D

Ta có $v=s'=8t^3-1.$

Khi $t=1\Rightarrow v=8-1=7(m/s^2).$

Câu 9: Đáp án B

$s=\int 10tdt\Rightarrow s=5t^2.$

Khi $v=20m/s\Rightarrow t=2\Rightarrow s=5.2^2=20m.$

Câu 10: Đáp án C

Khi ô tô dừng lại hẳn $\Rightarrow v=0\Leftrightarrow 19-38t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$

$s=\int(19-38t)dt\Rightarrow s=19t-19t^2$

$t=\frac{1}{2}\Rightarrow s=19.\frac{1}{2}-19.\frac{1}{4}=\frac{19}{4}=4,25(m).$

Câu 11: Đáp án C

Từ giả thiết ta có $v=(-a)dt\Rightarrow v=15-at.$

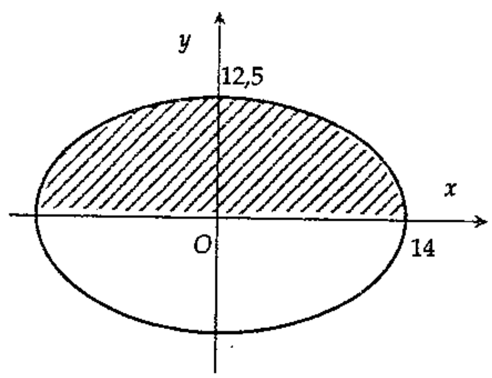
Mà $s=\int vdt=\int(15-at)dt\Rightarrow s=15t-\frac{at^2}{2}.$

Ô tô chuyển động được 20m thì dừng tại thời điểm t_1

Suy ra $\begin{cases}v=0\\ s=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15-at_1=0\\ 15t_1-\frac{at_1^2}{2}=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}at_1=15\\ 15t_1-\frac{15t_1}{2}=20\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}at_1=15\\ t_1=\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{45}{8}\Rightarrow a\in(5;6)$

Câu 12: Đáp án A



Giả sử tiết diện nằm trên hệ $Oxy,$ tâm O trùng với tâm tiết diện

Suy ra elip: $\frac{x^2}{14^2}+\frac{y^2}{12,5^2}=1$

Thể tích quả dưa hấu chính là thể tích vật thể thu được khi quay phần gạch chéo quanh trục Ox.

$$\Rightarrow V=\left|\pi\int_{-14}^{14}12,5^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)dx\right|=\frac{8750\pi}{3}$$

Số tiền thu được là:

$$20000.\frac{8750\pi}{3.1000}\approx 183259\approx 183000 \text{ đ.}$$

Câu 13: Đáp án A.

Ta có công thức liên hệ giữa vận tốc, gia tốc và quãng đường đi được là $v^2-v_0^2=2as$

$$s=\frac{v^2-v_0^2}{2a}=\frac{0-29,4^2}{-2.9.8}=44,1$$

Quãng đường đi được từ lúc bắn đến khi chạm đất là $s=44,1.2=88,2(m)$.

Câu 14: Đáp án C

Ta có

$$v=\int a(t)dt=\int\left(t^2+4t\right)dt\Rightarrow v=15+\frac{t^3}{3}+2t^2$$

Mà $s=\int v dt\Rightarrow s=15t+\frac{t^4}{12}+\frac{2t^3}{3}$.

Sau 3 giây, chất điểm đi được quãng đường:

$$s(3)=15.3+\frac{3^4}{12}+\frac{2.3^3}{3}=69,75(m).$$

Câu 15: Đáp án D

Khi dừng hẳng $\Rightarrow v=0(m/s)\Rightarrow t=4(s)$.

Phương trình quãng đường đi được của ca – nô từ khi hết xăng

$$s=(20-5t)dt\Rightarrow s=20t-\frac{5t^2}{2}$$

Tại $t=4\Rightarrow s=40$

Suy ra: ca – nô đi được 40 mét

Chủ đề 4: Số phức

A. Lý thuyết

I.Số phức

0. Số i.

Việc xây dựng tập hợp số phức được đặt ra từ vấn đề mở rộng tập hợp số thực sao cho mọi phương trình đa thức đều có nghiệm. Để giải quyết vấn đề này, ta bổ sung vào tập số thực $\mathbb{R}$ một số mới, kí hiệu là i và coi nó là một nghiệm của phương trình $x^2+1=0$, như vậy $\boxed{i^2=-1.}$

1. Định nghĩa.

> Mỗi biểu thức dạng $a+bi$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1$ được gọi là một số phức.
> Đối với số phức $z=a+bi$, ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z.
>
> Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

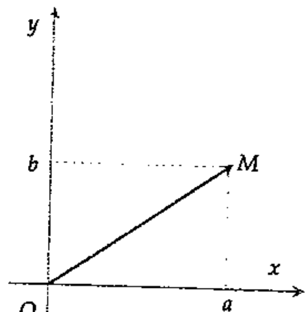
2. Số phức bằng nhau.

Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$\boxed{a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \text{ và } b=d.}$$

Nhận xét:

> 1. Từ sự bằng nhau của số phức, ta suy ra mỗi số phức hoàn toàn được xác định bởi một cặp số thực. Đây là cơ sở cho phần **3. Biểu diễn hình học của số phức.**
>
> 2. Mỗi số thực a được đồng nhất với số phức $a+0i$, nên mỗi số thực cũng là một số phức. Do đó, tập số thực $\mathbb{R}$ là tập con của tập số phức $\mathbb{C}$.
>
> 3. Số phức $0+bi$ được gọi là số thuần ảo và được viết đơn giản là bi.
>
> 4. Số i được gọi là đơn vị ảo.



Hình 4.1

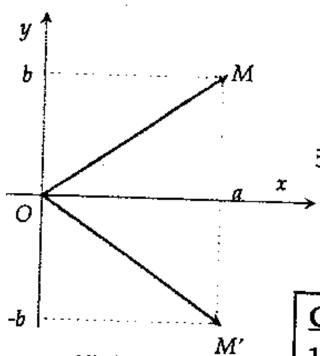
3. Biểu diễn hình học của số phức.

Điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(a;b)$.

4. Mô đun số phức.

Giả sử số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ. Khi đó

> Độ dài của vecto $\overrightarrow{OM}$ được gọi là mô đun của số phức z và kí hiệu là $|z|$.
>
> Vậy $|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2}$.



Hình 4.2

5. Số phức liên hợp.

> Cho số phức $z=a+bi$. Ta gọi $a-bi$ là số phức liên hợp của z và kí hiệu là $\bar{z}=a-bi.$

Chú ý:

1. Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.
2. Tích của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng bình phương mô đun của số phức đó.

II. Các phép toán với số phức.

1. Phép cộng và phép trừ.

Quy tắc: Để cộng (trừ) hai số phức, ta cộng (trừ) hai phần thực và hai phần ảo của chúng.

1, $\left(a+bi\right)+\left(c+di\right)=\left(a+c\right)+\left(b+d\right)i;$

2, $\left(a+bi\right)-\left(c+di\right)=\left(a-c\right)+\left(b-d\right)i.$

2. Phép nhân và phép chia.

a. Phép nhân.

> Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức rồi thay $i^2=-1$ trong kết quả nhận được.

$$\left(a+bi\right)\left(c+di\right)=\left(ac-bd\right)+\left(ad+bc\right)i$$

b. Phép chia.

STUDY TIP:
$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

Quy tắc thực hiện phép chia hai số phức:

" Thực hiện phép chia $\frac{c+di}{a+bi}$ là nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a+bi$."

Ta có $\frac{c+di}{a+bi}=\frac{\left(c+di\right)\left(a-bi\right)}{a^2-b^2i^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i.$

3. Phương trình bậc hai với hệ số thực.

Các căn bậc hai của số thực $a<0$ là $\pm i\sqrt{|a|}$.

Xét phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Xét biệt số $\Delta=b^2-4ac$, ta có

$\Delta=0$	$\Delta>0$	$\Delta<0$
Phương trình có một nghiệm thực $x=-\frac{b}{2a}$.	Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt được xác định bởi công thức $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.	1. Nếu xét trên tập số thực thì phương trình vô nghiệm. 2. Nếu xét trên tập hợp số phức, phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$.

Nhận xét: Trong các đề thi thử và đề minh họa của Bộ GD&ĐT thì các câu số phức là câu dễ, là câu lấy điểm, do vậy khi làm bài ta cần thận trọng trong tính toán.

1:arg 2:Conjg
3:▸r∠θ 4:▸a+bi

numbers.

III. Giới thiệu một số tính năng tính toán số phức bằng máy tính Casio.

Trong máy tính Casio có chế độ tính toán với số phức như sau:

1. Ấn $\boxed{\text{MODE}}$ → $\boxed{\text{2:CMPLX}}$ để vào chế độ tính toán với số phức.
Khi đó các nút quang trọng sau:
2. Nút $\boxed{\text{ENG}}$ phía trên có chữ i nhỏ, khi chuyển sang chế độ tính toán phức thì sẽ là i.
3. Đặc biệt, khi ấn $\boxed{\text{SHIFT}}$ 2 máy hiện như hình bên.
Ở đây:
1:arg là argument của số phức.
2: Conjp là hiển thị số phức liên hợp của số phức. (Ở đây Conjp là viết tắt của conjugate).
3: Dạng lượng giác của số phức
4: Từ dạng lượng giác của số phức chuyển thành dạng chính tắc.

Trên đây là một số lưu ý về tính toán với số phức trên máy tính cầm tay.
Đặc biệt, khi tính mô đun số phức ta sử dụng nút $\boxed{\text{SHIFT}}$ + $\boxed{\text{hyp}}$ (Absolute value) hay chính là nút giá trị tuyệt đối.

[illegible]

1. Phần thực, phần ảo.

Câu 1: Cho số phức: $z=(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là:

A. -2^{11} B. $-2^{11}+2$ C. $-2^{11}-2$ D. 2^{11}

(Trích đề thi thử lần 2 – THPT chuyên KHTN)

Câu 2: Cho số phức $z=-1+3i$. Phần thực và phần ảo của số phức $w=2i-3\bar{z}$ lần lượt là:

A. -3 và -7 B. 3 và -11 C. 3 và -7 D. 3 và 11

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 3: Phần thực của số phức $z=5+2i-(1+i)^3$ là:

A. Đáp số khác B. 7

C. 3 D. 5

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 4: Cho hai số phức $z_1=1-i, z_2=3+2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $z_1.z_2$ tương ứng bằng:

A. 5 và 1 B. 5 và $-i$ C. 5 và -1 D. 4 và 1

(Trích đề thi thử số 5 – tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $iz=2+i$. Khi đó phần thực và phần ảo của z là:

A. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng $-2i$

B. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng $2i$

C. Phần thực bằng -1 và phần ảo bằng -2

D. Phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -2

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Câu 6: Cho số phức $z=a+bi$. Số phức z^2 có phần ảo là:

A. $2ab$ B. $-2ab$ C. a^2+b^2 D. ab

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 7: Cho $(x+2i)^2=3x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Giá trị của x và y bằng:

A. $x=1$ và $y=2$ hoặc $x=2$ và $y=4$

B. $x=2$ và $y=5$ hoặc $x=3$ và $y=-4$

C. $x=-1$ và $y=-4$ hoặc $x=4$ và $y=16$

D. $x=6$ và $y=1$ hoặc $x=0$ và $y=4$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

2. Biểu diễn hình học của số phức.

Câu 8: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn phần thực của $\frac{z-1}{z-i}$ bằng 0 là đường tròn tâm I, bán kính R (trừ một điểm):

A. $I\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right), R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $I\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right), R=\frac{1}{2}$

C. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), R=\frac{1}{2}$ D. $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(Trích đề thi thử lần 2 – THPT chuyên KHTN)

Câu 9: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\bar{z}+2i|$ là đường thẳng:

A. $4x-2y+1=0$ B. $4x-6y-1=0$

C. $4x+2y-1=0$ D. $4x-2y-1=0$

(Trích đề thi thử lần 2 – THPT chuyên KHTN)

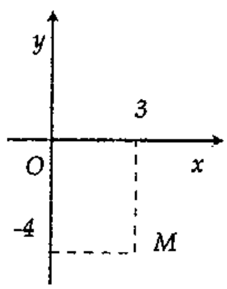
Câu 10: Cho các số phức z thỏa mãn: $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(2-i)z+1$ trên các mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đó.

A. $-x+7y+9=0$ B. $x+7y-9=0$

C. $x+7y+9=0$ D. $x-7y+9=0$

(Trích đề thi thử lần 2 – THPT chuyên KHTN)

Câu 11: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức Z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức Z.



A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.

B. Phần thực là 3 và phần ảo là $4i$

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4

D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – năm 2017)

Câu 12: Phương trình của tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa $|z+i|=|\bar{z}+1|$ là?

A. $x-y=0$ B. $x+y=0$

C. $2x+y-1=0$ D. $x-2y=0$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 13: Cho số phức $z=5-4i$. Số phức đối của z có điểm biểu diễn là:

A. $(-5;4)$ B. Đáp số khác

C. $(5;4)$ D. $(5;-4)$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 14: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi-(2+i)|=2$ là:

A. $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

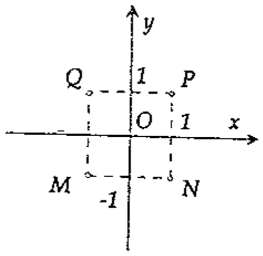
B. $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

D. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z+2i=-4$. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của z trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên?



A. Điểm M B. Điểm N

C. Điểm P D. Điểm Q

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 17: Cho hai số phức $z_1=1-i, z_2=3+2i$. Trong mặt phẳng Oxy, gọi các điểm M,N lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2, gọi G là trọng tâm của tam giác OMN, với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $5-i$ B. $4+i$ C. $\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i$ D. $2+\frac{1}{2}i$

(Trích đề thi thử số 5 – tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 18: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=2$. Chọn phát biểu đúng:

A. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường thẳng.

B. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol.

C. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng 2.

D.Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng 4.

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Câu 19: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|=|z-2i+3|$. Biết tập các điểm biểu thị cho z là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là:

A. $x-y-3=0$ B. $x-y+3=0$

C. $x+y+3=0$ D. $x-y=0$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 20: Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tập hợp các điểm $M(z)$ thoả mãn điều kiện $|z-1+i|=2$ là một đường tròn:

A. Có tâm $(-1;-1)$ và bán kính là 2

B. Có tâm $(1;-1)$ và bán kính là $\sqrt{2}$

C. Có tâm $(-1;1)$ và bán kính là 2

D. Có tâm $(1;-1)$ và bán kính là 2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 21: Điểm biểu diễn của số phức $z=\frac{1}{2-3i}$ là:

A. $(2;-3)$ B. $\left(\frac{2}{13};\frac{3}{13}\right)$ C. $(3;-2)$ D. $(4;-1)$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

3. Các phép toán với số phức, mô đun số phức, số phức liên hợp.

Câu 22: Cho số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=-2-2i$. Tìm môđun của số phức z_1-z_2.

A. $|z_1-z_2|=2\sqrt{2}$ B. $|z_1-z_2|=1$

C. $|z_1-z_2|=\sqrt{17}$ D. $|z_1-z_2|=5$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 23: Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\bar{z}=3-i$ B. $\bar{z}=-3+i$

C. $\bar{z}=3+i$ D. $\bar{z}=-3-i$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – năm 2017)

Câu 24: Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$.

A. $|z|=\sqrt{34}$ B. $|z|=34$

C. $|z|=\frac{5\sqrt{34}}{3}$ D. $|z|=\frac{\sqrt{34}}{3}$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – năm 2017)

Câu 25: Cho số phức $z=a+bi(a,b\in ℝ)$ thỏa mãn $1+i)z+2z=3+2i$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$ B. $P=1$

C. $P=-1$ D. $P=-\frac{1}{2}$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – năm 2017)

Câu 26: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)z=\frac{\sqrt{10}}{z}-2+i$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\frac{3}{2}<|z|<2$ B. $|z|>2$

C. $|z|<\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}<|z|<\frac{3}{2}$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – năm 2017)

Câu 27: Cho số phức z thỏa: $\frac{z-1}{z-i}=i$. Môđun của số phức: $w=(2-i)z-1$ là?

A. $|w|=5$ B. $|w|=\sqrt{5}$

C. $|w|=3$ D. $|w|=1$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 28: Giá trị của $z=1+i+i^2+...+i^{2017}$ là?

A. $-1+i$ B. 0

C. $1-i$ D. $1+i$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 29: Cho số phức $z=1+2i$, giá trị của số phức $w=z+i\overline{z}$ là?

A. $2-i$ B. $3+3i$

C. $1+i$ D. $3-3i$

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 30: Cho hai số phức $z_1=1-i, z_2=3+2i$. Tìm môđun của số phức $\overline{z_1}-z_2$.

A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử số 5 – tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 31: Cho hai số phức $z_1=1-i, z_2=3+2i$. Tìm số phức z thỏa mãn $\overline{z}.z_1+z_2=0$.

A. $z=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ B. $z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$

C. $z=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$ D. $z=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$

(Trích đề thi thử số 5 – tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 32: Cho số phức $z=3+2i$. Tìm số phức $w=2i-(3-i)\overline{z}+2iz-1$?

A. $w=-12-17i$ B. $w=12+17i$

C. $w=12-17i$ D. $w=-12+17i$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 33: Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là:

A. 10 và 4 B. 5 và 4 C. 4 và 3 D. 5 và 3

(Trích đề thi thử số 5 – tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 34: Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z+2i\overline{z}=5+3i$. Môđun của z là:

A. $|z|=\sqrt{3}$ B. $|z|=\sqrt{5}$

C. $|z|=5$ D. $|z|=3$

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Câu 35: Cho hai số phức $z_1=2+i, z_2=3-4i$. Môđun của số phức (z_1-z_2) là:

A. $\sqrt{24}$ B. $\sqrt{26}$

C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{34}$

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Câu 36: Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức:

A. $\overline{z}=-a+bi$ B. $\overline{z}=b-ai$

C. $\overline{z}=-a-bi$ D. $\overline{z}=a-bi$

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Câu 37: Cho hai số phức $z_1=1+3i; z_2=2-i$. Tìm số phức $w=2z_1-3z_2$.

A. $w=-4-9i$ B. $w=-3+2i$

C. $w=-3-2i$ D. $w=-4+9i$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 38: Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn $2z+\overline{z}=3+i$. Giá trị của biểu thức $3a+b$ là:

A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 39: Cho hai số phức $z_1=1+i; z_2=2+3i$. Tìm số phức $w=(z_1)^2.z_2$

A. $w=6+4i$ B. $w=6-4i$

C. $w=-6-4i$ D. $w=-6+4i$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $2z-i\overline{z}=2+5i$. Số phức z cần tìm là:

A. $z=3+4i$ B. $z=3-4i$

C. $z=4-3i$ D. $z=4+3i$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 42: Cho số phức $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Khi đó số phức $(\overline{z})^2$ bằng:

A. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ B. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

C. $1+\sqrt{3}i$ D. $\sqrt{3}-i$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh – Hậu Giang)

Câu 43: Cho số phức $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Số phức $w=1+z+z^2$, $|w|$ bằng:

A. 2 B. 3 C. 1 D. 0

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 44: Số phức $z=\frac{3-4i}{4-i}$ bằng:

A. $\frac{9}{25}-\frac{23}{25}i$ B. $\frac{16}{15}-\frac{11}{15}i$
C. $\frac{9}{5}-\frac{4}{5}i$ D. $\frac{16}{17}-\frac{13}{17}i$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 45: Số phức z thỏa mãn:
$(1+i)z+(2-3i)(1+2i)=7+3i$ là:

A. $z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ B. $z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
C. $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ D. $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

4. Phương trình.

Câu 47: Trên tập số phức, tìm nghiệm của phương trình $iz+2-i=0$.

A. $z=1-2i$ B. $z=2+i$
C. $z=1+2i$ D. $z=4-3i$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương)

Câu 48: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_1\left(\frac{1}{2};2\right)$ B. $M_2\left(-\frac{1}{2};2\right)$
C. $M_3\left(-\frac{1}{4};1\right)$ D. $M_4\left(\frac{1}{4};1\right)$

(Trích đề minh họa môn Toán lần 2 – năm 2017)

Câu 49: Cho phương trình: $z^2-2z+3=0$ có hai nghiệm là z1, z2. Giá trị của $w=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$ là?

A. 2 B. 3
C. 1 D. 1-i

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 50: Giá trị của b và c để phương trình $z^2+bz+c=0$ nhận $z=1+i$ làm nghiệm là?

A. b = 1 và c = 3 B. b = 2 và c = –2
C. b = –2 và c = 2 D. b = –3 và c = 1

(Trích đề thi thử THPT Hoàng Diệu)

Câu 51: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của biểu thức: $A=|z_1|^2+|z_2|^2$ là:

A. 10 B. $2\sqrt{10}$
C. 20 D. Đáp số khác

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 52: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4-3z^2-2=0$. Tổng: $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng:

A. $T=5\sqrt{2}$ B. $T=3\sqrt{2}$
C. $T=5$ D. $T=\sqrt{2}$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 53: Xét phương trình $z^3=1$ trên tập số phức. Tập nghiệm của phương trình là:

A. $S=\{1\}$ B. $S=\left\{1;\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$
C. $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ D. $S=\left\{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(Trích đề thi thử số 5 – tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Câu 54: Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $2x^2+\sqrt{3}x+3=0$. Khi đó $z_1^2+z_2^2$ bằng:

A. $-\frac{9}{4}$ B. 3 C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

(Trích đề thi thử Sở GD & ĐT Hà Tĩnh)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

Ta có: $S_n = 1 + p^1 + p^2 + ... + p^n = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$

$\Rightarrow z = \frac{(1+i)^{23}-1}{i} - 1 - (1+i)$

$\Rightarrow z = -2050 - 2048i = -2^{11} - 2 - 2048i$

Câu 2: Đáp án D.

$w = 2i - 3\bar{z} = 2i - 3(-1-3i) = 11i + 3$

Câu 3: Đáp án B.

Ta có:

$z = 5 + 2i - (1+i)^3 = 5 + 2i + 2 - 2i = 7$

Câu 4: Đáp án C.

Ta có: $z_1.z_2 = (1-i)(3+2i) = 5 - i$

Câu 5: Đáp án D.

Ta có: $z = \frac{2+i}{i} = 1 - 2i$

Câu 6: Đáp án A.

$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Câu 7: Đáp án C.

Ta có:

$(x+2i)^2 = 3x + yi \Leftrightarrow x^2 - 4 + 4xi = 3x + yi$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 3x \\ 4x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right. \\ 4x = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases} \end{array}\right.$

Câu 8: Đáp án D.

Giả sử: $z = x + yi (x, y \neq 0)$

Theo bài ra ta có:

$\frac{z-1}{z-i} = \frac{x+yi-1}{x+yi-i} = \frac{x+yi-1}{x+i(y-1)} = \frac{(x+yi-1)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow \frac{x^2 - x + y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = 0$

Vậy biểu diễn hình học của số phức z là:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Câu 9: Đáp án D.

Giả sử: $z = x + yi (x, y \neq 0)$

Ta có: $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$

$\Leftrightarrow |(x-2) + (y-1)i| = |x + (2-y)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y-2)^2$

$\Leftrightarrow 4x - 2y - 1 = 0$

Câu 10: Đáp án C.

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$

$\Leftrightarrow -2y + 1 = -2x + 1 + 4y + 4 \Leftrightarrow 2x - 6y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y + 2$

Với

$w = x' + y'i = (2-i).z + 1 = (2-i).(x+yi) + 1$

$= 2x + 2yi - ix + y + 1$

$= (2x + y + 1) + (2y - x)i$

$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + y + 1 = 2.(3y+2) + y = 7y + 5 \\ y' = 2y - x = 2y - 3y - 2 = -y - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x' + 7y' = -9 \Leftrightarrow x' + 7y' + 9 = 0$.

Câu 11: Đáp án C.

Câu 12: Đáp án A.

Giả sử: $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$

Theo bài ra ta có: $|z + i| = |\bar{z} + 1|$

$\Leftrightarrow |x + (y+1)i| = |(x+1) - yi|$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (-y)^2$

$\Leftrightarrow 2x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x - y = 0$

Câu 13: Đáp án A.

$z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z' = -x - yi$

Câu 14: Đáp án D.

Giả sử: $z = x + yi (x, y \neq 0)$

Theo bài ra ta có: $|zi - (2+i)| = 2$

$\Leftrightarrow |xi - y - 2 - i| = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Câu 15: Đáp án D.

Ta có: $(1+3i)z + 2i = -4 \Leftrightarrow z = \frac{-4-2i}{1+3i} = -1 + i$

Câu 17: Đáp án C

Lời giải: Do *M*, *N* lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1; z_2$ nên $M(1;-1), N(3;2)$. Khi đó tọa độ điểm *G* là trọng tâm của tam giác *OMN* có tọa độ $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Vậy *G* là điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$.

Câu 18: Đáp án C.

Giả sử: $z = x + yi (x, y \neq 0)$

Theo bài ra ta có:

$|z - 1 + i| = 2$

$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+1)i| = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

Câu 19: Đáp án B.

Giả sử: $z=x+yi(x,y\neq 0)$

Theo bài ra ta có:

$|z+1|=|z-2i+3|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=(x+3)^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow x-y+3=0$

Câu 20: Đáp án D.

Giả sử: $z=x+yi(x,y\neq 0)$

Theo bài ra ta có:

$|z-1+i|=2\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=4$

Câu 21: Đáp án B.

Ta có: $z=\dfrac{1}{2-3i}=\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i$

Câu 22: Đáp án D.

Ta có: $|z_1-z_2|=|1+2i-(-2-2i)|=|3+4i|=5$

Câu 23: Đáp án D.

Theo bài ra ta có:

$z=i(3i+1)=-3+i\Rightarrow \bar{z}=-3-i$

Câu 24: Đáp án A.

Ta có: $|z|=\left|\dfrac{1-13i}{2-i}\right|=|3-5i|=\sqrt{34}$

Câu 25: Đáp án C.

Giả sử: $z=a+bi(a,b\in \mathbb{R})$

$(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow 3a-b+(a-b)i=3+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3a-b=3\\ a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow P=a+b=-1$

Câu 26: Đáp án D.

Giả sử: $z=x+yi\ (x,y\in \mathbb{R})$ và $|z|=c(c>0)$,

thay vào đẳng thức ta có:

$(1+2i)c=\dfrac{\sqrt{10}}{x+yi}-2+i$

$\Leftrightarrow (1+2i)c=\dfrac{\sqrt{10}(x-yi)}{c^2}-2+i$

$\Leftrightarrow c-\dfrac{x\sqrt{10}}{c^2}+2+i\left(2c+\dfrac{y\sqrt{10}}{c^2}-1\right)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}c-\dfrac{x\sqrt{10}}{c^2}+2=0\\ 2c+\dfrac{y\sqrt{10}}{c^2}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}c+2=\dfrac{x\sqrt{10}}{c^2}\\ -2c+1=\dfrac{y\sqrt{10}}{c^2}\end{cases}$

$\Rightarrow (c+2)^2+(2c-1)^2=\dfrac{10(x^2+y^2)}{c^4}=\dfrac{10}{c^2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=1\ (t/m)\\ c=-1\ (ko\ t/m)\end{array}\right.\Leftrightarrow |z|=1$

Do đó ta có: $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$

Câu 27: Đáp án B.

Ta có:

$\dfrac{z-1}{z-i}=i\Rightarrow z(1-i)=2$

$\Leftrightarrow z=1+i\Rightarrow w=(2-i)(1+i)-1=2+i$

$|w|=\sqrt{5}$

Câu 28: Đáp án D.

Ta có: $z=\dfrac{i^{2018}-1}{i-1}=1+i$.

(Áp dụng công thức: $S_n=1+p+p^2+.....+p^n=\dfrac{p^{n+1}-1}{p-1}$)

Câu 29: Đáp án B.

Ta có: $w=z+i\bar{z}=(1+2i)+i(1-2i)=3+3i$

Câu 30: Đáp án A.

Ta có: $|\bar{z_1}-z_2|=|1+i-3-2i|=\sqrt{5}$

Câu 31: Đáp án D.

Ta có: $\bar{z}=\dfrac{-z_2}{z_1}=\dfrac{-3-2i}{1-i}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}i\ \Rightarrow z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i$

Câu 32: Đáp án D.

Ta có: $w=2i-(3-i)\bar{z}+2iz-1$

$=2i-(3-i)(3-2i)+2i(3+2i)-1$

$=-12+17i$

Câu 33:Đáp án D.

Lời giải: Đặt $z=x+yi\ (x,y\in \mathbb{R})$. Khi đó phương trình đề bài trở thành:

$|x-4+yi|+|x+4+yi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}=10$

Đến đây, ta nhớ đến các bất đẳng thức vecto như note ở bên.

Vậy đặt $\vec{u}=(x-4;y),\vec{v}=(x+4,y)$. Khi đó áp dụng bđt $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ ta có:

$\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x+4)^2+y^2}\geq\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}$

$\Leftrightarrow 10\geq 2\sqrt{x^2+y^2}\ \Leftrightarrow |z|\leq 5$. Vậy GTLN của mô đun số phức z là 5.

Với GTNN, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta có:

$\left(1.\sqrt{(x-4)^2+y^2}+1.\sqrt{(x+4)^2+y^2}\right)^2$

$\leq(1^2+1^2)\left((x-4)^2+y^2+(x+4)^2+y^2\right)$

$\Rightarrow 10\leq 2(x^2+y^2+16)\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 9\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}\geq 3$.

Vậy GTNN của mô đun số phức z là 3.

Câu 34: Đáp án B.

Giả sử: $z=x+yi(x,y\neq 0)$

$(1-i)(x+yi)+2i(x-yi)=5+3i$

$\Leftrightarrow (x+3y)+(x+y)i=5+3i \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=5 \\ x+y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow |z|=\sqrt{5}$

Câu 35: Đáp án B.

Ta có: $|z_1-z_2|=|2+i-3+4i|=|-1+5i|=\sqrt{26}$

Câu 36: Đáp án D.

Câu 37: Đáp án D.

Ta có: $w=2z_1-3z_2=2(1+3i)-3(2-i)=-4+9i$

Câu 38: Đáp án C.

Ta có: $2(a+bi)+a-bi=3+i$

$\Leftrightarrow 3a+ib=3+i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow 3a+b=4$

Câu 39: Đáp án D.

Ta có: $w=(z_1)^2.z_2=(1+i)^2.(2+3i)=-6+4i$

Câu 41: Đáp án A.

Giả sử: $z=x+yi(x,y\neq 0)$

$2z-i\bar{z}=2+5i$

$\Leftrightarrow 2(x+yi)-i(x-yi)=2+5i$

$\Leftrightarrow 2x+2yi-xi-y=2+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ -x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

Vậy $z=3+4i$

Câu 42: Đáp án B.

Ta có: $(\bar{z})^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Câu 43: Đáp án D.

Ta có: $|w|=|1+z+z^2|=\left|1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=0$

Câu 44: Đáp án D.

Ta có: $z=\frac{3-4i}{4-i}=\frac{16}{17}-\frac{13}{17}i$

Câu 45: Đáp án C.

Sử dụng lệnh CALC trong máy tính để thử các phương án.

Câu 47: Đáp án C

Câu 48: Đáp án B.

Ta có:

$4z^2-16z+17=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=2+\frac{1}{2}i \\ z=2-\frac{1}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow w=iz_0=-\frac{1}{2}+2i$

Câu 49: Đáp án C.

Ta có:

$z^2-2z+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+\sqrt{2}i \\ z=1-\sqrt{2}i \end{array}\right.$

Suy ra: $w=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$

$=(1+\sqrt{2}i)^2+(1-\sqrt{2}i)^2+(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=1$

Câu 50: Đáp án C.

Do $z=1+i$ là nghiệm của phương trình đã cho nên:

$(1+i)^2+b(1+i)+c=0$

$\Leftrightarrow 2i+b+bi+c=0 \Leftrightarrow b+c+(2+b)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ c=2 \end{cases}$

Câu 51: Đáp án C.

Ta có:

$z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+3i \\ z_2=-1-3i \end{array}\right.$

Suy ra $A=|-1+3i|^2+|-1-3i|^2=20$

Câu 52: Đáp án B.

Ta có:

$2z^4-3z^2-2=0 \Leftrightarrow (2z^2+1)(z^2-2)=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_3=\sqrt{2} \\ z_4=-\sqrt{2} \end{array}\right.$

$T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=3\sqrt{2}$

Câu 53: Đáp án D.

Ta có:

$z^3=1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2+z+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$

Suy ra: $S=\left\{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Câu 54: Đáp án A.

Ta có: $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_1z_2=\frac{3}{2} \end{cases}$

Suy ra ta có: $z_1^2+z_2^2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2.\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}$

Đọc thêm: Bổ sung một số ví dụ khác về số phức

1. Bài toán tìm số phức có môđun lớn nhất, nhỏ nhất.

Tìm số phức z có môđun lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) thỏa mãn một điều kiện cho trước.

A. Một số kiến thức áp dụng.

1. Bất đẳng thức: Bunyakovsky
2. Định lý về dấu của tam thức bậc hai.
3. Sự đồng biến nghịch biến của hàm số, bảng biến thiên.
4. Giao điểm của đường thẳng và đường thẳng, đường thẳng và đường tròn.
5. Tính chất của hàm số lượng giác.

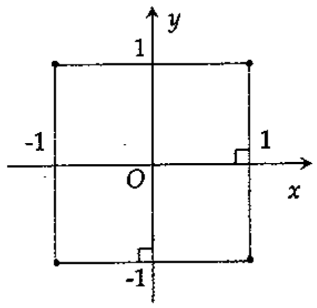
B. Cách giải:

Bước 1: Tìm tập hợp (G) các điểm biểu diễn của z thỏa mãn điều kiện.

Bước 2: Tìm số phức z tương ứng với điểm biểu diễn $M \in (G)$ sao cho khoảng cách OM có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất). Chú ý áp dụng hình học

C. Hệ thống bài tập điển hình

Ví dụ 1. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình vuông tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



A. $|z|_{max}=1.$ B. $|z|_{max}=\frac{1}{2}.$

C. $|z|_{max}=\sqrt{2}.$ D. $|z|_{max}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

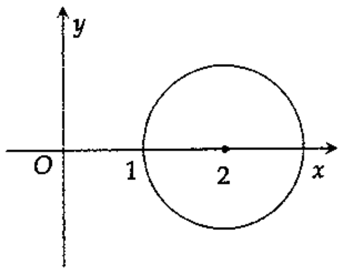
Đáp án C.

Lời giải

$|z|_{max}$ bằng độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng 2.

Tiếp theo, ví dụ 2 củng cố kiến thức về ý nghĩa hình học của mô đun số phức:

Ví dụ 2. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là phần tô đậm. Môđun **nhỏ nhất** của số phức z là

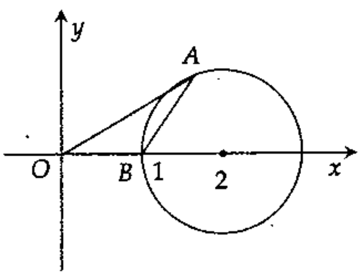


A. $|z|_{min}=1.$ B. $|z|_{min}=\frac{1}{2}.$

C. $|z|_{min}=\frac{2}{3}.$ D. $|z|_{min}=\sqrt{3}.$

Đáp án A

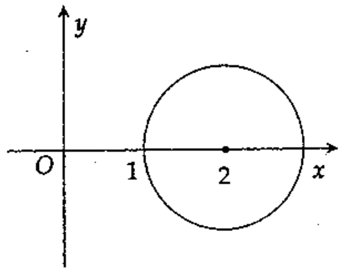
Lời giải



Tam giác OAB có góc OBA là góc tù nên $OA>OB\Rightarrow|z|\ge OB=1.$

Vậy $|z|_{min}=1.$

Ví dụ 3. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình tròn tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là

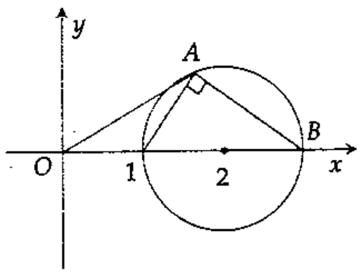


A. $|z|_{max}=1.$ B. $|z|_{max}=2.$

C. $|z|_{max}=3.$ D. $|z|_{max}=\sqrt{3}.$

Đáp án C

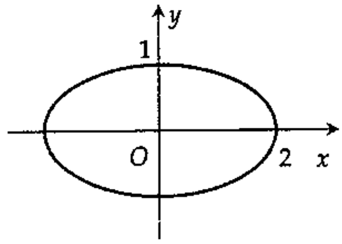
Lời giải



Tam giác OAB có góc OAB là góc tù nên $OA<OB\Rightarrow|z|\le OB=3.$

Vậy $|z|_{max}=3.$

Ví dụ 4. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường elip như hình vẽ bên. Môđun **nhỏ nhất** của số phức z là



A. $|z|_{min}=1.$ B. $|z|_{min}=2.$

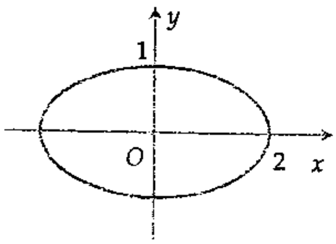
C. $|z|_{min}=\frac{1}{2}.$ D. $|z|_{min}=\frac{3}{2}.$

Đáp án A

Lời giải

Elip có độ dài trục nhỏ bằng $2b=2\Rightarrow |z|_{min}=1.$

Ví dụ 5. Biết số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình elip tô đậm như hình vẽ bên. Môđun lớn nhất của số phức z là



A. $|z|_{max}=1.$ B. $|z|_{max}=2.$

C. $|z|_{max}=\frac{1}{2}.$ D. $|z|_{max}=\frac{3}{2}.$

Đáp án B

Lời giải

Elip có độ dài trục lớn bằng $2a=4\Rightarrow |z|_{max}=2.$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Ví dụ 6: Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $2\sqrt{2}$ B. 2

C. 4 D. $\sqrt{2}$

Đáp án A.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, ta có:

$u=(x+3+(y-1)i)(x+1-(y-3)i)$

$=x^2+y^2+4x-4y+6+2(x-y-4)i$

Ta có: $u\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-y-4=0.$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $(d): x-y-4=0$. Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z thì

$$|z|_{min}\Leftrightarrow OM_{min}\Leftrightarrow OM\perp(d).$$

Tìm được $M(-2;2)\Leftrightarrow z=-2+2i.$

Ví dụ 7: Biết rằng số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z+2-i}{\overline{z}+1-i}\right|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $|z|$.

A. $\min|z|=-2+\sqrt{10}$, $\max|z|=2+\sqrt{10}$,

B. $\min|z|=-3+\sqrt{10}$, $\max|z|=3+\sqrt{10}$.

C. Không tồn tại GTLN, GTNN

D. $\min|z|=-1+\sqrt{10}$, $\max|z|=1+\sqrt{10}$,

Đáp án B.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, ta có: $\left|\frac{z+2-i}{\overline{z}+1-i}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |x+2+(y-1)i|=\sqrt{2}|x+1-(y+1)i|$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=2\left((x+1)^2+(y+1)^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2=10.$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(0;-3)$, bán kính $R=\sqrt{10}$. Giả sử M là điểm biểu diễn của z thì $|z|_{min}\Leftrightarrow OM_{min}$; $|z|_{max}\Leftrightarrow OM_{max}$. Tìm được:

$\min|z|=-3+\sqrt{10}$, khi $z=\left(-3+\sqrt{10}\right)i$ và $\max|z|=3+\sqrt{10}$, khi $z=-\left(3+\sqrt{10}\right)i$.

Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa điều kiện $|z-2+3i|=\frac{3}{2}$. Điểm biểu diễn cho số phức z có môđun nhỏ nhất có tọa độ là:

A. $\left(\frac{26-3\sqrt{13}}{13};\frac{78+9\sqrt{13}}{26}\right)$.

B. $\left(\frac{26+3\sqrt{13}}{13};\frac{78+9\sqrt{13}}{26}\right)$.

C. $\left(\frac{26-3\sqrt{13}}{13};\frac{-78+9\sqrt{13}}{26}\right)$.

D. $\left(\frac{26+3\sqrt{13}}{13};\frac{78-9\sqrt{13}}{26}\right)$.

Đáp án C

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-2+3i|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow |x+yi-2+3i|=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=\frac{9}{4}$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(2;-3)$ bán kính là $R=\frac{3}{2}$.

Lúc này nếu OI cắt đường tròn đã cho tại lần lượt hai điểm $A;B$ thì $OA\le|z|\le OB$

Mặt khác phương trình đường thẳng chứa OI là: $3x+2y=0$

Vậy tọa độ điểm A, B thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{9}{4}\\ y=-\frac{3}{2}x\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+\frac{9}{4}x^2-9x+9=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{26+3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow y=-\frac{78+9\sqrt{13}}{26}\\ x=\frac{26-3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow y=\frac{-78+9\sqrt{13}}{26}\end{array}\right.$$

Ta chọn $\left(\frac{26-3\sqrt{13}}{3};\frac{-78+9\sqrt{13}}{26}\right)$ (do tìm min)

Ví dụ 9: Trong các số phức z thỏa điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Điểm biểu diễn cho số phức z có môđun nhỏ nhất có tọa độ là:

A. $(2;2)$. B. $(-2;-2)$.

C. $(2;-2)$. D. $(-2;2)$.

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Lúc này ta có:

$|x+yi-2-4i|=|x+yi-2i|$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2$

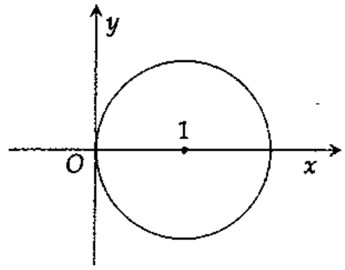
$\Leftrightarrow-4x+4-8y+16=-4y+4$

$\Leftrightarrow4x+4y-16=0$

$\Leftrightarrow x+y-4=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x+y-4=0$. Vậy OM min khi $OM\perp d\Leftrightarrow M(2;2)$.

Ví dụ 10: Trong mặt phẳng tọa độ, hình vẽ bên là hình tròn tâm $(1;0)$, bán kính $R=1$ là hình biểu diễn tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z.



Khẳng định nào sau đây là sai:

A. $max|z|=2$. B. $|z-1|\le1$.

C. $z.\bar{z}\le4$. D. $|\bar{z}+1|\le1$.

Đáp án D

Lời giải

A đúng. $|z|$ đạt giá trị lớn nhất là 2, khi điểm biểu diễn của z cùng với O là hai đầu mút đường kính của hình tròn.

Phương trình đường tròn: $(x-1)^2+y^2=1$

Số phức $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

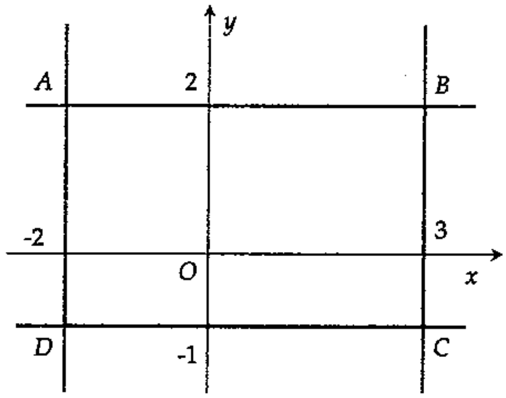
Ta có $|z-1|=|(x+yi)-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le1$.

Vậy B đúng.

Do $|z|^2=z.\bar{z}$, mà $|z|\le2\Rightarrow z.\bar{z}\le4$, C đúng.

Ta chọn D.

Ví dụ 12: Trong mặt phẳng tọa độ, miền trong hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả các cạnh AB, BC, CD, DA) trong hình vẽ bên biểu diễn cho các số phức z. Chọn khẳng định đúng:



A. Phần ảo của số phức $z-\bar{z}$ lớn hơn 4.

B. Phần thực của số phức $z+\bar{z}$ nhỏ hơn 4.

C. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng 1

D. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng $\sqrt{13}$.

Đáp án D.

Lời giải

A. Ta có số phức $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$. Lúc này $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$.

Ta có $y \le 2 \Rightarrow 2y \le 4$. Vậy A sai.

B. Ta có $z + \bar{z} = 2x$, mà $-2 \le x \le 3$, nên B sai.

C. C sai, do tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là miền trong của hình chữ nhật, nên $|z|_{min} = 0$.

D. Đúng

Ví dụ 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm mô đun lớn nhất của số phức $z - 2i$.

A. $\sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$ B. $\sqrt{26 - 6\sqrt{17}}$

C. $\sqrt{26 + 8\sqrt{17}}$ D. $\sqrt{26 - 4\sqrt{17}}$

Đáp án A

Lời giải

Đặt số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Lúc này theo đề bài ta có

$|x + yi - 1 + 2i| = 3$

$\Leftrightarrow |(x-1) + (y+2)i| = 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

Lúc này tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là tập hợp các đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính $R = 3$.

Ta có $|w| = |x + (y-2)i|$

$\Leftrightarrow |w|^2 = x^2 + (y-2)^2$

$|w|^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + 2x - 1 - 8y$

$= 9 + 2x - 8y - 1 = 2.(x - 4y + 4)$

Ta có $x - 4y + 4 = 1.(x-1) - 4.(y+2) + 13$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$1.x - 4.(y-2) \le \sqrt{(1^2 + 4^2).((x+1)^2 + (y+2)^2)} = 3\sqrt{17}$

$\Leftrightarrow |w|^2 \le 2.(3\sqrt{17} + 13)$

$\Leftrightarrow w \le \sqrt{6\sqrt{17} + 26}$.

Ví dụ 14: Số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Mô đun lớn nhất của số phức z có giá trị là

A. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ B. $\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$

C. $\sqrt{6 + 4\sqrt{5}}$ D. $\sqrt{5 + 6\sqrt{5}}$

Đáp án A.

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (x; y \in \mathbb{R})$. Lúc này ta có:

$|x - 1 + (y+2)i| = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Ta có $|z|^2 = x^2 + y^2$

Tương tự như bài trên, ta sẽ tách ra để áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Ta có

$x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + 2x - 1 - 4y - 4$

$= 2x - 4y - 1 = 2[(x-1) - 2.(y+2)] + 9$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

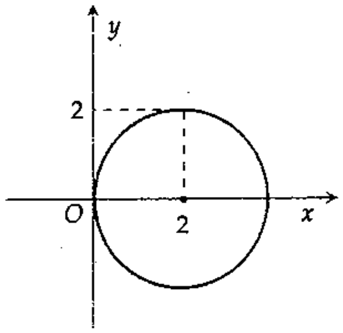
$(x-1) - 2(y+2) \le \sqrt{(1^2 + 2^2)((x-1)^2 + (y+2)^2)}$

$= \sqrt{5.4} = 2.\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow |z|^2 \le 4.\sqrt{5} + 9 \Leftrightarrow |z| \le \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

2. Biểu diễn hình học của số phức, quỹ tích phức

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ, hình tròn tô đậm như hình vẽ bên là tập hợp điểm biểu diễn số phức z. Hỏi số phức z thỏa mãn bất đẳng thức nào sau đây?



A. $|z-2|\le 2.$ B. $|z-2i|\le 2.$

C. $|z-2-2i|\le 2.$ D. $|z-1-2i|\le 2.$

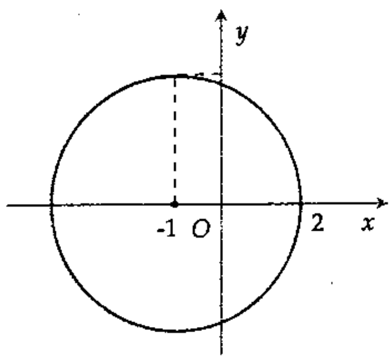
Đáp án A

Lời giải

Hình tròn có tâm $I(2;0)$, bán kính $R=2$. Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ. Ta có:

$z-2=(x-2)+yi\Rightarrow|z-2-2i|=2\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=4.$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ, hình tròn tô đậm như hình vẽ bên là tập hợp điểm biểu diễn số phức z. Hỏi số phức z thỏa mãn bất đẳng thức nào sau đây?



A. $|z-1|\le 3.$ B. $|z-i|\le 3.$

C. $|z+1|\le 3.$ D. $|z+i|\le 3.$

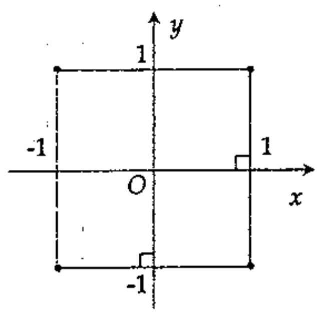
Đáp án C

Lời giải

Hình tròn có tâm $I(-1;0)$, bán kính $R=3$. Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};\ y\in\mathbb{R})$ có điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ. Ta có:

$z+1=(x+1)+yi\Rightarrow|z+i|=3\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=9.$

Ví dụ 3. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là hình vuông tô đậm như hình vẽ bên. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z+2$ là



A. hình vuông có tâm $(0;0)$ và có 1 đỉnh là $(2;2)$.

B. hình vuông có tâm $(0;2)$ và có 1 đỉnh là $(1;3)$.

C. hình vuông có tâm $(0;2)$ và có 1 đỉnh là $(3;1)$.

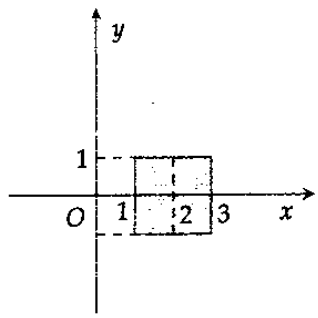
D. hình vuông có tâm $(0;-2)$ và có 1 đỉnh là $(-1;1)$.

Đáp án C.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ ;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Tập hợp điểm biểu diễn z như hình vẽ là hình vuông cạnh bằng 2 và $\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}$.

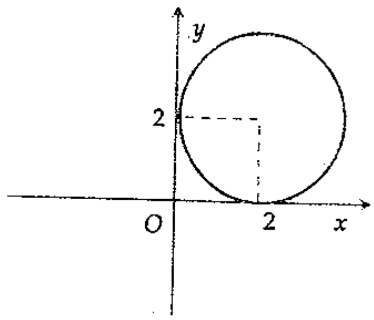


Ta có: $z+2=x+2+yi$, lúc đó biến đổi

$\begin{cases}-1\le x\le 1\\-1\le y\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x+2\le 3\\-1\le y\le 1\end{cases}.$

Tổng quát: Nếu số phức z có hình (H) biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z+a$; $(a \in \mathbb{R})$ là hình (H') có được bằng cách tịnh tiến hình (H) sang phải $|a|$ đơn vị (nếu $a>0$) và sang trái $|a|$ đơn vị (nếu $a<0$).

Ví dụ 4. Biết các số phức z có tập hợp điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường tròn tô đậm như hình vẽ bên. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z-1$ là



A. đường tròn tâm $(1;2)$, bán kính bằng 2.

B. đường tròn tâm $(2;2)$, bán kính bằng 2.

C. đường tròn tâm $(-3;-2)$, bán kính bằng 2.

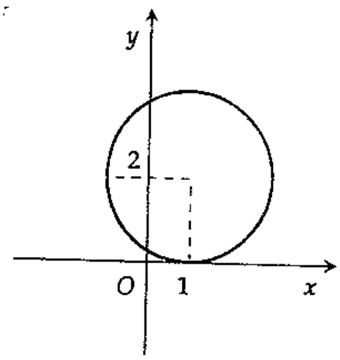
D. đường tròn tâm $(2;-2)$, bán kính bằng 2.

Đáp án A

Lời giải

Gọi $z=x+yi\,;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Tập hợp điểm biểu diễn z như hình vẽ là đường tròn có phương trình:



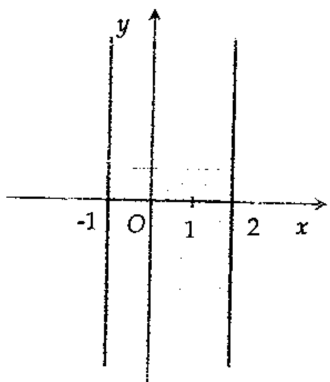
$(x-2)^2+(y-2)^2=4.$

Ta có: $z-1=(x-1)+yi$, lúc đó biến đổi

$(x-2)^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow \left[(x-1)-3\right]^2+(y-2)^2=4.$

Tổng quát: Nếu số phức z có hình (H) biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ thì tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z+bi$; $(b \in \mathbb{R})$ là hình (H') có được bằng cách tịnh tiến hình (H) lên trên $|b|$ đơn vị (nếu $b>0$) và xuống dưới $|b|$ đơn vị (nếu $b<0$).

Ví dụ 5. Điều kiện để số phức z có điểm biểu diễn thuộc phần tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ bên là



A. z có phần thực không lớn hơn 2.

B. z có môđun thuộc đoạn $[-1;2]$.

C. z có phần ảo thuộc đoạn $[-1;2]$.

D. z có phần thực thuộc đoạn $[-1;2]$.

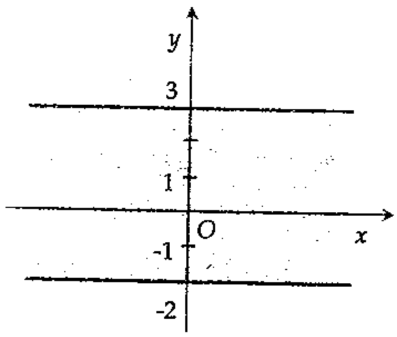
Đáp án D

Lời giải

Gọi $z=x+yi\,;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Từ hình vẽ ta có: $-1\le x\le 2$.

Ví dụ 6. Điều kiện để số phức z có điểm biểu diễn thuộc phần tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ bên là



A. z có phần ảo không lớn hơn 3.

B. z có môđun thuộc đoạn $[-2;3]$.

C. z có phần ảo thuộc đoạn $[-2;3]$.

D. z có phần thực thuộc đoạn $[-2;3]$.

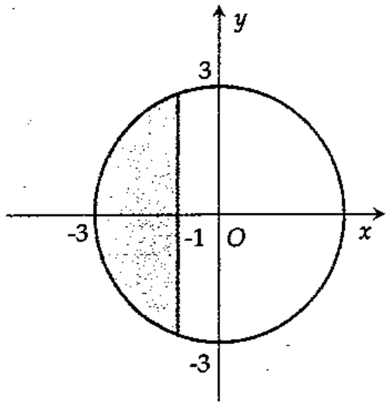
Đáp án C

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ ;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Từ hình vẽ ta có: $-2\le y\le 3$.

Ví dụ 7. Điều kiện để số phức z có điểm biểu diễn thuộc phần tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ bên là



A. z có phần thực thuộc đoạn $[-3;-1]$.

B. z có môđun không lớn hơn 3.

C. z có phần thực thuộc đoạn $[-3;-1]$ và có môđun không lớn hơn 3.

D. z có phần ảo thuộc đoạn $[-3;-1]$.

Đáp án C

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ ;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Từ hình vẽ ta có: $\begin{cases}x^2+y^2\le 9\\-3\le x\le -1\end{cases}$.

Ví dụ 8. Cho số phức z có số phức liên hợp $\overline{z}$ thỏa mãn $|z-\overline{z}+1-i|=2$. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Đường thẳng $y=0$.

B. Hai đường thẳng $y=0$ và $y=1$.

C. Đường thẳng $y=1$.

D. Hai đường thẳng $y=0$ và $y=-1$.

Đáp án B.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ ;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có: $z-\overline{z}+1-i=1+(2y-1)i$

$\Rightarrow|z-\overline{z}+1-i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow 1+(2y-1)^2=2$

$\Leftrightarrow(2y-1)^2=1\Leftrightarrow y=0\vee y=1.$

Ví dụ 9: Cho số phức z có số phức liên hợp $\overline{z}$ thỏa mãn $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$.

B. Parabol $y=x^2$.

C. Parabol $y=\dfrac{x^2}{4}$.

D. Hai đường thẳng $y=0$ và $y=\dfrac{1}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ ;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có:

$z-i=x+(y-1)i;\ z-\overline{z}+2i=2(y+1)i$

$\Rightarrow 2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(y+1)^2\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Ví dụ 10. Cho số phức z có số phức liên hợp $\overline{z}$ thỏa mãn $\left|z^2-(\overline{z})^2\right|=4$. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Đường cong $y=\dfrac{1}{x}$.

B. Đường thẳng $y=x$.

C. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

D. Hai đường cong $y=\dfrac{1}{x}$ và $y=-\dfrac{1}{x}$.

Đáp án D.

Lời giải

Gọi $z=x+yi\ ;(x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$. Điểm $M(x;y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có:

$z^2-(\overline{z})^2=(x^2-y^2+2xyi)-(x^2-y^2-2xyi)$

$\Rightarrow\left|z^2-(\overline{z})^2\right|=4$

$\Leftrightarrow|4xyi|=4\Leftrightarrow|xy|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{x}\\y=-\dfrac{1}{x}\end{array}\right..$

3. Một số dạng toán nâng cao về số phức

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=\left|1+\frac{5i}{z}\right|$

A. 5 B. 4 C. 6 D. 8

Đáp án C

Lời giải

Cách 1: Ta đặt $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})$.

Lúc này $x^2+y^2=1\Rightarrow y^2\le 1\Leftrightarrow -1\le y\le 1$

Ta có $A=\left|1+\frac{5i}{z}\right|=\left|1+\frac{5i}{x+yi}\right|$

$=\left|1+\frac{5i(x-yi)}{x^2+y^2}\right|=\left|1+5ix-5yi^2\right|$

$=|1+5y+5xi|$

$\Leftrightarrow A^2=25x^2+(5y+1)^2=25+10y+1\le 36$, (do $y\le 1$)

Dấu bằng xảy ra khi $y=1;x=0$

Cách 2: Ta có: $A=\left|1+\frac{5i}{z}\right|\le|1|+\left|\frac{5i}{z}\right|=1+\frac{5}{|z|}=6.$

Khi $z=i\Rightarrow A=6.$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z|\ge 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\frac{z+i}{z}\right|$

A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{2}{3}$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có $P=\left|1+\frac{i}{z}\right|\le 1+\frac{1}{|z|}\le\frac{3}{2}.$

Mà $\left|1+\frac{i}{z}\right|\ge 1-\frac{1}{|z|}\ge\frac{1}{2}.$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z=-2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi $z=2i.$

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất M_{max} và giá trị nhỏ nhất M_{min} của biểu thức $M=\left|z^2+z+1\right|+\left|z^3+1\right|.$

A. $M_{max}=5;\ M_{min}=1.$

B. $M_{max}=5;\ M_{min}=2.$

C. $M_{max}=4;\ M_{min}=1.$

D. $M_{max}=4;\ M_{min}=2.$

Đáp án A.

Lời giải

Ta có: $M\le|z|^2+|z|+1+|z|^3+1=5$, khi $z=1\Rightarrow M=5\Rightarrow M_{max}=5.$

Mặt khác: $M=\frac{\left|1-z^3\right|}{|1-z|}+\left|1+z^3\right|\ge\frac{\left|1-z^3\right|}{2}+\frac{\left|1+z^3\right|}{2}\ge\frac{\left|1-z^3+1+z^3\right|}{2}=1,$

khi $z=-1\Rightarrow M=1\Rightarrow M_{min}=1.$

Ví dụ 4: Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là các nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4=1$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(z_1^2+1\right)\left(z_2^2+1\right)\left(z_3^2+1\right)\left(z_4^2+1\right)$.

A. $P=2$. B. $P=\frac{17}{9}$. C. $P=\frac{16}{9}$. D. $P=\frac{15}{9}$.

Đáp án B.

Lời giải

Ta có phương trình

$\Leftrightarrow f(z)=(2z-i)^4-(z-1)^4=0.$

Suy ra: $f(z)=15(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4).$

Vì $z_1^2+1=(z_1-i)(z_1+i)\Rightarrow P=\frac{f(i).f(-i)}{225}$ (1).

Mà

$f(i)=i^4-(i-1)^4=5;\ f(-i)=(-3i)^4-(i+1)^4=85.$

Vậy từ $(1)\Rightarrow P=\frac{17}{9}.$

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|.$

A. $3\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{5}$

C. $\sqrt{20}$ D. $2\sqrt{20}.$

Đáp án D

Lời giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}).$

Ta có:

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có:

$P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}$

$=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số

$f(x)=\sqrt{2(1+x)}+3\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có:

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{3}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{5}\in(-1;1)$.

Ta có:

$f(1)=2;\ f(-1)=6;\ f\left(-\dfrac{4}{5}\right)=2\sqrt{20}\Rightarrow P_{max}=2\sqrt{20}$.

Ví dụ 6: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2+4|=2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{6}\le|z|\le\dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$.

B. $\sqrt{5}-1\le|z|\le\sqrt{5}+1$.

C. $\sqrt{6}-1\le|z|\le\sqrt{6}+1$.

D. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\le|z|\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Đáp án B.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u|+|v|\ge|u+v|$, ta được

$2|z|+|-4|=|z^2+4|+|-4|\ge|z|^2$.

$\Rightarrow|z|^2-2|z|-4\le0\Rightarrow|z|\le\sqrt{5}+1$

$2|z|+|z|^2=|z^2+4|+|-z^2|\ge4$.

$\Rightarrow|z|^2+2|z|-4\ge0\Rightarrow|z|\ge\sqrt{5}-1$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5}-1$, khi $z=-i+i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5}+1$, khi $z=i+i\sqrt{5}$.

Ví dụ 7: Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z+i$.

A. $|z+i|=2\sqrt{41}$ B. $|z+i|=3\sqrt{5}$.

C. $|z+i|=5\sqrt{2}$ D. $|z+i|=\sqrt{41}$.

Đáp án D.

Lời giải

Gọi $z=x+yi;\ (x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(C):(x-3)^2+(y-4)^2=5$: tâm $I(3;4)$ và $R=\sqrt{5}$.

Mặt khác:

$M=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-\left[(x^2)+(y-1)^2\right]$.

$=4x+2y+3\Leftrightarrow d:4x+2y+3-M=0$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$\Leftrightarrow d(I;d)\le R\Leftrightarrow\dfrac{|23-M|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow|23-M|\le10\Leftrightarrow13\le M\le33$

$\Rightarrow M_{max}=33\Leftrightarrow\begin{cases}4x+2y-30=0\\(x-3)^2+(y-4)^2=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=-5\end{cases}\Rightarrow z+i=5-4i\Rightarrow|z+i|=\sqrt{41}$.

Ví dụ 8: Các điểm A, B, C và A', B', C' lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 và z'_1, z'_2, z'_3 trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng). Biết $z_1+z_2+z_3=z'_1+z'_2+z'_3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

B. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trực tâm.

C. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

D. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng tâm đường tròn ngoại tiếp.

Đáp án C.

Lời giải

Gọi

$z_1=x_1+y_1i;\ z_2=x_2+y_2i;\ z_3=x_3+y_3i;$.

$(x'_k;\ y'_k\in\mathbb{R};\ k=\overline{1;3})$

Khi đó: $A(x_1;y_1);\ B(x_2;y_2);\ C(x_3;y_3)$, gọi G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow G\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

Tương tự, gọi $z_1' = x_1' + y_1'i;\ z_2' = x_2' + y_2'i;\ z_3'$.
$= x_3' + y_3'i;\ \left(x_k';\ y_k' \in ;\ k = \overline{1;3}\right)$

Khi đó: $A'(x_1';y_1');\ B'(x_2';y_2');\ C'(x_3';y_3')$,
gọi G' là trọng tâm

$\Delta A'B'C' \Rightarrow G'\left(\dfrac{x_1'+x_2'+x_3'}{3};\dfrac{y_1'+y_2'+y_3'}{3}\right)$.

Do $z_1 + z_2 + z_3 = z_1' + z_2' + z_3'$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3)i$
$=(x_1'+x_2'+x_3')+(y_1'+y_2'+y_3')i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = x_1'+x_2'+x_3' \\ y_1+y_2+y_3 = y_1'+y_2'+y_3' \end{cases} \Rightarrow G \equiv G'.$

Ví dụ 9: Gọi điểm A, B lần lượt biểu diễn các số phức z_1; z_2; $(z_1.z_2 \ne 0)$ trên mặt phẳng tọa độ (A, B, C và A', B', C' đều không thẳng hàng) và $z_1^2 + z_2^2 = z_1.z_2$. Với O là gốc tọa độ, khẳng định nào sau đây đúng?
A. Tam giác OAB đều.
B. Tam giác OAB vuông cân tại O.
C. Tam giác OAB vuông cân tại B.
D. Diện tích tam giác OAB không đổi.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$z_1^2 + z_2^2 = z_1.z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_1(z_2 - z_1);\ |z_1|^2 = |z_1|.|z_2 - z_1|$

Do $z_1 \ne 0 \Rightarrow |z_2 - z_1| = \dfrac{|z_2|^2}{|z_1|}$; (1)

Mặt khác:

$z_1^2 = z_2(z_1 - z_2) \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|.|z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|}$

(do $z_2 \ne 0$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{|z_2|^2}{|z_1|} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

Vậy ta có: $|z_1| = |z_2| = |z_2 - z_1| \Rightarrow OA = OB = AB$.

Ví dụ 10: Cho số phức $z = \dfrac{-m+i}{1-m(m-2i)}$, $m \in$.
Tìm môđun lớn nhất của z.

A. 1. B. 0. C. $\dfrac{1}{2}$. D. 2.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$z = \dfrac{-m+i}{1-m(m-2i)} = \dfrac{m}{m^2+1} + \dfrac{i}{m^2+1}$.

$\Rightarrow |z| = \sqrt{\dfrac{1}{m^2+1}} \le 1 \Rightarrow |z|_{max} = 1 \Leftrightarrow z = i;\ m = 0$

Chủ đề 5: Khối đa diện và thể tích của một số khối đa diện quen thuộc.

I. Khái niệm về hình đa diện và khối đa diện.

1. Hình đa diện.

Hình 5.1

> Hình đa diện là hình thỏa mãn hai tính chất:
>
> a. Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
>
> b. Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

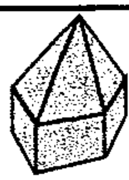
Muốn là hình đa diện bắt buộc phải thỏa mãn cả hai tính chất trên.

Ví dụ: Hình 5.1 có cạnh AB là cạnh chung của 4 đa giác, do đó hình đó không phải là hình đa diện.

Câu hỏi ví dụ: Trong các hình sau, hình nào không phải hình đa diện:

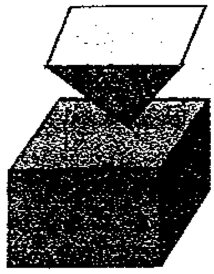
A.

B.



C.

D.



Đáp án D.

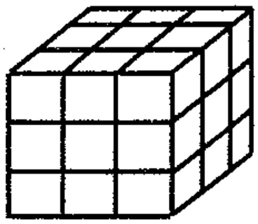
Lý giải: Do hình D không thỏa mãn tính chất đầu tiên.

2. Khối đa diện.

> Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Khối đa diện = hình đa diện + phần không gian được giới hạn bởi hình đa diện

Ví dụ: Khối rubic là một khối đa diện (hình 5.2).



Hình 5.2

a. Tên gọi và các thành phần: đỉnh, cạnh, mặt bên, ... được đặt tương ứng với hình đa diện tương ứng.

b. Điểm trong – Điểm ngoài; Miền trong – Miền ngoài

> * Các điểm không thuộc khối đa diện gọi là các **điểm ngoài** của khối đa diện. Tập các điểm ngoài gọi là **miền ngoài** của khối đa diện.
>
> * Các điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện giới hạn khối đa diện ấy gọi là các **điểm trong** của khối đa diện. Tập các điểm trong được gọi là **miền trong** của khối đa diện.

Ví dụ: Ta tưởng tượng nếu ta chế tạo mỗi khối đa diện bằng một chất kim loại thì ta có thể bơm vào bên trong nó một chất khí màu. Khi đó phần bên trong được tô màu gọi là miền trong của khối đa diện, phần bên ngoài thì được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

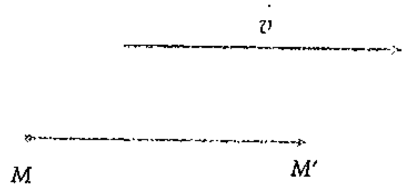
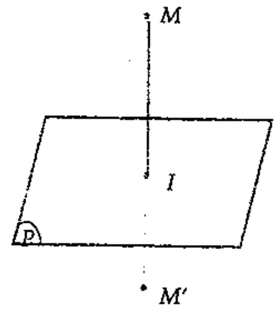
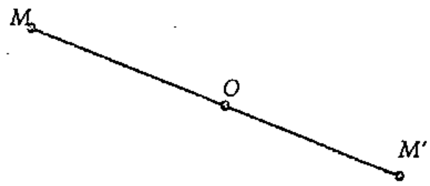
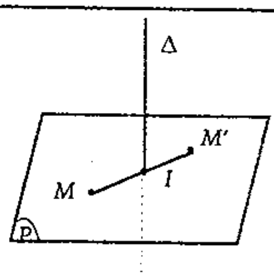
** Mỗi hình đa diện chia các điểm còn lại của không gian thành hai miền không giao nhau là miền trong và miền ngoài của hình đa diện, trong đó chỉ có miền ngoài là chứa hoàn toàn một đường thẳng nào đấy.*

3. Hai đa diện bằng nhau.

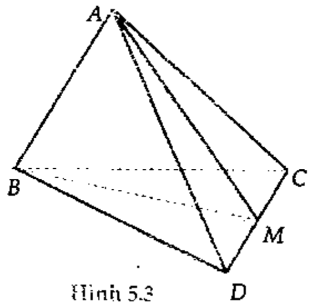
a. Phép dời hình trong không gian.

> Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.
>
> Phép biến hình trong không gian được gọi là **phép dời hình** nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

Ta có những phép biến hình sau trong không gian là những phép dời hình:

Phép tịnh tiến theo vecto v là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $MM' = v$.	
Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) Là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M'sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.	
Phép đối xứng tâm O, là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'.	
Phép đối xứng qua đường thẳng Δ (hay phép đối xứng qua trục Δ), là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là trung trực của MM'.	

Ví dụ: Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của CD. Khi đó ta có phép đối xứng qua mặt phẳng ABM biến điểm A thành chính nó, điểm B thành chính nó, điểm D thành điểm C. Từ đó ta nhận thấy phép đối xứng qua mặt phẳng (ABM) biến tứ diện $ABCD$ thành chính nó (hình 5.3).
$\Rightarrow$ mặt phẳng (ABM) là mặt phẳng đối xứng của tứ diện $ABCD$.



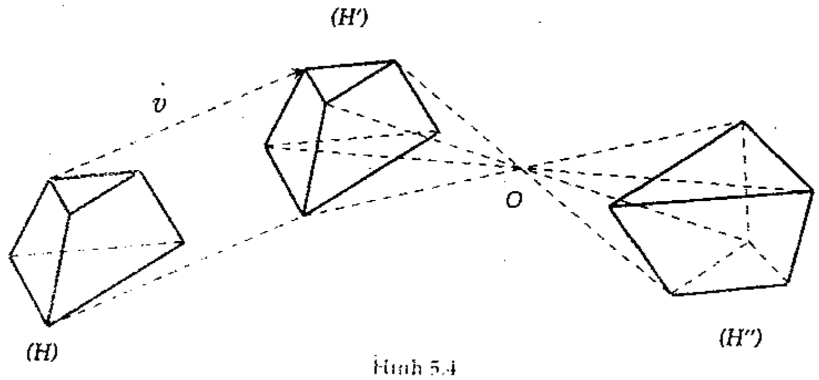
Hình 5.3

Nhận xét: Phép dời hình biến đa diện (H) thành đa diện (H'), biến đỉnh, cạnh, mặt của (H) thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của (H').

b. Hai hình bằng nhau.

> Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia. (hình 5.4)

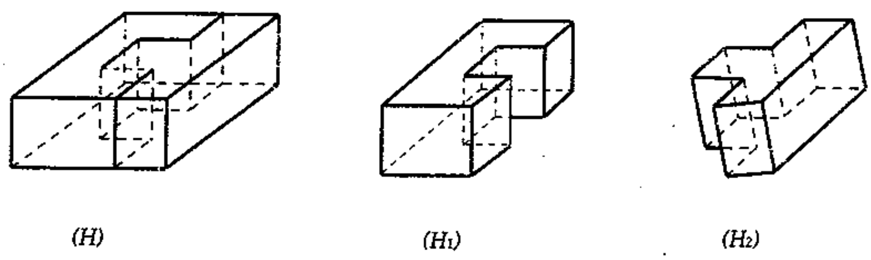


Hình 5.4

4. Phân chia và lắp ghép các khối đa diện.

Đây là phần quan trọng để áp dụng vào bài toán tính thể tích các khối không phải khối hình đã có công thức tính sẵn, bắt buộc phải chia nhỏ ra thành các tổng thể tích các khối nhỏ.

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện (H_1) và (H_2) sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) thành một khối đa diện (H) (hình 5.5).



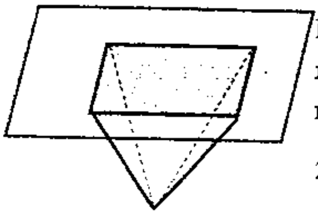
Hình 5.5

Nhận xét: Một khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia thành những khối tứ diện.

II. Khối đa diện lồi và khối đa diện đều.

1. Khối đa diện lồi.

Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó đa diện xác định (H) được gọi là đa diện lồi.



Hình 5.6

Người ta chứng minh được rằng một khối đa diện là khối đa diện lồi nếu miền trong của nó luôn chỉ nằm một phía đối với mỗi mặt phẳng chứa một mặt phẳng của nó (hình 5.6).

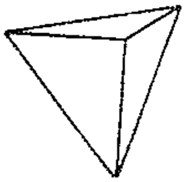
2. Khối đa diện đều.

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

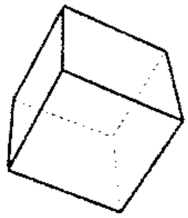
a. Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.

b. Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

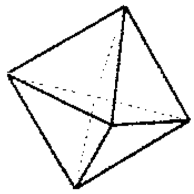
Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$.



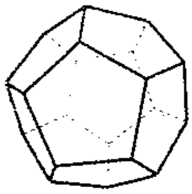
Khối tứ diện



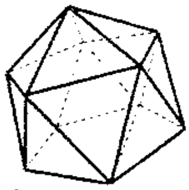
Khối lập phương



Khối bát diện đều



Khối mười hai mặt đều



Khối hai mươi mặt đều

III. Thể tích khối đa diện.

Thể tích của mỗi khối đa diện H là số dương xác định V(H) sao cho các tính chất sau đây thỏa mãn:

a. Hai khối đa diện H và H' bằng nhau thì có thể tích bằng nhau.

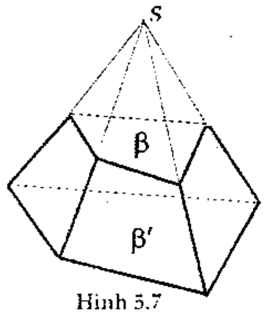
b. Nếu khối đa diện H được phân thành hai khối đa diện H_1 và H_2 thì thể tích của H bằng tổng thể tích của H_1 và H_2.

c. Khối lập phương đơn vị (tức là có cạnh bằng 1) có thể tích bằng 1.

Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt là a, b, c là $V = abc$.
Thể tích khối lăng trụ H có diện tích đáy bằng B và chiều cao h là $V = B.h$.
Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$.

Trên đây là công thức tính thể tích của các khối đa diện cơ bản. Tiếp theo, ta xét đến các khối đa diện khác, từ đó hình thành công thức giải nhanh.

A. Thể tích khối chóp cụt.



Hình 5.7

Bài toán tổng quát 1: **Tính thể tích của khối chóp cụt có đáy trên là đa giác β có diện tích B và đáy dưới là đa giác β' có diện tích B'. Tính thể tích của hình chóp cụt này, biết chiều cao của hình chóp cụt là h. (hình 5.7)**

Lời giải

Kí hiệu H_1 là hình chóp có đáy là đa giác β, H_2 là hình chóp có đáy là đa giác β'. Nếu h_1 và h_2 là chiều cao của hình chóp H_1 và H_2 thì ta có

$\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}}$ và $h_2=h_1+h.$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h+h_1}=\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}} \Leftrightarrow h_1=\frac{\sqrt{B}.h}{\sqrt{B'}-\sqrt{B}} \Rightarrow h_2=\frac{\sqrt{B'}.h}{\sqrt{B'}-\sqrt{B}}.$$

Ta có $V(H)=V(H_2)-V(H_1)=\frac{1}{3}(B'h_2-Bh_1)=\frac{1}{3}h.\left(\frac{B'\sqrt{B'}}{\sqrt{B'}-\sqrt{B}}-\frac{B\sqrt{B}}{\sqrt{B'}-\sqrt{B}}\right)$

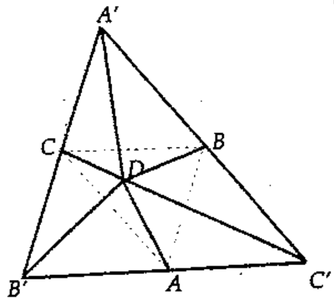
$$=\frac{1}{3}.h.\left(\frac{\left(\sqrt{B'}\right)^3-\left(\sqrt{B}\right)^3}{\sqrt{B'}-\sqrt{B}}\right)\boxed{=\frac{1}{3}.\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right).h}$$

STUDY TIP: Thể tích của khối chóp cụt có đáy trên và đáy dưới là B và B', chiều cao h thì có thể tích là

$V=\frac{1}{3}.\left(B+B'+\sqrt{BB'}\right).h$

B. Thể tích tứ diện.

Bài tập tổng quát 2: **Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $AD=BC=c$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.**



Hình 5.8

Lời giải

Dựng tứ diện D.A'B'C' sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của B'C', C'A', A'B'. Khi đó tứ diện D.A'B'C' có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc.

Nhận xét $V_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{D.A'B'C'}=\frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$

Tam giác DA'C' vuông tại D có DB là trung tuyến $\Rightarrow DB=\frac{1}{2}A'C' \Rightarrow A'C'=2b$

$\Rightarrow DA'^2+DC'^2=4b^2$

Tương tự ta có $\begin{cases} DA'^2+DB'^2=4a^2 \\ DB'^2+DC'^2=4c^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} DA'^2=2\left(a^2+b^2-c^2\right) \\ DB'^2=2\left(c^2+a^2-b^2\right) \\ DC'^2=2\left(c^2+b^2-a^2\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{24}\sqrt{8\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(c^2+b^2-a^2\right)}$$

$$\boxed{=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(c^2+b^2-a^2\right)}}$$

Bài tập tổng quát 3: (Thể tích khối tứ diện vuông) **Cho khối tứ diện $S.ABC$ có $SA=a;SB=b;SC=c$ và $SA;SB;SC$ đôi một vuông góc với nhau. Tích thể tích tứ diện $S.ABC$.**

Lời giải

Ta có thể tích của khối tứ diện vuông : $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.SA.SB.SC=\frac{1}{6}.abc$

Một số tính chất của khối tứ diện vuông:

1. Hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng ABC là trực tâm H của tam giác ABC và $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

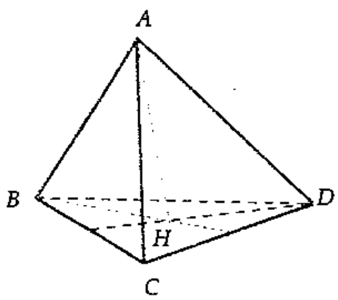
2. $S^2_{SBC}=S_{HBC}.S_{ABC}$;
$S^2_{SAC}=S_{HAC}.S_{ABC}$;
$S^2_{SAB}=S_{HAC}.S_{ABC}$

3. $S^2_{HBC}+S^2_{HAC}+S^2_{HAB}=S^2_{ABC}$

4. Nếu M,N,P là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA khi đó tứ diện $SMNP$ là tứ diên gần đều và $V_{SMNP}=\frac{1}{4}V_{OABC}=\frac{1}{24}abc$.

Bài tập tổng quát 4: **Thể tích của khối tứ diện đều.**

Lời giải



Ta xét hình tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều có cạnh là a. Diện tích tam giác đều BCD là $S_{BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

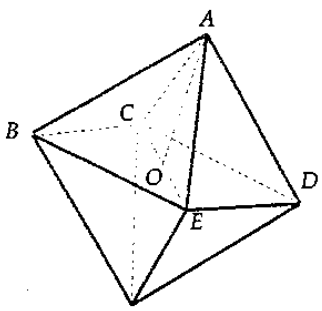
Gọi AH là đường cao của hình chóp $A.BCD$ thì H là tâm của tam giác đều BCD. Lúc này chiều cao của hình chóp là

$h=AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Thể tích của khối tứ diện đều là: $\boxed{V=\frac{1}{3}S_{BCD}.h=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

Bài tập tổng quát 5: **Thể tích của khối tám mặt đều.**

Lời giải



Ta thấy khối tám mặt đều có tất cả các cạnh bằng a có thể tích bằng tổng thể tích của hai khối hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

Ta có $V=2V_1=2.\frac{1}{3}.S_{BCDE}.AO=2.\frac{1}{3}.a^2.a\frac{\sqrt{2}}{2}=a^3.\frac{\sqrt{2}}{3}$

Vậy $\boxed{V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

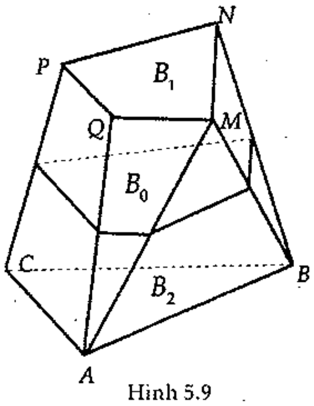
Từ đây ta có luôn công thức của **khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng** a là $\boxed{V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}}$

C. Thể tích khối phỏng lăng trụ (đọc thêm).

Hình đa diện lồi gọi là hình phỏng lăng trụ nếu các đỉnh của nó nằm trên hai mặt phẳng song song (hình 5.9)

Ví dụ: Hình chóp, hình chóp cụt, hình lăng trụ là các hình phỏng lăng trụ.

Các mặt của hình phỏng lăng trụ nằm trên hai mặt phẳng song song được gọi là các mặt đáy, các mặt khác gọi là các mặt bên.
Cắt khối phỏng lăng trụ bởi mặt phẳng song song và cách đều hai đáy ta được một thiết diện gọi là thiết diện trung bình.



Hình 5.9

Từ đây suy ra các mặt bên của hình phỏng lăng trụ là những hình tam giác hoặc những hình thang.

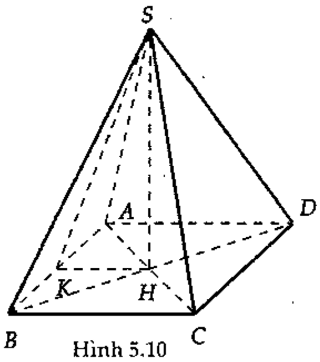
Gọi B_1, B_2, B_0 lần lượt là diện tích hai đáy và diện tích thiết diện trung bình của khối phỏng lăng trụ H, h là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy thì thể tích của H là $\boxed{V = \frac{1}{6}.\left(B_1 + B_2 + 4B_0\right).h}$ (hình 5.9).

D. Các bài toán tổng quát tính thể tích hình chóp thường gặp.

Bài toán 1: **Tính thể tích của một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (S là đỉnh, đáy là hình vuông $ABCD$) trong mỗi trường hợp được cho sau đây:**

1. $AB = a,\ ASB = \alpha$.
2. $AB = a$, **góc giữa một cạnh bên và đáy bằng β.**
3. $AB = a$, **góc giữa một mặt bên và đáy bằng γ.**
4. $AB = a$ **và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp bằng R.**
5. $AB = a$ **và khoảng cách từ đường thẳng AC đến đường thẳng SB bằng b.**

1. (Hình 5.10)



Hình 5.10

STUDY TIP: Thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy là β thì thể tích là
$$V = \frac{a^3.\tan\beta}{3\sqrt{2}} \text{ (đvtt)}$$

Lời giải

Gọi $H = AC \cap BD$.

Kẻ $KH \perp AB\ (K \in AB)$.

Ta có K là trung điểm của AB.

Khi đó: $SK = \frac{a}{2}.\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$ mà $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp KH$.

Từ định lý Py-ta-go cho tam giác SKH ta có:

$$SH = \sqrt{SK^2 - KH^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}}$

2. (Sử dụng hình 5.10)

Lời giải

Giả sử $SDH = \beta$. Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a, nên $HD = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}}\tan\beta$.

Vậy thể tích hình chóp là $\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{a^3.\tan\beta}{3\sqrt{2}}}$

3. Dựng hình tương tự ý 1.

Lời giải

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SA=SB$ mà K là trung điểm của AB, suy ra $SK\perp AB$.

STUDY TIP: Thể tích của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy là γ thì thể tích là

$$V=\frac{a^3.\tan\gamma}{6}\text{ (đvtt)}$$

Mặt khác $KH\perp AB$ nên góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là góc giữa hai tia KS và KH, hay $SKH=\gamma\Rightarrow SH=\frac{a}{2}\tan\gamma$. Vậy thể tích của khối chóp:

$$\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\tan\gamma.a^2=\frac{a^3.\tan\gamma}{6}}$$

4.

Lời giải

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ thì O nằm trên đường thẳng SH. Xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Hai điểm O và S nằm cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó: $SH=SO+OH=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$

Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\left(R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}\right).a^2}$

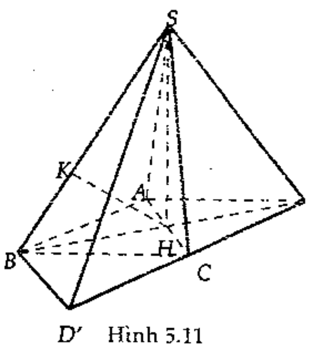
- Trường hợp 2: Hai điểm O và S nằm khác phía so với mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó: $SH=SO-OH=R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$

Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\left(R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}\right).a^2}$

5.

Lời giải



Hình 5.11

Kẻ $BD'//AC$ (D' thuộc tia DC);

$HK\perp SB$ $(K\in SB)$.

Ta thấy $BD'\perp BD$ mà $BD'\perp SH$ nên $BD'\perp(SHB)$

$\Rightarrow BD'\perp KH\Rightarrow HK\perp(SBD')$.

Do $AC//BD'\Rightarrow AC//(SBD')$.

Do đó khoảng cách giữa AC và SB là khoảng cách từ điểm H tới mặt phẳng (SBD').

Từ đó HK chính là khoảng cách giữa AC và SB hay $HK=b$.

Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác SHB ta có:

$SH=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a^2}}}$. Lúc này $\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{a}{3\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a^2}}}}$

Bài toán 2: Tính thể tích của hình chóp $S.ABCD$, biết rằng cạnh bên $SA=a$ và các cạnh còn lại đều bằng 1.

Lời giải

Đáy của hình chóp đã cho là hình thoi $ABCD$.

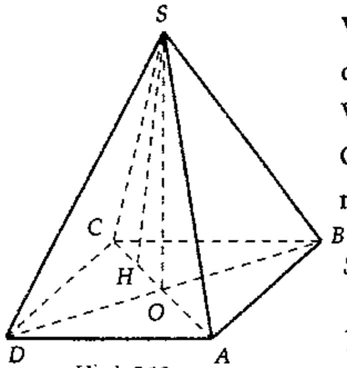
Vì $SC=SB=SD=1$, nên chân đường cao H hạ từ S xuống $ABCD$ nằm trên đường trung trực của đoạn BD.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên AC là đường trung trực của BD. Suy ra H thuộc đường thẳng AC.

Vậy đường cao của hình chóp cũng là đường cao của tam giác SAC.

Gọi O là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Vì $\Delta SBD=\Delta CBD$ (c.c.c), nên $SO=CO=AO$. Từ đó tam giác SAC vuông tại S. Vậy:

$$SH.CA=SC.SA \Leftrightarrow \boxed{SH=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}$$

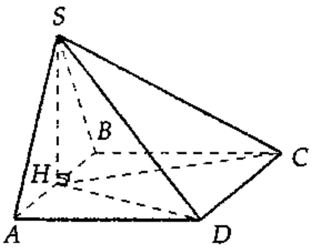


Hình 5.12

Lúc này từ SH ta có thể tính được diện tích đáy $ABCD$ bằng cách áp dụng định lý Py- ta –go cho các tam giác SHA, SHC từ đó tính được độ dài AC, BD.

Bài toán 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Giả sử H là trung điểm cạnh AB và hai mặt phẳng (SHC),(SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp nếu hình chóp có ba mặt bên là tam giác vuông.

Lời giải



Hình 5.13

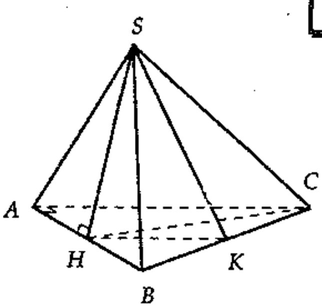
Vì (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp. Hai tam giác SAD và SBC lần lượt vuông tại A và B (theo định lí ba đường vuông góc). Tam giác SCD có $SC=SD$ (vì $HC=HD$) nên nó không thể vuông tại C hoặc D. Nếu ΔSCD vuông tại S thì $SC<CD=a$. Nhưng do ΔSBC vuông tại B nên $SC>BC=a$. Từ đó ΔSCD không phải tam giác vuông. Từ giả thiết suy ra ΔSAB phải là tam giác vuông. Do $SA=SB$ (vì $HA=HB$) nên ΔSAB vuông tại S, suy ra:

$$SH=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}.$$

Vậy $\boxed{V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}.}$

Bài toán 4: Cho khối chóp $S.ABC$ có $BC=2a$, $BAC=90°, ACB=\alpha$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác SAB cân tại S và tam giác SBC vuông. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



Hình 5.14

Tam giác ABC có $AB=2a\sin\alpha, AC=2a\cos\alpha$ nên $S_{ABC}=a^2\sin 2\alpha$.

Vì $(SAB)\perp(ABC)$ và $SA=SB$ nên $SH\perp(ABC)$ với H là trung điểm cạnh AB.

Tam giác SBC vuông ở đỉnh nào? Nếu ΔSBC vuông ở B thì $CB\perp BA$ (theo định lí ba đường vuông góc) điều này vô lí vì ΔABC vuông ở A. Tương tự nếu ΔSBC vuông ở C thì $HCB=90°$ (vô lí). Từ đó tam giác SBC vuông tại S.

Gọi K là trung điểm cạnh BC thì

$SK=\frac{1}{2}BC=a, HK // AC$ và $HK=\frac{1}{2}AC=a\cos\alpha$

$\Rightarrow SH^2=SK^2-HK^2=a^2\sin^2\alpha \Rightarrow SH=a\sin\alpha.$

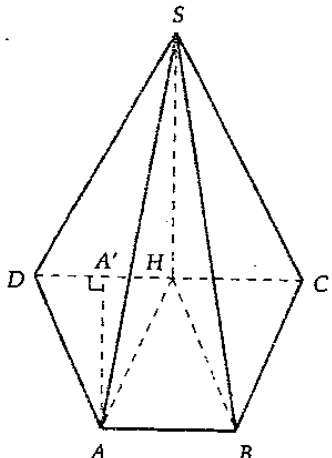
Từ đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}a^2\sin 2\alpha.a.\sin\alpha$

$$\boxed{V_{S.ABC}=\frac{1}{3}a^3\sin 2\alpha\sin\alpha.}$$

Bài toán 5 (đọc thêm): **Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(ABCD)$ ($AB // CD$). Tính thể tích hình chóp trong mỗi trường hợp sau đây:**

1. **Biết $AB=AD=BC=a, CD=2a$ và $SA=SB=SC=SD=b$.**
2. **Biết $AB=AD=BC=a, CD=2a$ và các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy những góc bằng γ.**

1.(Hình 5.14)



Hình 5.15

Lời giải

Gọi A' là hình chiếu của A trên CD; H là trung điểm của DC.

Dễ thấy $DA'=\frac{a}{2}$. Ta có: $\cos A'DA=\frac{DA'}{DA}=\frac{1}{2}$

nên $A'DA=60°$.

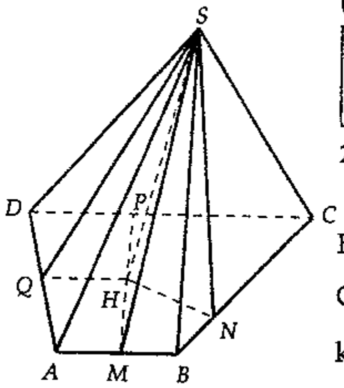
Từ đó suy ra các tam giác HAD, HBC, HAB là các tam giác đều; nên H cách đều bốn đỉnh A,B,C,D. Vì $SA=SB=SC=SD$ nên chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trên các đường trung trực của các đoạn thẳng DA, AB, BC và CD. Vậy SH chính là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Ta có: $SH=\sqrt{SD^2-DH^2}=\sqrt{b^2-a^2}$.

Lúc này $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\sqrt{b^2-a^2}.3.S_{ADH}=\sqrt{b^2-a^2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

(Do diện tích hình thang là tổng diện tích của 3 tam giác đều).

$$\boxed{\Leftrightarrow V_{SABCD}=\frac{a^2\sqrt{3\left(b^2-a^2\right)}}{4}}$$

2.



Hình 5.16

Lời giải

Hạ $SH\perp(ABCD)$; H thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Gọi M,N,P,Q lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CD và DA. Từ điều kiện đã cho ta có $SQH=SNH=SPH=SMH=\gamma$

$\Rightarrow HP=HN=HM=HQ(=r)$.

Ta có: $r=\frac{PM}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Vậy $SH=\tan\gamma.\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Từ ý 1 ta suy ra $\boxed{V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\tan\gamma.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3.\tan\gamma}{16}}$

D. Một số ghi nhớ để xác định đường cao của khối đa diện.

TRƯỜNG HỢP 1: Xác định được mặt phẳng (P_1) qua đỉnh (S) và vuông góc với (P) trong đó (P) là mặt phẳng chứa đáy. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (P_1) và H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên Δ. Khi đó SH chính là đường cao khối đa diện.

(Ví dụ chính là bài toán 4 ở phía trên).

TRƯỜNG HỢP 2: Xác định được hai mặt phẳng $(P_1),(P_2)$ qua đỉnh S của khối đa diện và vuông góc với mặt phẳng đáy (P). Gọi Δ là giao tuyến của (P_1) và (P_2) thì Δ chứa đường cao của khối đa diện đó.

Ví dụ 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Giả sử H là trung điểm cạnh AB và hai mặt phẳng $(SHC),(SHD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp nếu hình chóp có ba mặt bên là tam giác vuông.

A. $\frac{a^3}{2}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{a^3}{3}$

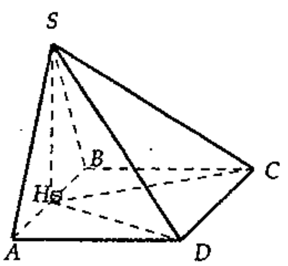
Đáp án B.

Lời giải

Vì (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp. Hai tam giác SAD và SBC lần lượt vuông tại A và B (theo định lí ba đường vuông góc). Tam giác SCD có $SC = SD$ (vì $HC = HD$) nên nó không thể vuông tại C hoặc D. Nếu ΔSCD vuông tại S thì $SC < CD = a$. Nhưng do ΔSBC vuông tại B nên $SC > BC = a$. Từ đó ΔSCD không phải tam giác vuông. Từ giả thiết suy ra ΔSAB phải là tam giác vuông. Do $SA = SB$ (vì $HA = HB$) nên ΔSAB vuông tại S, suy ra:

$SH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}$.



TRƯỜNG HỢP 3: Xét khối chóp $S.A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Sử dụng mối liên hệ giữa đường xiên, hình chiếu và góc nghiêng, ta có ba mệnh đề sau tương đương:

1) Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.

2) Các cạnh bên của hình chóp nghiêng đều trên đáy.

3) Đáy hình chóp nội tiếp được và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.

Ví dụ 5: Xét các khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB=a$. $SA=SB=SC=SD=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Khối chóp nào có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Vì khối chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nên đáy phải là tứ giác nội tiếp. Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $H=AC\cap BD$ thì $SH\perp(ABCD)$.

Đặt $BC=x(x>0)$ thì $S_{ABCD}=ax$,

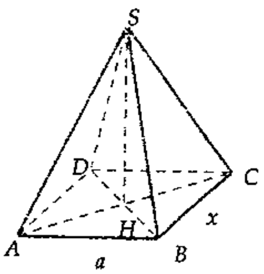
$SH^2=SA^2-AH^2=\frac{4a^2-x^2}{4}$ (ĐK $x<2a$)

Lúc này $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a.x.\sqrt{\frac{4a^2-x^2}{4}}=\frac{1}{6}.a.x.\sqrt{4a^2-x^2}$

Ta có $x.\sqrt{4a^2-x^2}\le\frac{x^2+4a^2-x^2}{2}=2a^2$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2=4a^2-x^2\Leftrightarrow x^2=2a^2\Leftrightarrow x=a\sqrt{2}$

Lúc này $V_{\max}=\frac{a^3}{3}$.



E. Một số phương pháp gián tiếp xác định thể tích khối đa diện.

Một số kết quả quan trọng:

1. Tỉ số thể tích của hình chóp tam giác.

Cho khối chóp $S.ABC$. Trên ba đường thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A',B',C' khác S. Khi đó $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

Chú ý: Tỉ số thể tích chỉ áp dụng được cho hình chóp tam giác, còn hình chóp tứ giác ,... không áp dụng được công thức này.

2. Cho hai khối đa diện H và H_1 có thể tích tương ứng là $V_1;V_2$, lúc này nếu biết $\frac{V_1}{V_2}=k$ và $V_2=a$ thì $V_1=ka$.

3. Nếu chia khối đa diện H thành các khối đa diện $H_1;H_2;...;H_n$ thì $V=V_1+V_2+...+V_n$

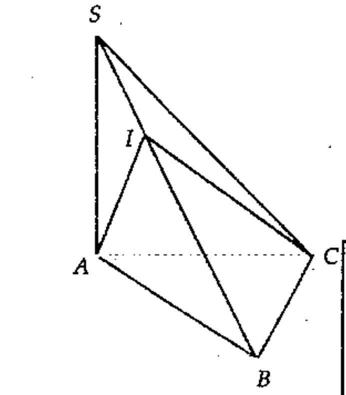
Với V là thể tích khối đa diện H, V_i là thể tích của khối đa diện H_i, $i=\overline{1,n}$

4. Phương pháp tọa độ hóa.

Ví dụ 1: Cho khối chóp $S.ABC$ với tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=2a, SA\perp(ABC)$ và $SA=a$. Giả sử I là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SI=\frac{1}{3}SB$. Thể tích khối tứ diện $SAIC$ bằng

A. $\frac{a^3}{9}$. B. $\frac{a^3}{3}$ C. $\frac{2a^3}{3}$ D. $\frac{a^3}{6}$

Đáp án A.



Lời giải

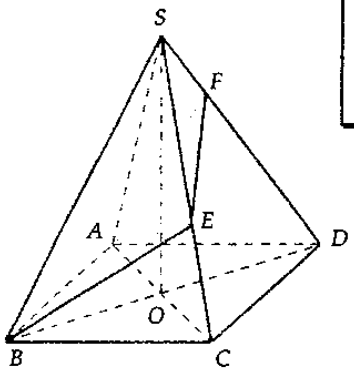
Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC=2a \Rightarrow AB=BC=a\sqrt{2}$.

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\frac{a^3}{3}$

Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có $\frac{V_{S.AIC}}{V_{SABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SI}{SB}.\frac{SC}{SC}=\frac{1}{3} \Rightarrow V_{SAIC}=\frac{a^3}{9}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. $AB=2a; BC=a;$ $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$. Giả sử E là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SE=2EC$, F là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SF=\frac{1}{3}FD$. Thể tích của khối đa diện $SABEF$ bằng

A. $\frac{2a^3}{9\sqrt{3}}$ B. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$ C. $\frac{2a^3}{27\sqrt{3}}$ D. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$



Đáp án B.

Lời giải

Ta có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{5}$.

Gọi $O=AC\cap BD$ thì $BO=\frac{DB}{2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác SBD cân tại S suy ra SO là đường cao của tam giác SBD *hay* $SO\perp BD$. Tương tự ta có $SO\perp AC$. Suy ra $SO\perp(ABCD)$

Ta có $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V_{SABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2=\frac{a^3}{\sqrt{3}}$.

Ta có $\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SE}{SC}=\frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABE}=\frac{2}{3}V_{S.ABC}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}(1)$

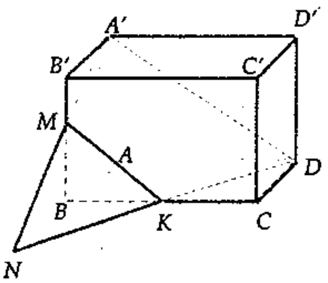
$\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ACD}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SC}.\frac{SF}{SD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AEF}=\frac{1}{6}.V_{S.ACD}=\frac{1}{12}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12\sqrt{3}}$ (2)

Từ $(1),(2)$ ta có $V_{SABEF}=V_{SABE}+V_{SAEF}=\frac{a^3}{3\sqrt{3}}+\frac{a^3}{12\sqrt{3}}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$.

Chú ý: Ở đây nhiều bạn sẽ mắc sai lầm khi áp dụng công thức tỉ số thể tích cho hình chóp tứ giác, dẫn đến chọn A là sai.

Ví dụ 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Mặt phẳng $(A'MD)$ chia hình lập phương thành hai khối đa diện. Gọi V_1; V_2 với $V_1<V_2$ lần lượt là thể tích của hai khối đa diện tạo thành. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{7}{17}$ B. $\frac{17}{7}$ C. $\frac{7}{24}$ D. $\frac{17}{24}$



Đáp án A.

Lời giải

Gọi N là giao điểm của $A'M$ và AB, k là giao điểm của DN và BC.

Mặt phẳng $(A'MD)$ chia hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'MKCD$.

Áp dụng định lý Thales ta có $\frac{A'B'}{BN}=\frac{MB'}{MB}=1 \Rightarrow BN=A'B'=a$

Tương tự $\frac{BK}{CK}=\frac{BN}{CD}=\frac{AB}{CD}=1 \Rightarrow BK=CK=\frac{a}{2}$.

Ta có công thức tính thể tích của khối tứ diện $S.ABC$ có các cạnh bên $SA;SB;SC$ đôi một vuông góc với nhau tại S là $\boxed{V=\frac{1}{6}.SA.SB.SC}$.

Lúc này áp dụng ta có $V_{BMNK}=\frac{1}{6}.BM.BN.BK=\frac{a^3}{24}$

$V_{AA'ND}=\frac{1}{6}.AA'.AN.AD=\frac{a^3}{3}$

Ta thấy $V_{AA'ND}=V_{BMNK}+V_{A'MKDAB} \Rightarrow V_{A'MKDAB}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{24}=\frac{7a^3}{24}$.

Suy ra $V_1=\frac{7a^3}{24} \Rightarrow V_2=\frac{17a^3}{24} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{17}$.

[illegible]

1. Dạng bài về khối đa diện.

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai khối đa diện có thể tích bằng nhau thì bằng nhau

B. Hai khối chóp có hai đáy là hai tam giác đều bằng nhau thì thể tích bằng nhau

C. Hai khối lăng trụ có chiều cao bằng nhau thì thể tích bằng nhau

D. Hai khối đa diện bằng nhau có thể tích bằng nhau

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng)

Câu 2: Mỗi cạnh của một khối đa diện là cạnh chung của bao nhiêu mặt của khối đa diện:

A. Hai mặt B. Ba mặt

C. Bốn mặt D. Năm mặt

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Câu 3: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng:

A. Mỗi hình đa diện có ít nhất bốn đỉnh

B. Mỗi hình đa diện có ít nhất ba đỉnh

C. Số đỉnh của một hình đa diện lớn hơn hoặc bằng số cạnh của nó

D. Số mặt của một hình đa diện lớn hơn hoặc bằng số cạnh của nó.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 4: Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất:

A. Năm cạnh B. Bốn cạnh

C. Ba cạnh D. Hai cạnh

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 5: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

A. Hình lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy.

B. Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật.

C. Hình lăng trụ đều có các cạnh bên bằng đường cao của lăng trụ.

D. Hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng nhau

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 6: Khối lập phương thuộc loại khối đa diện đều nào?

A. $\{3;3\}$ B. $\{4;3\}$ C. $\{3;4\}$ D. $\{5;3\}$

(Trích đề thi thử THPT Hà Trung)

Câu 7: Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kỳ bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng:

A. $\dfrac{nV}{S}$ B. $\dfrac{V}{nS}$ C. $\dfrac{3V}{S}$ D. $\dfrac{V}{3S}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần I)

Câu 8: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng?

A. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều

B. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ có tất cả các cạnh bằng nhau

C. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau

D. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ có tất cả các mặt là đa giác đều

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 9: Cho khối chóp có đáy là đa giác lồi có 7 cạnh. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Số đỉnh của khối chóp bằng 15

B. Số mặt của khối chóp bằng số đỉnh của nó

C. Số mặt của khối chóp bằng 14

D. Số cạnh của khối chóp bằng 8

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 10: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

A. Hình chóp đều là hình chóp có tất cả các cạnh bằng nhau

B. Trong một hình chóp đều các góc giữa một cạnh bên và mặt đáy thì bằng nhau

C. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đáy

D. Hình chóp đều là hình chóp có tất cả các cạnh bên bằng nhau và đáy là đa giác đều

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 11: Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy một điểm M nằm giữa A và B, một điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (MCD) và (NAB) ta chia khối tứ diện đã cho thành bốn khối tứ diện:

A. $AMCB, AMND, BMCN, BMND$

B. $AMCD, AMND, BMCN, BMND$

C. $BMCD, BMND, AMCN, AMND$

D. $AMCN, AMND, AMCD, BMCN$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 12: Cho một hình đa diện. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Một cạnh là cạnh chung của ít nhất ba mặt

B. Một đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh

C. Một đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt

D. Mỗi mặt có ít nhất ba cạnh

Câu 13: Số mặt đối xứng của hình tứ diện đều là bao nhiêu?

A. 1 B. 4 C. 6 D. 8

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 14: Số đỉnh của một hình bát diện đều là bao nhiêu?

A. 10 B. 8 C. 6 D. 12

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 15: Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây đúng?

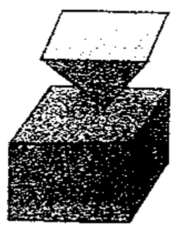
A. Hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung

B. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung

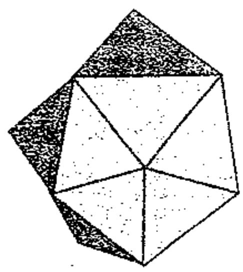
C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt

D. Hai mặt bất kì có ít nhất một cạnh chung

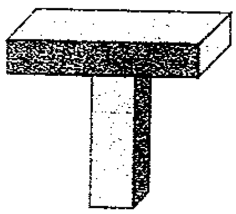
Câu 16: Hình nào dưới đây không phải là một khối đa diện?



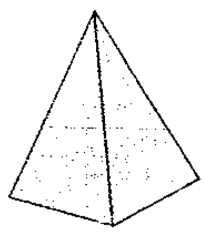
A.



B.



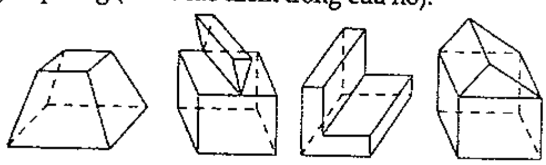
C.



D.

(Trích đề tih thử THPT chuyên Hưng Yên – lần 2)

Câu 17: Mỗi hình dưới đây gồm một số hữu hạn đa giác phẳng (kể cả các điểm trong của nó).



Số đa diện lồi trong các hình vẽ trên là:

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 18: Một hình chóp có 46 cạnh có bao nhiêu mặt?

A. 24 B. 46 C. 69 D. 25

(Trích đề thi thử THPT Yên Phong)

Câu 19: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Thể tích của khối lăng trụ được tính theo công thức $V = \frac{1}{3}S.h$ (*S*: diện tích đáy; *h*: chiều cao)

B. Thể tích của khối lăng trụ được tính theo công thức $V = S.h$ (*S*: diện tích đáy; *h*: chiều cao)

C. Khối lăng trụ đứng có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy

D. Khối lăng trụ đứng có các mặt bên là hình chữ nhật

(Trích đề thi thử THPT Phạm Hồng Thái)

Câu 20: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI ?

A. Khối tứ diện là khối đa diện lồi

B. Lắp ghép hai khối hộp luôn được một khối đa diện

C. Khối hộp là khối đa diện lồi

D. Khối lăng trụ tam giác đều là khối đa diện lồi

(Trích đề thi thử THPT Ngô Sỹ Liên)

Câu 21: Khối mười hai mặt đều là khối đa diện đều loại:

A. {3,5} B. {3,6} C. {5, 3} D. {4,4}

(Trích đề thi thử THPT Ngô Sỹ Liên)

Câu 22: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh

B. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và mặt bằng nhau.

C. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau

D. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau

(Trích đề thi thử THPT Ngô Sỹ Liên)

Câu 23: Khối đa diện đều loại {4;3} có số đỉnh là:

A. 4 B. 6 C.8 D. 10

2. Dạng bài tập tính thể tích khối đa diện.

Câu 24: Hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng *a*. Thể tích khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

(Trích đề thi thử số 4 tạp chí TH&TT)

Câu 25: Cho hình chóp tam giác đều đáy có cạnh bằng *a*, góc tạo bởi các mặt bên và đáy bằng 60^0. Thể tích khối chóp là:

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$

C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $V = \frac{a^3}{8}$

(Trích đề thi thử số 4 tạp chí TH&TT)

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 9, SB = 4, SC = 8$ và đôi một vuông góc. Các điểm A', B', C' thỏa mãn $SA = 2.SA', SB = 3.SB', SC = 4.SC'$. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ là:

A. 24 B. 16 C. 2 D. 12

(Trích đề thi thử số 5 tạp chí TH&TT)

Câu 27: Cho $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có cạnh a. Tính thể tích khối tứ diện $ACD'B'$.

A. $\frac{1}{3}a^3$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

(Trích đề thi thử số 5 tạp chí TH&TT)

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AB=2, ABC=60^0$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC. Góc giữa SA và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 2 D. $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 29: Cho một hình trụ, gọi V, V' lần lượt là thể tích khối trụ và thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp bên trong hình trụ đó. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ là:

A. $\frac{1}{\pi}$ B. π C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{\pi}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 30: Ba mặt chung một đỉnh của một khối hộp chữ nhật có diện tích lần lượt là $24(cm^2), 28(cm^2), 42(cm^2)$. Tính thể tích khối hộp đó.

A. $V=168(cm^3)$ B. $V=188(cm^3)$

C. $V=94(cm^3)$ D. $V=336(cm^3)$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD=2a$, mặt SAC là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

(Trích đề thi thử THPT Kim Thành – Hải Dương)

Câu 32: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B; $AB=a$; $BC=a\sqrt{2}$; mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt đáy (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối lăng trụ là:

A. $a^3\sqrt{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 33: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AD; M là trung điểm CD; cạnh bên SB hợp với đáy góc 60^0. Thể tích của khối hình chóp $S.ABM$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$

C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 34: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC=2a, BAC=120^0$, biết $SA\perp(ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{3}$ B. $\frac{a^3}{9}$ C. $a^3\sqrt{2}$ D. $\frac{a^3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng)

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=a^3$ B. $V=\frac{a^3}{2}$

C. $V=\frac{3a^3}{2}$ D. $V=3a^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Trần Phú – Hải Phòng)

Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Tính theo V thể tích khối tứ diện $C'.ABC$.

A. $\frac{V}{3}$ B. $\frac{V}{12}$ C. $\frac{V}{9}$ D. $\frac{V}{6}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 37: Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua B, trung điểm F của cạnh SD và song song với AC chia khối chóp thành hai phần, tính tỉ số thể tích của phần chứa đỉnh S và phần chứa đáy.

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hạ Long)

Câu 38: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=AC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3\sqrt{2}$. B. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. D. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội)

Câu 39: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a; BC = 2a; A'C = \sqrt{21}a$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đó là:

A. $V = 8a^3$ B. $V = \frac{8}{3}a^3$

C. $V = 4a^3$ D. $V = 16a^3$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Câu 40: Một kim tự tháp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng *2500* trước công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao *154m*; Độ dài cạnh đáy là *270m*. Khi đó thể tích của khối kim tự tháp là:

A. 3.742.200 B. 3.640.000

C. 3.500.000 D. 3.545.000

(Trích đề thi thử "THPT chuyên Bắc Cạn; THPT Phạm Công Bình")

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABC$. Trên 3 cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy 3 điểm A', B', C' sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$; $SB' = \frac{1}{4}SB; SC' = \frac{1}{2}SC$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S'.A'B'C'$. Khi đó tỷ số $\frac{V'}{V}$ là:

A. 12 B. $\frac{1}{12}$ C. 24 D. $\frac{1}{24}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 42: Người ta gọt một khối lập phương bằng gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết cạnh của khối lập phương bằng a. Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó.

A. $\frac{a^3}{8}$ B. $\frac{a^3}{12}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{a^3}{6}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 42: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0; $AB = a$. Khi đó thể tích của khối $ABCC'B'$ bằng:

A. $a^3\sqrt{3}$ B. $\frac{3a^3}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 44: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của cạnh AB. Mặt phẳng $(B'C'M)$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích của hai phần đó:

A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{7}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{8}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Bắc Cạn)

Câu 45: Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ và AC' hợp với đáy một góc 60^0.

A. $V = 2a^3\sqrt{6}$ B. $V = a^3\sqrt{2}$

C. $V = 3a^3\sqrt{2}$ D. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh)

Câu 46: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ và M là trung điểm của AB. Lựa chọn phương án đúng.

A. $V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{2}V_{A.A'B'C'}$

B. $V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$

C. $V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

D. $V_{ABCC'} = 2V_{A'BCC'}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Vị Thanh)

Câu 47: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3$ B. $V = \frac{a^3}{3}$

C. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ D. $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$

(Trích đề thi thử THPT Hà Trung)

Câu 48: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'B'C'D'$ theo V.

A. $\frac{V}{8}$ B. $\frac{8V}{27}$ C. $\frac{V}{27}$ D. $\frac{27V}{64}$

(Trích đề thi thử THPT Hà Trung)

Câu 49: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ B. $V = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

C. $V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ D. $V = \sqrt{2}a^3$

(Trích đề thi thử THPT Hà Trung)

Câu 50: Một hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b và tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của khối chóp đó là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\sin\alpha$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\sin\alpha$

C. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\cos\alpha$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\cos\alpha$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần I)

Câu 51: Một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Thể tích của khối chóp đó là:

A. $\frac{a^2}{4}\sqrt{3b^2-a^2}$ B. $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$

C. $\frac{a^2}{6}\sqrt{3b^2-a^2}$ D. $a^2\sqrt{3b^2-a^2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần I)

Câu 52: Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng a,b,c. Thể tích của khối hộp đó là:

A. $V=\sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}}$

B. $V=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}$

C. $V=abc$

D. $V=a+b+c$

(Trích đề thi thử "THPT chuyên KHTN lần I; tạp chí TH&TT lần 7").

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, cạnh bên BC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Thể tích của khối chóp đó bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần I)

Câu 54: Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a, góc nhọn 60^0 và đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của hình hộp. Thể tích khối hộp đó là:

A. a^3 B. $a^3\sqrt{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần I)

Câu 55: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA'=\frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB,SC,SD lần lượt tại B',C',D'. Khi đó thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$ là:

A. $\frac{V}{81}$ B. $\frac{V}{3}$ C. $\frac{V}{9}$ D. $\frac{V}{27}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 56: Nếu 3 kích thước của một khối hộp cùng tăng lên 3 lần thì thể tích của nó tăng lên:

A. 81 lần. B. 8 lần C. 64 lần D. 27 lần

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 57: Một lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a. Cạnh bên bằng b và hợp với mặt đáy góc $60°$. Thể tích hình chóp $A'.BCC'B'$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a^2b}{4\sqrt{3}}$ B. $\frac{a^2b}{4}$ C. $\frac{a^2b}{2}$ D. $\frac{a^2b\sqrt{3}}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B biết $AB=a, AC=2a$. $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{3a^3}{4}$ B. $\frac{a^3}{2}$ C. $\frac{a^3}{4}$ D. $\frac{3a^3}{8}$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 59: Cho khối chóp $S.ABC$ với $SA\perp SB, SB\perp SC$, $SC\perp SA$. Biết SA,SB,SC lần lượt là 3, 5, 6. Thể tích của khối chóp đó bằng:

A. 20 B. 10 C. 15 D. 30

(Trích đề thi thử THPT Phạm Công Bình)

Câu 60: Cho khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h. Tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V=Bh$ B. $V=\frac{1}{3}Bh$

C. $V=3Bh$ D. $V=\frac{1}{2}Bh$

(Trích đề thi thử THPT Kiến An)

Câu 61: Khi chiều cao của một khối chóp đều tăng lên 2 lần nhưng mỗi cạnh đáy lại giảm đi 2 lần thì thể tích của chúng tăng, giảm như thế nào?

A. Thể tích của chúng tăng lên 2 lần.

B. Thể tích của chúng giảm đi 2 lần.

C. Thể tích của chúng tăng lên 4 lần.

D. Thể tích của chúng tăng lên 8 lần.

(Trích đề thi thử THPT Kiến An)

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a; mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy và tam giác SAB vuông cân tại S. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ B. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

C. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

(Trích đề thi thử THPT Kiến An)

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh $B, AB=a, SA=2a$ vad SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB,SC. Tính thể tích khối tứ diện $S.AHK$.

A. $V_{S.AHK}=\frac{4a^3}{15}$ B. $V_{S.AHK}=\frac{8a^3}{45}$

C. $V_{S.AHK}=\frac{8a^3}{15}$ D. $V_{S.AHK}=\frac{4a^3}{5}$

(Trích đề thi thử THPT Kiến An)

Câu 64: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$; tam giác ABC vuông tại B có $AB=a, BC=2a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{2a^3}{3}$ B. $V=4a^3$

C. $V=\frac{4a^3}{3}$ D. $V=2a^3$

(Trích đề thi thử THPT Kiến An)

Câu 65: Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$; $SA\perp(ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng 60°. Thể tích hình chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\sqrt{2}a^3$ B. $3a^3$

C. $\sqrt{6}a^3$ D. $3\sqrt{2}a^3$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

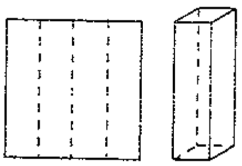
Câu 66: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC=a$, $ACB=60°$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ theo a là:

A. $a^3\sqrt{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Hà Tĩnh)

Câu 67: Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là $4cm$, người ta gấp nó thành 4 phần đều nhau rồi dựng lên thành bốn mặt xung quanh của một hình lăng trụ tứ giác đều như hình vẽ.

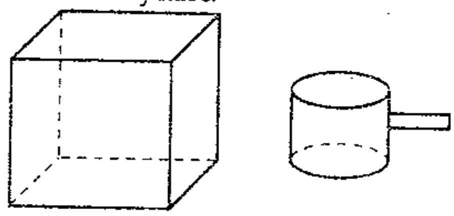


Hỏi thể tích của khối lăng trụ này là bao nhiêu?

A. $4cm^3$ B. $16cm^3$ C. $\frac{4}{3}cm^3$ D. $\frac{64}{3}cm^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 68: Cho một cái bể nước hình hộp chữ nhật có ba kích thước 2m, 3m, 2m lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của lòng trong đựng nước của bể. Hàng ngày nước ở trong bể được lấy ra bởi một cái gáo hình trụ có chiều cao là $5cm$ bà bán kính đường tròn đáy là $4cm$. Trung bình một ngày được múc ra 170 gáo nước để sử dụng (Biết mỗi lần múc là múc đầy gáo). Hỏi sau bao nhiêu ngày thì bể hết nước biết rằng ban đầu bể đầy nước?



A. 280 ngày. B. 281 ngày.

C. 282 ngày. D. 283 ngày.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong)

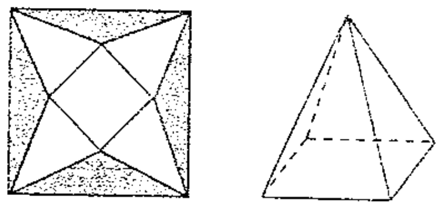
Câu 69: Một cái cốc hình trụ cao $15cm$ đựng được 0,5 lít nước. Hỏi bán kính đường tròng đáy của cái cốc sấp sỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng thập phân thứ hai) ?

A. 3,26 cm. B. 3,27 cm.

C. 3,25cm. D. 3,28cm.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 70: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 1m như hình vẽ dưới đây. Người ta cắt phần tô đậm của nhôm rồi gập lại thành một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng x (cm) sao cho bốn đỉnh của hình vuông gập lại thành đỉnh của hình chóp. Giá trị của x để khối chóp nhận được có thể tích lớn nhất là:



A. $x=\frac{1}{2}$ B. $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $x=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

(Trích đề thi thử "THPT Can Lộc – Hà Tĩnh; THPT chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình")

Câu 71: Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147m, cạnh đáy dài 230m. Thể tích của nó là:

A. $2592100\,m^2$ B. $2592100\,m^3$

C. $7776300\,m^3$ D. $3888150\,m^3$

(Trích đề thi thử THPT Can Lộc – Hà Tĩnh)

Câu 72: Cho khối chóp $S.ABC$ có ba cạnh bên $SA=SB=SC=a$ vuông góc với nhau từng đôi một. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

A. $\frac{1}{6}a^3$ B. $\frac{1}{2}a^3$ C. a^3 D. $\frac{1}{3}a^3$

(Trích đề thi thử THPT Phạm Hồng Thái)

Hướng dẫn giải chi tiết

1. Dạng bài tập về khối đa diện

Câu 1: Đáp án D.

Phương án A. Sai: Xem lại định nghĩa

"Hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có 1 phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia".

Phương án B. Sai vì $V_{chóp} = h.S_{đáy}$ nên hai chóp có thể tích bằng nhau thì cần thêm điều kiện đường cao bằng nhau.

Phương án C. Sai $V_{lăng\ trụ} = h.S_{đáy}$

Thiếu điều kiện hai đáy có diện tích bằng nhau

Phương án D. Đúng: Vì hai khối đa diện bằng nhau được tạo thành từ một phép dời hình, nó bảo toàn khoảng cách giữa các điểm. Do đó thể tích của chúng bằng nhau.

Câu 2: Đáp án A.

Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng 2 đa giác

Câu 3: Đáp án A.

Phương án A. Đúng: Ta chứng minh như sau:

Gọi M_1 là một mặt khối đa diện, M_1 là đa giác nên có ít nhất 3 cạnh c_1, c_2, c_3

M_2 chung cạnh C_1 với M_1 $(M_2 \neq M_1)$

M_3 chung cạnh c_2 với $M_1(M_3 \neq M_1)$

Vì $C_1 \in M_3 \Rightarrow M_2 \neq M_3$.

Gọi M_4 là mặt có chung cạnh c_3 với $M_1(M_4 \neq M_1)$.

Vì M_4 không chứa c_1, c_2 nên M_4 khác M_2 và M_3

Do đó khối đa diện có ít nhất 4 mặt

$\Rightarrow$ Mỗi hình đa giác có ít nhất 4 đỉnh.

Phương án B. Sai.

Phương án C. Sai: Ví dụ như hình chóp tam giác có 4 đỉnh nhưng có 6 cạnh

Phương án D. Sai: Lấy ví dụ là chóp tam giác có 4 mặt nhưng có 6 cạnh.

Câu 4: Đáp án C.

Câu 5: Đáp án D.

Phương án A. Đúng: Vì hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều nên lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy.

Phương án B. Đúng.

Phương án C. Đúng.

Phương án D. Sai: Do lăng trụ đều có cạnh đáy và cạnh bên có thể không bằng nhau.

Câu 6: Đáp án B.

Mỗi khối đa diện đều có thể xác định bởi ký hiệu $\{p, q\}$ trong đó

p = số các cạnh của mỗi mặt (hoặc số các đỉnh của mỗi mặt)

q = số các mặt gặp nhau ở một đỉnh (hoặc số các cạnh gặp nhau ở mỗi đỉnh).

Câu 7: Đáp án C.

Ta có, từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đều n mặt nối với các đỉnh trên hình chóp, sẽ chia khối chóp ban đầu thành n khối chóp có đỉnh là điểm đã cho, đáy là các mặt của khối chóp. Lúc này ta có:

$$V = \frac{1}{3}.\sum dS \Rightarrow \sum d = \frac{3V}{S}$$

Câu 8: Đáp án A.

Phương án A. Đúng.

Phương án B. Sai: Hình lăng trụ đều chỉ cần là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều không nhất thiết tất cả các cạnh phải bằng nhau.

Phương án C. Sai: Điều kiện để tạo thành một lăng trụ đều là một lăng trụ đứng trước tiên.

Phương án D. Sai: Theo định nghĩa lăng trụ đều chỉ cần đáy là đa giác đều.

Câu 9: Đáp án B

Câu 10: Đáp án A.

Phương án A. Sai: Hình chóp đều thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ Đáy là đa giác đều

+ Chân đường cao của hình chóp là tâm của đáy

Phương án B. Đúng: Hình chóp đều có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy

Phương án C. Đúng.

Phương án D. Đúng.

Câu 11: Đáp án C.

Câu 12: Đáp án A.

Phương án A. Sai: Mỗi cạnh là cạnh chung của ít nhất 2 mặt

Phương án B. Đúng

Phương án C. Đúng.

Phương án D. Đúng: Vì mỗi mặt phải là đa giác nên có ít nhất 3 cạnh.

Câu 13: Đáp án C.

Hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng là 6 mặt phẳng đi qua 1 cạnh và trung điểm của cạnh đối diện.

Câu 14: Đáp án C.

Câu 15: Đáp án C.

Phương án A. Sai: Có thể có 2 cạnh không giao nhau

Phương án B. Sai: Hai mặt bất kì có thể song song với nhau và không có điểm chung.

Phương án C. Đúng.

Phương án D. Sai: Hai mặt có thể song song và không giao nhau.

Câu 16: Đáp án D.

A,B,C đều là khối đa diện

D không là khối đa diện do không thỏa mãn tính chất đầu tiên:

"Hai đa giác phân biệt có thể có hoặc không có điểm chung hoặc chỉ có 1 điểm chung hoặc chỉ có 1 cạnh chung".

Câu 17: Đáp án B.

Hai đa diện lồi là hình 1 và 4.

Câu 18: Đáp án A.

Giả sử đa giác đáy có n cạnh.

Suy ra có n tam giác mặt bên. Suy ra đa giác có $2n$ cạnh.

Suy ra $2n = 46 \Leftrightarrow n = 23$

Suy ra có 23 mặt bên và 1 mặt đáy.

Do đó có tổng cộng là 24 mặt.

Câu 19: Đáp án A.

Phương án A. Sai: Thể tích khối lăng trụ $S = Sh$

Phương án B, C, D: Đúng.

Câu 20: Đáp án B.

Phương án A. Đúng

Phương án B. Sai: Không phải lúc nào lắp ghép cũng được 1 khối đa diện vì có thể lắp ghép sao cho 2 đa giác phân biệt có 2 cạnh chung trở lên. Suy ra B không thỏa mãn tính chất 1.

Phương án C, D: Đúng.

Câu 21: Đáp án C.

Câu 22: Đáp án D.

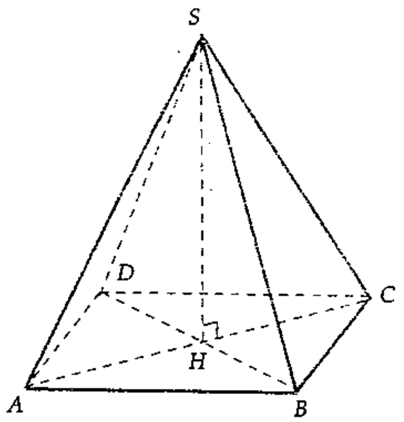
Ví dụ minh họa là hình tứ diện đều

Câu 23: Đáp án C.

Khối đa diện đều loại {4;3} tức là khối có mỗi mặt là 4 cạnh tức là khối lập phương. Vậy đáp án C.

2. Dạng bài tập tính thể tích khối đa diện

Câu 24: Đáp án B.



Giả sử chóp $S.ABCD$ là chóp tứ giác đều như bài ra

$\Rightarrow SA = SB = SC = SD = a$

$AB = AD = BC = CD = a.$

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow BD = AC = a\sqrt{2}$

Gọi $BD \cap AC = \{H\} \Rightarrow H$ là trung điểm của BD

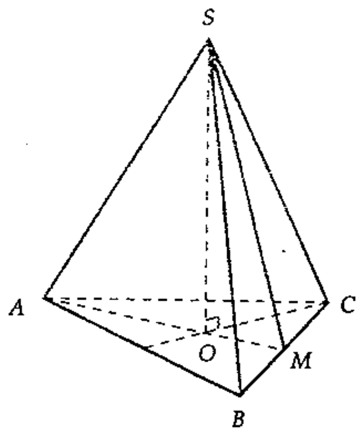
$$\Rightarrow DH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ΔSDH có $H = 90^\circ$ (do $SH \perp (ABCD)$)

$$\Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{S_{ABCD}.SH}{3} = \frac{a^2.a\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 25: Đáp án A.



Giả sử chóp $S.ABC$ là chóp tam giác đều có:

$AB = BC = AC = a$.

Gọi O là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Giả sử $AO \cap BC = \{M\}$

Vì $((SBC);(ABC)) = 60^0 \Rightarrow SMO = 60^\circ$

ΔSMO có $O = 90^\circ, SMO = 60^\circ$

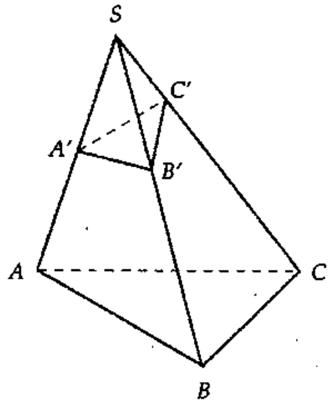
$$\Rightarrow SO = OM.\tan SMO = \frac{AM}{3}.\tan 60^\circ = \frac{AM\sqrt{3}}{3}$$

Xét ΔAMB có: $AMB = 90^\circ, ABM = 60^\circ$ (do ΔABC đều)

$$\Rightarrow AM = AB.\sin ABM = a.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{SO.S_{\Delta ABC}}{3} = \dfrac{SO.AM.BC}{6} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = a^3.\dfrac{\sqrt{3}}{24}.$

Câu 26: Đáp án C.



Áp dụng công thức:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

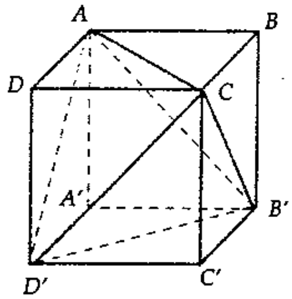
$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{V_{S.ABC}}{24}$$

Xét $S.ABC$ có $\begin{cases} CS\perp SB \\ CS\perp SA \end{cases}\Rightarrow CS\perp(SBA)$

$$V_{S.ABC}=V_{C.SABC}=\frac{CS.S_{\Delta SAB}}{3}=\frac{8.9.4}{2.3}=48$$

Vậy $V_{S.A'B'C'}=\frac{48}{24}=2$.

Câu 27: Đáp án A.



Nhìn vào hình vẽ ta thấy nếu đi tính trực tiếp thể tích khối tứ diện $ACD'B'$ là khá lâu, do đó ta sẽ đi tìm một cách gián tiếp như sau:

Lời giải

Ta có

$$V_{ACD'B'}=V_{ABCD.A'B'C'D'}-V_{D'ADC}-V_{B'ACB}-V_{CB'C'D'}-V_{AA'B'D'}$$

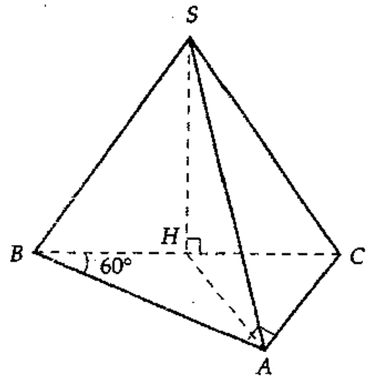
.

Mặt khác ta nhận thấy

$$V_{D'ADC}=V_{B'ACB}=V_{CB'C'D'}=V_{AA'B'D'}=\frac{1}{3}a.\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{1}{6}a^3$$

Do vậy $V_{ACD'B'}=a^3-4.\frac{1}{6}a^3=\frac{a^3}{3}$.

Câu 28: Đáp án D.



+) Xét ΔABC:

$$\begin{cases} A=90^0 \\ AB=2 \\ ABC=60^0 \end{cases}\Rightarrow BC=\frac{AB}{\cos 60^0}=4$$

$\Rightarrow$ Tam giác SHA vuông cân tại H.

$BH=HC=AH=\frac{BC}{2}\Rightarrow AH=2.$

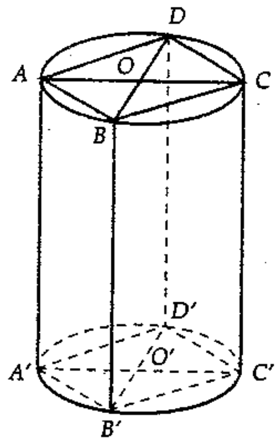
+) Xét ΔSHA:

$$\begin{cases} H=90^0 \\ AH=2 \\ SAH=45^0\ (do\ (SA;(ABC))=45^0 \end{cases}$$

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{SH.S_{\Delta ABC}}{3}=\frac{2.AB.BC.\sin 60^0}{3.2}$

$$=\frac{2.2.4.3}{3.2.2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Câu 29: Đáp án C.



Giả sử khối trụ và lăng trụ tứ giác đều đã cho biểu diễn như hình vẽ

Giả sử $AC=d=2$ Diện tích hình tròn đáy là πR^2.

Suy ra: $V_{khtru}=S_{đáy}.AA'=\pi R^2.AA'$

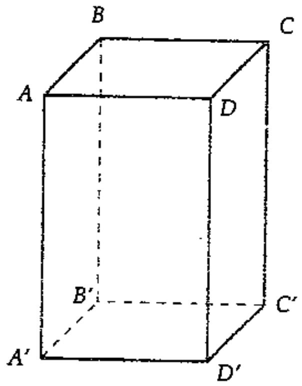
Lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trụ có đáy là hình vuông $ABCD$ có $AC=d=2r$.

$\Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{4r^2}{2} = 2r^2.$

Suy ra: $V_{lăng\ trụ} = S_{ABCD}.AA' \Rightarrow V' = 2r^2.AA'$

$\Rightarrow \dfrac{V'}{V} = \dfrac{2r^2AA'}{\pi r^2.AA'} = \dfrac{2}{\pi}.$

Câu 30: Đáp án A.



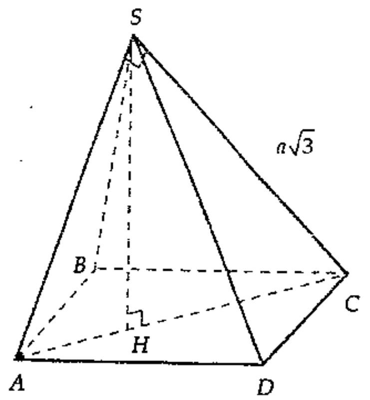
Giả sử khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $\begin{cases} S_{ABB'A'} = 24 \\ S_{ABCD} = 28 \quad (1) \\ S_{BCC'B'} = 42 \end{cases}$

Đặt $AB = a, BB' = b, BC = c.$

$(1) \Rightarrow \begin{cases} ab = 24 \\ bc = 42 \\ ac = 28 \end{cases} \Rightarrow (abc)^2 = 24.42.28 = 168^2$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.BB'.BC = abc = 168$

Câu 31: Đáp án A.



$ABCD$ là hình vuông

$BD = 2a \Rightarrow AB = BD.\cos 45^0 = a\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = 2a^2$

Tam giác SAC có:

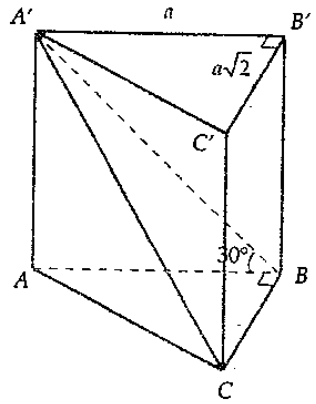
$\begin{cases} ASC = 90^0 \\ AC = BD = 2a \Rightarrow SA = \sqrt{AC^2 - SC^2} = a \\ SC = a\sqrt{3} \end{cases}$

Ta có:

$\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{SH.S_{ABCD}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a.\dfrac{1}{3}2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}.$

Câu 32: Đáp án D.



$\begin{cases} A'A \perp (ABC) \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left((A'BC);(ABC)\right) = A'BA = 30^0.$

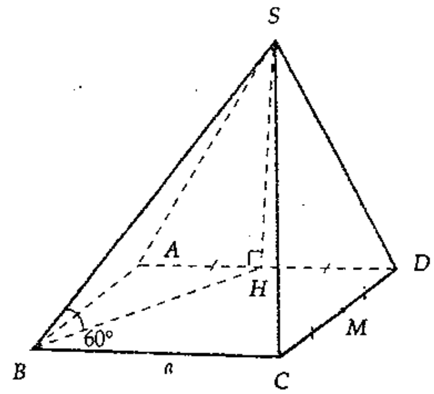
Xét $\Delta AA'B$ có:

$\begin{cases} A = 90^0 \\ A'BA = 30^0 \Rightarrow AA' = AB\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ AB = a \end{cases}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.BC}{2} = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Do đó: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{6}\sqrt{6}.$

Câu 33: Đáp án D.



$ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AH = HD = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Delta ABH: \begin{cases} A = 90^0 \\ AB = a \\ AH = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow BH = \sqrt{AH^2 + AH^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a.$

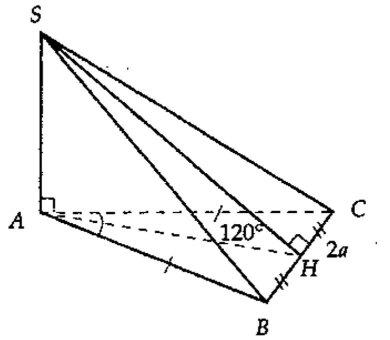
+) $SH \perp (ABCD) \Rightarrow (SB;(ABCD)) = SBH = 60^0$

$$\Delta SBH:\begin{cases} SHB = 90^0 \\ SBH = 60^0 \Rightarrow SH = BH.\tan 60^0 = \dfrac{\sqrt{15}}{2}a \\ BH = \dfrac{R5}{2}a. \end{cases}$$

$$S_{\Delta AMB} = \frac{DA.AB}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMB} = \frac{SH.S_{\Delta AMB}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{2}a.\frac{a^2}{3.2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}.$$

Câu 34: Đáp án B.



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = HC = \dfrac{BC}{2} = a.$

$$+)\ \Delta AHB:\begin{cases} H = 90^0 \\ BAH = \dfrac{120^0}{2} = 60^0 \Rightarrow AH = BH.\cot 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}. \\ BH = a \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{AH.BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{2a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$$

+) ΔSAH có:

$$\begin{cases} A = 90^0 \\ SH \perp (ABC) \\ AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow SHA = \big((SBC),(ABC)\big) = 45^0.$$

$$\Rightarrow \Delta SAH \text{ vuông cân tại A} \Rightarrow SA = AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{SA.S_{\Delta ABC}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3.3} = \frac{a^3}{9}.$$

Câu 35: Đáp án A.

Do tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên đường cao kẻ từ S xuống AB của tam giác SAB chính là chiều cao của hình chóp:

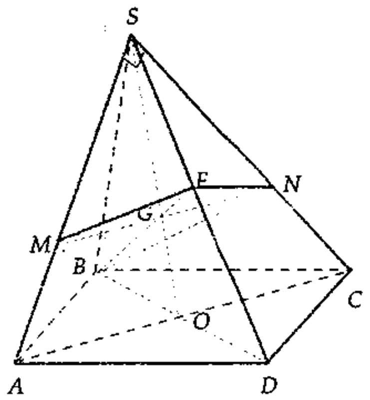
Vậy lúc này: $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{(2a\sqrt{3})}{2}.\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^3$

Câu 36: Đáp án D.

Ta có hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và khối chóp $C'.ABC$ có chung chiều cao kẻ từ C' xuống ABC. Lúc này ta có:

$$\frac{V_{C'.ABC}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3}.\frac{S_{ABC}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{C'.ABC} = \frac{V}{6}$$

Câu 37: Đáp án B.



Gọi O là tâm của tứ giác $ABCD$. Gọi G là giao điểm của SO và BD.

Trong (SAC), đường thẳng qua G và song song với AC cắt SA, SC lần lượt tại M, N. Ta có AO, BF lần lượt là hai trung tuyến của tam giác SBD nên G là trọng tâm của tam giác SBD. $\Rightarrow \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$

Lúc này mặt phẳng đã cho là mặt phẳng $(BMFN)$.

Ta có

$$\frac{V_{SMBF}}{V_{SABD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SF}{SD} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow V_{SMBF} = \frac{V_{SABD}}{3} = \frac{V_{SABCD}}{6}$$

Tương tự ta cũng có $V_{SBNF} = \dfrac{V_{SABCD}}{6}$.

Vậy $\dfrac{V_{SBMFN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{V_{SBMFN}}{V_{BMFNCAD}} = \dfrac{1}{2}$.

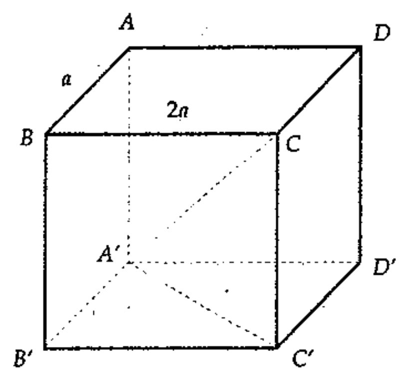
Câu 38: Đáp án B.

Do hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy nên SA là đường cao của hình chóp.

Hình vuông $ABCD$ có $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 39: Đáp án A.



Ta có: $A'C'=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{5}$.

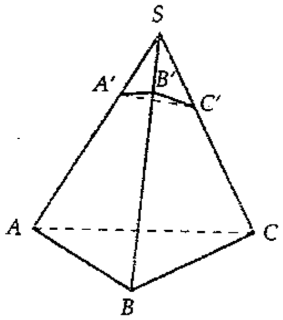
$\Rightarrow C'C=\sqrt{A'C^2-A'C'^2}=\sqrt{21a-5a}=4a$.

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=C'C.S_{ABCD}=4a.a.2a=8a^3$.

Câu 40: Đáp án A.

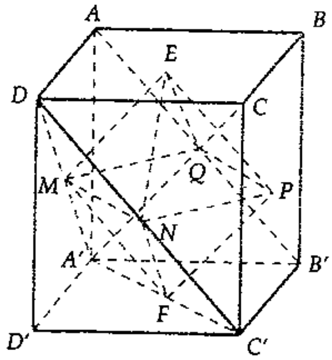
$V_{kt}=\frac{1}{3}.h.đáy^2=\frac{1}{3}.154.270^2=3742200\left(m^3\right)$.

Câu 41: Đáp án D.



Ta có: $\frac{V'}{V}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$.

Câu 42: Đáp án D.



Ta thấy khối tám mặt đều đó thực chất là 2 khối chóp có chung đáy được đánh dấu như hình trên: $EMNPQF$.
Xét $\Delta A'DC'$ có: M,N lần lượt là trung điểm của DA' và DC' $\Rightarrow MN=\frac{1}{2}A'C'$ (tính chất đường trung bình)

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là khối lập phương cạnh a

$\Rightarrow A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh a

$\Rightarrow A'C'=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$

Do vậy $MN=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

+ Nhận thấy $MNPQ$ là một hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

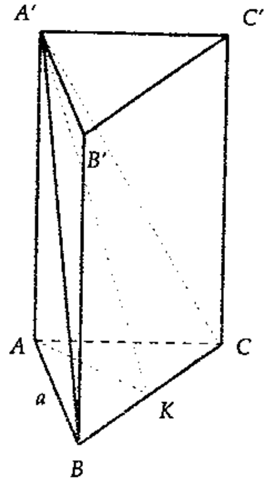
$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{a^2}{2}$.

+ $d\left(E;\left(MNPQ\right)\right)=\frac{1}{2}.EF=\frac{1}{2}a$

$\Rightarrow V_{EMNPQF}=2.V_{E.MNPQ}=2.\frac{1}{3}.d\left(E;\left(MNPQ\right)\right).S_{MNPQ}$

$=2.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 43: Đáp án C.



Gọi K là trung điểm của BC $\Rightarrow AK\perp BC$ (1)

Ta có: $A'B=\sqrt{A'A^2+AB^2}=\sqrt{A'A^2+AC^2}=A'C$

$\Rightarrow \Delta A'BC$ cân tại A' $\Rightarrow A'K\perp BC$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \left(\left(A'BC\right);\left(ABC\right)\right)=A'KA=60°$.

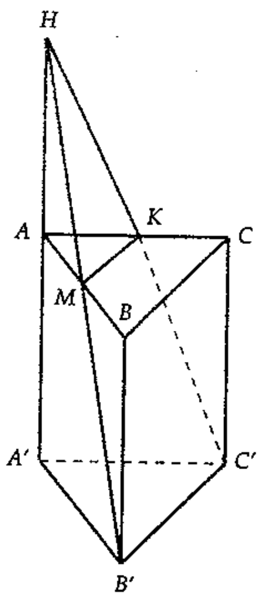
Ta có: $AB=a\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow A'A=AK.\tan A'KA=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60°=\frac{3a}{2}$

Vì $AK\perp BC$ và $\left(ABC\right)\perp\left(BCC'B'\right)$ nên $AK\perp\left(BCC'B'\right)$

$\Rightarrow V_{A.BCC'B'}=\frac{1}{3}.AK.S_{BCC'B'}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a.3a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 44: Đáp án B.



Gọi K là trung điểm của AC.

Dễ dàng chứng minh được $K\in\left(B'C'M\right)$.

Gọi $B'M \cap A'A$ tại H.

Vì $AM = \frac{1}{2}A'B'$ và $AM // A'B'$ nên A, M lần lượt là trung điểm của HA', HB'.

Tương tự, dễ dàng chứng minh được $C'K$ cắt AA' tại H sao cho K là trung điểm HC'.

Đặt $AA' = h$, $A'B' = a$.

Ta có: $V_{AKM.B'A'C'} = V_{H.A'B'C'} - V_{H.AKM}$

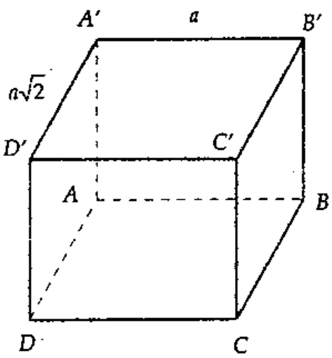
$= \frac{1}{3}.HA'.S_{\Delta A'B'C'} - \frac{1}{3}.HA.S_{\Delta AKM}$

$= \frac{1}{3}.2h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{3}.h.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}$

$= \frac{h.a^2\sqrt{3}}{6} - \frac{h.a^2\sqrt{3}}{48} = \frac{7}{12}.\frac{h.a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7}{12}.V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow \frac{V_{AKM.A'B'C'}}{V_{B'C'BCKM}} = \frac{7}{5}$.

Câu 45: Đáp án C.



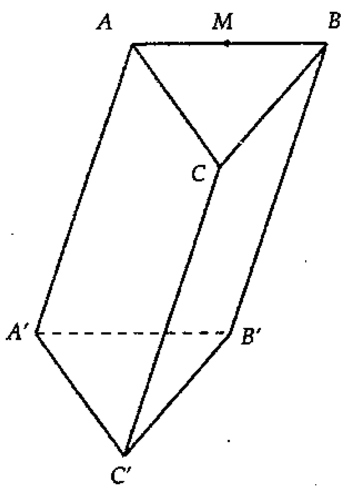
Ta có: góc $A'CA = 60°$.

$CA = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'A = AC.\tan 60° = a\sqrt{3}.\tan 60° = 3a$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'A.\ S_{ABCD} = 3a.a.a\sqrt{2} = 3a^3\sqrt{2}$.

Câu 46: Đáp án C.



Phương án A. Ta có:

$V_{AA'B'C'} = \frac{1}{3}.d\left(A;\left(A'B'C'\right)\right).S_{\Delta A'B'C'}$

$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}.d\left(M;\left(A'B'C'\right)\right).S_{\Delta A'B'C'}$

$\Rightarrow V_{AA'B'C'} = V_{MA'B'C'} \Rightarrow$ Phương án A sai.

Phương án B. Ta có:

$V_{A'BCB'C'} = V_{ABC.A'B'C'} - VV_{A'ABC}$

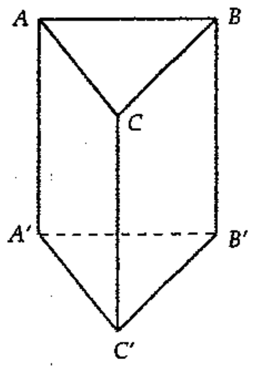
$= d\left(A';\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC} - \frac{1}{3}.d\left(A';\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}$

$= \frac{2}{3}.d\left(A';\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow$ Phương án B sai.

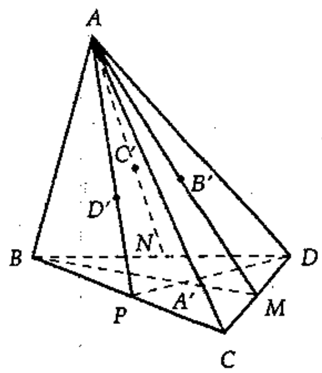
Phương án C. Từ chứng minh trên và $V_{A'BCC'B'} = V_{ABCC'B'}$ ta thấy phương án C đúng.

Câu 47: Đáp án C.



$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 48: Đáp án C.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, BD, BC

$\Rightarrow A, B', M$ thẳng hàng

A, C', N thẳng hàng

Xét ΔAMN: $\frac{AB'}{AM} = \frac{AC'}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} B'C' // MN \\ \frac{B'C'}{MN} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Tương tự $\begin{cases} C'D' // PN \\ \frac{C'D'}{PN} = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta B'C'D' \backsim \Delta MNP$ theo tỉ số $\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta B'C'D'}}{S_{\Delta MNP}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ (1)

Mà $\Delta MNP \backsim \Delta BCD$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{S_{\Delta B'C'D'}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{4}{9}.\frac{1}{4} = \frac{1}{9}$

Dễ dàng chứng minh được $(B'C'D')//(BCD)$

$$\Rightarrow \frac{d(A;(B'C'D'))}{d(A;(BCD))} = \frac{AC'}{AN} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow d(A;(B'C'D')) = \frac{2}{3}d(A;(BCD))$$

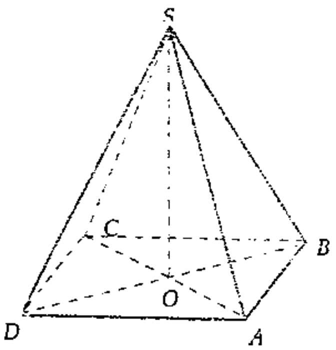
$$\Rightarrow d(A';(B'C'D')) = \frac{1}{3}d(A;(BCD))$$

Vậy $V_{A'.B'C'D'} = \frac{1}{3}d(A';(B'C'D')).S_{\Delta B'C'D'}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{3}d(A;(BCD)).\frac{1}{9}S_{\Delta BCD}$$

$$= \frac{1}{27}V_{A.BCD} = \frac{V}{27}$$

Câu 49: Đáp án A.

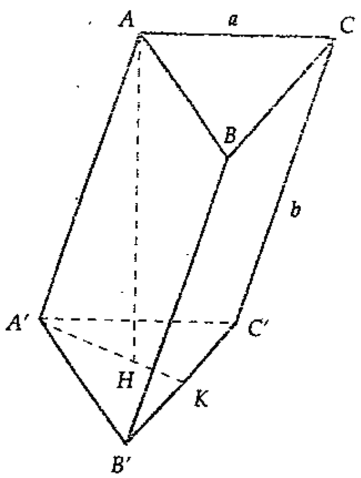


Gọi O là tâm hình vuông $ABCD \Rightarrow \widehat{SAO} = 45°$

$$\Rightarrow SO = OA = \frac{1}{2}.AC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 50: Đáp án B.



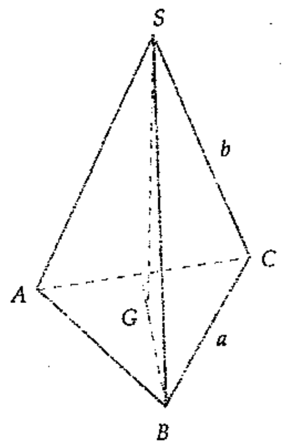
Gọi K là trung điểm của $B'C'$.

Hạ $AH \perp A'K$ tại $H \Rightarrow \widehat{AA'H} = \alpha$

$\Rightarrow AH = AA'.\sin\alpha = b.\sin\alpha$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AH'.S_{\Delta A'B'C'} = b.\sin\alpha.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2.b.\sin\alpha.$$

Câu 51: Đáp án B.



Gọi khối chóp tam giác đều đề bài cho là $SABC$.

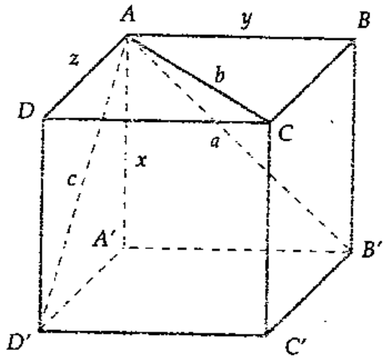
Gọi G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow SG \perp (ABC) \text{ và } GB = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow SG = \sqrt{-GB^2 + SB^2} = \sqrt{\frac{-a^2}{3} + b^2}$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}SG.S_{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{-a^3}{3} + b^2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{12}.\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Câu 52: Đáp án A.



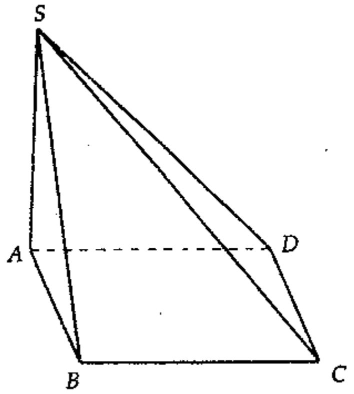
Giả sử hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $\begin{cases} AB' = a \\ AC = b \\ AD' = c \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} AA' = x \\ AB = y \\ AD = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + y^2 = b^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + z^2 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}} \\ z = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}} \end{cases}$

Mà $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = AA'.AB.AD$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = \sqrt{\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}{8}}$$

Câu 53: Đáp án D.



Ta có: $SA \perp BC$ và $BC \perp AB$

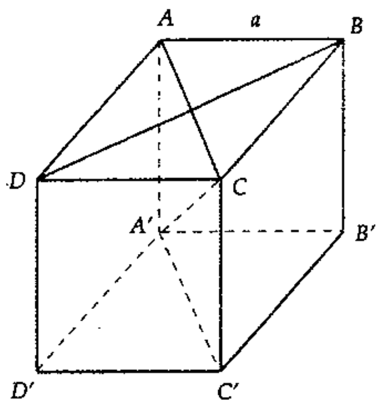
$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BSC = 30°$

$\Rightarrow SB = BC.\cot 30° = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}.$

Câu 54: Đáp án D.



Ta có: $A'C' < B'D' \Rightarrow \sqrt{A'C'^2 + C'C^2} < \sqrt{B'D'^2 + B'B^2}$

$\Leftrightarrow A'C < B'D \Leftrightarrow A'C = BD$

Vì ΔABC đều nên $BD = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$

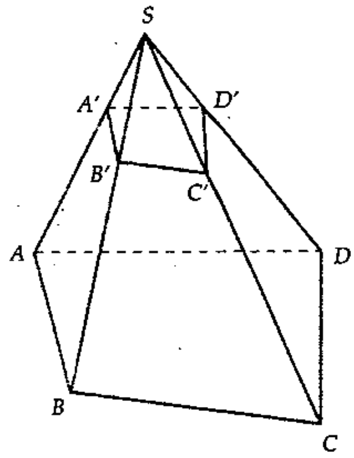
Ta có: $A'C' = AC = a$ và $A'C = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow C'C = a\sqrt{2}$ (theo định lý Py-ta-go).

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = a\sqrt{2}.2.S_{ABC}$

$= a\sqrt{2}.2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}.$

Câu 55: Đáp án A.

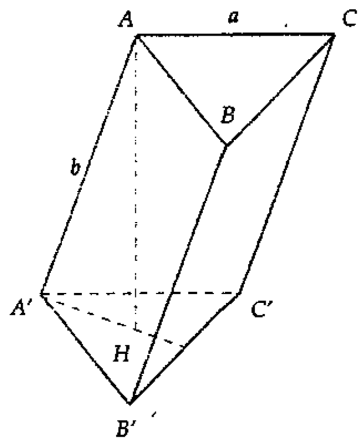


$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{81}$$

$\Rightarrow V_{S.A'B'CD} = \dfrac{V}{81}.$

Câu 56: Đáp án D.

Câu 57: Đáp án B.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'B'C')$

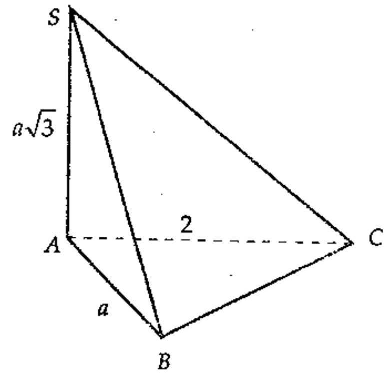
$\Rightarrow AA'H = 60° \Rightarrow AH = AA'.\sin 60° = b.\sin 60° = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AH.S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2b}{8}$

$V_{A'.ABC} = \dfrac{1}{3}.d\left(A';(ABC)\right).S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2b}{8}$

$\Rightarrow V_{A'.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'ABC} = \dfrac{3a^2b}{8} - \dfrac{a^2b}{8} = \dfrac{a^2b}{4}.$

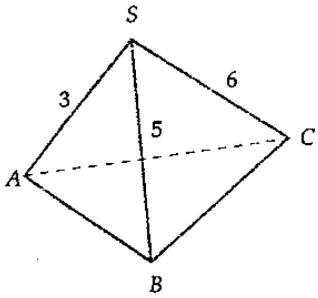
Câu 58: Đáp án B.



Ta có: $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{SA}{3}.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}.a}{2}=\frac{a^3}{2}.$

Câu 59: Đáp án C.



Ta có: $SA\perp SB,\ SB\perp SC\Rightarrow SB\perp(SAC)$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{SB}{3}.S_{\Delta ABC}=\frac{SB}{3}.\frac{SA.SC}{2}$ (ΔSAC vuông tại S)

$=\frac{3.5.6}{6}=15.$

Câu 60: Đáp án B.

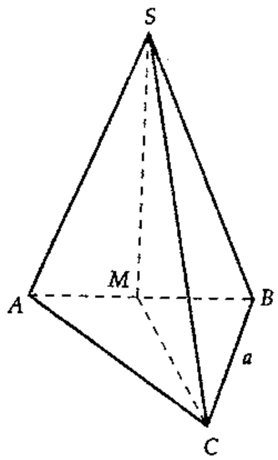
Câu 61: Đáp án B.

Ta có: $V_{đầu}=\frac{1}{3}.h.S_{đáy}$

$$V_{sau}=\frac{1}{3}.2h.\left(\frac{1}{4}S_{đáy}\right)=\frac{1}{2}V_{đầu}$$

Vậy thể tích giảm đi 2 lần.

Câu 62: Đáp án B.



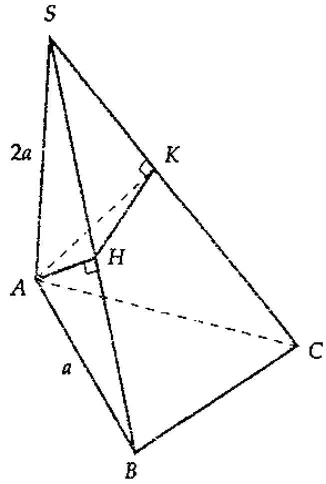
Gọi M là trung điểm AB.

Vì ΔSAB vuông cân tại S nên $SM=\frac{1}{2}.AB=\frac{a}{2}$ và

$SM\perp AB\Rightarrow SM\perp(ABC)$ (vì $(ABC)\perp(SAB)$)

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{SM}{3}.S_{\Delta ABC}=\frac{a}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$

Câu 63: Đáp án B.



Vì ΔABC vuông cân tại B nên $AC=a\sqrt{2}$.

Ta có: $SA^2=SH.SB$ (ΔSAB vuông tại A)

$\Leftrightarrow(2a)^2=SH.\sqrt{(2a)^2+a^2}$

$\Leftrightarrow SH=\frac{4a\sqrt{5}}{5}$

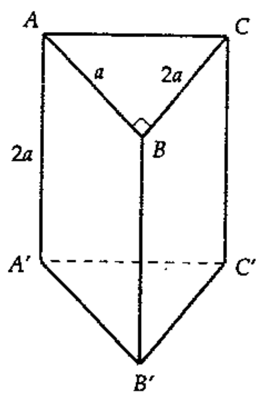
$\Rightarrow\frac{SH}{SB}=\frac{4a\sqrt{3}}{5}:a\sqrt{5}=\frac{4}{5}$

Tương tự, tính được $\frac{SK}{SC}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}:a\sqrt{6}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABC}}=\frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SC}=\frac{4}{5}.\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$

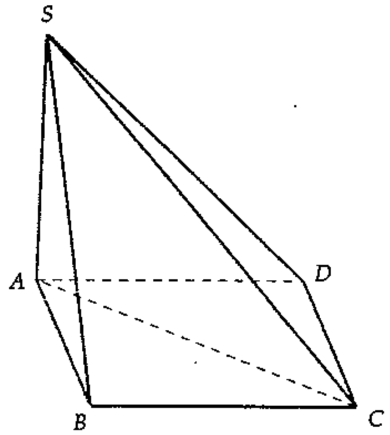
$\Rightarrow V_{S.AHK}=\frac{8}{15}.\frac{SA}{3}.S_{\Delta ABC}=\frac{8}{15}.\frac{2a}{3}.\frac{a^2}{2}=\frac{8a^3}{45}.$

Câu 64: Đáp án D.



$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\frac{2a.a.2a}{2}=2a^3.$

Câu 65: Đáp án A.



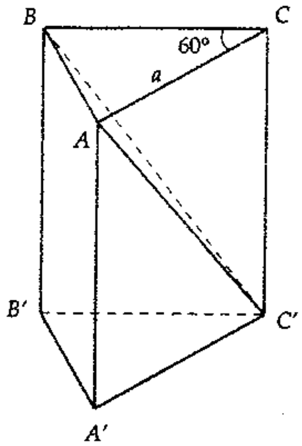
Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SCA = 60°$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SA = AC.\tan 60° = 3a$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{SA}{3}.S_{ABCD} = \frac{3a}{3}.a.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}.$

Câu 66: Đáp án A.



Vì $BA \perp AC$ và $BA \perp AA' \Rightarrow BA \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow BA \perp AC' \Rightarrow BC'A = 30°$.

Ta có: $AB = AC.\tan 60° = a\sqrt{3}$

$AC' = AB.\cot 30° = a\sqrt{3}.\cot 30° = 3a$

$\Rightarrow A'A = \sqrt{C'A^2 - A'C'^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$

$V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = 2a\sqrt{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{6}.$

Câu 67: Đáp án A.

Câu 68: Đáp án B.

$V_{be} = 2.3.2 = 12(m^3)$

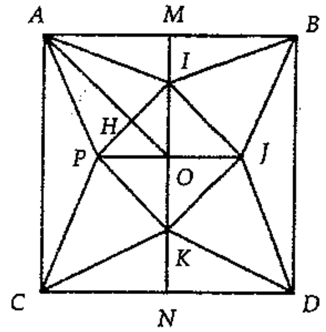
$V_{gáo} = \pi.4^2.5 = 80\pi(cm^3) = 8\pi.10^{-5}(m^3)$

Vậy bể hết nước sau: $\frac{12}{8\pi.10^{-5}.170} \approx 281$ (ngày)

Câu 69: Đáp án A.

$V = 0,5(l) = 500(cm^3) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{500}{15\pi}} \approx 3,36(cm)$

Câu 70: Đáp án D.



Đặt $AI = b(cm)$.

Chiều cao của chóp bằng: $\sqrt{b^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{x^2}{2}}$

Ta có: $IM^2 = b^2 - 50^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{b^2 - 50^2} = \frac{10 - IK}{2}$

$\Leftrightarrow b^2 - 50^2 = \frac{100^2 - 200x\sqrt{2} + 2x^2}{4}$

$\Leftrightarrow b^2 = \frac{20000 - 200x\sqrt{2} + 2x^2}{4}$

$\Rightarrow V_{chóp} = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - \frac{x^2}{2}}.x^2 = \frac{1}{3}.\sqrt{5000 - 50x\sqrt{2}}.x^2$

Thử từng phương án ta chọn D.

Câu 71: Đáp án B.

$V = \frac{147.230^2}{3} = 2592100(m^3)$.

Câu 72: Đáp án A.

Vì $SA \perp SB$ và $SB \perp SC \Rightarrow SB \perp (SAC)$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{SB.S_{\Delta SAC}}{3} = \frac{a}{3}.\frac{a^2}{2}$ (ΔSAC vuông tại S)

$= \frac{a^2}{6}$.

Chủ đề 6: Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón

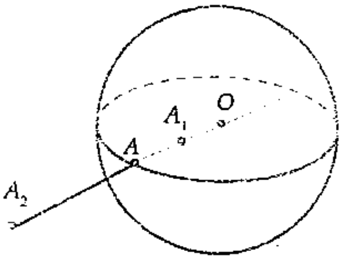
Bài 1: Mặt cầu, khối cầu

1. Định nghĩa

Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi được gọi là mặt cầu có tâm O và bán kính R.

Mặt cầu như thế thường được kí hiệu là $S(O;R)$.

Các thuật ngữ:



Hình 6.1

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A (hình 6.1).

a. Nếu $OA=R$ thì điểm A thuộc mặt cầu. Khi đó đoạn thẳng OA là ***bán kính*** của mặt cầu.

b. Nếu $OA<R$ thì ta nói điểm A *nằm trong* mặt cầu.

c. Nếu $OA>R$ thì ta nói điểm A *nằm ngoài* mặt cầu.

Nếu $OA;OB$ là hai bán kính của mặt cầu thỏa mãn O, A, B thẳng hàng thì AB là ***đường kính*** của mặt cầu.

d. Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu (S) cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là khối cầu (S) hoặc hình cầu (S).

Vậy khối cầu (S) là tập hợp các điểm A thỏa mãn $OA\le R$.

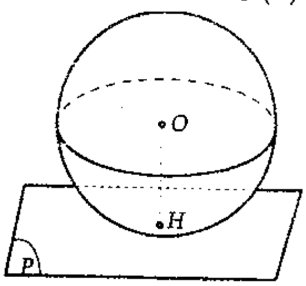
2. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng.

Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) thì $d=OH$.

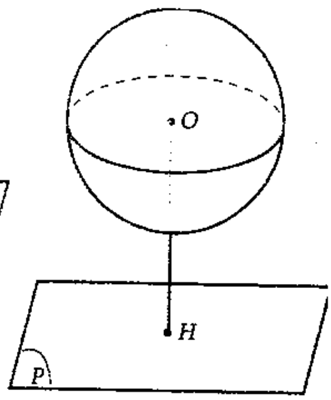
a. Nếu $d=R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu có một điểm chung duy nhất là H là và ta nói mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). (hình 6.2)

b. Nếu $d>R$ thì giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O;R)$ là tập rỗng và ta nói mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S). (hình 6.3)

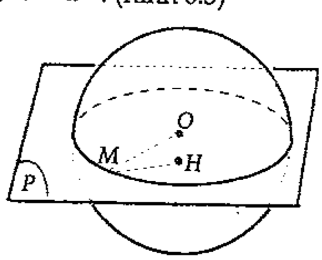
c. Nếu $d<R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm H và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$. (hình 6.3)



Hình 6.2



Hình 6.3



Hình 6.4

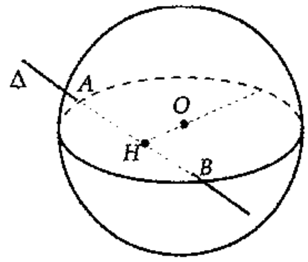
3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ O tới Δ. Hoàn toàn tương tự trong trường hợp mặt cầu và mặt phẳng, ta có các kết luận sau đây:

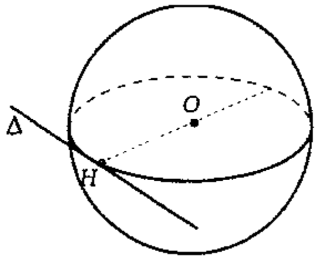
a. Nếu $d < R$ thì Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt. (hình 6.5)

b. Nếu $d > R$ thì Δ không cắt mặt cầu. (hình 6.6)

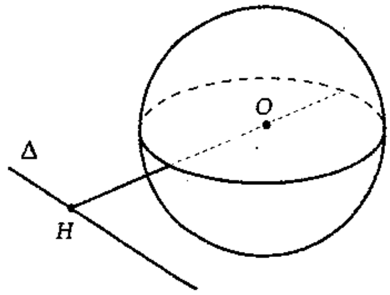
c. Nếu $d = R$ thì Δ cắt mặt cầu tại một điểm duy nhất hay Δ *tiếp xúc* với mặt cầu tại điểm H, hay Δ là tiếp tuyến của mặt cầu tại H. Điểm H gọi là *điểm tiếp xúc* của Δ và mặt cầu. (hình 6.7)



Hình 6.5



Hình 6.6



Hình 6.7

Kết quả

> a. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ tại điểm H là Δ vuông góc với bán kính OH tại điểm H.
>
> b. Có vô số đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ tại điểm H. chúng thuộc mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm H.

STUDY TIP:

a. Diện tích S của mặt cầu bán kính r bằng bốn lần diện tích hình tròn lớn của mặt cầu đó.

b. Thể tích V của khối cầu bán kính r bằng thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng diện tích mặt cầu và có chiều cao bằng bán kính mặt cầu đó.

Chú ý

Người ta nói *mặt cầu nội tiếp hình đa diện* nếu mặt cầu đó tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện, còn nói *mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện* nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu.

2. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

Mặt cầu có bán kính r có diện tích là: $\boxed{S = 4\pi r^2}$.

Khối cầu có bán kính r có thể tích là: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

Bổ sung một số vấn đề mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp hình đa diện.

I. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện.

Mặt cầu đi qua mọi đỉnh của hình đa diện H gọi là mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện H và hình đa diện H được gọi là hình đa diện nội tiếp mặt cầu đó.

1. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

A. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là đáy của nó là đa giác nội tiếp một đường tròn.

Từ đây ta có

Hệ quả

Mọi hình tứ diện có mặt cầu ngoại tiếp.
Mọi hình chóp đều có mặt cầu ngoại tiếp.

Các phương pháp cơ bản xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Bài toán: Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Lời giải

STUDY TIP:
1. Khi hình chóp là hình chóp đều, hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì có thể thay mặt phẳng trung trực bằng đường trung trực.
2. Khi dựng mặt phẳng trung trực của cạnh bên, nên chọn cạnh bên của hình chóp đồng phẳng với Δ.

Phương pháp 1:

1. Xác định tâm O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2...A_n$.
2. Dựng trục Δ là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ (Δ là đường thẳng đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy).
3. Vẽ mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên bất kì của hình chóp.
4. Giao của mặt phẳng trung trực (P) và đường thẳng Δ là tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$.

Phương pháp 2:

1. Xác định tâm O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2...A_n$.
2. Dựng trục Δ là trục Víđường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $A_1A_2...A_n$.
3. Vẽ trục đường tròn ngoại tiếp của tam giác mặt bên Δ_2 sao cho Δ và Δ_2 đồng phẳng.
4. Lấy giao hai đường thẳng ta được tâm của đường tròn ngoại tiếp hình chóp.

Phương pháp 3:

Chứng minh các đỉnh của hình chóp nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông. Khi đó trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, và đoạn thẳng nối hai đỉnh là đường kính của mặt cầu đó.

Phương pháp 4:

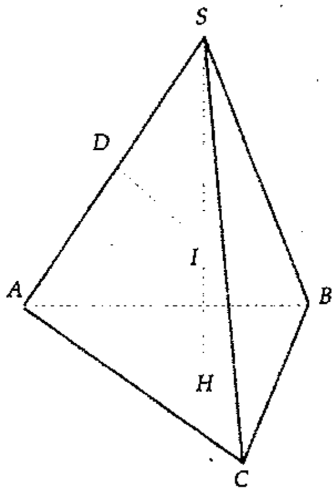
Tìm một điểm đặc biệt cách đều các đỉnh của hình chóp.

Phương pháp 5:

Ta tạo các lăng trụ quen thuộc để dễ dàng hơn trong việc xác định tâm hay tính toán các yếu tố của mặt cầu ngoại tiếp đa diện. Bằng việc mở rộng khối đa diện đã cho, thay vì xác định tâm và bán kính của khối đa diện một cách trực tiếp, ta xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện quen thuộc.

B. Một số bài toán nổi bật

Bài toán 1: **Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h.**



Lời giải tổng quát

Gọi $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, có chiều cao $SH = h$; cạnh đáy bằng a.

Trong mặt phẳng (SAH) kẻ đường trung trực của cạnh SA, khi đó gọi I là giao điểm của đường trung trực cạnh SA và SH. Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có tam giác ABC là tam giác đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAH vuông tại $H \Rightarrow SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}$.

Tam giác SDI và tam giác SHA là hai tam giác đồng dạng nên

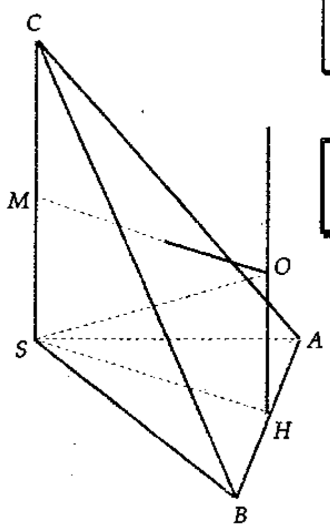
$$\frac{SI}{SA} = \frac{SD}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA.\frac{SA}{2}}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{h^2 + \frac{a^2}{3}}{2.h} = \frac{3h^2 + a^2}{6h}.$$

Đến đây ta có kết luận: bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h là $\boxed{R = \frac{3h^2 + a^2}{6h}}$.

Bài toán 2: **Tính bán kính của hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là a và chiều cao là h.**

Tương tự bài toán trên ta có bán kính của hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là a và chiều cao h là $\boxed{R = \frac{2h^2 + a^2}{4h}}$.

Tổng quát: Công thức đọc thêm: Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đều n giác có cạnh đáy bằng a và chiều cao h là $\boxed{R = \frac{4h^2.\sin^2\frac{180^\circ}{n} + a^2}{8h.\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}$.



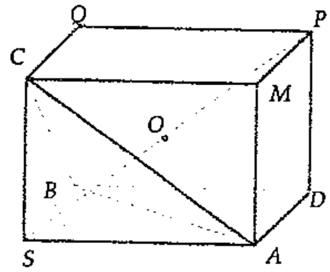
Bài toán 3: **Xác định tâm và bán kính của tứ diện $SABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc.**

Lời giải tổng quát

Cách 1: Gọi H là trung điểm của AB. Dễ thấy H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB. Mặt phẳng trung trực của SC cắt trục đường tròn (SAB) tại O. Ta có O chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$. Dễ thấy $OH = \frac{c}{2}$.

$$R = SO = \sqrt{SH^2 + HO^2} = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + HO^2} = \sqrt{\frac{SA^2 + SB^2}{4} + HO^2}$$

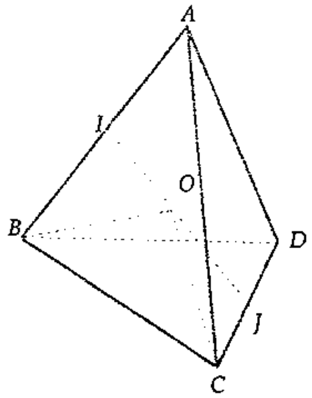
$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}}$$



Cách 2: Sử dụng phương pháp 5: Phương pháp tạo lăng trụ bao.

Mở rộng tứ diện $SABC$ thành hình hộp chữ nhật $SADB.CMNQ$. Khi đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ chính là tâm của hình hộp chữa nhật $SADB.CMNQ$. Khi đó $OS = R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. (Công thức độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật tôi đã giới thiệu).

Bài toán 4: **Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = c,\ AC = BD = b,\ AD = BC = a$. Tìm bán kính R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $ABCD$.**



Lời giải

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì dễ thấy $IJ \perp AB, IJ \perp CD$, hay nói cách khác IJ là cạnh vuông góc chung của hai cạnh AB, CD.

Gọi O là trung điểm của IJ thì $OA = OB$ và $OC = OD$ (Do IJ là đường trung trực của AB, CD).

Do $AB = CD$ nên $IB = JC$, khi đó hai tam giác OIB và OJC bằng nhau. Suy ra $OB = OC$.

Từ đây suy ra O cách đều bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$. Vậy mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là mặt cầu có tâm O, bán kính $R = OA$.

STUDY TIP:
Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện gần đều là
$R = \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ta có $OA^2 = OI^2 + IA^2 = \frac{IJ^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{IJ^2 + c^2}{4}$.

Vì CI là trung tuyến của tam giác ABC nên $IC^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$, suy ra

$$IJ^2 = CI^2 - CJ^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Như vậy $R^2 = OA^2 = \frac{1}{8}.\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \Rightarrow \boxed{R = \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Bài toán 5*: **Cho một mặt cầu bán kính R cố định. Tìm hình chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu.**

Đây là một bài toán mà kết hợp cả yếu tố hình không gian và giải tích (tìm max của một hàm số trên một khoảng (đoạn)).

Lời giải

Giả sử $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu bán kính R thì đường cao SH đi qua tâm mặt cầu.

Gọi a, h lần lượt là cạnh đáy, chiều cao hình chóp thì áp dụng **bài toán 2** ta có

$R=\dfrac{2h^2+a^2}{4h}$ với $0<h<2R$.

$\Rightarrow a^2=2h.(2R-h)$.

Thể tích khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}a^2.h=\dfrac{1}{3}.2h^2.(2R-h)$.

Đến đây ta có hai cách:

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức

Ta có $V=\dfrac{8}{3}.\dfrac{h}{2}.\dfrac{h}{2}.(2R-h)\le\dfrac{8}{3}.\left(\dfrac{\dfrac{h}{2}+\dfrac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3=\dfrac{64R^3}{81}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{h}{2}=2R-h\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$.

Khi đó $a=\dfrac{4R}{3}$.

Cách 2: Xét hàm

Xét hàm số $f(h)=\dfrac{2}{3}.h^2(2R-h)$ trên $(0;2R)$.

Ta có $f'(h)=\dfrac{4}{3}.R.2h-\dfrac{2}{3}.3h^2=\dfrac{8}{3}.Rh-2h^2=0\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$. Kết quả tương tự trên.

Đến đây ta rút ra được **Study Tip** để ghi nhớ.

STUDY TIP:
Hình chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất nội tiếp trong mặt cầu bán kính R cố định là hình chóp tứ giác đều có cạnh $a=\dfrac{4R}{3}$, chiều cao $h=\dfrac{4R}{3}$ và thể tích $V=\dfrac{64R^3}{81}$.

C. Mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ

Một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy của nó là hình lăng trụ đứng với đáy là đa giác nội tiếp đường tròn.

Hệ quả

> Hình hộp H có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi H là hình hộp chữ nhật. Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là giao điểm các đường chéo, và độ dài đường chéo là đường kính của mặt cầu. Khi đó $\boxed{R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}}$

Bài toán 6: **Trong số các hình hộp nội tiếp hình cầu bán kính R cho trước, hình hộp nào có tổng các kích thước lớn nhất.**

Lời giải

Ta có hình hộp nội tiếp mặt cầu bán kính R nên nó là hình hộp chữ nhật và các kích thước lần lượt là a,b,c của nó liên hệ với bán kính mặt cầu bởi công thức $a^2+b^2+c^2=4R^2$.

Tổng các kích thước của hình hộp đó là $4(a+b+c)$.

Mặt khác, ta có

$(a+b+c)^2\le3(a^2+b^2+c^2)=12R^2\Rightarrow a+b+c\le2R\sqrt{3}$.

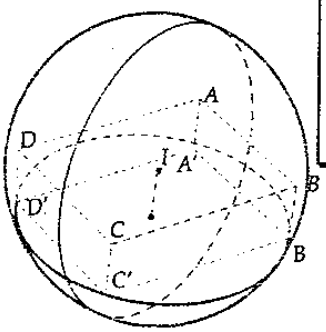
$\Leftrightarrow4(a+b+c)\le8R\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Khi đó hình hộp cần tìm chính là hình lập phương có cạnh bằng $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Bài toán 7: Trong các hình nội tiếp mặt cầu tâm I bán kính R, hình hộp có thể tích lớn nhất bằng:

A. $\frac{8}{3}R^3$ B. $\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3$ C. $\frac{\sqrt{8}}{3\sqrt{3}}R^3$ D. $\sqrt{8}R^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên KHTN lần 2)



STUDY TIP:
Cho hình hộp chữ nhật có 3 kích thước là a, b, c khi đó độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật được tính bằng công thức $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Đáp án B

Lời giải

Hình vẽ bên minh họa một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ nội tiếp mặt cầu tâm I bán kính R.

Vì tính đối xứng nên hình hộp nội tiếp khối cầu luôn là hình hộp chữ nhật. Do vậy đặt ba kích thước của hình hộp chữ nhật lần lượt là a, b, c.

Khi đó thể tích của hình hộp chữ nhật là $V=abc$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta có

$a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

$$\Leftrightarrow V^2=(abc)^2\le\left(\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\right)^3\le\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3=\left(\frac{(2R)^2}{3}\right)^3=\frac{64R^2}{27}$$

$$\Rightarrow V\le\sqrt{\frac{64R^6}{27}}=\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$$

D. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cụt (đọc thêm).

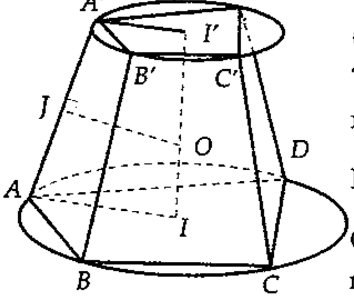
Một hình chóp cụt có mặt cầu ngoại tiếp khi và chỉ khi đáy của hình chóp cụt nội tiếp đường tròn và các cạnh bên bằng nhau.

Hệ quả

Mọi hình chóp cụt đều luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
Cho hai đường tròn $C(I;r), C'(I';r')$ lần lượt nằm trên hai mặt phẳng (P) và (P') mà $(P)\parallel(P')$, $II'\perp(P), II'=h$. Khi đó mặt cầu đi qua cả hai đường tròn đã cho.

Bài toán 8: Cho hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ lần lượt là hai tứ giác nội tiếp hai đường tròn có bán kính r, r'. Biết hình chóp cụt có chiều cao là h.
Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi I, I' lần lượt là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD; A'B'C'D'$.

Theo giả thiết thì hình chóp cụt này nội tiếp mặt cầu nên các cạnh bên bằng nhau, do đó II' là trục của hai đường tròn đáy.

Kí hiệu như hình vẽ bên thì $AA'I'I$ là hình thang vuông tại I, I'.

Gọi O là giao điểm của đường trung trực cạnh AA' với II'. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cụt đã cho là mặt cầu tâm I bán kính $R=OA$.

STUDY TIP:
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cụt là
$$R=\sqrt{r'^2+\frac{\left(h^2+r^2-r'^2\right)^2}{4h^2}}$$
trong đó r, r' lần lượt là hai bán kính của đường tròn ngoại tiếp hai đáy của hình chóp cụt. h là độ dài đường cao của hình chóp cụt.

Ta có $R^2=OA'^2=r'^2+OI'^2=r'^2+x^2$ với $x=OI'$.

Mặt khác $R^2=OA^2=r^2+\left(II'-x\right)^2=r^2+\left(h-x\right)^2$.

Từ đó $2hx=r^2+hh2-r'^2$ hay $\frac{r^2+h^2-r'^2}{2h}$.

Suy ra $\boxed{R^2=r'^2+\frac{\left(h^2+r^2-r'^2\right)^2}{4h^2}}$.

II. Mặt cầu nội tiếp hình chóp, hình đa diện.

Một mặt cầu được gọi là nội tiếp một đa diện (hay đa diện ngoại tiếp mặt cầu) nếu mặt cầu tiếp xúc với các mặt của đa diện đó.

Hệ quả 1.

Với mặt cầu tâm O, bán kính r nội tiếp hình đa diện cho trước thì

a. Hình chiếu của điểm O trên các mặt của đa diện là điểm tiếp xúc giữa mặt cầu và các mặt đa diện, khoảng cách từ O đến các mặt là bằng nhau.

b. Gọi V là thể tích khối đa diện, S_{tp} là diện tích toàn phần của hình đa diện thì $V=\frac{1}{3}.S_{tp}.r.\,(*)$

Hệ quả 2

Mọi hình tứ diện luôn có mặt cầu nội tiếp.

Hình chóp đều nào cũng có mặt cầu nội tiếp.

Chứng minh công thức $(*)$ ta có

Nối O với các đỉnh của hình đa diện thì ta được các hình chóp đỉnh O, đáy là các mặt của hình đa diện. Khi đó

$$V=\frac{1}{3}.S_1.r+\frac{1}{3}.S_2.r+...+\frac{1}{3}.S_n.r=\frac{1}{3}.S_{tp}.r.$$

Từ công thức $(*)$ ta suy ra công thức tính bán kính mặt cầu nội tiếp khối đa diện như sau:

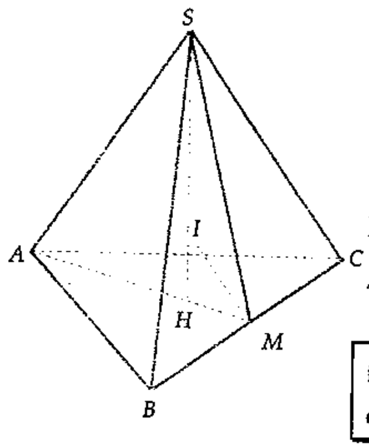
Bài toán 9: **Mặt cầu nội tiếp hình tứ diện đều có cạnh bằng *a*.**

Từ công thức $(*)$ ta có $r=\frac{3V}{S_{tp}}$. Mặt khác ta có công thức tính thể tích tứ diện đều ở phần thể tích khối đa diện mà tôi đã giới thiệu đó là: $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$;

Từ đây ta có $\boxed{r=\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}:\left(4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{a\sqrt{6}}{12}}$

Bài toán 10: **Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC*, đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*, mặt bên tạo với đáy một góc $\alpha\le\left(0^\circ<\alpha<90^\circ\right)$.**
Tính theo *a* và α bán kính *r* của mặt cầu nội tiếp hình chóp đó?

Lời giải



Kẻ SH là đường cao của hình chóp $S.ABC$. Do tam giác ABC đều nên H thuộc AM là đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC. Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, khi đó $I \in SH$.

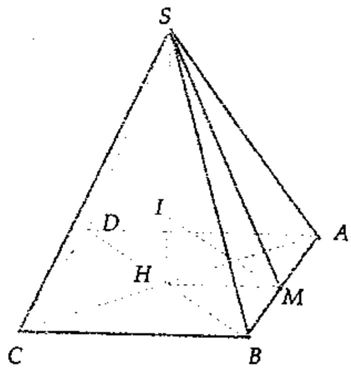
Do I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp $SABC$ nên MI là đường phân giác của góc SMA.

Khi đó ta có IH là bán kính r của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$.

Ta có $\boxed{IH = MH.\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\tan\frac{\alpha}{2}}$.

Bài toán 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và $ASB = \alpha$. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ suy ra SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có giao điểm của phân giác góc SMH và SH chính là tâm I của mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $SA = \dfrac{a}{2.\sin\frac{\alpha}{2}}; SH = \sqrt{SA^2 - HA^2}$

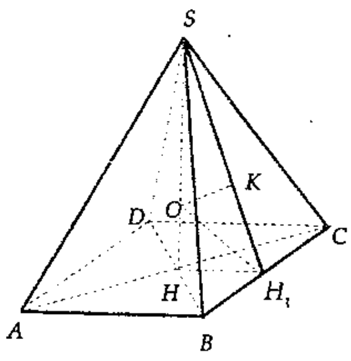
$$\Rightarrow SH = \sqrt{\frac{a^2}{4.\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{a^2}{2}}} = \frac{a}{2.\sin\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2.\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Áp dụng tính chất phân giác ta có $\dfrac{IH}{IS} = \dfrac{MH}{MS} \Leftrightarrow \dfrac{IH}{IS + IH} = \dfrac{MH}{MS + MH}$

$$\frac{r}{SH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}.\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow r = \frac{\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2.\sin\frac{\alpha}{2}}}{1 + \cot\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2.\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Bài toán 12: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a. Chiều cao bằng h. Tìm tâm, bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.

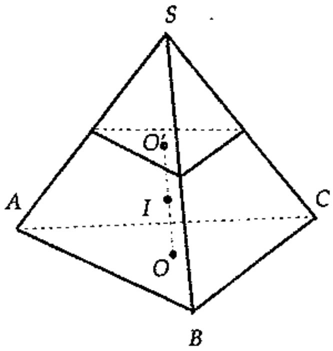
Lời giải



Gọi H là giao điểm của AC và BD khi đó SH là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD$. Gọi H_1 là trung điểm của BC, khi đó $SH_1 \perp BC$ (do tam giác SBC cân tại S).

Kẻ phân giác của góc SH_1H cắt SH tại O.

Ta có $\begin{cases} SH_1 \perp BC \\ HH_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHH_1) \Rightarrow (SBC) \perp (SHH_1)$



Kẻ OK vuông góc với SH_1 tại K.

$$\begin{cases}(SBC)\perp(SHH_1)\\(SBC)\cap(SHH_1)=SH_1\Rightarrow OK\perp(SBC)\\OK\perp SH_1\end{cases}\Rightarrow d(O;(SBC))=OK$$

Mặt khác H_1O là phân giác góc SH_1H nên

$OH=OK\Leftrightarrow d(O;(ABCD))=d(O;(SBC))$.

Chứng minh tương tự với các mặt phẳng còn lại ta được O là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đều $S.ABCD$.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ta có $\dfrac{OH}{SO}=\dfrac{HH_1}{SH_1}$

$$\Rightarrow\frac{OH}{SH}=\frac{HH_1}{SH_1+HH_1}\Rightarrow OH=r=\frac{\frac{a}{2}.h}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+h^2}+\frac{a}{2}}\Leftrightarrow\boxed{r=\frac{ah}{\sqrt{4h^2+a^2}+a}}.$$

Chú ý: Ta có kết quả sau:

> Hình chóp có mặt cầu nội tiếp khi và chỉ khi trong đáy hình chóp có một điểm các đều tất cả các mặt bên của hình chóp.

Đọc thêm: *Xét hình chóp cụt và hình chóp sinh ra bởi hình chóp cụt đó. Nếu tồn tại mặt cầu nội tiếp hình chóp thì đó cũng là mặt cầu nội tiếp hình chóp sinh ra hình chóp cụt. Do đó việc xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp cụt chính là xác định tâm và bán kính của mặt cầu hình chóp sinh ra hình chóp cụt đó với chú ý là khi hình chóp cụt có mặt cầu nội tiếp với tâm I, bán kính r thì tâm I chính là trung điểm của OO', trong đó O, O' lần lượt là các điểm tiếp xúc của mặt cầu với hai đáy của hình chóp cụt và* $OO'=2r$ *là chiều cao của hình chóp cụt.*

[redacted]

I. Mặt cầu.

Câu 1: Tỉ số thể tích giữa khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó là:

A. $\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}$. B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{3}{\pi\sqrt{2}}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a, AA'=2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$

A. $R=3a$ B. $R=\frac{3a}{4}$

C. $R=\frac{3a}{2}$ D. $R=2a$

(Trích đề minh họa lần 2 BGD&ĐT)

Câu 3: Cho mặt cầu (S) ngoại tiếp một khối lập phương có thể tích bằng 1. Thể tích khối cầu (S) là:

A. $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại A, $AB=3, AC=4$, SA vuông góc với đáy, $SA=2\sqrt{14}$. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $V=\frac{169\pi}{6}$ B. $V=\frac{729\pi}{6}$

C. $V=\frac{2197\pi}{8}$ D. $V=\frac{13\pi}{8}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, góc BAC bằng 60^o, chiều cao $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $V=a^3\pi\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $V=\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3\pi$

C. $V=a^3\pi\sqrt{6}$ D. $V=\frac{4\sqrt{6}}{3}a^3\pi$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{32}{3}\pi a^3$ B. $V=\frac{4}{3}\pi a^3$

C. $V=4\pi a^3$ D. $V=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi a^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt bên SBC và đáy bằng $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi a^3}{16}$ B. $\frac{43\pi}{36}$ C. $\frac{43\pi}{4}$ D. $\frac{43\pi}{12}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và đáy bằng $60°$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R=\frac{a}{3}$ B. $R=\frac{2a}{3}$ C. $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ D. $R=\frac{4a}{3}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 9: Cho hình lăng trụ tam giác đều có các cạnh cùng bằng 1. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là :

A. 7π B. $\frac{7\pi}{2}$ C. $\frac{7\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{6}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Văn Trỗi lần 3)

Câu 10: Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình tứ diện bất kì

B. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình lăng trụ có đáy là một tứ giác lồi

C. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình hộp chữ nhật

D. Có một mặt cầu đi qua các đỉnh của một hình chóp đều

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 11: Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Diện tích mặt cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là:

A. 6π B. 3π C. π D. 2π

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP - HN)

Câu 12: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Một mặt cầu tiếp xúc với các mặt của tứ diện có bán kính là:

A. $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{8}$

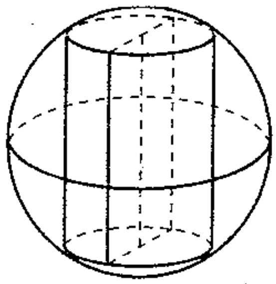
(Trích đề thi thử THPT chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa)

Câu 13: Người ta bỏ vào một chiếc hộp hình trụ ba quả bóng tennis hình cầu, biết rằng đáy hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả bóng và chiều cao của hình trụ bằng ba lần đường kính quả bóng. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. 2 B. 5 C. 3 D. 1

(Trích đề thi thử tạp chí toán học & tuổi trẻ lần 4)

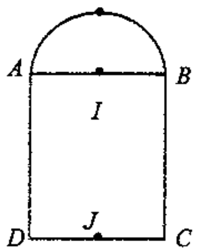
Câu 14: Một hình trụ có chiều cao bằng 6 nội tiếp trong hình cầu có bán kính bằng 5. Tính thể tích của khối trụ.



A. 96π B. 36π C. 192π D. 48π

(Trích đề thi thử THPT Đông Sơn I – Thanh Hóa)

Câu 15: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và nửa đường tròn đường kính AB như hình vẽ. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết $AB=4$; $AD=6$ Thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục IJ là:



A. $V=\frac{56}{3}\pi$. B. $V=\frac{104}{3}\pi$.

C. $V=\frac{40}{3}\pi$. D. $V=\frac{88}{3}\pi$.

(Trích đề thi thử THPT Quảng Xương I)

Câu 16: Cho mặt cầu có diện tích là $72\pi\left(cm^2\right)$. Bán kính R của khối cầu là:

A. $R=3(cm)$ B. $R=3\sqrt{2}(cm)$

C. $R=\sqrt{6}(cm)$ D. $R=6(cm)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 17: Trong một chiếc hộp hình trụ người ta bỏ vào đó 2016 quả banh tennis, biết rằng đáy của hình trụ bằng hình tròn lớn trên quả banh và chiều cao của hình trụ bằng 2016 lần đường kính của quả banh. Gọi V_1 là tổng thể tích của 2016 quả banh và V_2 là thể tích của khối trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. Một kết quả khác B. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$

C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$ D. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 18: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh $AB=3, BC=4$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=12$. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ là:

A. $V=\frac{169\pi}{6}$. B. $V=\frac{2197\pi}{6}$.

C. $V=\frac{2197\pi}{8}$. D. $V=\frac{13\pi}{8}$.

(Trích đề thi thử tạp chí TH &TT lần 6)

Câu 19: Một hình nón đỉnh O có diện tích xung quanh bằng $60\pi(cm^2)$, độ dài đường cao bằng 8(cm). Khối cầu (S) có tâm là đỉnh hình nón, bán kính bằng độ dài đường sinh của hình nón. Thể tích khối cầu (S) bằng:

A. $2000cm^3$ B. $4000\pi cm^3$

C. $288\pi cm^3$ D. $\frac{4000\pi}{3}cm^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a, AA'=2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

A. $R=3a$ B. $R=\frac{3a}{4}$ C. $R=\frac{3a}{2}$ D. $R=2a$

(Trích đề minh họa lần 2 – BGD&ĐT)

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $3a$, cạnh bên $SC=2a$ và SC vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $R=3a$

C. $R=\frac{a\sqrt{13}}{2}$ D. $R=2a$

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án D.

Đặt cạnh của khối lập phương bằng 1

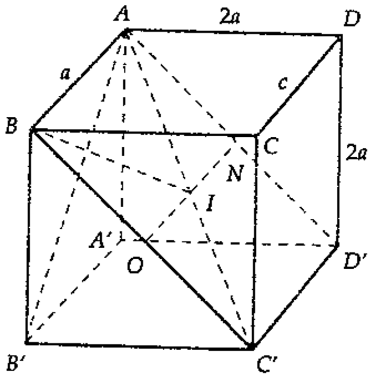
Thể tích khối lập phương là: $V_{lp} = 1$.

Bán kính khối cầu: $R_{cau} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối cầu là: $V_{cau} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

$\Rightarrow \dfrac{V_{lp}}{V_{cau}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$.

Câu 2: Đáp án C.



Gọi O là trung điểm BC'

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\Delta BB'C'$.

Lấy N là trung điểm của AD'.

Ta có: $NO // AB$ và $AB \perp (BC'B') \Rightarrow NO \perp (BC'B')$.

Gọi I là trung điểm ON, dễ dàng chứng minh được $IA = IB$.

Lại có: $IB = IC' = IB'$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.

Ta có: $IA^2 = IN^2 + AN^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow IA = \dfrac{3a}{2}$.

Câu 3: Đáp án D.

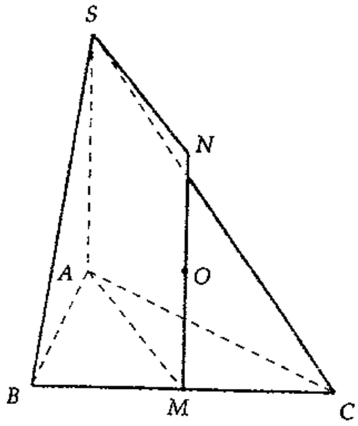
Thể tích khối lập phương là: $V_{lp} = 1$

$\Rightarrow$ Độ dài cạnh khối lập phương = 1 (đơn vị đo độ dài)

$\Rightarrow$ Bán kính khối cầu: $R_{cau} = \dfrac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối cầu là: $V_{cau} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

Câu 4: Đáp án B.



Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

Trên nửa mặt phẳng chứa S, bờ là (ABC), kẻ $MN // SA$ sao cho $MN = SA$.

Gọi O là trung điểm MN

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC) \Rightarrow OA = OB = OC$ (1)

Ta có: $SA // MN$ và $SA = MN$; $SAM = 90°$

$\Rightarrow$ Tứ giác $SNMA$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OS = OA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

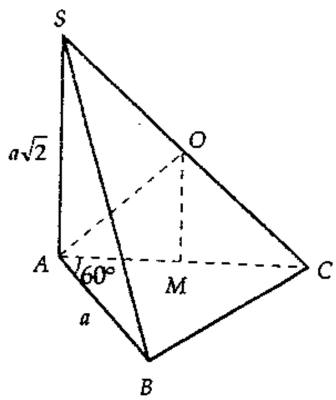
Ta có:

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 = \left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2\sqrt{14}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow OA = \dfrac{9}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{9}{2}\right)^3 = \dfrac{729\pi}{6} = \dfrac{243}{2}\pi$.

Câu 5: Đáp án C.



Gọi M, O lần lượt là trung điểm của AC, SC

$\Rightarrow MO // SA \Rightarrow MO \perp (ABC)$

$\Rightarrow MO$ là trục đường tròn ngoại tiếp của ΔABC

$\Rightarrow OA = OB = OC$

Lại có: $OS = OA = \dfrac{1}{2}SC$

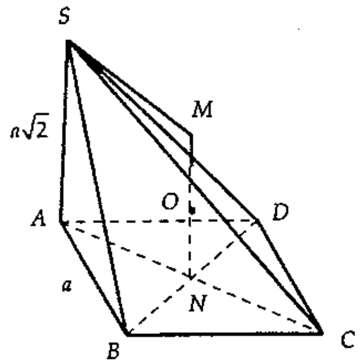
$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

Ta có: $\frac{AB}{AC}=\cos 60^\circ \Rightarrow AC=\frac{a}{\cos 60^\circ}=2a$

$\Rightarrow AO=\frac{1}{2}SC=\frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy thể tích khối cầu là: $V=\frac{4\pi.AO^3}{3}=a^3\pi\sqrt{6}$.

Câu 6: Đáp án B.



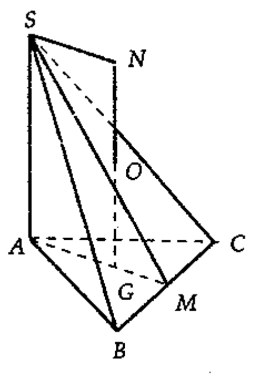
Gọi N là tâm hình vuông $ABCD$.
Kẻ $MN//SA$ trên cùng nửa mặt phẳng bờ $(ABCD)$ chứa S sao cho $SA=MN$.
Gọi O là trung điểm của $MN \Rightarrow OS=OA=OB=OC$
$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có: $OA=\sqrt{ON^2+NA^2}=\sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=a$

Thể tích khối cầu là: $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 7: Đáp án D.



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM\perp BC$
Lại có: $SA\perp BC \Rightarrow (SAM)\perp BC$ hay $(SAM)\perp(SBC)$

$\Rightarrow SMA=60^\circ$

Ta có: $SA=AM.\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

Gọi G là trọng tâm ΔABC
Trên nửa mặt phẳng bờ là (ABC) chứa S, kẻ $NG//SA$ sao cho $NG=SA$
$\Rightarrow NG\perp(ABC)\Rightarrow OA=OB=OC$

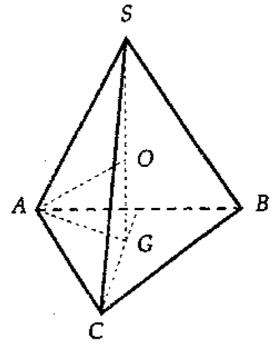
Lại có $OS=OA$ (tứ giác $SNGA$ là hình chữ nhật)
$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$

Ta có: $OA=\sqrt{OG^2+AG^2}=\sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}AM\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{129}}{12}$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng: $S=4\pi.OA^2=\frac{43\pi}{12}$.

Câu 8: Đáp án B.



Gọi G là trọng tâm ΔABC
$\Rightarrow SG$ là trục đường tròn ngoại tiếp của ΔABC
Lấy O nằm giữa S và G sao cho $SO=OA$
Ta có: $SAG=60^\circ \Rightarrow ASG=30^\circ=OAG$

Có $OA=\frac{AG}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{5}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}a$.

Câu 9: Đáp án C.

Ta có: $R=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{6}$

$\Rightarrow S=\frac{7}{3}\pi$.

Câu 10: Đáp án B.
Với A : Đúng do hình tứ diện luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
Với B: B sai do chưa chắc đáy của hình lăng trụ đã nội tiếp đường tròn, nên chưa chắc đã có mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ có đáy là tứ giác lồi.
Với C: Đúng, mặt cầu có tâm là tâm của hình hộp và đường kính là đường chéo của hình hộp.
Với D: Đúng do hình chóp đều luôn có đáy nội tiếp đường tròn.
Câu 11: Đáp án B.

Ta có: $R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S=3\pi$.

Câu 12: Đáp án A.
Từ công thức ở phần lý thuyết ta chọn đáp án A.
Câu 13: Đáp án D.
Đặt bán kính của quả bóng tennis bằng R.
$\Rightarrow S_1=3.4\pi.r^2=12\pi R^2$ và $S_2=(3.2.R).(2\pi.R)=12\pi R^2$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=1$.

Câu 14: Đáp án A

Bài toán tương tự như bài toán mà tôi đã giới thiệu ở phần toán thực tế min max ứng dụng.

Ở đây ta có $R^2=\left(\dfrac{h}{2}\right)^2+r^2$

$\Leftrightarrow r=\sqrt{5^2-3^2}=4 \Rightarrow V=\pi.4^2.6=96\pi$

Câu 15: Đáp án D.

Thể tích khối trụ là: $V_{tru}=IJ.\left(\pi.AI^2\right)=6.\pi.2^2=24\pi.$

Thể tích nửa mặt cầu là:

$V_{\frac{1}{2}cau}=\dfrac{2}{3}.\pi.AI^3=\dfrac{2}{3}.\pi.2^3=\dfrac{16}{3}\pi.$

Vậy $V=\dfrac{88\pi}{3}.$

Câu 16: Đáp án B.

$S=4\pi R^2 \Leftrightarrow 72\pi=4\pi.r^r \Rightarrow R=3\sqrt{2}\,(cm).$

Câu 17: Đáp án D.

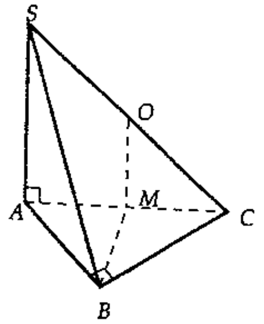
Đặt bán kính của quả bóng tennis bằng R.

Ta có: $V_1=2016.\dfrac{4}{3}.\pi.R^3=2688\pi R^3$

và $V_2=\left(2016.2R\right).\left(\pi R^2\right)=4032\pi R^3$

Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}.$

Câu 18: Đáp án B.



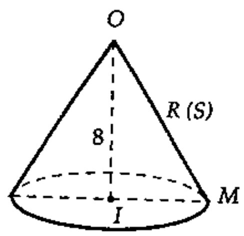
Gọi M là trung điểm AC và O là trung điểm SC. Dễ dàng chứng minh được O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$

$\Rightarrow R=OA=\dfrac{1}{2}SC=\dfrac{1}{2}.\sqrt{SA^2+AC^2}$

$=\dfrac{1}{2}.\sqrt{12^2+\left(3^2+4^2\right)}=\dfrac{13}{2}$

Vậy $V=\dfrac{2197\pi}{6}.$

Câu 19: Đáp án D.



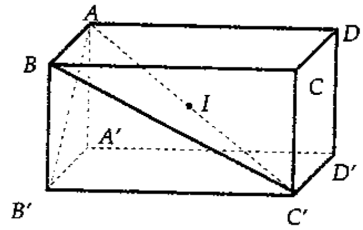
$S_{xq}=\pi.r_{nón}.OM \Leftrightarrow 60=IM.OM$

$\Leftrightarrow 60=\sqrt{OM^2-8^2}.OM \Rightarrow OM=10$

Vậy $V_{(S)}=\dfrac{4}{3}\pi.R^3=\dfrac{4}{3}\pi.10^3=\dfrac{4000\pi}{3}\left(cm^3\right).$

Câu 20: Đáp án C.

Phân tích: Gọi I là trung điểm của AC'. Giống như trong sách bộ đề tinh túy tôi đã giới thiệu cách tìm đường kính của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp bằng cách tìm một cạnh nhìn các đỉnh trong khối chóp dưới một góc $90°$. Ở đây ta có $ABC'=AB'C=90°$.



Lời giải: Tam giác ABC' vuông tại B có I là trung điểm của $AC' \Rightarrow IA=IC'=IB$. Tương tự với tam giác $AB'C'$ ta cũng có $IA=IC'=IB'$.

Suy ra $IA=IC'=IB=IB'=\dfrac{AC'}{2}=R$.

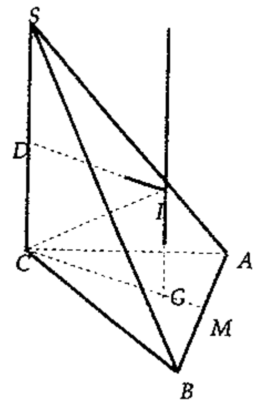
Tam giác $AA'C'$ vuông tại A' nên ta có

$AC'=\sqrt{AA'^2+A'C^2}=\sqrt{4a^2+a^2+4a^2}=3a$

$\Rightarrow R=\dfrac{AC'}{2}=\dfrac{3a}{2}.$

Câu 21: Đáp án D.

Kẻ trục đường tròn của tam giác ABC, lấy giao điểm I của đường trung trực cạnh SC và trục đường tròn, khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$. Kí hiệu như hình vẽ:



Khi đó IC là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp. Ta có $IDCG$ là hình chữ nhật, nên

$IC=\sqrt{CD^2+CG^2}=\sqrt{\dfrac{SC^2}{4}+\dfrac{4CM^2}{9}}$

$=\sqrt{\dfrac{(2a)^2}{4}+\dfrac{4.\left(\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9}}=2a$

Đến đây ta có thể tự đưa ra công thức tổng quát cho các bài sau.

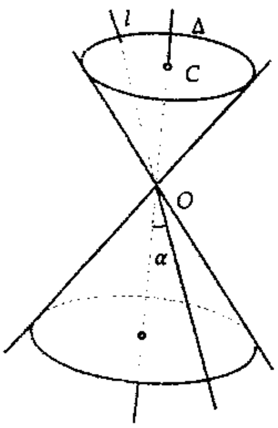
Bài 2: Mặt trụ, hình trụ, khối trụ.

Mặt nón, hình nón, khối nón.

1. Khái niệm về mặt tròn xoay.

Trong không gian, cho hình H và đường thẳng d. Hình gồm tất cả các đường tròn (S_M) với M thuộc H được gọi là hình tròn xoay sinh bởi H khi quay quanh d. Đường thẳng d được gọi là trục của hình tròn xoay đó. Khi hình H là một đường thì hình trong xoay sinh bởi nó còn gọi là mặt tròn xoay.

2. Mặt nón tròn xoay.



Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ.

Mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng l như thế khi quay xung quanh Δ được gọi là mặt nón tròn xoay, hay đơn giản là mặt nón.

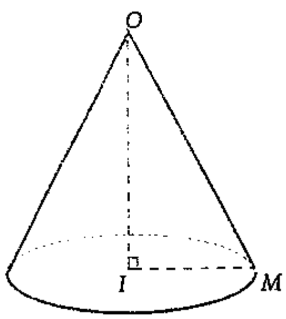
Trong đó Δ là *trục* của mặt nón.

l là *đường sinh* của mặt nón.

O là *đỉnh* của mặt nón.

Nếu gọi α là góc giữa l và Δ thì 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón $\left(0^\circ < 2\alpha < 180^\circ\right)$.

2.1 Hình nón và khối nón



Cho tam giác OIM vuông tại I. Khi quay tam giác đó quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình được gọi là hình nón tron xoay, gọi tắt là hình nón.

Hình tròn tâm I sinh ra bởi các điểm thuộc cạnh IM khi quay IM quanh trục OI được gọi là mặt đáy của hình nón, điểm O gọi là đỉnh của hình nón.

$OI = d\left(I; day\right)$ được gọi là chiều cao của hình nón.

OM là đường sinh của hình nón.

Phần mặt tròn xoay sinh ra bởi các điểm trên cạnh OM khi quay quanh trục OI được gọi là mặt xung quanh của hình nón đó.

Hình nón cùng với phần không gian giới hạn bởi hình nón được gọi là khối nón.

2.2 Diện tích hình nón và thể tích khối nón.

a. Định nghĩa

Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là giới hạn của diện tích xung quanh của hình chóp đêì nội tiếp hình nón đó khi số cạnh tăng lên vô hạn. Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

b. Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

STUDY TIP:
Diện tích xung quanh của hình nón
$S = \pi rl$
Thể tích của khối nón
$V = \frac{1}{3}.\pi r^2.h$

Diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay bằng một nửa tích độ dài của đường tròn đáy và đường sinh

$$\boxed{S_{xq} = \pi rl}$$

Thể tích của khối nón tròn xoay bằng một phần ba tích của diện tích hình tròn đáy và chiều cao hình nón

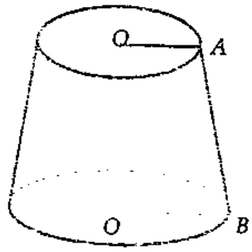
$$\boxed{V = \frac{1}{3}.B.h = \frac{1}{3}.\pi r^2 h}$$

2.3 Khối nón cụt.

Định nghĩa

Nếu cắt một khối nón bằng một mặt phẳng song song với đáy thì khối nón được chia làm hai phần: một phần chứa đỉnh S cuả khối nón, chính là khối nón tròn xoay, phần còn lại được gọi là khối nón cụt.

Thể tích khối nón cụt



Giả sử khối nón cụt có đường cao $OO' = h$, hai bán kính đáy $OB = R$ và $O'A = R'$. Khi đó thể tích V của khối nón cụt được tính bằng công thức

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + R'^2 + R.R'\right)}$$

(Chứng minh công thức trên bằng cách lấy hiệu của hối nón trừ đi phần khối nón bỏ đi $V = V_1 - V_2$).

Diện tích xung quanh của hình nón cụt được tính bằng công thức:

$$\boxed{S_{xq} = \pi\left(R + r\right).}$$

2.4 Một số bài toán liên quan đến hình nón, khối nón.

Chú ý:

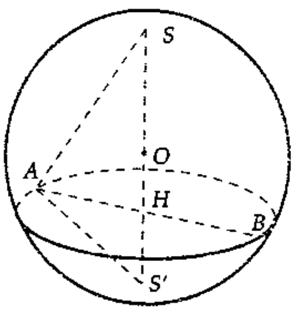
a. Một hình nón gọi là nội tiếp mặt cầu (cũng còn nó mặt cầu ngoại tiếp hình nón) nếu đỉnh và đường tròn đáy của hình nón nằm trên mặt cầu.

b. Mọi hình nón đều có mặt cầu ngoại tiếp.

c. Hình chóp có các mặt bên tạo với mặt đáy các góc như nhau và chân đường cao hình chóp nằm trong đáy luôn có mặt cầu nội tiếp.

Bài toán 1: Trong các hình nón nội tiếp mặt cầu bán kính R cho trước, tìm hình nón có thể tích lớn nhất.

Lời giải



Kí hiệu bán kính đáy của hình nón là x, chiều cao của hình nón là $\left(0 < x \le R, 0 < y < 2R\right)$. Gọi SS' là đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì ta có

$$x^2 = y\left(2R - y\right)$$

Gọi V_1 là thể tích của khối nón thì $V_1 = \frac{1}{3}.\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y.y\left(2R - y\right)$

$$= \frac{\pi}{6}.\left(4R - 2y\right).y.y \le \frac{\pi}{6}\left(\frac{4R - 2y + y + y}{3}\right)^3 = \frac{32\pi R^3}{81}.$$

Vậy thể tích V_1 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{32\pi R^3}{81}$ khi và chỉ khi $4R - 2y = y$

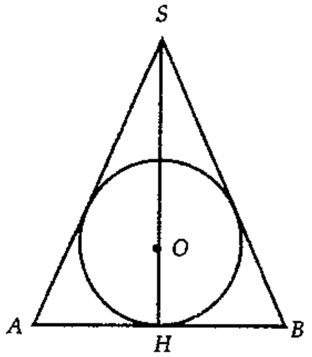
$\Leftrightarrow y = \frac{4R}{3}$, từ đó $x^2 = \frac{4R}{3}.\left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{8R^2}{9}$ hay $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$.

Bài toán 2: Tìm hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp mặt cầu bán kính r cho trước.

Lời giải

Xét mặt phẳng chứa trục của hình nón, mặt phẳng này cắt hình nón theo tam giác cân SAB và cắt mặt cầu nội tiếp của hình nón theo đường tròn bán kính r và hình tròn này nội tiếp tam giác cân SAB.

Kí hiệu bán kính đáy hình nón là x, chiều cao của hình nón là y $(x>0, y>2r)$ thì



$$(AH+SA)r=\frac{1}{2}.AB.SH \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)r=xy \Leftrightarrow x^2=\frac{r^2y}{y-2r}.$$

Vậy thể tích hình nón ngoại tiếp mặt cầu bán kính r là

$$V_2=\frac{1}{3}.\pi x^2y=\frac{1}{3}.\pi r^2.\frac{y^2}{y-2r}.$$

Ta có $\dfrac{y^2}{y-2r}=\dfrac{y^2-4r^2+4r^2}{y-2r}=y+2r+\dfrac{4r^2}{y-2r}$

$$=y-2r+\frac{4r^2}{y-2r}+4r\ge 2\sqrt{(y-2r)\frac{4r^2}{y-2r}}+4r=8r.$$

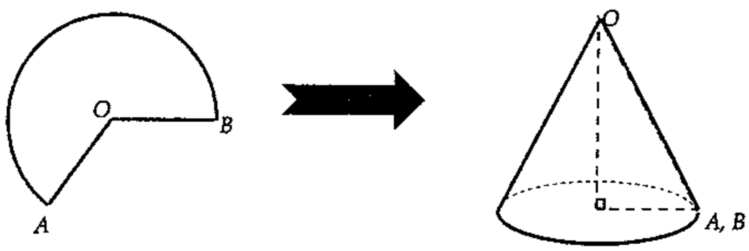
Suy ra $V_2\ge\frac{1}{3}.\pi.8r^3$, tức là V_2 đạt GTNN khi và chỉ khi

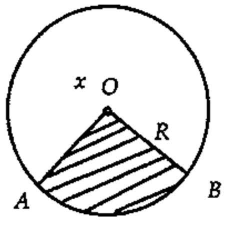
$$y-2r=\frac{4r^2}{y-2r}\Leftrightarrow y=4r, \text{ từ đó } x=r\sqrt{2}.$$

2.5 Một số bài toán ứng dụng thực tế của hình nón.

Lấy một miếng bìa, cắt thành hình quạt trong giới hạn bởi một cung tròn AB và hai bán kính OA, OB. Ta uốn cong hình quạt tròn đó để có thể dán hai bán kính OA, OB với nhau.

Sau khi dán, cung tròn AB trở thành một đường khép kín. Nếu ta làm cho đường khép kín này trở thành một đường tròn thì ta được một phần của mặt nón tròn xoay.





Bài toán 3: Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?

A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ B. $\dfrac{\pi}{3}$ C. $\dfrac{\pi}{2}$ D. $\dfrac{\pi}{4}$

(Trích sách bộ đề tinh túy môn Toán năm 2017, đề thi thử tạp chí Toán học & Tuổi trẻ)

Lời giải

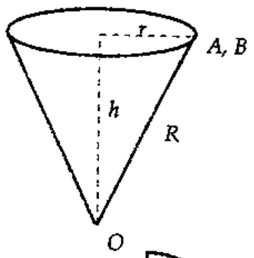
Đáp án A.

Với bài này độc giả cần nhớ lại công thức tính độ dài cung tròn. Độ dài cung tròn AB dùng làm phễu là : $Rx = 2\pi r \Leftrightarrow r = \dfrac{Rx}{2\pi}$;

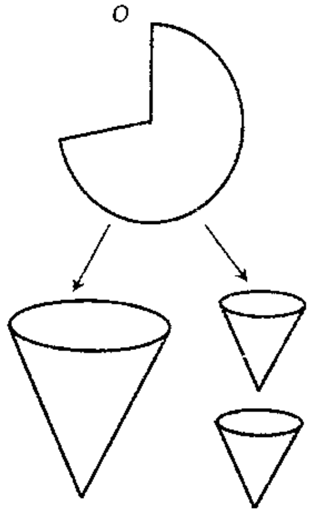
$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Thể tích cái phễu là: $V = f(x) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ với $x \in (0;2\pi)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}.\dfrac{x^2\left(8\pi^2 - 3x^2\right)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. Vì đây là BT trắc nghiệm nên ta có thể kết luận luôn rằng thể tích của cái phễu lớn nhất khi $x = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$. Vì ta đang xét trên $(0;2\pi)$ mà $f'(x) = 0$ tại duy nhất một điểm thì ta có thể làm nhanh mà không vẽ BBT nữa.



Bài toán 4: Từ cùng một tấm kim loại dẻo hình quạt như hình vẽ có kích thước bán kính $R = 5$ và chu vi của hình quạt là $P = 8\pi + 10$, người ta gò tấm kim loại thành những chiếc phễu theo hai cách:

1. Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu.
2. Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu.

Gọi V_1 là thể tích của cãi phễu thứ nhất, V_2 là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$?

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{21}{\sqrt{7}}$ B. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$ C. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ D. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

(Trích sách bộ đề tinh túy môn Toán năm 2017)

Đáp án B

Phân tích: Do chu vi của hình quạt tròn là

$\boxed{P = \text{độ dài cung} + 2R}$ .Do đó độ dài cung tròn là $l = 8\pi$.

Lời giải

Theo cách thứ nhất: 8π chính là chu vi đường tròn đáy của cái phễu. Tức là $2\pi r = 8\pi \Rightarrow r = 4$

Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}.3.\pi.4^2$

Theo cách thứ hai: Thì tổng chu vi của hai đường tròn đáy của hai cái phễu là $8\pi \Leftrightarrow$ chu vi của một đường tròn đáy là $4\pi \Rightarrow 4\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 2$

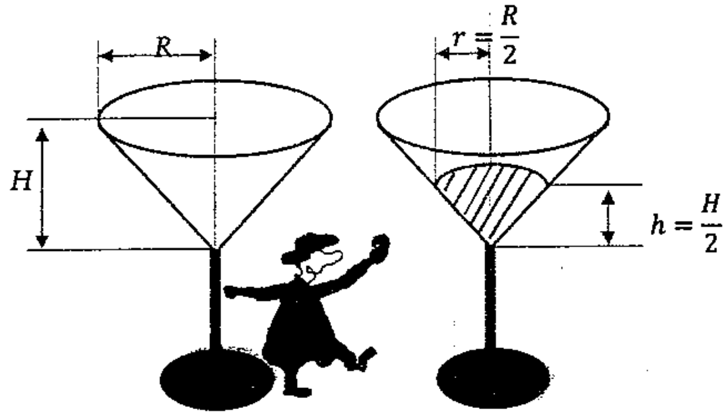
Khi đó $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21} \Rightarrow V_2 = 2.\dfrac{1}{3}.\sqrt{21}.2^2.\pi$

Khi đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4^2}{\dfrac{8\sqrt{21}}{3}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

Bài toán 5: Một chiếc cốc dạng hình nón, chứa đầy rượu như hình vẽ. Do cụ Bá có tửu lượng kém nên cụ uống một lượng rượu nên "chiều cao" của rượu còn lại trong bằng một nửa chiều cao ban đầu. Hỏi cụ đã uống bao nhiêu phần trong cốc?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{3}{4}$

(Trích sách bộ đề tinh túy năm 2017)



Đáp án C.

Lời giải

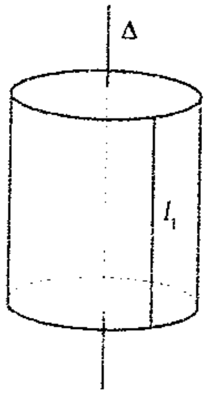
Ta thấy như hình vẽ thì lượng rượu còn lại trong cốc của cụ bá là

$V_2 = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\pi.\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{24}\pi h.R^2$.

Mặt khác thể tích cốc ban đầu là $V = \frac{1}{3}\pi hR^2$. Khi đó lương rượu còn lại so với lượng ban đầu là: $\frac{V_2}{V} = \frac{1}{24}:\frac{1}{3} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{8}V$ (V_1 là lượng rượu đã uống).

Mặt trụ, hình trụ, khối trụ.

1. Khái niệm về mặt trụ.



Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng l song song với Δ, cách Δ một khoảng R.

> Mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng l như thế khi quay quanh Δ được gọi là mặt trụ tròn xoay (hoặc đơn giản là mặt trụ).

Khi đó đường thẳng Δ được gọi là trục của mặt trụ, l được gọi là đường sinh của mặt trụ và R được gọi là bán kính của mặt trụ.

Mặt trụ là tập hợp tất cả các điểm M cách đường thẳng Δ cố định một khoảng R không đổi.

Nếu điểm M_1 nằm trên mặt trụ thì đường thẳng l_1 đi qua M_1 và song song với Δ cũng nằm trên mặt trụ đó (vì mọi điểm của l_1 đều cách Δ một khoảng là R). Như vậy đường thẳng l_1 cũng là một đường sinh của mặt trụ.

2. Hình trụ và khối trụ.

Cắt mặt trụ H, có trục Δ, bán kính R bởi hai mặt phẳng phân biệt (P) và (P') cùng vuông góc với Δ, ta được giao tuyến là hai đường tròn $(C);(C')$.

> Phần mặt trụ H nằm giữa hai mặt phẳng $(P),(P')$ cùng với hai hình tròn xác định bởi $(C);(C')$ được gọi là hình trụ.

Hai đường tròn $(C);(C')$ được gọi là hai đường tròn đáy, hai hình tròn xác định bởi chúng được gọi là hai mặt đáy của hình trụ, bán kính của chúng bằng R gọi là bán kính của hình trụ. Khoảng cách giữa hai mặt đáy được gọi là chiều cao của hình trụ.

Nếu gọi O, O' là tâm của hai đáy thì đoạn thẳng OO' được gọi là trục của hình trụ.

Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt đáy được gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

> Hình trụ và phần không gian được giới hạn bởi hình trụ được gọi là khối trụ.

3. Diện tích hình trụ và thể tích khối trụ.

Một hình lăng trụ được gọi là nội tiếp một hình trụ nếu hai đáy của hình lăng trụ nội tiếp hai đường tròn đáy của hình trụ. Khi đó ta còn nói hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ

Định nghĩa

> Diện tích xung quanh của hình trụ là giới hạn của diện tích xung quanh của hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ khi có số cạnh đáy tăng lên vô hạn.
>
> Thể tích của khối trụ (còn gọi là thể tích của hình trụ) là giới hạn của thể tích hình lăng trụ đều nội tiếp hình trụ khi có số cạnh đáy tăng lên vô hạn.

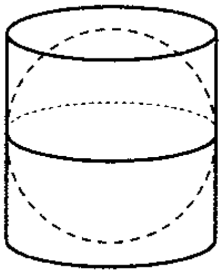
Diện tích xung quanh của hình lăng trụ được tính bằng chu vi đáy nhân với chiều cao: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rl}$

Thể tích của khối trụ tròn xoay được tính bằng công thức $\boxed{V = B.h = \pi r^2 h}$

3. Một số ví dụ về mặt trụ.

Ví dụ 1: Cho hình trụ H có bán kính R, trục OO' bằng $2R$ và mặt cầu (S) có đường kính OO'.
a. So sánh diện tích mặt cầu và diện tích toàn phần của hình trụ.
b. So sánh thể tích của khối trụ H và khối cầu (S)

Lời giải



a. Diện tích toàn phần của hình trụ bằng:
$4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

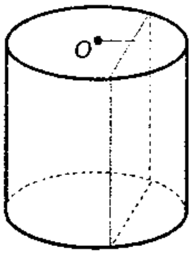
Vậy $\boxed{\dfrac{S_{tp(S)}}{S_{tp\,H}} = \dfrac{2}{3}}$

b. Thể tích của khối cầu là: $V_{(S)} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích của khối trụ là: $V_{(H)} = \pi R^2.2R = 2\pi R^3$. $\boxed{\Rightarrow \dfrac{V_{(S)}}{V_{(H)}} = \dfrac{2}{3}}$

Ví dụ 2: Cho hình trụ có bán kính đáy R, đường cao OO'. Cắt hình trụ đó bằng mặt phẳng (α) vuông góc với đáy và cách điểm O một khoảng h cho trước $(h < R)$. Lúc này mặt phẳng (α) có tính chất:

A. Luôn tiếp xúc với một mặt trụ cố định.
B. Luôn cách một mặt phẳng cho trước qua trục hình trụ một khoảng h.
C. Cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông.
D. Cả ba tính chất trên đều sai.



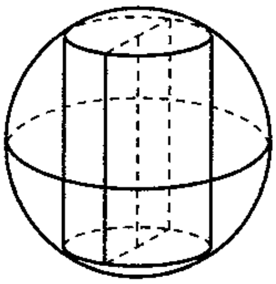
Đáp án A.

Lời giải

Ta có hình vẽ bên:
Ta thấy A đúng do mặt phẳng (α) luôn tiếp xúc với mặt trụ có đường cao OO' và bán kính đáy $r = h$.

Ví dụ 3: Viết công thức tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình trụ có đường cao h, bán kính đáy r có tâm đối xứng trùng với tâm O của khối cầu..

Lời giải



Ta có hệ thức $R^2 = \dfrac{h^2}{4} + r^2 \Rightarrow R = \sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}$

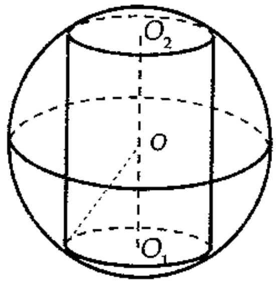
Vậy $\boxed{V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.\left(r^2 + \dfrac{h^2}{4}\right).\sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4}}}$

Ví dụ 4: Trong các hình trụ nội tiếp mặt cầu bán kính R cho trước, tìm hình trụ có thiết diện qua trục lớn nhất.

Lời giải

Gọi bán kính đáy hình trụ là x. Chiều cao của hình trụ này là y. Khi hình trụ nội tiếp mặt cầu thì tâm mặt cầu là trung điểm của đoạn O_1O_2 (với $O_1;O_2$ là tâm của hai đáy),. từ đó giữa bán kính mặt cầu và x, y có mối quan hệ

$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = R^2$.



Thiết diện qua trục qua hình trụ là hình chữ nhật với hai kích thước $2x$ và y, từ đó diện tích S của thiết diện là $S=2xy$. Suy ra $S^2=4x^2y^2=16x^2.\frac{y^2}{4}$.

Từ đó S lớn nhất khi và chỉ khi $16x^2.\frac{y^2}{4}$ lớn nhất.

Mặt khác ta lại có $x^2+\frac{y^2}{4}=R^2$, do đó $16x^2.\frac{y^2}{4}$ đạt max khi và chỉ khi $x^2=\frac{R^2}{2}=\frac{y^2}{4}$, tức là $x=\frac{R\sqrt{2}}{2};y=R\sqrt{2}$.

Vậy trong các hình trụ nội tiếp mặt cầu tâm I, bán kính R thì hình trụ có bán kính đáy $r=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ và chiều cao $R\sqrt{2}$ có thiết diện qua trục lớn nhất. Lúc này thiết diện là hình vuông cạnh $R\sqrt{2}$.

Ví dụ 5: Một hình trụ có diện tích toàn phần bằng S. Xác định các kích thước của hình trụ đó (bán kính đáy và chiều cao), sao cho thể tích của khối trụ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Gọi bán kính đáy và chiều cao của hình trụ đó lần lượt là x, y với $x,y>0$. Khi đó $S=2\pi x^2+2\pi xy$ hay $y=\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}$ và thể tích V của khối trụ bằng:

$V=\pi x^2y=\frac{1}{2}xS-\pi x^3, x>0$.

Vậy V lớn nhất khi và chỉ khi hàm $f(x)=\frac{1}{2}xS-\pi x^3$ lớn nhất.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{2}S-3\pi x^2; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Vậy thể tích khối trụ lớn nhất khi thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông cạnh $\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

I. Mặt nón

Câu 1: Một hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích xung quanh của hình nón bằng 9π. Tính đường cao h của hình nón.

A. $h=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $h=\sqrt{3}$.

C. $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. D. $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 2: Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và diện tích xung quanh bằng 15π. Tính thể tích V của khối nón (N)

A. $V=12\pi$ B. $V=20\pi$

C. $V=36\pi$ D. $V=60\pi$

(Trích đề minh họa lần II- BGD&ĐT)

Câu 3: Một hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng $3a$ và đường sinh bằng $5a$. Thể tích của khối nón là:

A. $5a^3\pi$ B. $9a^3\pi$ C. $12\pi a^3$ D. $15\pi a^3$

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có đường thẳng AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Hai đường thẳng BD và BC vuông góc với nhau. Khi quay lần lượt các mặt của tứ diện đó xung quanh trục là đường thẳng AB. Khi đó số hình nón khác nhau được tạo thành là:

A. 1 B. 3 C. 4 D. 2

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 5: Một hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng $40cm$, độ dài đường sinh bằng $44cm$. Thể tích khối nón này có giá trị gần đúng là

A. $30700cm^3$. B. $92090cm^3$.

C. $30697cm^3$. D. $92100cm^3$.

(Trích đề thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc)

Câu 6: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AC=2a$, $ABC=30°$. Tính độ dài đường sinh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AB.

A. $l=4a$ B. $l=a\sqrt{3}$

C. $l=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $l=2a$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 7: Cho khối nón đỉnh O, trục OI. Mặt phẳng trung trực của OI chia khối nón thành 2 phần. Tỉ số thể tích của hai phần là:

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{8}$ C. $\dfrac{1}{4}$ D. $\dfrac{1}{7}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu)

Câu 8: Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq}=2\pi a^2$ B. $S_{xq}=\sqrt{3}\pi a^2$

C. $S_{xq}=\pi a^2$ D. $S_{xq}=2a^2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 9: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=3a$, $AC=4a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khi quay quanh AB, các đường gấp khúc AMB, ACB sinh ra các hình nón có diện tích xung quanh lần lượt là S_1, S_2. Tính tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

A. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\sqrt{13}}{10}$ B. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ D. $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$ B. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$

C. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$ D. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 11: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=6a$, $AC=8a$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l=10a$ B. $l=100a$

C. $l=12a$ D. $l=14a$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Sơn La)

Câu 12: Nếu hình nón có độ dài đường sinh bằng l. Thiết diện qua trục là tam giác vuông, tìm thể tích của khối nón.

A. $V=\dfrac{\pi l^3\sqrt{2}}{4}$ B. $V=\dfrac{\pi l^3\sqrt{2}}{6}$

C. $V=\dfrac{\pi l^3\sqrt{2}}{12}$ D. $V=\dfrac{\pi l^3\sqrt{3}}{12}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 13: Cho hình nón có chiều cao bằng 3cm, góc giữa trục và đường sinh bằng 60^0. Thể tích của khối nón là:

A. $9\pi cm^3$ B. $3\pi cm^3$

C. $18\pi cm^3$ D. $27\pi cm^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐH SP HN)

Câu 14: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 2 *cm*, góc ở đỉnh bằng 60^0. Diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $6\pi cm^2$. B. $3\pi cm^2$

C. $2\pi cm^2$ D. πcm^2.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 15: Tam giác ABC vuông tại B có $AB = 3a, BC = a$. Khi quay hình tam giác đó xung quanh đường thẳng AB một góc 360^0 ta được một khối tròn xoay. Thể tích của khối tròn xoay đó là:

A. πa^3 B. $3\pi a^3$ C. $\frac{\pi a^3}{3}$. D. $\frac{\pi a^3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 16: Một khối nón có thể tích bằng 30π. Nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính mặt đáy của khối nón lên hai lần thì thể tích khối nón mới bằng:

A. 120π B. 60π C. 40π D. 480π

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 17: Cho hình nón có bán kính đáy là $4a$, chiều cao là $3a$. Diện tích xung quanh hình nón bằng:

A. $24\pi a^2$ B. $20\pi a^2$

C. $40\pi a^2$ D. $12\pi a^2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 3)

Câu 18: Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O bán kính r nằm trên mặt phẳng (P), đường cao $SO = h$. Điểm O' thay đổi trên đoạn SO sao cho $SO' = x$ $(0 < x < h)$. Hình trụ tròn xoay (T) có đáy thứ nhất là hình tròn tâm O bán kính r $(0 < r' < r)$ nằm trên mặt phẳng (P), đáy thứ hai là hình tròn tâm O' bán kính r' nằm trên mặt phẳng (Q), (Q) vuông góc với SO tại O' (đường tròn đáy thứ hai của (T) là giao tuyến của (Q) với mặt xung quanh của (N)). Hãy xác định giá trị của x để thể tích phần không gian nằm phía trong (N) nhưng phía ngoài của (T) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x = \frac{1}{2}h$ B. $x = \frac{1}{3}h$

C. $x = \frac{2}{3}h$ D. $x = \frac{1}{4}h$

(Trích đề thi thử tạp chí Toán học và Tuổi trẻ lần 5)

Câu 19: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Mặt trụ và mặt nón có chứa các đường thẳng.

B. Mọi hình chóp luôn nội tiếp được trong mặt cầu.

C. Có vô số mặt phẳng cắt mặt cầu theo những đường tròn bằng nhau.

D. Luôn có hai đường tròn bán kính bằng nhau cùng nằm trên một mặt nón.

II. Mặt trụ

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $ACB = 60°$. Đường thẳng BC' tạo với $(ACC'A')$ một góc $30°$. Tính thể tích V của khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V = 3a^3$. D. $V = a^3\sqrt{3}$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{\pi a^2 h}{9}$ B. $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$

C. $V = 3\pi a^2 h$ D. $V = \pi a^2 h$

(Trích đề minh họa lần II- BGD&ĐT)

Câu 22: Một hình trụ tròn xoay có đường sinh bằng đường kính của đường tròn đáy và bằng 4. Diện tích xung quanh của hình trụ là:

A. 12π B. 10π C. 8π D. 16π

(Trích đề thi thử sở GD&ĐT Thanh Hóa)

Câu 23: Cho một hình trụ có bán kính bằng r và chiều cao bằng h. Viết công thức tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ.

A. $S_{tp} = \pi r(2r + h)$ B. $S_{tp} = 2\pi r(r + h)$

C. $S_{tp} = \pi r(r + h)$ D. $S_{tp} = \pi r(r + 2h)$.

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 24: Một hình trụ có bán kính bằng R, chiều cao bằng $R\sqrt{3}$. Tính diện tích S của thiết diện song song và cách trục hình trụ một khoảng $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

A. $S=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ B. $S=\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$

C. $S=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ D. $S=R^2\sqrt{3}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 25: Cho hình trụ có trục là OO', có thiết điện qua trục là hình vuông cạnh $2a$. Mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục một khoảng $\frac{a}{2}$. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P).

A. $a^2\sqrt{3}$ B. a^2 C. $2\sqrt{3}a^2$ D. πa^2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 26: Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn tâm O và O' có bán kính R và chiều cao bằng $R\sqrt{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua OO' cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{2}R^2$ B. $2\sqrt{2}R^2$

C. $4\sqrt{2}R^2$ D. $2R^2$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a$, $BC=3a$. Gọi M,N là các điểm trên các cạnh AD,BC sao cho $MA=2MD, NB=2NC$. Khi quay quanh AB các đường gấp khúc $AMNB$, $ADCB$ sinh ra các hình trụ có diện tích toàn phần lần lượt là S_1,S_2. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{12}{21}$ B. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{3}$

C. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{9}$ D. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{8}{15}$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 1)

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$. Thể tích khối trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. πa^3 B. $2\pi a^3$ C. $3\pi a^3$ D. $4\pi a^3$

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Văn Trỗi lần 3)

Câu 29: Trong không gian cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$, $AD=2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục MN ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đó?

A. 10π. B. 4π. C. 2π. D. 6π.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa – Hà Nam)

Câu 30: Khối trụ có thiết diện qua trục là hình vuông cạnh $a=2cm$ có thể tích là:

A. $3\pi cm^3$ B. $4\pi cm^3$

C. $2\pi cm^3$ D. πcm^3

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 31: Cho hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng chiều cao và bằng 2 cm. Diện tích xung quanh của hình trụ bằng:

A. $\frac{8\pi}{3}cm^2$. B. $4\pi cm^2$.

C. $2\pi cm^2$ D. $8\pi cm^2$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên ĐHSP – HN)

Câu 32: Một hình trụ có bán kính $5cm$ và chiều cao $7cm$. Cắt hình trụ bằng mặt phẳng (P) song song với trục và cách trục $3cm$. Diện tích thiết diện tạo bởi hình trụ và mặt phẳng (P) bằng:

A. 112 cm^2 B. 28 cm^2

C. 54 cm^2 D. 56 cm^2

(Trích đề thi thử THPT chuyên Thái Bình lần 2)

Câu 33: Một hình trụ có tâm các đáy là A, B. Biết rằng mặt cầu đường kính AB tiếp xúc với các mặt đáy của hình trụ tại A, B và tiếp xúc với mặt xung quanh của hình trụ đó. Diện tích của mặt cầu này là 16π. Tính diện tích xung quanh của hình trụ đã cho.

A. $\frac{16\pi}{3}$ B. 16π C. 8π D. $\frac{8\pi}{3}$

(Trích đề thi thử tạp chí TH &TT lần 5)

Câu 34: Một hình nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và mặt phẳng qua trục cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông. Tính thể tích V của khối nón.

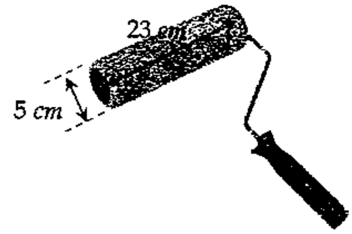
A. $V=\frac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ B. $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

C. $V=\frac{2\sqrt{3}\pi a^3}{3}$ D. $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo lần 2)

III. Ứng dụng thực tế

Câu 35: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là chiều dài lăn là $23cm$ (hình bên). Sauk hi lăn trọn 15 vòng thì trục lăn tạo nên sân phẳng một diện diện tích là:

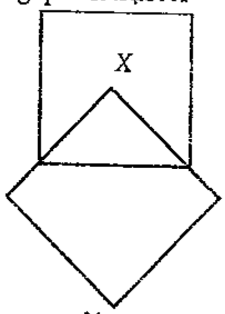


A. $1725\pi\ cm^2$. B. $3450\pi\ cm^2$.

C. $1725\pi\ cm^2$. D. $862,5\pi\ cm^2$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu)

Câu 36: Cho hai hình vuông cùng có cạnh bằng 5 được xếp chồng lên nhau sao cho đỉnh X của một hình vuông là tâm của hình vuông còn lại (như hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên xung quanh trục XY



A. $V=\dfrac{125\left(1+\sqrt{2}\right)\pi}{6}$ B. $V=\dfrac{125\left(5+2\sqrt{2}\right)\pi}{12}$

C. $V=\dfrac{125\left(5+4\sqrt{2}\right)\pi}{24}$ D. $V=\dfrac{125\left(2+\sqrt{2}\right)\pi}{4}$

(Trích đề minh họa lần II- BGD&ĐT)

Câu 37: Một thùng hình trụ có thể tích là 48π, chiều cao là 3. Diện tích xung quanh của thùng đó là:

A. 12π B. 24π C. 4π D. 18π

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Câu 38: Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với chiều cao 200*cm*, độ dày của thành ống là 15*cm*, đường kính của ống là 80*cm*. Lượng bê tông cần phải đổ là:

A. $0,195\pi m^3$ B. $0,18\pi m^3$

C. $0,14\pi m^3$ D. πm^3

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

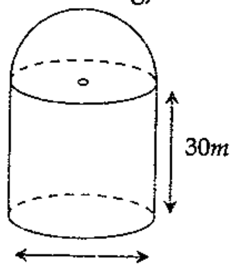
Câu 39: Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính diện tích đáy S của cái lọ.

A. $S=16\pi r^2$ B. $S=25\pi r^2$

C. $S=9\pi r^2$ D. $S=36\pi r^2$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 40: Một cái tháp khổng lồ có thân là hình trụ và mái là một nửa hình cầu. Người ta muốn sơn toàn bộ mặt ngoài của tháp (kể cả mái). Tính diện tích S cần sơn (làm tròn đến mét vuông).



A. $S=8143$ (m²) B. $S=11762$ (m²)

C. $S=12667$ (m²) D. $S=23524$ (m²)

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

Câu 41: Một bồn nước inox được thiết kế có dạng hình trụ (có nắp) đựng được 10 mét khối nước. Tìm bán kính r của đáy bồn nước biết lượng inox được sử dụng để làm bồn nước là ít nhất?

A. $r=\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}\ (m)$ B. $r=\sqrt[3]{\dfrac{5}{2\pi}}\ (m)$

C. $r=\sqrt[3]{\dfrac{10}{\pi}}\ (m)$ D. $r=\sqrt[3]{5\pi}\ (m)$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Ninh Bình)

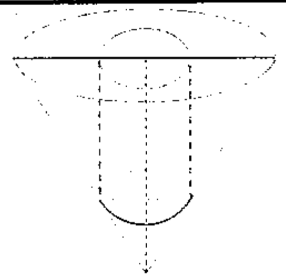
Câu 42: Một cốc nước hình trụ có chiều cao 9 *cm*, đường kính 6 *cm*, mặt đáy phẳng và dày 1 *cm*, thành cốc dày 0,2 *cm*. Đổ vào cốc 120 *ml* nước, sau đó thả vào cốc 5 viên bi có đường kính 2 *cm*. Hỏi mặt nước trong cốc cách mép cốc bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)?

A. 3,67 *cm* B. 2,67 *cm*

C. 3,28 *cm* D. 2,28 *cm*

(Trích đề thi thử THPT chuyên Phan Bội Châu lần 2)

Câu 43: Một bình đựng nước dạng hình nón (không có nắp đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào bình đó một khối trụ và đo được thể tích nước trào ra ngoài là $\dfrac{16\pi}{9}(dm^3)$. Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của hình nón và khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón (như hình vẽ dưới). Tính bán kính đáy R của bình nước.



A. $R = 3(dm)$. B. $R = 4(dm)$.

C. $R = 2(dm)$. D. $R = 5(dm)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai)

Câu 44: Một nhà máy cần thiết kế một chiếc bể đựng nước hình trụ bằng tôn có thể tích là $64\pi\left(m^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.

A. $r = 3\left(m\right)$. B. $r = \sqrt[3]{16}\left(m\right)$.

C. $r = \sqrt[3]{32}\left(m\right)$. D. $r = 4\left(m\right)$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Biên Hòa - Đồng Nai)

Câu 46: Cho hai hình trụ có cùng thể tích. Bán kính của hình trụ thứ hai lớn hơn 10% so với bán kính của hình trụ thứ nhất. Hỏi mối quan hệ của chiều cao giữa hai hình trụ là như thế nào?

A. Chiều cao thứ hai nhỏ hơn 21% so với chiều cao thứ nhất

B. Chiều cao thứ nhất lớn hơn 21% so với chiều cao thứ hai

C. Chiều cao thứ nhất lớn hơn 10% so với chiều cao thứ hai

D. Chiều cao thứ hai nhỏ hơn 10% so với chiều cao thứ nhất.

(Trích đề thi thử THPT Biên Hòa – Đồng Nai)

Câu 47: Một tấm bìa gồm nửa hình tròn bán kính R uống cong lại sao cho hai bán kính sát vào nhau tạo thành hình nón. Tính thể tích khối nón tạo thành.

A. $V = \dfrac{\pi R^3}{22}\sqrt{3}$ B. $V = \dfrac{\pi R^3}{24}\sqrt{3}$

C. $V = \dfrac{\pi R^3}{12}\sqrt{3}$ D. $V = \dfrac{\pi R^3}{25}\sqrt{3}$

(Trích đề thi thử Sở GD&ĐT Phú Thọ)

Câu 50: Một cái nồi nấu nước người ta làm dạng hình trụ, chiều cao của nồi là $60cm$, diện tích đáy $900cm^2$. Hỏi người ta cần miếng kim loại hình chữ nhật có kích thước là bao nhiêu để làm tâm nồi đó? (bỏ qua kích thước các mép gấp).

A. Chiều dài $180cm$, chiều rộng $60cm$.

B. Chiều dài $900cm$, chiều rộng $60cm$.

C. Chiều dài $30\pi cm$, chiều rộng $60cm$.

D. Chiều dài $60\pi cm$, chiều rộng $60cm$.

(Trích đề thi thử THPT chuyên Hưng Yên lần 2)

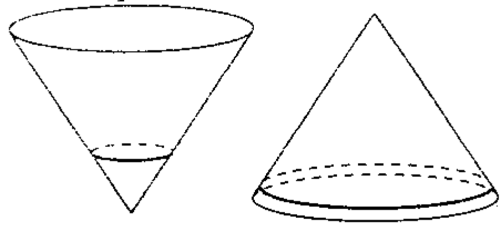
Câu 51: Khi sản xuất vỏ lon sữa hình trụ, nhà sản xuất luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức diện tích toàn phần của vỏ lon hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của lon sữa bằng $1\ dm^3$ thì nhà sản xuất cần phải thiết kế hình trụ có bán kính đáy R bằng bao nhiêu để chi phí nguyên liệu thấp nhất?

A. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}(dm)$ B. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3\pi}}(dm)$

C. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}(dm)$ D. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}(dm)$

(Trích đề thi thử THPT Lam Kinh)

Câu 53: Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi đảo lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 *cm*.

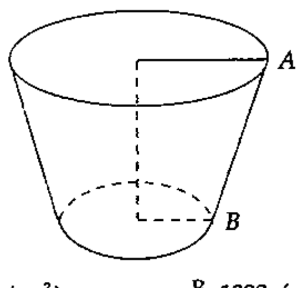


A. 0,3 (*cm*) B. 0,5 (*cm*)

C. 0,216 (*cm*) D. 0,188 (*cm*)

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 54: Một cái xô bằng inox có dạng như hình vẽ. Đáy trên có đường kính 42*cm*, đáy dưới có đường kính 18*cm*, cạnh bên $AB = 36cm$. Tính diện tích xung quanh của cái xô.



A. $1080\pi(cm^2)$ B. $1323\pi(cm^2)$

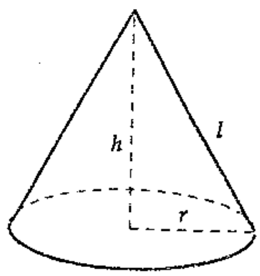
C. $1440\pi(cm^2)$ D. $486\pi(cm^2)$

(Trích đề thi thử THPT Hàn Thuyên)

Hướng dẫn giải chi tiết

I. Mặt nón

Câu 1: Đáp án A.



$S = \pi.r.l \Leftrightarrow 9\pi = \pi.r.2r$

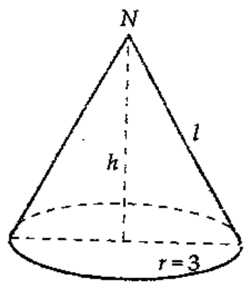
$\Leftrightarrow 9 = 2.r^2 \Leftrightarrow \frac{9}{2} = r^2$

Lại có: $l^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow (2r)^2 = h^2 + r^2$

$\Leftrightarrow 3r^2 = h^2 \Leftrightarrow \frac{h^2}{3} = r^2$

$\Rightarrow \frac{h^2}{3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Câu 2: Đáp án A.



$S_{xq} = \pi.r.l \Leftrightarrow 15\pi = \pi.3.l \Rightarrow l = 5$

$\Rightarrow h = \sqrt{5^2 - 3^3} = 4$

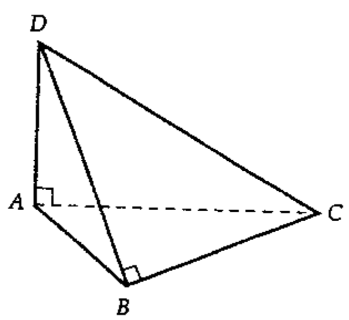
$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.3^2.4 = 12\pi.$

Câu 3: Đáp án C.

Ta có $h = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a$.

Vậy $V = \frac{1}{3}.\pi.9a^2.4a = 12\pi a^3$

Câu 4: Đáp án D.



Ta có: $AD \perp BC$ và $DB \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (ADB) \Rightarrow BC \perp AB$

Các hình nón được tạo thành là:

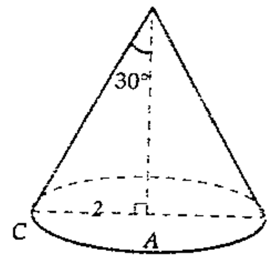
Hình nón tâm B, đường cao AB, đường sinh AC.

Câu 5: Đáp án A.

$V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.r^2.\sqrt{l^2 - r^2}$

$= \frac{1}{3}\pi.40^2.\sqrt{44^2 - 40^2} \approx 30713(cm^3).$

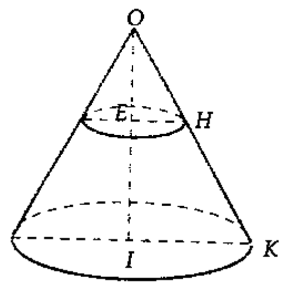
Câu 6: Đáp án A.



Khi quay ΔABC quanh trục AB thì

$l = BC = \frac{2a}{\sin 30°}. = 4a$

Câu 7: Đáp án B.



Gọi V_1 là thể tích của mặt nón tâm E, $h = OE$.

Gọi V_2 là thể tích của mặt nón tâm I, $h = OI$.

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{OE.EH^2}{OI.IK^2} = \frac{1}{8}$

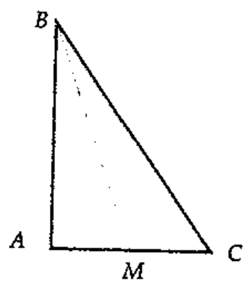
Vậy tỉ số hai phần thể tích là: $\frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$.

Câu 8: Đáp án A.

$S_{xq} = \pi.r.l = \pi.r.\sqrt{h^2 + r^2}$

$= \pi.a.\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2\pi a^2.$

Câu 9: Đáp án A

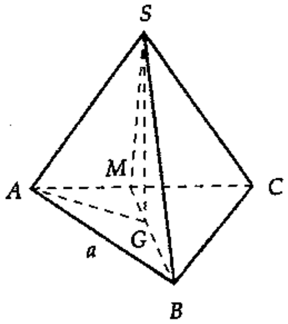


Ta có $S_{xq} = \pi rl$

ở đây để tính tỉ số hai diện tích xung quanh ta chỉ cần xét:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1 l_1}{r_2 l_2} = \frac{2a.\sqrt{(3a)^2 + (2a)^2}}{4a.5a} = \frac{\sqrt{13}}{10}$$

Câu 10: Đáp án D.



Gọi M là trung điểm AC và G là trọng tâm ΔABC

$$\Rightarrow SG \perp (ABC) \Rightarrow SMG = 60^\circ \text{ và } MG = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow SG = MG.\tan SMG = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 60^\circ = \frac{a}{2}.$$

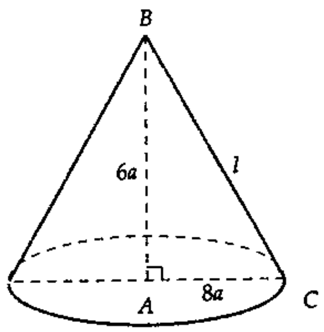
Ta có bán kính mặt nón đỉnh S là:

$$r = AG = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{xq} = \pi.r.l = \pi.AG.SA = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{SG^2 + AG^2}$$

$$= \pi.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}.$$

Câu 11: Đáp án A.

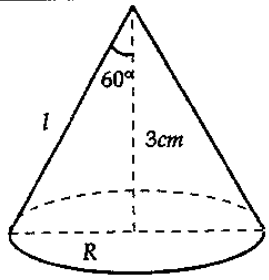


$$l = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10a.$$

Câu 12: Đáp án C.

$$V = \frac{\pi.r^2.h}{3} = \frac{\pi.r^3}{3} = \frac{\pi}{3}.\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\pi.l^3\sqrt{2}}{12}.$$

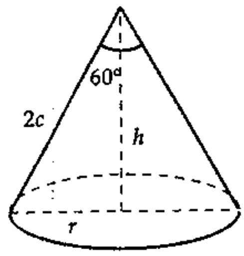
Câu 13: Đáp án D.



$$r = 3.\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}\,(cm)$$

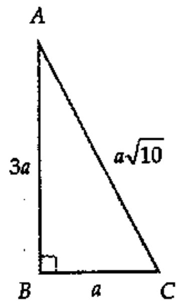
$$V = \frac{\pi.r^2.h}{3} = \frac{\pi.(3\sqrt{3})^2.3}{3} = 27\pi\,(cm^3).$$

Câu 14: Đáp án C.



$$r = 2.\sin 30^\circ = 1 \Rightarrow S_{xq} = \pi.r.l = \pi.1.2 = 2\pi\,(cm^2).$$

Câu 15: Đáp án A.



$$V = \pi.BC^2.AB.\frac{1}{3} = \frac{\pi.a^2.3a}{3} = \pi a^3.$$

Câu 16: Đáp án A.

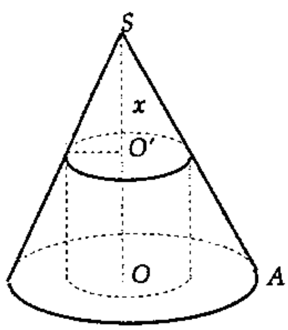
$$V_1 = 30\pi = \frac{\pi}{3}.r^2.h$$

$$V_2 = \pi.(2r)^2.h \Rightarrow V_2 = 4V_1 = 120\pi.$$

Câu 17: Đáp án B.

$$S_{xq} = \pi.l.r = \pi.r.\sqrt{h^2 + r^2} = \pi.4a.\sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = 20a^2\pi.$$

Câu 18: Đáp án C.



Áp dụng định lí Thales ta có: $\frac{x}{h}=\frac{r'}{r}\Rightarrow r'=\frac{xr}{h}$.

Khi đó ta có công thức tính thể tích của khối trụ là

$V=f(x)=\pi(r')^2.(h-x)=\pi\frac{r^2}{h^2}.x^2.(h-x)$.

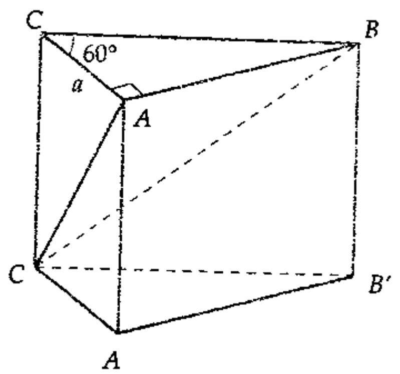
Khi đó $f'(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}(2hx-3x^2)=0\Leftrightarrow x=\frac{2h}{3}$ do $x>0$

. Đến đây ta chọn C.

Câu 19: Đáp án B.

II. Mặt trụ

Câu 20: Đáp án A.



Vì $BA\perp AC$ và $BA\perp AA'$ nên $AB\perp(ACC'A')$

$\Rightarrow BC'A=30°\Rightarrow BA=AC'.\tan 30°$

$\Leftrightarrow AC.\tan 60°=AC'.\tan 30°$

$\Rightarrow AC'=3a\Rightarrow AA'=\sqrt{(3a)^2-a^2}=2\sqrt{2}a.$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{AA'.AB.AC}{2}=\frac{2\sqrt{2}a.a.a\sqrt{3}}{2}=a^3\sqrt{6}.$

Câu 21: Đáp án B.

Đáy của khối trụ chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Vậy bán kính của đường tròn là $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó

thể tích của khối trụ là $V=\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.h=\frac{\pi a^2h}{3}$.

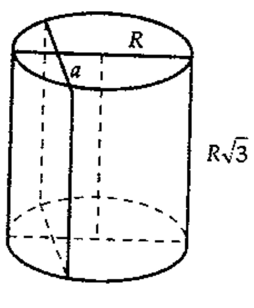
Câu 22: Đáp án D.

$S_{xq}=l.\pi.(2r)=4\pi.4=16\pi.$

Câu 23: Đáp án B.

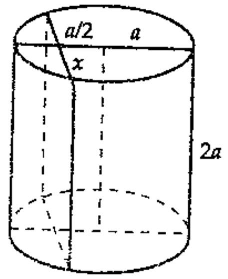
$S_{tp}=h.\pi.(2r)+2\pi.r^2=2\pi r(h+r).$

Câu 24: Đáp án C.



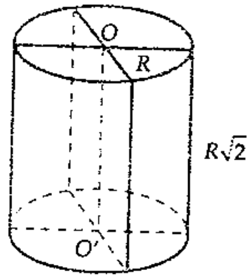
$a=\sqrt{R^2-\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{R}{2}\Rightarrow S=a.R\sqrt{3}=\frac{R^2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 25: Đáp án A.



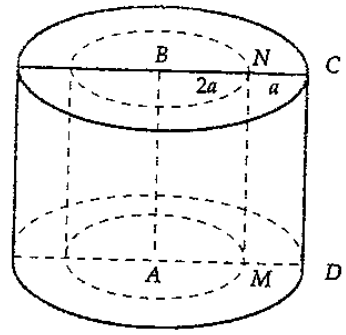
$x=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S=\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a=a^3\sqrt{3}.$

Câu 26: Đáp án B.



$S=2R.R\sqrt{2}=2\sqrt{2}R^2.$

Câu 27: Đáp án D.



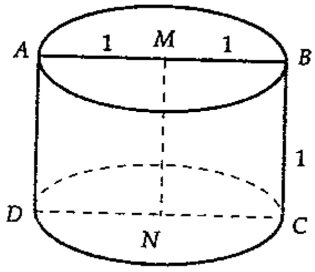
$S_1=\pi.2BN.AB+2.\pi.BN^2=2\pi.2a.2a+2\pi.(2a)^2=16\pi a^2$

$S_2=\pi.2BC.AB+2\pi.BC^2=2\pi.3a(2a+3a)=30a^2\pi.$

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$.

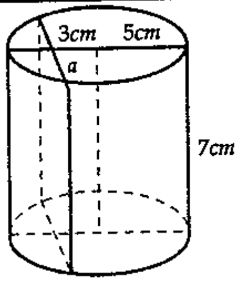
Câu 28: Đáp án D.

Câu 29: Đáp án B.



$S_{tp}=2\pi.MD.AB+2.(2\pi MD)=2\pi.(1+1)=4\pi.$

Câu 30: Đáp án C.



Ta có: $r=1(cm)$ và $h=2(cm)$

$\Rightarrow V=\pi.r^2.h=2\pi(cm^3)$.

Câu 31: Đáp án D.

$S_{xq}=2\pi.r.h=2\pi.2.2=8\pi(cm^2)$.

Câu 32: Đáp án D.

$a=\sqrt{5^2-3^2}=4(cm)$.

Vậy diện tích thiết diện là: $S=2.4.7=56(cm^2)$.

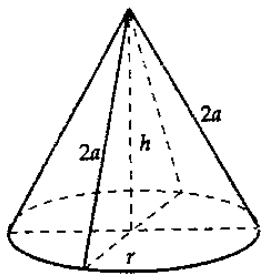
Câu 33: Đáp án B

Ta có

$4\pi r^2=16\pi \Leftrightarrow r=2$

Vậy $S_{xq\,tru}=2\pi.2.4=16\pi$

Câu 34: Đáp án A.



Ta có: $2r=2a.\sqrt{2}\Rightarrow r=a\sqrt{2}$ và $h=r=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V=\frac{\pi}{3}.r^2.h=\frac{\pi}{3}.2a.a\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}a^2\pi}{3}$.

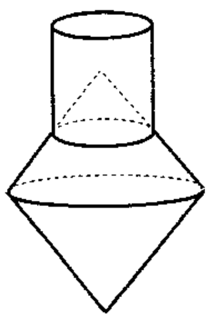
III. Ứng dụng thực tế

Câu 35: Đáp án A.

$S=15.S_{xq}=15.(2\pi.r.h)=15.\left(2\pi.\frac{5}{2}.23\right)=1725\pi(cm^2)$.

Câu 36: Đáp án C.

Khi quay xung quanh trục XY ta được vật thể tròn xoay ở bên dưới:



Phân tích: Khi quay quanh trục XY thì thể tích khối tròn xoay thu được chính là tổng của ba khối: khối trụ phía trên cùng, khối nón cụt ở giữa, và khối nón ở dưới cùng.

Lời giải:

1. Thể tích khối trụ là: $V_1=\pi.\left(\frac{5}{2}\right)^2.5=\frac{125\pi}{4}$.

Ta thấy khối nón cụt có đáy nhỏ chính là đáy của khối trụ, đáy lớn là đáy của khối nón, gọi đáy nhỏ là r, đáy lớn là R. Khi đó $r=\frac{5}{2}$ và $R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2. Vậy thể tích khối nón cụt là:

$V_2=\frac{h}{3}.\left(B+B'+\sqrt{B.B'}\right)=\frac{h.\pi}{3}.\left(R^2+r^2+Rr\right)$

$=\frac{1}{3}.\frac{5\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\left(\frac{5^2}{4}+\frac{5^2.2}{4}+\frac{5}{2}.\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).\pi$

$=\frac{125\left(2\sqrt{2}-1\right)}{24}\pi$

3. Thể tích khối nón dưới cùng là

$$V_3=\frac{1}{3}.\frac{5\sqrt{2}}{2}.\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2.\pi=\frac{125\pi}{12}$$

Vậy thể tích khối cần tìm là:

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{125.\left(5+4\sqrt{2}\right)}{24}\pi.$$

Câu 37: Đáp án B.

$V=48\pi=h.S_d$

Do $h=3\Rightarrow S_d=16\pi\Rightarrow R=4$

$S_{xq}=2\pi.R.h=2.\pi.4.3=24\pi$.

Câu 38: Đáp án A.

Số lượng bê tông cần đổ có thể tích là:

$V=\left(\pi.0,4^2-\pi.(0,4-0,15)^2\right).2=0,195\pi(m^3)$

Câu 39: Đáp án C.

Bán kính đáy của hình trụ là: $R=r+2r=3r$

$\Rightarrow S_d=\pi.R^2=9\pi R^2$.

Câu 40: Đáp án A.

Diện tích xung quanh của khối cầu là:

$S_c=4\pi R^2=4\pi.24^2=2304\pi$

Diện tích xung quanh của khối trụ là:

$S_t=48.\pi.30=1440\pi$

Vậy diện tích cần sơn là:

$S=\frac{S_c}{2}+S_t=2592\pi\approx 8143(m^2)$.

Câu 41: Đáp án A.

Ta có: $V=10\left(m^3\right)\Rightarrow \pi R^2h=10\Leftrightarrow h=\dfrac{10}{\pi R^2}$

$S_{tp}=2S_đ+S_{xq}=2\pi R^2+2R.h$

$=2\pi R^2+2R.\dfrac{10}{\pi R^2}=2\pi R^2+\dfrac{20}{R}$

Xét $f(x)=2\pi x^2+\dfrac{20}{x}$

$f'(x)=4\pi x-\dfrac{20}{x^2}\Rightarrow F'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{\pi}}$

Câu 42: Đáp án D.

Dung tích của cốc là:

$V=\pi.2,8^2.8$

Thể tích của nước và bi là:

$V_1=120+5.\dfrac{4}{3}.\pi.1^3$.

Thể tích còn trống trong cốc là: $V-V_1$

Vậy mặt nước cách thành cốc:

$\dfrac{V-V_1}{\pi.2,8^2}\approx 2,28$

Câu 43: Đáp án C.

Gọi bán kính đáy là $R\Rightarrow$ Chiều cao nón là $3R$.

Vì bán kính hình trụ bằng $2R$

$\Rightarrow \dfrac{R_{tru}}{R_{nón}}=\dfrac{3R-2R}{3R}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R_{tru}=\dfrac{R}{3}$.

$\Rightarrow V_{tru}=\pi R^2h=\pi.\left(\dfrac{R}{3}\right)^2.2R=\dfrac{2}{9}\pi R^3$

Mà $V_{tru}=\dfrac{16}{9}\pi\Rightarrow R=2.$

Câu 44: Đáp án C.

$V_{tru}=64\pi\left(m^3\right)\Rightarrow \pi R^2h=64\pi\Leftrightarrow h=\dfrac{64}{R^2}$

$S_{tp}=2\pi R^2+2\pi Rh=2\pi R^2+2\pi R.\dfrac{64}{R^2}=2\pi R^2+\dfrac{128\pi}{R}$

Xét $f(x)=2\pi x^2+\dfrac{128\pi}{x}$

$f'(x)=f(x)=4\pi x-\dfrac{128\pi}{x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{32}.$

Vậy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\sqrt[3]{32}.$

Câu 46: Đáp án B.

$V_1=V_2\Leftrightarrow \pi R_1^2h_1=\pi R_2^2h_2\Leftrightarrow R_2=\dfrac{110}{100}R_1$

$\Rightarrow \dfrac{h_1}{h_2}=\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2=1,1^2=1,21.$

Câu 47: Đáp án B.

Khối nón có $r=\dfrac{\pi R}{2\pi}=\dfrac{R}{2}$.

Lúc này $h=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2}{4}}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Khi đó $V=\dfrac{1}{3}.\pi.\dfrac{R^2}{4}.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 50: Đáp án D.

$h=60(cm)$

$S_đ=900\pi\left(cm^2\right)\Rightarrow S_đ=\pi R^2\Rightarrow R=30(cm)$

Vậy cần một hình chữ nhật có chiều dài $60\pi cm$ và chiều rộng $60cm$.

Câu 51: Đáp án A.

$S_{tp}=2S_đ+2S_{xq}=2\pi R^2+2\pi R.h$

Mà $V=1dm^3\Rightarrow \pi R^2h=1\Rightarrow h=\dfrac{1}{\pi R^2}$

$S_{tp}=2\pi R^2+\dfrac{2}{R}$

Xét $f(x)=2\pi x^2+\dfrac{2}{x}$

$f'(x)=4\pi x-\dfrac{2}{x^2}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$

Do vậy khi $R=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}}$ thì tiết kiệm chi phí nhất.

Câu 53: Đáp án D.

Ta sẽ tính phần thể tích nước đổ vào ban đầu:

$V_n=\pi R_n^2.h_n$

Do $\begin{cases}\dfrac{R_n}{R}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{h_n}{h}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow V_n=\pi.\left(\dfrac{R}{3}\right)^2.\dfrac{h}{3}=\dfrac{\pi R^2h}{27}\Rightarrow V_n=\dfrac{V_{nón}}{3}$

Khi lật ngược nón ta sẽ được 2 hình nón nhỏ và lớn.

Thể tích khối nón nhỏ là: $V=V_{nón}-V_n=\dfrac{26V_{nón}}{27}$

Giả sử R_1 là bán kính đáy nón nhỏ

h_1 là đường cao nón nhỏ

$\Rightarrow \dfrac{R_1}{R}=\dfrac{h_1}{h}=k\Rightarrow$ Thể tích khối nón nhỏ là:

$V=\pi R_1^2h_1=\pi k^2R^2.k.h=k^3\pi R^2h=k^3.V_{nón}$

$\Rightarrow k^3=\dfrac{26}{27}\Rightarrow k=\dfrac{\sqrt[3]{26}}{3}\Rightarrow h_1=\dfrac{\sqrt[3]{26}}{3}.h=14,812(cm)$

Do đó chiều cao nước là: $15-14,812=0,188(cm)$.

Câu 54: Đáp án A.

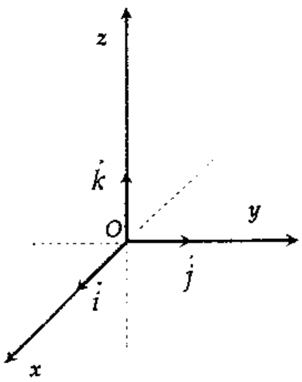
Ta có $S_{xq}=\pi(R+r).l=\pi.(21+9).36=1080\pi$

Chủ đề 7: Phương pháp tọa độ trong không gian.

Hệ tọa độ trong không gian

1. Hệ trục tọa độ trong không gian.

Trong không gian, cho ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.



Hình 7.1

Định nghĩa

> Hệ gồm ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ Đề các (Descartes) vuông góc $Oxyz$ trong không gian (hình 7.1).

Điểm O được gọi là *gốc tọa độ.*

Các mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các *mặt phẳng tọa độ.*

Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ được gọi là *không gian Oxyz*

Nhận xét: $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$ và $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$.

2. Tọa độ của vecto

Trong không gian $Oxyz$ với các vecto đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ trên các trục Ox, Oy, Oz, cho một vecto $\vec{u}$. Khi đó tồn tại duy nhất bộ ba số thực (x,y,z) sao cho

$$\vec{u}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$$

Bộ ba số thực (x,y,z) thỏa mãn hệ thực trên được gọi là tọa độ của vecto $\vec{u}$ đối với hệ trục $Oxyz$.

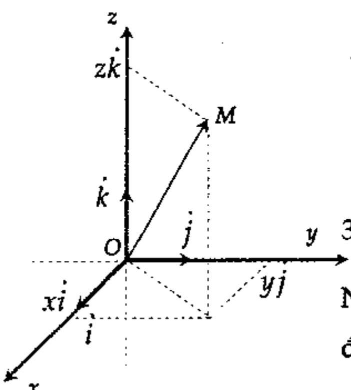
Kí hiệu $\vec{u}=(x;y;z)$ hoặc $\vec{u}(x;y;z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của vecto $\vec{u}$.

Tính chất

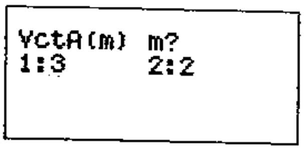
> Cho các vecto $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3),\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. Khi đó
>
> a. $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow u_1=v_1,u_2=v_2,u_3=v_3$.
>
> b. $\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2;u_3+v_3)$.
>
> c. $k.\vec{u}=(ku_1;ku_2;ku_3)$ với mọi số thực k.
>
> d. $\vec{u}.\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3.v_3$
>
> e. $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$
>
> f. Hai vecto $\vec{u};\vec{v}$ có phương vuông góc với nhau khi và chỉ khi
>
> $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$
>
> g. Hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương với nhau khi và chỉ khi
>
> $u_1:u_2:u_3=v_1:v_2:v_3$

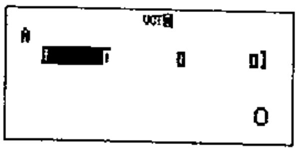
3. Tọa độ của một điểm

Nếu (x,y,z) là tọa độ của vecto $\overrightarrow{OM}$ thì ta cũng nói (x,y,z) là tọa độ của điểm M với hệ tọa độ $Oxyz$ (hình 7.2).



Hình 7.2





Kí hiệu $M=(x;y;z)$ hay $M(x;y;z)$.

Trong đó x là hoành độ, y là trung độ, z là cao độ của điểm M.

4. Liên hệ giữa tọa độ của vecto và tọa độ của hai điểm đầu mút

Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(x_1;y_1;z_1)$ và $N(x_2;y_2;z_2)$ thì khi đó tọa độ của vecto $\vec{MN}$ và độ dài của nó là:

$$\vec{MN}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$$

$$MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

5. Tích có hướng của hai vecto

Định nghĩa

> Tích có hướng của hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $[\vec{u},\vec{v}]$ là vecto $\vec{\alpha}$ xác định bởi
> i. $\vec{\alpha}$ có phương vuông góc với $\vec{u}$ và $\vec{v}$,
> ii. Bộ ba $(\vec{u},\vec{v},\vec{\alpha})$ là bộ ba vecto thuận (đọc thêm vì trong SGK cơ bản không giải thích vấn đề này).
> iii. $|\vec{\alpha}|=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

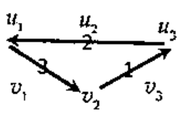
Định lý

> Trong không gian $Oxyz$ cho hai vecto $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. Khi đó
> $$[\vec{u},\vec{v}]=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}u_3 & u_1\\ v_3 & v_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)=(u_2v_3-u_3v_2;u_3v_1-u_1v_3;u_1v_2-u_2v_1)$$

Một vài mẹo để tính nhanh tích có hướng của hai vecto.

Cách 1: Viết hai tọa độ của hai vecto song song sau đó nhớ nhanh như sau:

STUDY TIP:



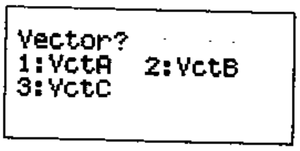
Ví dụ hai vec tơ $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$ ta viết tọa độ của hai vecto song song và ghép các định thức theo chiều tam giác mũi tên từ giữa sang phải rồi trái như ở STUDY TIPS. Cách nhớ mẹo này để độc giả dùng khi không nhớ công thức.

Đến đây ta tìm được công thức tính tích có hướng

$$[\vec{u},\vec{v}]=(u_2v_3-u_3v_2;u_3v_1-u_1v_3;u_1v_2-u_2v_1)$$

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay.

Tôi xin nhắc lại cách tính tích có hướng bằng máy tính $fx-570$ VN Plus mà tôi đã giới thiệu trong cuốn "Bộ đề tinh túy môn toán" như sau:



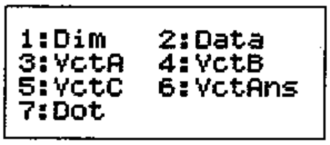
1. Vào $\boxed{\text{MODE}}\rightarrow\boxed{\text{8:VECTO}}$ (để chuyển máy tính sang chế độ tính toán với vecto.

2. Khi máy hiện như ở góc trái chọn 1: VctA để nhập tọa độ vecto thứ nhất, tiếp theo máy hiện VctA(m), ta chọn 1:3 để nhập tọa độ vecto có hoành độ, tung độ, cao độ.

3. Tiếp theo, máy hiện như bên, ta sẽ nhập tọa độ vecto thứ nhất vào.

4. Sau khi đã nhập tọa độ vecto thứ nhất, ấn AC để xóa màn hình. Tiếp tục thực hiện nhập vecto thứ hai như các bước trên, tuy nhiên ở bước 2, ta không chọn 1 nữa bởi 1: VctA đã có tọa độ, nên ta chọn 2: VctB và tiếp tục thực hiện gán tọa độ vecto thứ hai.

5. Tiếp tục ấn AC để xóa màn hình.



6. Ấn SHIFT 5 máy hiện như bên, chọn 3 để hiện VctA, ấn nút nhân tiếp tục lần nữa chọn 4 để hiện Vct B. Máy hiện như bên.

7. Ấn = để nhận kết quả.

Tính chất

1. $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$.

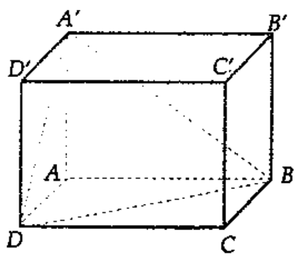
2. $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=-\left[\vec{v},\vec{u}\right]$

3. $\left[\left(k\vec{u}\right),\vec{v}\right]=\left[\vec{u};\left(k\vec{v}\right)\right]=k\left[\vec{u},\vec{v}\right], \forall k \in \mathbb{R}$

4. $\left[\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\vec{\alpha}\right]=\left[\vec{u},\vec{\alpha}\right]+\left[\vec{v},\vec{\alpha}\right]$;

$\left[\vec{u},\left(\vec{v}+\vec{\alpha}\right)\right]=\left[\vec{u},\vec{v}\right]+\left[\vec{u},\vec{\alpha}\right]$

Hệ quả



Hình 7.3

1. Ba vecto $\vec{u};\vec{v}$ và $\vec{\alpha}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{\alpha}=0$ (tích hỗn tạp).

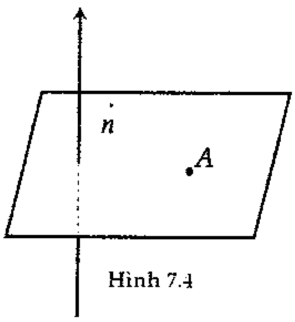
2. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S=\left|\left[\vec{AB},\vec{AD}\right]\right|$ và $S_{ABD}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB},\vec{AD}\right]\right|$.

3. Nếu $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp có thể tích V thì $V=\left|\left[\vec{AB},\vec{AD}\right].\vec{AA'}\right|$ và do đó $V_{ABDA'}=\frac{1}{6}\left|\left[\vec{AB},\vec{AD}\right].\vec{AA'}\right|$.

Từ hệ quả trên, ta có thể tính nhanh các thể tích, diện tích mà không cần tìm các độ dài.

Phương trình mặt phẳng

1. Vecto pháp tuyến của mặt phẳng.



Hình 7.4

Vecto $\vec{n}\neq\vec{0}$ được gọi là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (P) (hình 7.4).

Chú ý

Nếu $\vec{n}$ là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k.\vec{n}\,(k\neq 0)$ cũng là một vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(a,b,c)\neq\vec{0}$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng

$(P): a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)=0$.

Định nghĩa

Phương trình có dạng $Ax+By+Cz+D=0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét

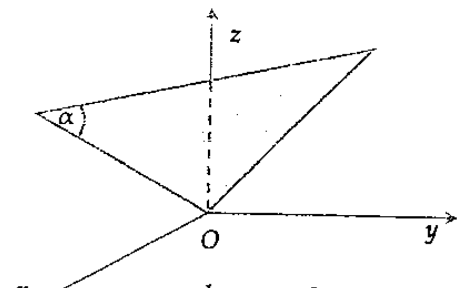
i. Nếu mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát là $Ax+By+Cz+D=0$ thì nó có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$.

ii. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nhận vecto $\vec{n}(A;B;C)$ khác $\vec{0}$ làm vecto pháp tuyến có dạng $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Các trường hợp đặc biệt

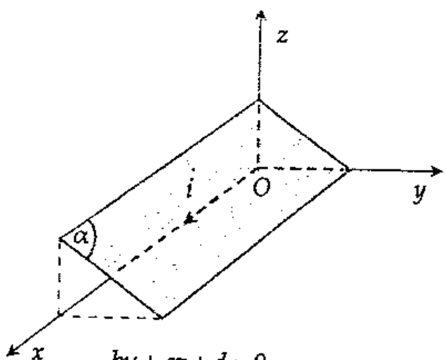
Trong không gian $Oxyz$, xét mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

1. Trường hợp $d=0$ thì mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ.



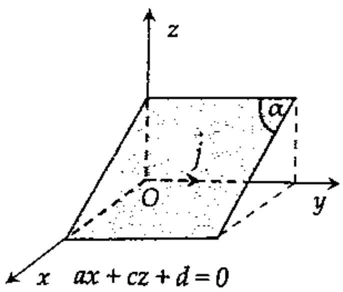
$ax+by+cz=0$

2. Trường hợp $a=0$ thì mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(0;b;c)$ khi đó mặt phẳng (P) song song hoặc chứa trục Ox. Khi đó mặt phẳng (P) chứa trục Ox khi và chỉ khi (P) đi qua gốc tọa độ O, hay $d=0$.



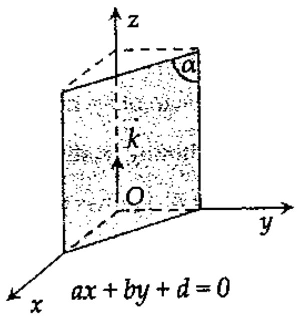
$by+cz+d=0$

3. Trường hợp $b=0$, mặt phẳng (P) song song hoặc chứa trục Oy.

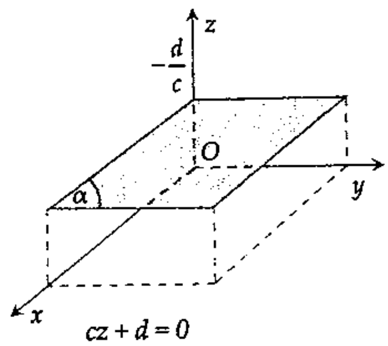


$ax+cz+d=0$

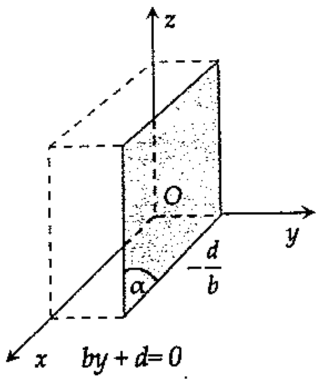
4. Trường hợp $c=0$, mặt phẳng (P) song song hoặc chứa trục Oz.



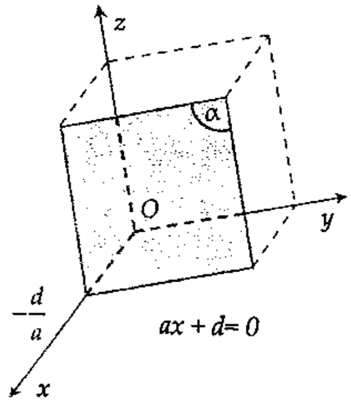
5. Trường hợp $a=b=0, c\neq 0$. Khi đó mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}=(0;0;c)$. Trong trường hợp này, mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxy). Khi đó $(P)\equiv(Oxy)$ khi và chỉ khi (P) đi qua gốc toạ độ O, hay $d=0$.

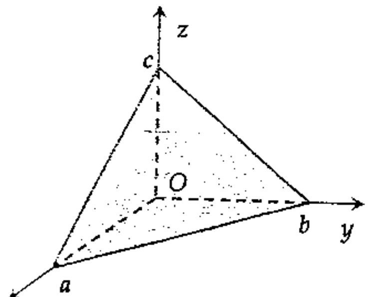


6. Trường hợp $a=c=0, b\neq 0$, mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oxz).



7. Trường hợp $b=c=0, a\neq 0$, mặt phẳng (P) song song hoặc trùng với mặt phẳng (Oyz).





Hình 7.5

8. Trường hợp $abcd \neq 0$. Đặt $\alpha = -\frac{d}{a}$, $\beta = -\frac{d}{b}, \gamma = -\frac{d}{c}$, phương trình mặt phẳng được đưa về dạng $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$. Mặt phẳng lần lượt cắt các trục tọa độ *Ox, Oy, Oz* tại các điểm $A(\alpha;0;0)$, $B(0;\beta;0), C(0;0;\gamma)$ và phương trình mặt phẳng viết dưới dạng này được gọi phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.
Đến đây ta có bài toán tổng quát:

Mặt phẳng (P) (hình 7.5) đi qua ba điểm $M(a;0;0)$, $N(0;b;0), P(0;0;c)$ có phương trình $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.

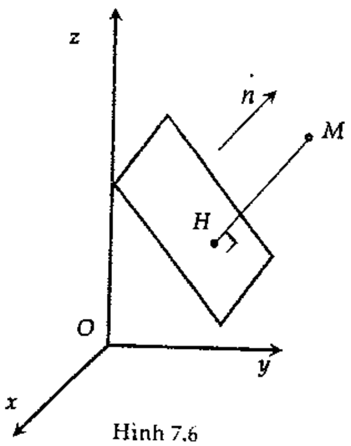
Trong không gian *Oxyz* cho hai mặt phẳng $(P_1);(P_2)$ lần lượt có phương trình $(P_1): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, (P_2): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$,
với $a_k{}^2 + b_k{}^2 + c_k{}^2 \neq 0 \ (k = 1;2)$. Khi đó

$$(P_1) \parallel (P_2) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

$$(P_1) \equiv (P_2) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

(P_1) cắt (P_2) $\Leftrightarrow a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$.

$(P_1) \perp (P_2) \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.



Hình 7.6

3. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng.

Trong không gian *Oxyz* cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Khi đó khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (P) là độ dài đoạn *MH*, với *MH* là đoạn thẳng vuông góc với (P) tại *H* (hình 7.6).

Độ dài *MH* được tính bằng công thức: $\boxed{d(M;(P)) = MH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$

Hệ quả

Với $(P): ax+by+cz+d=0$ và $(P'): ax+by+cz+d'=0$ $\left(a^2+b^2+c^2\neq 0; d\neq d'\right)$ là hai mặt phẳng song song thì khoảng cách giữa (P) và (P') được tính bằng công thức: $\boxed{d\left((P);(P')\right)=\dfrac{|d-d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$

4. Góc giữa hai mặt phẳng.

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), kí hiệu $\left((P),(Q)\right)$ là góc giữa hai đường thẳng a và b mà $a\perp(P)$ và $b\perp(Q)$.

Từ đó suy ra $0\leq\left((P),(Q)\right)\leq\dfrac{\pi}{2}$.

Từ đây ta có $\boxed{\cos\left((P);(Q)\right)=\left|\cos\left(\vec{n}_{(P)},\vec{n}_{(Q)}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}\right|}{\left|\vec{n}_{(P)}\right|.\left|\vec{n}_{(Q)}\right|}}$

Phương trình đường thẳng.

1. Hai dạng biểu diễn của phương trình đường thẳng trong không gian.

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(a;b;c)$ (do $\vec{u}\neq\vec{0}$ nên $a^2+b^2+c^2\neq 0$), khi đó **phương trình tham số** của đường thẳng Δ có dạng

$\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$ với t là tham số.

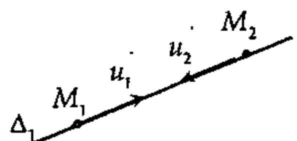
Khi $abc\neq 0$, khử t từ hệ ta được:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

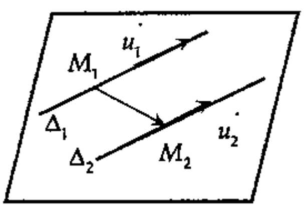
Phương trình trên được gọi là **phương trình chính tắc** của đường thẳng Δ.

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng Δ_1 đi qua M_1 có vecto chỉ phương $\vec{u_1}$ và đường thẳng Δ_2 đi qua điểm M_2 có vecto chỉ phương $\vec{u_2}$.



Hình 7.7

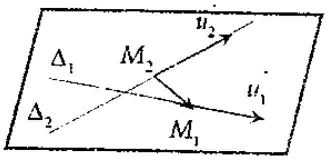


Hình 7.8

1. $\Delta_1\equiv\Delta_2$ khi và chỉ khi ba vecto $\vec{u_1};\vec{u_2};\overrightarrow{M_1M_2}$ đôi một cùng phương, tức là $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]=\left[\vec{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]=\vec{0}$ (hình 7.7).

2. $\Delta_1\parallel\Delta_2$ khi và chỉ khi $\vec{u_1}\parallel\vec{u_2}$ nhưng không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$, tức là $\begin{cases}\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]=\vec{0}\\ \left[\vec{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$ (hình 7.8)

3. Δ_1 và Δ_2 cắt nhau khi và chỉ khi $\vec{u_1}$ không song song với $\vec{u_2}$, đồng thời ba vecto $\vec{u_1},\vec{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng, tức là



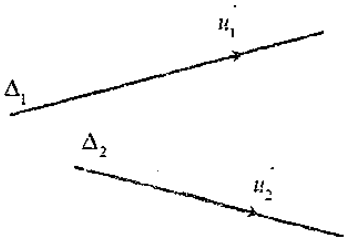
Hình 7.9

$$\begin{cases}\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\neq\vec{0}\\ \left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0\end{cases}$$ (hình 7.9)

4. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau khi và chỉ khi ba vecto $\vec{u_1},\vec{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng, tức là $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$ (hình 7.10)

Ta cũng có thể xét tính tương đối của hai đường thẳng dựa trên hệ phương trình hai ẩn như sau:

$$\begin{cases}x_0+ta_1=x_0'+t'a_1'\\ y_0+ta_2=y_0'+t'a_2'\ (I)\\ z_0+ta_3=z_0'+t'a_3'\end{cases}$$



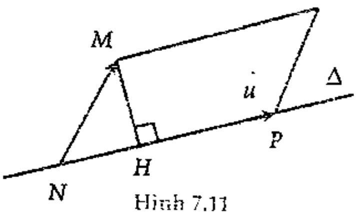
Hình 7.10

1. Hai đường thẳng *d* và *d'* cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình (I) có đúng một nghiệm.

2. Hai đường thẳng *d* và *d'* chéo nhau khi và chỉ khi hệ phương trình (I) vô nghiệm.

3. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

a. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.



Hình 7.11

Trong không gian cho điểm *M* và đường thẳng Δ đi qua điểm *N*, với vecto chỉ phương $\vec{u}$. Khoảng cách từ *M* đến Δ là độ dài đoạn vuông góc *MH* kẻ từ *M* đến Δ (hình 7.11)

Cách 1: Lấy điểm *P* trên Δ sao cho $\overrightarrow{NP}=\vec{u}$. Khi đó *MH* là độ dài đường cao kẻ từ *M* của tam giác *MNP*. Vì $MH=\dfrac{2S_{MNP}}{NP}$ nên

$$\boxed{d(M;\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{NM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}}$$

Cách 2: Để tính khoảng cách từ *M* đến đường thẳng Δ, ta có thể xác định tọa độ hình chiếu *H* của *M* trên Δ rồi tính độ dài *MH*.

Chú ý: Ở cách 2, để tính được tọa độ điểm *H* ta phải đưa phương trình đường thẳng Δ về dạng tham số, từ đó tham số hóa tọa độ điểm *H*.

Dựa vào dữ kiện $MH\perp\Delta$ ta sẽ tìm được tọa độ điểm *H*.

STUDY TIP:

Khoảng cách giữa điểm M đến đường thẳng Δ trong không gian được tính bằng công thức

$$d(M;\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{NM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Trong đó *N* là một điểm thuộc Δ.

Ví dụ: Tính khoảng cách từ điểm $A(1;2;1)$ đến đường thẳng (d): $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{4}=z+3$.

Lời giải

Cách 1: Lấy điểm $B(0;1;-3)$ trên (d). Khi đó khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) được tính bằng công thức: $d(A;(d))=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{BA}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-1;-1;-4)$. Khi đó $\left[\vec{u},\overrightarrow{BA}\right]=(15;-11;-1)$

$$\Rightarrow d(A;(d))=\frac{\sqrt{15^2+(-11)^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}}=\frac{\sqrt{347}}{\sqrt{26}}.$$

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của A lên (d). Khi đó $H(3t;1+4t;-3+t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(3t-1;4t-1;t-4)$

Mà $AH\perp(d)$, do vậy

$$(3t-1).3+(4t-1).4+t-4=0\Leftrightarrow t=\frac{11}{26}\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\frac{7}{26};\frac{9}{13};\frac{-93}{26}\right).$$

Khi đó $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\sqrt{347}}{\sqrt{26}}$.

STUDY TIP:
Cả hai cách làm đều khá là nhanh, tùy theo lựa chọn của độc giả mà áp dụng, tuy nhiên để nhớ công thức nhanh, cần nắm vững cách để suy luận ra công thức đó.

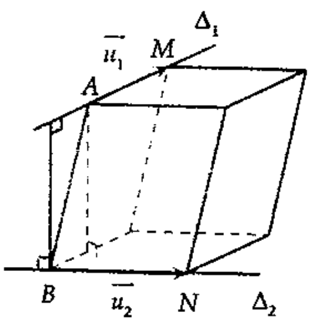
b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ_1 và Δ_2 là độ dài đoan vuông góc chung của chúng.

Lấy điểm A thuộc Δ_1, điểm B thuộc Δ_2.

Gọi $\vec{u_1};\vec{u_2}$ lần lượt là vecto chỉ phương của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Trên Δ_1 và Δ_2 lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM}=\vec{u_1};\overrightarrow{BN}=\vec{u_2}$. Khi đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 là khoảng cách giữa hai đáy của hình hộp dựng trên ba cạnh MA, AB, BN (hình 7.12).



Hình 7.12

Mặt khác ở phần hệ quả của bài hệ tọa độ trong không gian ta có công thức của hình hộp bằng $\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\right|$. Do vậy $\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right|}}$

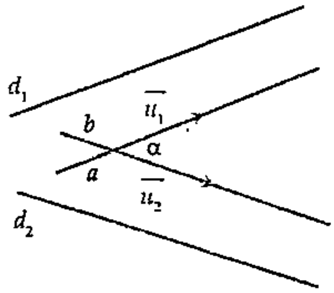
STUDY TIP:
Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong không gian được tính bằng công thức
$$d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right|}$$
trong đó A, B là hai điểm lần lượt thuộc Δ_1 và Δ_2.

4. Góc giữa hai đường thẳng. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng.

a. Góc giữa hai đường thẳng.

Góc giữa hai đường thẳng d_1,d_2 được kí hiệu là (d_1,d_2), được xác định bởi các trường hợp:

- Nếu d_1 cùng phương với d_2 thì $(d_1,d_2)=0°$.
- Nếu d_1 và d_2 cắt nhau tại I thì (d_1,d_2) bằng **số đo góc nhỏ nhất** trong bốn góc tạo thành.



Hình 7.13

- Nếu d_1 và d_2 chéo nhau thì $(d_1,d_2)=(a,b)$, trong đó $a \parallel d_1, b \parallel d_2$ và $a \cap b=\{I\}$. (Hình 7.13)

Do góc giữa hai đường thẳng là số đo góc nhỏ nhất trong bốn góc tạo được. Do vậy $0 \le (d_1,d_2) \le \frac{\pi}{2}$. Do vậy nếu đặt $(d_1,d_2)=\alpha$ thì ta có

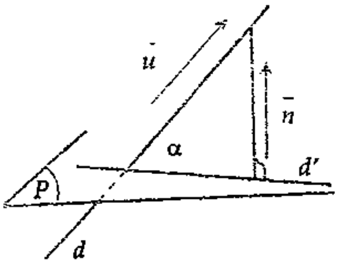
$$\boxed{\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u_1}.\vec{u_2}\right|}{\left|\vec{u_1}\right|.\left|\vec{u_2}\right|}}$$

b. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P), kí hiệu là $(d,(P))$, xác định bởi:

- Nếu $d \perp (P)$ thì $(d;(P))=90°$.

- Nếu d không vuông góc với (P) thì $(d,(P))$ bằng góc giữa d và hình chiếu của d trên (P) (hình 7.14).



Hình 7.14

Ta có $0 \le (d,(P)) \le \frac{\pi}{2}$.

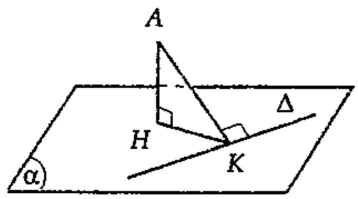
Gọi $\vec{u},\vec{n}$ lần lượt là vecto chỉ phương của d và vecto pháp tuyến của mặt phẳng (P). Khi đó nếu đặt $(d,(P))=\alpha$ thì $\boxed{\sin\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}}$

Đọc thêm: Bài toán cực trị trong không gian

1. Bài toán cực trị về mặt phẳng, đường thẳng quay xung quanh một điểm cố định

Bài toán 1: **Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm vị trí của mặt phẳng (α) chứa B và cách A một khoảng lớn nhất.**

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (α). Khi đó tam giác ABH vuông tại H và $d(A;(\alpha)) = AH \le AB$. Vậy khoảng cách đó lớn nhất khi H trùng B, khi đó (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với AB.

Bài toán tương tự là tìm đường thẳng qua B và cách A một khoảng lớn nhất.

2. Bài toán cực trị về mặt phẳng quay xung quanh một đường thẳng cố định

Bài toán 2: **Cho điểm A và đường thẳng Δ không đi qua A. Tìm vị trí của mặt phẳng (α) chứa Δ sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng đó là lớn nhất.**

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (α), K là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ.

Ta thấy $d(A;(\alpha)) = AH \le AK$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

Vậy $d(A;(\alpha))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$, hay vị trí mặt phẳng (α) cần tìm là (α) chứa Δ và vuông góc với AK.

Lúc này mặt phẳng cần tìm có vecto pháp tuyến $\boxed{\vec{n} = \left[\left[\vec{u_\Delta}, \overrightarrow{MA}\right], \vec{u_\Delta}\right]}$ trong đó $M \in \Delta$.

Ví dụ 1: Vecto pháp tuyến của mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và cách $A(1;2;5)$ một khoảng lớn nhất là

A. $(10;17;37)$ B. $(9;-14;4)$ C. $(10;-17;37)$ D. $(9;14;4)$

Đáp án A

Lời giải

Ta có $\vec{u_d} = (2;1;-1), M(1;0;-2) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (0;2;7)$. Vậy áp dụng công thức vừa chứng minh ta có $\vec{n} = \left[\left[\vec{u_d}, \overrightarrow{MA}\right], \vec{u_d}\right] = (10;17;37)$.

Bài tập áp dụng

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ cách $M(2;1;1)$ một khoảng lớn nhất.

A. $(\alpha): x + y + 3z + 5 = 0$ B. $(\alpha): 4x - 7y + z = 0$

C. $(\alpha): 6x+6y+18z+5=0$ D. $(\alpha): -4x+7y-z=0$

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x-y+z-1=0$ và cách điểm $M(1;0;1)$ một khoảng lớn nhất.

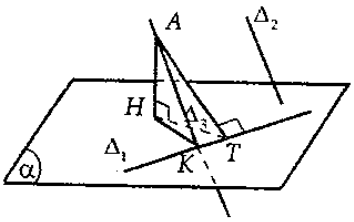
A. $x-2y+z=0$ B. $x-2y-z=0$

C. $x+y-z=0$ D. $x-y+z=0$

Đáp án: 1.A; 2.B

Bài toán 3*: Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

Lời giải



Vẽ một đường thẳng bất kì Δ_3 song song với Δ_2 và cắt Δ_1 tại K. Gọi A là điểm cố định trên Δ_3 và H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (α). Ta có góc giữa Δ_2 và (α) chính là góc AKH. Kẻ $AT \perp \Delta_1 (T \in \Delta_1)$.

Khi đó ΔHKT vuông tại T, nên:

$\cos AKH = \dfrac{HK}{AK} \geq \dfrac{KT}{AK}$ (không đổi).

Vậy góc AKH lớn nhất khi và chỉ khi $HK = KT$ hay $H \equiv T$.

Góc lớn nhất đó chính bằng góc $AKT = (\Delta_1, \Delta_2)$.

Khi đó mặt phẳng (α) cần tìm chứa Δ_1 và vuông góc với mặt phẳng (Δ_1, Δ_3) hay nó có một vectơ chỉ phương là $\left[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}\right]$.

Do đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là: $\boxed{\vec{n}_\alpha = \left[\vec{u}_{\Delta_1}, \left[\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}\right]\right]}$.

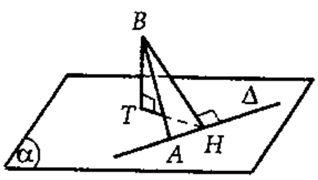
Ví dụ 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ và tạo với đường thẳng d': $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ một góc lớn nhất.

A. $x-4y+z-7=0$ B. $x+4y-z+7=0$

C. $2x+5y-10=0$ D. $2x-5y+10=0$

Đáp án A.

Lời giải



Ta có $\vec{n} = \left[\left[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}\right] \vec{u}_d\right] = (3;-12;3)$.

3. Bài toán cực trị về họ đường thẳng quay xung quanh một điểm cố định trong mặt phẳng cố định

> Bài toán 4*: **Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α), điểm B khác A. Tìm đường thẳng Δ nằm trong (α) đi qua A và cách B một khoảng nhỏ nhất, lớn nhất.**

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên Δ.

Ta thấy $d(B;\Delta) = BH \le AB.$

Vậy khoảng cách đó lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A.$

Khi đó Δ là đường thẳng qua A và có mootju vectơ chỉ phương là $\vec{u_\Delta} = \left[\vec{n_\alpha}, \vec{AB}\right].$

Gọi T là hình chiếu của B trên (α). Ta thấy $BH \ge BT.$

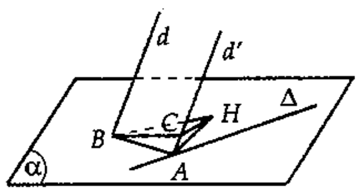
Vậy khoảng cách BH nhỏ nhất bằng BT khi và chỉ khi $H \equiv T$ hay đường thẳng Δ đi qua A và $T.$

Để viết phương trình đường thẳng Δ ta có 2 cách:

- Tìm hình chiếu vuông góc T của B trên Δ, từ đó viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và $T.$
- Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\boxed{\Delta : \vec{u_\Delta} = \left[\vec{u_\Delta}, \left[\vec{n_\alpha}, \vec{AB}\right]\right]}.$

> Bài toán 6*: **Cho mặt phẳng (α) và điểm A thuộc (α), đường thẳng d không song song với (α), không nằm trên (α), không đi qua A. Tìm đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) đi qua A sao cho khoảng cách giữa Δ và đường thẳng d là lớn nhất.**

Lời giải



Gọi d' là đường thẳng qua A và song song với d và B là giao điểm của d với mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (d',Δ). Khoảng cách giữa d và Δ bằng $BH.$ Gọi C là hình chiếu vuông góc của B trên $d'.$

Ta thấy $BH \le BC$, nên BH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv C.$

Khi đó đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\boxed{\vec{u_\Delta} = \left[\vec{n_\alpha}, \vec{BC}\right]}.$

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A và B trên (P). Độ dài đoạn thẳng MN là:

A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. 4

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-1=0$. Gọi B là điểm đối xứng với A qua (P). Độ dài đoạn thẳng AB là:

A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 4

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;2;1)$, $\vec{b}=(-2;3;4)$, $\vec{c}=(0;1;2)$ và $\vec{d}=(4;2;0)$. Biết $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$. Tổng $x+y+z$ là:

A. 2 B. 3 C. 5 D. 4

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$. Phương trình mặt phẳng chứa A và vuông góc với d là:

A. $x-y+z-1=0$ B. $x-y+z+1=0$

C. $x-y+z=0$ D. $x-y+z-2=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+y-z-1=0$ và $(Q): x-2y+z-5=0$. Khi đó giao tuyến của (P) và (Q) có một vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{u}=(1;3;5)$ B. $\vec{u}=(-1;3;-5)$

C. $\vec{u}=(2;1;-1)$ D. $\vec{u}=(1;-2;1)$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C khác O. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$ là:

A. 54 B. 6 C. 9 D. 18

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN là:

A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ C. $\sqrt{6}$ D. 4

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 8: Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN)

Câu 9: Cho bốn điểm $A(a;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là:

A. 1 B. 2

C. 2 hoặc 32 D. 32

(Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN)

Câu 11: Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=2-2t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là:

A. $x+5y+2z+12=0$ B. $x+5y-2z+12=0$

C. $x-5y+2z-12=0$ D. $x+5y+2z-12=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN)

Câu 12: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy) là:

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN)

Câu 13: Cho $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$, điểm D nằm trên trục Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là:

A. $(0;-7;0)$ B. $(0;-7;0)$ hoặc $(0;8;0)$

C. $(0;8;0)$ D. $(0;7;0)$ hoặc $(0;-8;0)$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN)

Câu 14: Cho $A(5;1;3), B(-5;1;-1), C(1;-3;0), D(3;-6;2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là:

A. $(-1;7;5)$ B. $(1;7;5)$

C. $(1;-7;-5)$ D. $(1;-7;5)$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên KHTN)

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;6;-3)$ và ba mặt phẳng $(P): x-2=0$; $(Q): y-6=0$; $(R): z+3=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề sai là:

A. (P) đi qua M B. $(Q)//(Oxz)$

C. $(R)//Oz$ D. $(P)\perp(Q)$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng qua $M(1;2;3)$ và vuông góc với $(Q): 4x+3y-7z+1=0$. Phương trình tham số của d là:

A. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=3+7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=3-7t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=4+t \\ y=3+2t \\ z=-7+3t \end{cases}$ D. Đáp số khác

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-3;-1); B(4;-1;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là:

A. $4x+4y+6z-7=0$ B. $2x+2y+3z-5=0$

C. $4x-4y+6z-23=0$ D. $2x-3y-z-9=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+mz-3=0$ và $(\beta): 2x+ny+2z-2=0$. Giá trị của m và n để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau là:

A. $m=-3; n=\frac{2}{3}$

B. Không có giá trị của m và n

C. $m=3; n=-\frac{2}{3}$

D. $m=3; n=\frac{2}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 19: Cho điểm $M(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$. Gọi $M'(a;b;c)$ là điểm đối xứng với M qua d. Giá trị của $a-b+c$ là:

A. -1 B. -2 C. 1 D. 3

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z+2=0$ và $(Q): x+y+2z-1=0$. Góc giữa (P) và (Q) là:

A. 45^0 B. 90^0 C. 30^0 D. 60^0

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 21: Cho điểm $M(-3;2;4)$, gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên trục Ox, Oy, Oz. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC).

A. $6x-4y-3z-12=0$. B. $3x-6y-4z+12=0$.

C. $4x-6y-3z+12=0$. D. $4x-6y-3z-12=0$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Biên Hòa-Lần I)

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;-2;4)$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{4}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

A. $\Delta: \frac{x+4}{-4}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-4}{1}$

B. $\Delta: \frac{x+4}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{1}$

C. $\Delta: \frac{x+4}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-4}{-1}$

D. $\Delta: \frac{x+4}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-4}{-1}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Sơn La-Lần I)

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;-4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{1}+\frac{z}{-4}=1$ B. $\frac{x}{1}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1$

C. $\frac{x}{1}+\frac{y}{3}+\frac{z}{-4}=1$ D. $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Sơn La-Lần I)

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(2;1;1), B(3;2;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x+2y-5z-3=0$.

A. $(P): 7x-6y-z-7=0$ B. $(P): 7x-6y-z+7=0$

C. $(P): x-3y-z+2=0$ D. $(P): x-3y-z+5=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Sơn La-Lần I)

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a,b,c là những số dương thay đổi sao cho $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $F=a^2+b^2+c^2$ sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là lớn nhất.

A. $F=\frac{49}{4}$ B. $F=\frac{49}{5}$ C. $F=\frac{51}{4}$ D. $F=\frac{51}{5}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Sơn La-Lần I)

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;5;-5)$, $B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tính độ dài đoạn thẳng OM, biết rằng điểm M thuộc (P) sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $OM=\sqrt{3}$ B. $OM=1$

C. $OM=0$ D. $OM=\sqrt{10}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Sơn La-Lần I)

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $H(3;-4;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm M,N,P sao cho H là trực tâm của tam giác MNP.

A. $2x-4y+z-26=0$ B. $2x+y-z-1=0$

C. $4x-3y-z+1=0$ D. $x+2y-z+6=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Sơn La-Lần I)

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(5;7;2), \vec{b}(3;0;4), \vec{c}(-6;1;-1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

A. $\vec{m}=(-3;22;-3)$. B. $\vec{m}=(3;22;-3)$.

C. $\vec{m}=(3;22;3)$. D. $\vec{m}=(3;-22;3)$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hưng Yên-Lần II)

Câu 29: Cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. B. $x+y+z-6=0$.

C. $3x+2y+z-14=0$ D. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Biên Hòa-LầnI)

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P).

A. 2017. B. $\frac{2014}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2016}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Biên Hòa-LầnI)

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=t\\z=-2-3t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z-2=0$. Giao điểm M của d và (P) có tọa độ là:

A. $M(3;1;-5)$ B. $M(2;1;-7)$

C. $M(4;3;5)$ D. $M(1;0;0)$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần III)

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(4;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;6)$. Phương trình của (α) là:

A. $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=0$ B. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$

C. $3x-6y+2z-12=0$ D. $3x-6y+2z-1=0$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần III)

Câu 33: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$ và ba điểm $A(0;1;2), B(1;1;1), C(2;-2;3)$. Tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right|$ nhỏ nhất là:

A. $(4;-2;-4)$ B. $(-1;2;0)$

C. $(3;-2;-8)$ D. $(1;2;-2)$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần III)

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=2+t \\ y=1+mt \\ z=-2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A. 5 B. 3 C. 2 D. 1

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần III)

Câu 35: Viết phương trình đường thẳng d qua $M(1;-2;3)$ và vuông góc với hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{3}, d_2:\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=1+3t \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2+t \\ z=3+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-2t \\ z=3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=3+t \end{cases}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Vị Thanh-Hậu Giang)

Câu 36: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng $d: \frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{1}$ và vuông góc với mặt phẳng Oyz.

A. $x+y-2z+4=0$ B. $y-3z+15=0$

C. $x+4y-7=0$ D. $3x+y-z+2=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Vị Thanh-Hậu Giang)

Câu 37: Cho mặt phẳng $(P): x+y+z+3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), cắt đường thẳng d và vuông góc với $\vec{u}(1;2;3)$ là:

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{1}$ B. $\frac{x+8}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$

C. $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$ D. $\frac{x+8}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lam Sơn-Lần I)

Câu 38: Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;-3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau:

A. $x+y+z+1=0$ B. $2x+2y-z-1=0$

C. $x-2y-z-3=0$ D. $2x+3y+z-1=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lam Sơn-Lần I)

Câu 39: Cho tam giác ABC có $A(1;2;3)$, $B(-3;0;1)$, $C(-1;y;z)$. Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trục Ox khi cặp $(y;z)$ là:

A. $(1;2)$ B. $(2;4)$ C. $(-1;-2)$ D. $(-2;-4)$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lam Sơn-Lần I)

Câu 40: Cho 3 điểm $A(0;1;2)$, $B(3;1;1)$, $C(0;3;0)$. Đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình:

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$ B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lam Sơn-Lần I)

Câu 41: Cho ΔABC có 3 đỉnh $A(m;0;0), B(2;1;2)$, $C(0;2;1)$. Để $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{35}}{2}$ thì:

A. $m=1$ B. $m=2$ C. $m=3$ D. $m=4$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Lam Sơn-Lần I)

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(1;m;2); \vec{b}=(m+1;2;1); \vec{c}=(0;m-2;2)$. Giá trị của m để $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng là:

A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. 1

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $\frac{81}{6}$ B. $\frac{243}{2}$ C. 243 D. $\frac{81}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng $(P): x+y+2z+1=0$, $(Q): x+y-z+2=0$,

$(R): x-y+5=0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $(Q)\perp(R)$ B. $(P)\perp(Q)$

C. $(P)//(R)$ D. $(P)\perp(R)$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại $M(8;0;0)$, $N(0;2;0)$, $P(0;0;4)$. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $x+4y+2z-8=0$ B. $x+4y+2z+8=0$

C. $\frac{x}{4}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$ D. $\frac{x}{8}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): 2x-y+3z-1=0$; $(R): x+2y+z=0$. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $7x+y-5z=0$ B. $7x-y-5z=0$

C. $7x+y+5z=0$ D. $7x-y+5z=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;1;2)$; $B(3;-1;1)$ và mặt phẳng: $(P): x-2y+z-1=0$. Mặt phẳng (Q) chứa $A;B$ và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là:

A. $4x+3y+2z=0$ B. $2x-2y-z+4=0$

C. $4x+3y+2z+11=0$ D. $4x+3y+2z-11=0$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;-1;1)$, $B(0;1;-2)$ và điểm M thay đổi trên mặt phẳng tọa độ (Oxy). Gía trị lớn nhất của biểu thức $T=|MA-MB|$ là

A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{12}$. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{8}$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội-Lần I)

Câu 49: Cho ba điểm $A(1;6;2), B(5;1;3), C(4;0;6)$, khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:

A. $14x+13y+9z+110=0$

B. $14x+13y-9z-110=0$

C. $14x-13y+9z-110=0$

D. $14x+13y+9z-110=0$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần IV)

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vị trí tương đối của hai đường thẳng

$d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=7+3m \\ y=-2+2m \\ z=1-2m \end{cases}$ là:

A. Chéo nhau B. Cắt nhau

C. Song song D. Trùng nhau

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần IV)

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-2;1;0), B(-3;0;4), C(0;7;3)$. Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ bằng:

A. $\frac{14\sqrt{118}}{354}$ B. $-\frac{7\sqrt{118}}{177}$

C. $\frac{\sqrt{798}}{57}$ D. $-\frac{\sqrt{798}}{57}$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần IV)

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là:

A. 11 B. $\frac{45}{7}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần IV)

Câu 53: Cho điểm $M(1;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

A. $x+2y-z=0$ B. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1$

C. $x-y-z=0$ D. $x+y+z-2=0$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần V)

Câu 54: Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ sao cho $AM=\sqrt{6}$, với $A(0;2;-2)$.

A. $M(1;1;0)$ hoặc $M(2;1;-1)$

B. $M(1;1;0)$ hoặc $M(-1;3;-4)$

C. $M(-1;3;-4)$ hoặc $M(2;1;-1)$

D. Không có điểm M nào thỏa mãn yêu cầu của bài toán

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần V)

Câu 55: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;0)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y-2z+2015=0$. Gọi α là góc nhỏ nhất mà mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B tạo với mặt phẳng (P). Giá trị của $\cos\alpha$ là

A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần VI)

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(2;0;-1)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

A. $2x+y-z+5=0$. B. $2x+y+z+5=0$.

C. $2x+y-z-5=0$. D. $2x+y+z-5=0$.

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần VI)

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$. Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. B. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. D. $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần VI)

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

A. $2x-y+2z-1=0$ B. $10x-7y+13z+3=0$

C. $2x+y-z=0$ D. $-x+6y+4z+5=0$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Trãi -Lần I)

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

A. $45°$ B. $30°$ C. $60°$ D. $90°$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Trãi -Lần I)

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x+y-z=0$.

A. $x+2y+z=0$ B. $x-2y-1=0$

C. $x+2y-1=0$ D. $x-2y+z=0$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Trãi -Lần I)

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng (d)?

A. $N(4;0;-1)$ B. $M(1;-2;3)$

C. $P(7;2;1)$ D. $Q(-2;-4;7)$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Trãi -Lần I)

Câu 62: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;\ 2;\ 0)$ và vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

A. $x+2y-5=0$ B. $2x+y-z+4=0$

C. $-2x-y+z-4=0$ D. $-2x-y+z+4=0$

(Trích đề thi thử Chuyên Thái Bình -Lần III)

Câu 63: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng chứa 2 điểm $A(1;\ 0;\ 1)$ và $B(-1;\ 2;\ 2)$ và song song với trục Ox có phương trình là:

A. $x+y-z=0$ B. $2y-z+1=0$

C. $y-2z+2=0$ D. $x+2z-3=0$

(Trích đề thi thử Chuyên Thái Bình -Lần III)

Câu 64: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+4y+9z-9=0$. Giao điểm I của d và (P) là:

A. $I(2;4;-1)$ B. $I(1;2;0)$

C. $I(1;0;0)$ D. $I(0;0;1)$

(Trích đề thi thử Chuyên Thái Bình -Lần III)

Câu 65: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+4=0$ là:

A. $2x-y+3z+7=0$ B. $2x+y-3z+7=0$

C. $2x+y+3z+7=0$ D. $2x-y+3z-7=0$

(Trích đề thi thử Chuyên Thái Bình -Lần III)

Câu 66: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$; $B(0;3;1)$; $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Độ dài đoạn AM là:

A. $2\sqrt{7}$ B. $\sqrt{29}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\sqrt{30}$

(Trích đề thi thử Chuyên Thái Bình -Lần III)

Câu 67: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(-1;2;1)$, $B(0;0;-2)$, $C(1;0;1)$, $D(2;1;-1)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

(Trích đề thi thử Chuyên KHTN -Lần III)

Câu 68: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $(P):2x-2z+1=0.$ B. $(P):2y-2z+1=0.$

C. $(P):2x-2y+1=0.$ D. $(P):2y-2z-1=0.$

(Trích đề thi thử Chuyên KHTN -Lần III)

Câu 69: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;2;-1)$, $C(3;-4;1)$, $B'(2;-1;3)$ và $D'(0;3;5)$. Giả sử tọa độ $D(x;y;z)$ thì giá trị của $x+2y-3z$ là kết quả nào dưới đây?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

(Trích đề thi thử Chuyên KHTN -Lần III)

Câu 70: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+2y-z+3=0$ và đường thẳng $(d):\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{2}$. Gọi A là giao điểm của (d) và (P); gọi M là điểm thuộc (d) thỏa mãn điều kiện $MA=2$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{2}{9}$.

(Trích đề thi thử Chuyên KHTN -Lần III)

Câu 71: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+2}{1}=\frac{x+1}{-2}$ và $d':\frac{x}{6}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{4}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $d // d'$ B. $d\equiv d'$

C. d và d' cắt nhau D. d và d' chéo nhau

(Trích đề thi thử Chuyên ĐH Vinh -Lần I)

Câu 72: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;2;4), B(-1;1;4), C(0;0;4)$. Tìm số đo của ABC.

A. 135^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 120^0.

(Trích đề thi thử Chuyên ĐH Vinh -Lần I)

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;1)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua Δ.

A. $M'(3;-3;0)$. B. $M'(1;-3;2)$.

C. $M'(0;-3;3)$. D. $M'(-1;-2;0)$.

(Trích đề thi thử Chuyên ĐH Vinh -Lần I)

Câu 74: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-16=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{2}$. Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $(P):2x-2y+z-8=0$

B. $(P):-2x+11y-10z-105=0$

C. $(P):2x-11y+10z-35=0$

D. $(P):-2x+2y-z+11=0$

(Trích đề thi thử Chuyên ĐH Vinh -Lần I)

Câu 75: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2,1)$, $A(1;2,-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;1;6)$. B. $\vec{u}=(1;0;2)$.

C. $\vec{u}=(3;4;-4)$. D. $\vec{u}=(2;2;-1)$.

(Trích đề thi thử Chuyên ĐH Vinh -Lần I)

Câu 76: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d):\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng qua điểm $A(3;1;0)$ và chứa đường thẳng (d).

A. $x+2y+4z-1=0$ B. $x-2y+4z-1=0$

C. $x-2y+4z+1=0$ D. $x-2y-4z-1=0$

(Trích đề thi thử Chuyên KHTN -Lần II)

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng có phương trình:

$$d:\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}.$$

Xét mặt phẳng $(P):x-3y+2mz-4=0$, với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

A. $m=\frac{1}{2}$. B. $m=\frac{1}{3}$. C. $m=1$. D. $m=2$.

(Trích đề thi thử Chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 78: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;0)$ và $B(3;1;-2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của cạnh AB và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $-x+2z+3=0$. B. $2x-y-1=0$.

C. $2y-z-3=0$. D. $2x-z-3=0$.

(Trích đề thi thử Chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 79: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-1;3)$ và hai đường thẳng:

$d_1: \frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}$.

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2.

A. $d: \frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{4}$. B. $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{3}$.

C. $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$. D. $d: \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$.

(Trích đề thi thử Chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 81: Cho tọa độ các điểm A(2;2;3), B(1;3;3), C(1;2;4). Chọn phát biểu đúng?

A. Tam giác ABC là tam giác đều

B. Tam giác ABC là tam giác vuông

C. Các điểm A, B, C thẳng hàng

D. Tam giác ABC là tam giác vuông cân

(Trích đề thi thử Chuyên Mặt Trăng)

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M có các tọa độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2.

A. $M(-2;-3;-1)$ B. $M(-1;-3;-5)$

C. $M(-2;-5;-8)$ D. $M(-1;-5;-7)$

(Trích đề thi thử Chuyên Mặt Trăng)

Câu 83: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;5)$, $B(2;0;1)$, $C(0;9;0)$. Tìm trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(3;12;6)$. B. $G(1;5;2)$.

C. $G(1;0;5)$. D. $G(1;4;2)$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu)

Câu 84: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}$ và điểm $M(0;3;-2)$. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua M và Δ là:

A. $5x-y-z+1=0$ B. $5x+y-z-1=0$

C. $5x+y-z+1=0$ D. $5x-y+z-1=0$

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Phú Thọ)

Câu 85: Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{4}$ và điểm $M(0;3;-2)$. Phương trình của mặt phẳng (Q) đi qua M, song song với Δ và cách Δ một khoảng bằng 3 là:

A. $4x-8y+z+26=0$ B. $4x-8y+z-26=0$

C. $2x-2x+z-8=0$ D. $2x+2y-z-8=0$

Câu 86: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(0;1;0), B(2;2;2)$ và đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm $N \in (d)$ sao cho diện tích tam giác ABN nhỏ nhất.

A. $(1;0;-4)$ B. $(3;-1;4)$

C. $(-1;0;4)$ D. $(-3;0;1)$

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Phú Thọ)

Câu 87: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác BCD có $B(-1;0;3)$, $C(2;-2;0)$, $D(-3;2;1)$. Tính diện tích tam giác BCD.

A. $\sqrt{26}$ B. $\sqrt{62}$ C. $\frac{\sqrt{23}}{4}$ D. $2\sqrt{61}$

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Phú Thọ)

Câu 88: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $M(1;0;2)$, $N(-3;-4;1)$, $P(2;5;3)$. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+3y-16z+33=0$ B. $x+3y-16z+31=0$

C. $x+3y+16z+33=0$ D. $x-3y-16z+31=0$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 89: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=z$. Mặt phẳng (P) vuông góc với Δ và tiếp xúc với (S) có phương trình là:

A. $2x-2y+z+2=0$ và $2x-2y+z-16=0$

B. $2x-2y+3\sqrt{8}-6=0$ và $2x-2y-3\sqrt{8}-6=0$

C. $2x-2y-3\sqrt{8}+6=0$ và $2x-2y-3\sqrt{8}-6=0$

D. $2x+2y-z+2=0$ và $2x+2y-z-16=0$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 90: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(4;-2;3)$, $\Delta\begin{cases} x=2+3t \\ y=4 \\ z=1-t \end{cases}$, đường thẳng d đi qua A cắt và vuông góc Δ có vectơ chỉ phương là:

A. $(-2;-15;6)$ B. $(-3;0;-1)$

C. $(-2;15;-6)$ D. $(3;0;-1)$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 91: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng (P): $x-y+4z-2=0$ và (Q): $2x-2z+7=0$. Góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) là

A. 60^0 B. 45^0 C. 30^0 D. 90^0

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 92: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;2;0)$, $B(-2;3;1)$, đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{1}$.

Tọa độ điểm M trên Δ sao cho $MA = MB$ là

A. $(-\frac{15}{4};-\frac{19}{6};-\frac{43}{12})$ B. $(\frac{15}{4};\frac{19}{6};\frac{43}{12})$

C. $(45;38;43)$ D. $(-45;-38;-43)$

(Trích đề thi thử THPT Bảo Lâm)

Câu 93: Đường thẳng d đi qua $H(3;-1;0)$ và vuông góc với (Oxz) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=3 \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=3 \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$

Câu 94: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;0), B(-2;3;0)$. Tìm tọa độ của điểm M thuộc trục Oy sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

A. $M(0;2;0)$ B. $M(0;-1;0)$

C. $M\left(0;\frac{5}{3};0\right)$ D. $M(0;1;0)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 95: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(1;1;0), C(1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(-1;1;1)$ B. $(1;-1;1)$

C. $(1;1;3)$ D. $(1;-2;-3)$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 96: Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$

A. $6x+3y+2z-6=0$ B. $x-y+z-2=0$

C. $x+2y-3z+16=0$ D. $x-y+2z=0$

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 97: Nếu mp(P): $x-2y+mz+5=0$ song song với mp(Q): $2x-ny+3z+3=0$ thì các giá trị của m và n là:

A. $m=\frac{3}{2}; n=4$ B. $m=-\frac{3}{2}; n=4$

C. $m=-\frac{3}{2}; n=-4$ D. $m=-4; n=\frac{3}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 98: Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;3)$ và vuông góc với mp(P): $x+2y-2z+1=0$ là:

A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$ B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-2}$

C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{3}$ D. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{3}$

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 99: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ điểm N thuộc trục Oz sao cho khoảng cách từ N đến $M(2;3;4)$ bằng khoảng cách từ N đến mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-17=0$?

A. $N(0;\ 0;\ 3)$ B. $N(0;\ 0;\ 4)$

C. $N(2;\ 3;\ 0)$ D. không tồn tại điểm N

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 100: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=2+4t \\ y=3+2t \\ z=-3+t \end{cases}$ và mặt phẳng (P): $-x+y+2z+5=0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P), song song với d và cách d một khoảng là $\sqrt{14}$ có phương trình là:

A. $\Delta_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+5}{1}; \Delta_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$

B. $\Delta_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-5}{1}; \Delta_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$

C. $\Delta_1: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+5}{1}; \Delta_2: \frac{x-3}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$

D. $\Delta_1: \frac{x+1}{8} = \frac{y+6}{4} = \frac{z+5}{2}; \Delta_2: \frac{x-3}{8} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{2}$

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;2)$ và $B(5;1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$ B. $I(4;2;3)$

C. $I\left(2;\frac{3}{2};-1\right)$ D. $I\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 102: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u_1}=(0;2;4)$ B. $\vec{u_1}=(2;-1;0)$

C. $\vec{u_1}=(1;-1;1)$ D. $\vec{u_1}=(-2;3;5)$

(Trích đề THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 103: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;5)$, $B(3;1;3)$, $C(2;6;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $2x-z-3=0$ B. $2x+y+z-3=0$

C. $4x-y-5z+13=0$ D. $9x-y+z-16=0$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 104: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$ và đường thẳng $d_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$; $d_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là:

A. $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-5}$ B. $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-4}$

C. $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=2 \\ z=1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ D. $d: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 105: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là:

A. $d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=1-2t \\ z=1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ B. $d: \begin{cases} x=3t \\ y=2+t \\ z=2+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

C. $d: \begin{cases} x=-2-4t \\ y=-1+3t \\ z=4-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ D. $d: \begin{cases} x=-1-t \\ y=3-3t \\ z=3-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 106: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$ B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{25}{11}\right)$

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$ D. $M\left(-\frac{6}{15};-\frac{11}{15};-\frac{18}{15}\right)$

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 107: Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x+2y+z=0$ và cách $D(1;0;3)$ một khoảng bằng $\sqrt{6}$ thì (P) có phương trình là:

A. $\left[\begin{array}{l} x+2y+z+2=0 \\ x+2y+z-2=0 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x+2y-z-10=0 \\ x+2y+z-2=0 \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} x+2y+z+2=0 \\ -x-2y-z-10=0 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x+2y+z+2=0 \\ x+2y+z-10=0 \end{array}\right.$

(Trích đề thi thử THPT Vĩnh Chân)

Câu 108: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1); B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$ B. $y-2z-1=0$

C. $-2y-3z-11=0$ D. $2x+3y-11=0$

(Trích đề thi thử THPT Vĩnh Chân)

Câu 109: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(3;-4;0)$; $B(0;2;4)$; $C(4;2;1)$. Tọa độ điểm D trên trục Ox sao cho $AD=BC$ là:

A. $\left[\begin{array}{l} D(0;0;0) \\ D(6;0;0) \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} D(0;0;2) \\ D(8;0;0) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} D(2;0;0) \\ D(6;0;0) \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} D(0;0;0) \\ D(-6;0;0) \end{array}\right.$

(Trích đề thi thử THPT Vĩnh Chân)

Câu 110: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 2)$, $C(-2;\ 3;\ 1)$ và đường thẳng d: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d để thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3.

A. $M\left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$; $M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{-11}{2}\right)$

B. $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$; $M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

C. $M\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$; $M\left(\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

D. $M\left(\frac{3}{5};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$; $M\left(\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right)$

(Trích đề thi thử THPT Nho Quan A)

Câu 111: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;0;1), B(6;-2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và (P) tạo với $mp(Oyz)$ góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\frac{2}{7}$?

A. $\left[\begin{array}{l}2x-3y+6z-12=0\\2x-3y-6z=0\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}2x+3y+6z+12=0\\2x+3y-6z-1=0\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}2x+3y+6z-12=0\\2x+3y-6z=0\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}2x-3y+6z-12=0\\2x-3y-6z+1=0\end{array}\right.$

(Trích đề thi thử THPT Nho Quan A)

Câu 112: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+1=0$ và hai điểm $A(1;-2;3)$; $B(3;2;-1)$. Phương trình mặt phẳng (Q) qua A; B và vuông góc với (P) là

A. $(Q): 2x+2y+3z-7=0$

B. $(Q): 2x-2y+3z-7=0$

C. $(Q): 2x+2y+3z-9=0$

D. $(Q): x+2y+3z-7=0$

(Trích đề thi thử THPT Triệu Sơn 2)

Câu 114: Cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$;

$d_2: \begin{cases}x=1-t\\y=1+2t\\z=-1+t\end{cases}$ và điểm A(1;2;3). Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là:

A. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$ B. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{5}$ D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$

(Trích đề thi thử THPT Thuận Thành I)

Câu 116: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;-2;1), B(-2;2;1), C(1;-2;2)$. Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt mặt phẳng Oyz tại điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $\left(0;-\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ B. $\left(0;-\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

C. $\left(0;-\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ D. $\left(0;\dfrac{2}{3};-\dfrac{8}{3}\right)$

(Trích đề thi thử THPT Yên Lạc-Lần 3)

Câu 117: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2), B(1;1;1), C(2;3;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $x+y-z+1=0$ B. $x-y-z+1=0$

C. $x+y-2z-3=0$ D. $x+y+z-3=0$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 118: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;0), B(3;-1;1)$ và $C(1;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S=\sqrt{3}$ B. $S=\sqrt{2}$ C. $S=\dfrac{1}{2}$ D. $S=1$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 119: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x+2y+3z-8=0$ B. $x+y+z-4=0$

C. $x+2y+z-6=0$ D. $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 120: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $G(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm G và cắt các trục tọa độ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{9}=1$ B. $x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=3$

C. $x+y+z-6=0$ D. $x+2y+3z-14=0$

(Trích đề thi thử THPT Lương Thế Vinh)

Câu 121: Cho ba điểm $A(1;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(-1;6;7)$. Tìm điểm $M\in(Oxz)$ sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất?

A. $M(3;0;-1)$. B. $M(1;0;0)$.

C. $M(1;0;3)$. D. $M(1;1;3)$.

(Trích đề thi thử THPT Trần Hưng Đạo-Nam Định)

Câu 122: Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y-z+5=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa d và song song vớ (α). Khoảng cách giữa (α) và (β) là:

A. $\dfrac{9}{14}$ B. $\dfrac{3}{14}$ C. $\dfrac{9}{\sqrt{14}}$ D. $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Hà Tĩnh)

Câu 123: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$, điểm $A(2;5;3)$. Phương trình mặt phẳng *(P)* chứa d sao cho khoảng cách từ A đến *(P)* là lớn nhất là:

A. $2x+y-2z-10=0$ B. $2x+y-2z-12=0$

C. $x-2y-z-1=0$ D. $x-4y+z-3=0$

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Hà Tĩnh)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án B

Nhìn vào hình vẽ , áp dụng định lý Talet ta có:

$$MN=\sqrt{AB^2-\left|d_{A/(P)}-d_{B/(P)}\right|^2}$$

$$d_{A/(P)}=\frac{|1+2-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$d_{B/(P)}=\frac{|3+0-(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\left|d_{A/(P)}-d_{B/(P)}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MN=\sqrt{AB^2-\left|d_{A/(P)}-d_{B/(P)}\right|^2}=\sqrt{12-\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 2: Đáp án B

Ta có:

B là điểm đối xứng với A qua (P) nên:

$$AB=2.d_{A/(P)}=2.\frac{|1+2.2-2.1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2.\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 3: Đáp án A

$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$

$\Leftrightarrow(4;2;0)=x(1;2;1)+y(-2;3;4)+z(0;1;2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=4\\2x+3y+z=2\\x+4y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\\z=1\end{cases}\Rightarrow x+y+z=2$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 4: Đáp án C

Ta có: $\vec{u_d}=(1;-1;1)$. Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) nên: $\vec{n_P}=\vec{u_d}=(1;-1;1)$. Do đó (P) có dạng: $(P):x-y+z+m=0$. Vì (P) đi qua $A(1;2;1)$ nên: $1-2+1+m=0\Rightarrow m=0$. Do đó, đáp án đúng là **C.**

Câu 5: Đáp án A

Cách 1: Giao tuyến của (P) và (Q) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y-z-1=0\\x-2y+z-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=z+1\\x-2y=-z+5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2(z+1)+(-z+5)}{5}=\dfrac{z+7}{5}\\y=\dfrac{(z+1)-2(-z+5)}{5}=\dfrac{3z-9}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{x-2}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-3}{5}$$

Do đó, đáp án đúng là **A.**

Cách 2: $\vec{u_d}=\left[\vec{n_P},\vec{n_Q}\right]=(1;3;5)$

Câu 6: Đáp án C

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Do cắt tại các tia nên: $a;b;c>0$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) là: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. (P) đi qua $M(1;2;1)$ nên: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\geq3.\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{1}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{2}{6V}}$$

$$\Rightarrow V\geq9$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$.

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 7: Đáp án B

Mặt cầu (S) có tâm là: $I(1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$

Gọi $H(x_H;y_H;z_H)$ là hình chiếu của I lên (d). Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}H\in(d)\\IH\perp(d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_H-2}{2}=\dfrac{y_H}{-1}=\dfrac{z_H}{4}=k\\\vec{IH}.\vec{u_d}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow H(2k+2;-k;4k)\Rightarrow\vec{IH}=(2k+1;-k-2;4k-1)$$

$$\vec{u_d}=(2;-1;4)$$

$$\vec{IH}.\vec{u_d}=0\Leftrightarrow(2k+1).2+(-k-2).(-1)+(4k-1).4=0$$

$$\Leftrightarrow k=0\Rightarrow H(2;0;0)$$

$$\Rightarrow IH=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{6}$$

Gọi K là giao điểm của IH và MN .Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông MIH có:

$$MK.IH=MI.MH=MI.\sqrt{IH^2-IM^2}$$

$$\Rightarrow MN=2.MK=2.\frac{IM.\sqrt{IH^2-IM^2}}{IH}$$

$$\Rightarrow MN=2.\frac{\sqrt{2}.\sqrt{6-2}}{\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 8: Đáp án A

Gọi K là điểm bất kì trên (d). Theo giả thiết: $KA=KB$ tức là tam giác KAB cân, điều này chỉ xảy ra khi (d) nằm trên mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của AB. Ta đi xác định (Q):

Gọi M là trung điểm AB thì:

$$M\left(\frac{3+0}{2};\frac{3+2}{2};\frac{1+1}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$$

Mặt phẳng (Q) đi qua M và vuông góc với AB tức là nhận $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ là vecto pháp tuyến. Do đó:

$$(Q):-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-1\left(y-\frac{5}{2}\right)+0(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (Q):3x+y-7=0$$

Do đó, (d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}x+y+z-7=0\\3x+y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 9: Đáp án C

$\overrightarrow{BA}=(a+3;0;10)$

$\overrightarrow{BC}=(8;0;4);\overrightarrow{BD}=(4;3;5)$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}\left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD}\right]\right|$$

$$=\frac{1}{6}.\left|(a+3;0;10).(-12;24;24)\right|$$

$$=\frac{1}{6}.\left|-12(a+3)+10.24\right|=\left|-2a+34\right|$$

$V=30\Leftrightarrow a=2;a=32$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 11: Đáp án D.

Dễ dàng nhận thấy hai đường $(d_1);(d_2)$ chéo nhau. Ý tưởng ở đây là tìm hai điểm $H_1\in(d_1);H_2\in(d_2)$ sao cho H_1H_2 là đường vuông góc chung của $(d_1);(d_2)$.

$$H_1\in(d_1);H_2\in(d_2)\Rightarrow\begin{cases}H_1(2+a;1-a;2a)\\H_2(2-2b;3;b)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{H_1H_2}=(-2b-a;a+2;b-2a)$$

$$\overrightarrow{u_{d_1}}=(1;-1;2);\overrightarrow{u_{d_2}}=(-2;0;1)$$

$$\begin{cases}H_1H_2\perp d_1\\H_1H_2\perp d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{H_1H_2}.\overrightarrow{u_{d_1}}=0\\\overrightarrow{H_1H_2}.\overrightarrow{u_{d_2}}=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(-2b-a)-(a+2)+2(b-2a)=0\\-2.(-2b-a)+0.(a+2)+(b-2a)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6a-2=0\\5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{3}\\b=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow H_1\left(\frac{5}{3};\frac{4}{3};\frac{-2}{3}\right);H_2(2;3;0)$$

Mặt phẳng cần tìm (P) đi qua trung điểm M của H_1H_2 và vuông góc với H_1H_2 nên:

$$\begin{cases}M\left(\frac{11}{6};\frac{13}{6};\frac{-1}{3}\right)\in(P)\\\overrightarrow{n_{(P)}}=\overrightarrow{H_1H_2}=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow (P):x+5y+2z-12=0$$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 12: Đáp án B

Giao điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ của (d) với mặt phẳng (Oxy) là:

$$\begin{cases}\frac{x_A-1}{2}=\frac{y_A+1}{1}=\frac{z_A-2}{1}\\z_A=0\end{cases}\Leftrightarrow A(-3;-3;0)$$

Dễ thấy điểm $M(1;-1;2)\in(d)$. Hình chiếu B của M lên mặt phẳng (Oxy) là: $B(1;-1;0)$. Phương trình đường thẳng cần tìm chính là phương trình đường thẳng AB và là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=0\end{cases}$. Vậy đáp án đúng là B.

Câu 13: Đáp án B

$D\in Oy\Rightarrow D(0;y;0)$

$A(2;1;-1),B(3;0;1),C(2;-1;3)$

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;2);\overrightarrow{AC}=(0;-2;4)$

$\overrightarrow{AD}=(-2;y-1;1)$

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|(-2;y-1;1).(0;-4;-2)\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|-4(y-1)+1(-2)\right|=\frac{1}{3}\left|2y-1\right|$$

$V=5\Leftrightarrow y=-7;y=8$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 14: Đáp án C

Mặt phẳng $(BCD):ax+by+cz+d=0$ nên có:

$$\begin{cases}a(-5)+b.1+c.(-1)+d=0\\a.1+b.(-3)+c.0+d=0\\a.3+b.(-6)+c.2+d=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{d}{5}\\b=\frac{2d}{5}\\c=\frac{2d}{5}\end{cases}\Rightarrow (BCD):x+2y+2z+5=0$$

Gọi $H(x_H;y_H;z_H)$ là hình chiếu của A lên (BCD), ta có:

$$\begin{cases}H\in(P)\\AH\perp(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_H+2y_H+2z_H+5=0\\\overrightarrow{AH}=k.\overrightarrow{n_{(P)}}=k.(1;2;2)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H+2y_H+2z_H+5=0 \\ \dfrac{x_H-5}{1}=\dfrac{y_H-1}{2}=\dfrac{z_H-3}{2}=k \end{cases}$

$\Rightarrow x_H=k+5; y_H=2k+1; z_H=2k+3$

$\Rightarrow (k+5)+2(2k+1)+2(2k+3)+5=0$

$\Leftrightarrow 9k+18=0 \Leftrightarrow k=-2$

$\Rightarrow H(3;-3;-1)$

Khi đó, A' đối xứng với A qua (BCD) khi và chỉ khi H là trung điểm AA'. Do đó ta có:

$A'(2.3-5;2.(-3)-1;2.(-1)-3)$

$\Rightarrow A'(1;-7;-5)$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 15: Đáp án C

Khẳng định A,B,D hiển nhiên đúng. Khẳng định **C** sai vì mặt phẳng $(R): z+3=0$ giao với Oz tại điểm $C(0;0;-3)$. Vậy đáp án đúng là C.

Câu 16: Đáp án B

(d) vuông góc với (Q) nên: $\vec{u_d}=\vec{n_{(Q)}}=(4;3;-7)$

(d) đi qua điểm $M(1;2;3)$ nên:

$(d): \begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=3-7t \end{cases}$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 17: Đáp án A

Trung điểm AB là:

$M\left(\dfrac{2+4}{2};\dfrac{-3-1}{2};\dfrac{-1+2}{2}\right) \Rightarrow M\left(3;-2;\dfrac{1}{2}\right)$

Phương trình mặt phẳng trung trực AB nhận $\vec{AB}=(2;2;3)$ là vecto pháp tuyến và đi qua điểm M nên nó có dạng:

$2(x-3)+2(y+2)+3\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow 4x+4x+6z-7=0$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 18: Đáp án C

$(\alpha)//(\beta) \Leftrightarrow \vec{n_{(\alpha)}}=k.\vec{n_{(\beta)}}$

$\Leftrightarrow (3;-1;m)=k.(2;n;2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}=\dfrac{-1}{n}=\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m=3; n=-\dfrac{2}{3}$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 19: Đáp án A

Ta có: $\vec{u_d}=(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với (d) hay nhận $\vec{u_d}$ là vecto pháp tuyến là:

$1.(x-1)+2.(y-0)+1.(z-0)=0$

$\Leftrightarrow x+2y+z-1=0$

Giao điểm $H(x_H;y_H;z_H)$ của (d) và (P) chính là hình chiếu vuông góc của M lên (d), ta có:

$\begin{cases} \dfrac{x_H-1}{1}=\dfrac{y_H-1}{2}=\dfrac{z_H}{1} \\ x_H+2y_H+z_H-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{-1}{3}\right)$

M' đối xứng với M qua (d) khi và chỉ khi H là trung điểm MM'. Do đó, ta có:

$\begin{cases} a=2.\dfrac{2}{3}-1 \\ b=2.\dfrac{1}{3}-0 \\ c=2.\left(-\dfrac{1}{3}\right)-0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{2}{3} \\ c=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow a-b+c=-1$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 20: Đáp án D

Góc giữa (P) và (Q) là:

$\vec{n_P}=(2;-1;1); \vec{n_Q}=(1;1;2)$

$\cos(\alpha)=\dfrac{|\vec{n_P}.\vec{n_Q}|}{|\vec{n_P}||\vec{n_Q}|}=\dfrac{|2.1+(-1).1+1.2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}.\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha=60^0$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 21: Đáp án D

Theo giả thiết ta có: $A(-3;0;0); B(0;2;0); C(0;0;4)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$\dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 4x-6y-3z+12=0$

Do đó, mặt phẳng song song với (ABC) có dạng:

$4x-6y-3z+m=0; (m\neq 12)$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 22: Đáp án D

Gọi $B(x_B;y_B;z_B)$ là giao điểm của (d) với (Δ). Khi đó, ta có:

$\dfrac{x_B+3}{2}=\dfrac{y_B-1}{-1}=\dfrac{z_B+1}{4}=k \Rightarrow B(2k-3;-k+1;4k-1)$

$\Rightarrow \vec{AB}=(2k+1;-k+3;4k-5); \vec{u_d}=(2;-1;4)$

$AB\perp(d) \Leftrightarrow \vec{AB}.\vec{u_d}=0$

$\Leftrightarrow 2(2k+1)-(-k+3)+4.(4k-5)=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{21}{21}=1 \Rightarrow B(-1;0;3); \vec{AB}=(3;2;-1)$

Phương trình (Δ) chính là phương trình AB và là:

$\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 23: Đáp án C.

Thực chất bài toán chỉ là kiểm tra kiến thức phương trình mặt phẳng dạng chắn:

$A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$

$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 24: Đáp án A

Gọi $H(x_H;y_H;z_H)$ là hình chiếu của A lên $(Q): x+2y-5z-3=0$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} AH \perp (Q) \\ H \in (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} = k.\vec{n}_{(Q)} = k(1;2;-5) \\ x_H + 2y_H - 5z_H - 3 = 0 \end{cases}$$

$\vec{AH} = (x_H - 2; y_H - 1; z_H - 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_H - 2}{1} = \frac{y_H - 1}{2} = \frac{z_H - 1}{-5} = k \\ x_H + 2y_H - 5z_H - 3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_H = k+2; y_H = 2k+1; z_H = -5k+1$

$\Rightarrow (k+2) + 2(2k+1) - 5(-5k+1) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{-6}{30} = -\frac{1}{5} \Rightarrow H\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{5}; 2\right)$

Mặt phẳng (P) là mặt phẳng (ABH) có dạng: $ax+by+cz+d=0$. Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} 2a+b+c+d=0 \\ 3a+2b+2c+d=0 \\ \frac{9}{5}a + \frac{3}{5}b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = \frac{6d}{7} \\ c = \frac{d}{7} \end{cases}$$

$\Rightarrow (P): 7x - 6y - z - 7 = 0$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 25: Đáp án A

Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow d = d_{O/(P)} = \frac{\left|\frac{0}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$\Rightarrow \left(\frac{7}{d}\right)^2 = (a^2 + 4b^2 + 16c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq (1+2+4)^2$

$\Rightarrow \frac{7}{d} \geq 7 \Rightarrow d \leq 1$

Dấu "=" xảy ra khi:

$(a^2 + 4b^2 + 16c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$

$\frac{a^2}{\frac{1}{a^2}} = \frac{4b^2}{\frac{1}{b^2}} = \frac{16c^2}{\frac{1}{c^2}} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2 = 4c^2$

$a^2 + 4b^2 + 16c^2 = 49 \Leftrightarrow 4c^2 + 8c^2 + 16c^2 = 49$

$\Rightarrow c^2 = \frac{49}{28} = \frac{7}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 7c^2 = \frac{49}{4}$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 26: Đáp án C

Gọi $M(x_0;y_0;z_0) \in (P)$ thì ta có:

$x_0 + y_0 + z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = -x_0 - y_0$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = (x_0+3)^2 + (y_0-5)^2 + (z_0+5)^2 +$

$+(x_0-5)^2 + (y_0+3)^2 + (z_0-7)^2$

$= 2\left[(x_0-1)^2 + (y_0-1)^2\right] + 2(z_0-1)^2 + 136$

$\geq (x_0 - 1 + y_0 - 1)^2 + 2(z_0-1)^2 + 136$

$= (2+z_0)^2 + 2(z_0-1)^2 + 136 = 3z_0^2 + 142 \geq 142$

Dấu "=" xảy ra khi: $x_0 = y_0; z_0 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Do đó, $M \equiv O$. Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 27: Đáp án A

Bài toán này sử dụng tính chất quen thuộc của tứ diện vuông: H là trực tâm của tam giác MNP khi và chỉ khi: $OH \perp (MNP)$. Ta có:

$$\begin{cases} H \in (\alpha) \\ \vec{OH} = \vec{n}_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha): 3(x-3) - 4(y+4) + (z-1) = 0$$

$\Leftrightarrow (\alpha): 3x - 4y + z - 26 = 0$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 28: Đáp án B

$\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 3(5;7;2) - 2(3;0;4) + (-6;1;-1)$

$\Rightarrow \vec{m} = (3;22;-3)$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 29: Đáp án C

Ta có:

$$\begin{cases} M \in (ABC) \\ \vec{OM} = \vec{n}_{(ABC)} \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): 3(x-3) + 2(y-2) + 1(z-1) = 0$$

$\Leftrightarrow (\alpha): 3x + 2y + z - 14 = 0$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 30: Đáp án D

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$

Khi đó ta có:

$IO = IA = IB = IC$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=(x-a)^2+y^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+(y-b)^2+z^2\\x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-c)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}\\y=\dfrac{b}{2}\\z=\dfrac{c}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$$

Do $a+b+c=2$ nên I thay đổi trên mặt phẳng $(P):x+y+z-1=0$

$$\Rightarrow d_{M/(P)}=\frac{|2016+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2015}{\sqrt{3}}$$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 31: Đáp án A

Vì $M\in(d)$ nên: $M(1+2m;m;-2-3m)$

$M\in(P)$ nên:

$2(1+2m)+m+(-2-3m)-2=0$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{2}=1\Leftrightarrow M(3;1;-5)$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 32: Đáp án C

Phương trình mặt phẳng (α) là:

$(\alpha):\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{-2}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 3x-6y+2z-12=0$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 33: Đáp án B

Gọi $M(a;b;c)$. Vì $M\in(P)$ nên: $a-b+c+3=0$

Ta có:

$\vec{MA}=(a;b-1;c-2);\vec{MB}=(a-1;b-1;c-1);$

$\vec{MC}=(a-2;b+2;c-3)$

$\Rightarrow\left|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right|=\sqrt{(3a-3)^2+(3b)^2+(3c-6)^2}$

$\Rightarrow\left|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right|=\sqrt{3}.\sqrt{3\left[(a-1)^2+(-b)^2+(c-2)^2\right]}$

$\geq\sqrt{3}.\sqrt{(a-1-b+c-2)^2}=\sqrt{3}.\sqrt{(a-b+c-3)^2}=6\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi:

$a-1=-b=c-2;a-b+c+3=0$

$\Leftrightarrow a=-1;b=2;c=0\Rightarrow M(-1;2;0)$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 34: Đáp án A

$(S):x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z+13=0$

$\Leftrightarrow(S):(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=1$

d cắt (S) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$((2+t)-1)^2+((1+mt)+3)^2+(-2t-2)^2=1$

$\Leftrightarrow(t+1)^2+(mt+4)^2+(2t+2)^2=1$

$\Leftrightarrow(m^2+5)t^2+2(4m+5)t+20=0$

$\Delta'=(4m+5)^2-20(m^2+5)=-4m^2+40m-75$

$\Delta'>0\Leftrightarrow 4m^2-40m+75<0\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}<m<\dfrac{15}{2}$

$m\in Z\Rightarrow m\in\{3;4;5;6;7\}$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 35: Đáp án A

$\vec{u_{d_1}}=(1;-1;3);\vec{u_{d_2}}=(-1;1;3)$

$\Rightarrow\vec{u_d}=\left[\vec{u_{d_1}};\vec{u_{d_2}}\right]=(-6;-6;0)$

$$\Rightarrow(d):\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 36: Đáp án B

Mặt phẳng vuông góc với Oyz có dạng: $ay+bz+c=0$

Dễ thấy $A(2;-3;4);B(4;0;5)\in(d)$ nên ta có:

$$\begin{cases}-3a+4b+c=0\\0a+5b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{c}{15}\\b=\dfrac{-c}{5}\end{cases}\Rightarrow(d):y-3z+15=0$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 37: Đáp án B

Gọi M là giao điểm của $\Delta;d$. Khi đó, $M(3m+1;-m-1;-m)$. Do $\Delta\in(P)$ nên $M\in(P)$

$\Rightarrow M(3m+1;-m-1;-m)(P):x+y+z+3=0$

$(3m+1)+(-m-1)-m+3=0\Leftrightarrow m=-3$

$\Rightarrow M(-8;2;3)$

Giả sử Δ đi qua $N(a;b;c)$ khác M. Ta có:

$$\begin{cases}N\in(P)\\\vec{MN}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c+3=0\\(a+8)+2(b-2)+3(c-3)=0\end{cases}$$

$c=1\Rightarrow\begin{cases}a=-10\\b=6\end{cases}\Rightarrow N(-10;6;1)$

$\Rightarrow\vec{MN}=(-2;4;-2)$

$\Rightarrow(\Delta):\dfrac{x+8}{-2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{-2}$

$\Rightarrow(\Delta):\dfrac{x+8}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 38: Đáp án B

Ta có:

$(P):\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-3}=1\Rightarrow\vec{n_{(P)}}=\left(\dfrac{1}{-2};\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Bằng cách kiểm tra $\vec{n_i}.\vec{n_{(P)}}=0$ thì đáp án đúng là **B.**

Câu 39: Đáp án D

G thuộc Ox khi: $G(g;0;0)$. Theo công thức trọng tâm ta suy ra:

$$\begin{cases}\dfrac{2+0+y}{3}=0\\ \dfrac{3+1+z}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2\\ z=-4\end{cases}$$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 40: Đáp án

$$G\left(\frac{0+3+0}{3};\frac{1+1+3}{3};\frac{2+1+0}{3}\right)$$

$$\Rightarrow G\left(1;\frac{5}{3};1\right)$$

$$\vec{AB}=(3;0;-1);\vec{AC}=(0;2;-2)$$

$$\Rightarrow \vec{n_{(P)}}=\left[\vec{AB};\vec{AC}\right]=(2;6;6)$$

$$(P):\frac{x-1}{1}=\frac{y-\frac{5}{3}}{3}=\frac{z-1}{3}$$

Câu 41: Đáp án C.

Ta có:

$$\vec{BA}=(m-2;-1;-2);\vec{BC}=(-2;1;-1)$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{BA};\vec{BC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|(3;m+2;m-4)\right|$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{35}}{2}\Leftrightarrow 9+(m+2)^2+(m-4)^2=35$$

$$\Leftrightarrow 2m^2-4m-6=0\Leftrightarrow m=3;m=-1$$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 42: Đáp án A

$\vec{a}=(1;m;2);\vec{b}=(m+1;2;1);\vec{c}=(0;m-2;2)$ đồng phẳng khi:

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right].\vec{c}=0$$

$$\Leftrightarrow (m-4;2m+1;-m^2-m+2).(0;m-2;2)=0$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)(m-2)+2(-m^2-m+2)=0$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{2-4}{-4+1-2}=\frac{2}{5}$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 43: Đáp án D

Giả sử $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$. Theo bài ?? ta có:

$$\frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\ge 3.\sqrt[3]{\frac{9}{abc}}=3.\sqrt[3]{\frac{9}{6V}}$$

$$\Rightarrow V\ge\frac{81}{2}$$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 44: Đáp án C

Dễ dàng nhìn ra ngay điều này.

Câu 45: Đáp án A

Ta có:

$$(P):\frac{x}{8}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$$

$$\Leftrightarrow x+4y+2z-8=0$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 46: Đáp án B

(P) đi qua gốc tọa độ nên: $(P):ax+by+cz=0$

$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\perp(R)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b+3c=0\\a+2b+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{7c}{5}\\ b=\dfrac{c}{5}\end{cases}\Leftrightarrow (P):7x-y-5z=0$$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 47: Đáp án D

Cách 1: Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của B lên (P). Khi đó, ta có:

$$\begin{cases}H\in(P)\\ \vec{BH}=k(1;-2;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b+c-1=0\\ \dfrac{a-3}{1}=\dfrac{b+1}{-2}=\dfrac{c-1}{1}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{13}{6}\\ b=\dfrac{2}{3}\\ c=\dfrac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow H\left(\frac{13}{6};\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)$$

Khi đó, (Q) chính là $(ABH):ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases}a+b+2c+d=0\\3a-b+c+d=0\\ \dfrac{13a}{6}+\dfrac{2b}{3}+\dfrac{c}{6}+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-4d}{11}\\ b=\dfrac{-3d}{11}\\ c=\dfrac{-2d}{11}\end{cases}$$

$$\Rightarrow (Q):4x+3y+2z-11=0$$

Cách 2: $\vec{AB}=(2;-2;-1);\vec{n_R}=(1;-2;1)$

$$\Rightarrow \vec{n_P}=\left[\vec{AB},\vec{n_R}\right]=(4;3;2)$$

$$\Rightarrow (P):4x+3y+2z-11=0$$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 48: Đáp án C

$$T=|MA-MB|\le AB=\sqrt{(0-1)^2+(1-(-1))^2+(-2-1)^2}.$$

$$T\le\sqrt{14}$$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 49: Đáp án D

$(ABC):ax+by+cz+d=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+6b+2c+d=0\\5a+b+3c+d=0\\4a+6c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-7d}{55}\\b=\dfrac{-13d}{110}\\c=\dfrac{-9d}{110}\end{cases}$$

$\Rightarrow (ABC): 14x+13y+9z-110=0$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 50: Đáp án A

Xét hệ:

$$\begin{cases}1+2t=7+3m\\-2-3t=2+2m\\5+4t=1-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\m=-\dfrac{5}{3}\\4t+2m=-4\end{cases}$$

Hệ vô nghiệm nên loại **B** và **D**. Dễ thấy chúng không sóng song với nhau. Vì thế đáp án đúng là **A**.

Câu 51: Đáp án B

$A(-2;1;0), B(-3;0;4), C(0;7;3)$

$\Rightarrow \vec{AB}=(-1;-1;4); \vec{BC}=(3;7;-1)$

$\Rightarrow \vec{AB}.\vec{BC}=-1.3-1.7+4.(-1)=-14$

$\Rightarrow \cos\left(\vec{AB};\vec{BC}\right)=\dfrac{\vec{AB}.\vec{BC}}{AB.BC}=\dfrac{-14}{\sqrt{18}.\sqrt{59}}$

$\Rightarrow \cos\left(\vec{AB};\vec{BC}\right)=\dfrac{-7\sqrt{118}}{177}$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 52: Đáp án A

Xác định $(ABC): ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases}2a+3b+c+d=0\\4a+b-2c+d=0\\6a+3b+7c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3d}{22}\\b=\dfrac{-3d}{11}\\c=\dfrac{d}{11}\end{cases}$$

$\Rightarrow (ABC): 3x+6y-2z-22=0$

$\Rightarrow h=d_{D/(ABC)}=\dfrac{|3.(-5)+6.(-4)-2.8-22|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}$

$\Rightarrow h=\dfrac{77}{7}=11$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 53: Đáp án A

Do (α) đi qua gốc tọa độ nên: $(\alpha): ax+by+cz=0$

$\Rightarrow d_{M/(\alpha)}=\dfrac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le\dfrac{\sqrt{\left(1^2+2^2+(-1)^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\Rightarrow d_{M/(\alpha)}\le\sqrt{6}$

Dấu "=" xảy ra khi:

$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{-1}\Leftrightarrow (Q): x+2y-z=0$

Đáp án đúng là A.

Câu 54: Đáp án B

M thuộc d nên: $M(1+m;1-m;2m)$

$AM=\sqrt{6}\Leftrightarrow (1+m-0)^2+(1-m-2)^2+(2m+2)^2=6$

$\Leftrightarrow (m+1)^2+(m+1)^2+(2m+2)^2=6$

$\Leftrightarrow (m+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M(1;1;0)\\M(-1;3;-4)\end{array}\right.$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 55: Đáp án D

(Q) đi qua A nên:

$(Q): a(x-1)+b(y-2)+c(z+1)=0$

(Q) đi qua B nên:

$a.(0-1)+b.(4-2)+c(0+1)=0$

$\Rightarrow -a+2b+c=0$

$\Rightarrow a=2b+c$

$\Rightarrow (Q): (2b+c)(x-1)+b(y-2)+c(z+1)=0$

$\Rightarrow n_{(Q)}=(2b+c;b;c)$

$(P): 2x-y-2z+2015=0\Rightarrow n_{(P)}=(2;-1;-2)$

$\Rightarrow \cos((P);(Q))=\left|\cos\left(n_{(P)};n_{(Q)}\right)\right|$

$\Rightarrow \cos((P);(Q))=\dfrac{|2(2b+c)-b-2c|}{\sqrt{(2b+c)^2+b^2+c^2}.\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$

$\Rightarrow \cos(\alpha)=\dfrac{|3b|}{3.\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}}$

Ta cần tìm $\alpha_{min}\Leftrightarrow(\cos\alpha)_{max}$

$\text{os}(\alpha)=\dfrac{|3b|}{3.\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{3b^2+2(b+c)^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Dấu "=" xảy ra khi: $b=-c$

Đáp án đúng là D.

Câu 56: Đáp án C

$(P)\perp(d)\Leftrightarrow n_{(P)}=u_d=(2;1;-1)$

$\Rightarrow (P): 2(x-2)+(y-0)-(z+1)=0$

$\Leftrightarrow (P): 2x+y-z-5=0$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 57: Đáp án D

Giao điểm A của Δ và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}\Rightarrow A(-3;1;1)\\x+2y-3z+4=0\end{cases}$$

Giả sử d đi qua $B(x;y;0)$. Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} B\in(P) \\ AB.n_\Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+4=0 \\ (x+3).1+(y-1).1+(-1).(-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(-2;-1;0) \Rightarrow AB=(1;-2;-1)$$

$$\Rightarrow (d): \frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 58: Đáp án C

Dễ thấy $A(1;0;-1);B(3;1;-2)\in(\Delta)$

Giả sử: $(Q): a(x-1)+by+c(z+1)=0$

$\Rightarrow a(3-1)+b.1+c(-2+1)=0$

$\Rightarrow b=c-2a$

$\Rightarrow (Q): a(x-1)+(c-2a)y+c(z+1)=0$

$(P): 2x+y+2z-1=0$

$$\Rightarrow \cos((P);(Q)) = \frac{|2a+(c-2a)+2c|}{\sqrt{a^2+(2a-c)^2+c^2}\sqrt{9}}$$

$$\Rightarrow \cos((P);(Q)) = \frac{|4c|}{3\sqrt{5a^2-4ac+2c^2}}$$

$$\Rightarrow \cos((P);(Q)) = \frac{|c|}{\sqrt{5\left(a-\frac{2}{5}c\right)^2+\frac{6}{5}c^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$a=\frac{2}{5}c \Leftrightarrow (Q): \frac{2}{5}(x-1)+\left(1-\frac{4}{5}\right)y+(z+1)=0$$

$\Leftrightarrow (Q): 2x+y+5z+3=0$

Đáp án đúng là C.

Câu 59: Đáp án D

$$\cos(d_1;d_2)=\left|\cos(n_{d_1};n_{d_2})\right|$$

$$=\frac{|1.(-1)+(-1).1+2.1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}$$

$=0$

$\Rightarrow (d_1;d_2)=90^0$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 60: Đáp án B

$$A(1;0;-1);B(3;1;2)\in d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$$

$\Rightarrow (P): a(x-1)+b(y-0)+c(x+1)=0$

$\Rightarrow a(3-1)+b.(1-0)+c(2+1)=0 \Rightarrow b=-2a-3c$

$\Rightarrow (P): a(x-1)-(2a+3c)y+c(x+1)=0$

$(Q): 2x+y-z=0$

$(P)\perp(Q) \Leftrightarrow 2a-(2a+3c)-c=0 \Leftrightarrow c=0$

$\Rightarrow (P): x-1-2y=0$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 61: Đáp án C

Kiểm tra ta thấy đáp án đúng là C.

Câu 62: Đáp án D

(P) vuông góc với d nên:

$n_{(P)}=u_d=(2;1;-1)$

$\Rightarrow (P): 2(x-1)+1(y-2)-(z)=0$

$\Leftrightarrow (P): 2x+y-z-4=0$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 63: Đáp án C

Mặt phẳng (P) song song với Ox nên:

$(P): ay+bz+c=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a.0+b.1+c=0 \\ a.2+b.2+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-c \\ a=\frac{c}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow (P): y-2z+2=0$

Đáp án đúng là C.

Câu 64: Đáp án D

Giao điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{3} \\ x+4y+9z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow I(0;0;1)$$

Đáp án đúng là D.

Câu 65: Đáp án A

Mặt phẳng (Q) song song với (P) nên:

$(Q): 2x-y+3z+m=0$

A thuộc (Q) nên: $2.1-3+3.(-2)+m=0 \Rightarrow m=7$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 66: Đáp án B

$M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$ thì:

$$\vec{MC}=-2\vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0+3=-2(x_0-0) \\ y_0-6=-2(y_0-3) \\ z_0-4=-2(z_0-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=4 \\ z_0=2 \end{cases} \Rightarrow M(-1;4;2)$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{(-1-2)^2+(4-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{29}$$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 67: Đáp án D

$\vec{AB}=(1;-2;-3); \vec{AC}=(2;-2;0)$

$\vec{AD}=(3;-1;-2)$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\vec{AB};\vec{AC}\right].\vec{AD}\right|$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|(-6;-6;2).(3;-1;-2)\right|=\frac{8}{3}$

Vậy đáp án đúng là **D**.

Câu 68: Đáp án B

Gọi $A\in d_1;B\in d_2$ sao cho AB là đường vuông góc chung của $d_1;d_2$. Khi đó ta có:

$A\in d_1;B\in d_2\Rightarrow A(-a+2;a;a);B(2b;-b+1;-b+2)$

$\Rightarrow \vec{AB}=(2b+a-2;-b+1-a;-b+2-a)$

$\begin{cases}AB\perp d_1\\AB\perp d_2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-(2b+a-2)+(-b+1-a)+(-b+2-a)=0\\2(2b+a-2)-(-b+1-a)-(-b+2-a)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow A(1;1;1);B\left(1;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow \vec{AB}=\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với AB nên:

$(P):0x-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1+\frac{3}{2}}{2}\right)=0$

$\Rightarrow (P):-y+z-\frac{1}{2}=0$

Vậy đáp án đúng là **B**.

Câu 69: Đáp án B

Gọi $M;N$ là trung điểm $AC;B'D'$ thì:

O là trung điểm MN sẽ đồng thời là trung điểm $B'D$. Ta có:

$M\left(\frac{1+3}{2};\frac{2-4}{2};\frac{-1+1}{2}\right)\Rightarrow M(2;-1;0)$

$N\left(\frac{2+0}{2};\frac{-1+3}{2};\frac{3+5}{2}\right)\Rightarrow N(1;1;4)$

$\Rightarrow O\left(\frac{2+1}{2};\frac{-1+1}{2};\frac{0+4}{2}\right)\Rightarrow O\left(\frac{3}{2};0;2\right)$

$\Rightarrow D\left(2.\frac{3}{2}-2;2.0-(-1);2.2-3\right)\Rightarrow D(1;1;1)$

$\Rightarrow x+2y-3z=0$

Vậy đáp án đúng là **B**.

Câu 70: Đáp án C.

Giả sử α là góc giữa $d;(P)$. Ta có:

$\sin\alpha=\frac{|1.2+2.2+2.(-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{4}{9}\Rightarrow d_{M/(P)}=MA.\sin\alpha=\frac{8}{9}$

Vậy đáp án đúng là **C**.

Câu 71: Đáp án D

Xét hệ: $\begin{cases}2t_1+3=6t_2\\t_1-2=-2t_2\\-2t_1-1=4t_2+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\frac{3}{5}\\t_2=\frac{7}{10}\\2t_1+4t_2=-3\end{cases}$

Hệ vô nghiệm nên hai đường thẳng không có điểm chung. Rõ ràng hai đường thẳng không song song nên chéo nhau. Đáp án đúng là **D**.

Câu 72: Đáp án A

$A(-1;2;4),B(-1;1;4),C(0;0;4)$

$\Rightarrow \vec{AB}=(0;-1;0);\vec{BC}=(1;-1;0)$

$\cos\left(\vec{AB};\vec{BC}\right)=\frac{\vec{AB}.\vec{BC}}{AB.BC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 180^0-ABC=45^0\Rightarrow ABC=135^0$

Vậy đáp án đúng là **A**.

Câu 73: Đáp án C.

Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-2-t\\z=2t\end{cases}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ, $d\cap\Delta=N$, suy ra N là trung điểm của MM'.

Khi đó $N=(-1+2t;-2-t;2t)$

$\Rightarrow \vec{MN}=(-3+2t;1-t;2t-1)$.

Do d vuông góc với Δ nên

$(-3+2t).2-1.(1-t)+2.(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1$.

Khi đó $M'(0;-3;3)$.

Câu 74: Đáp án C

$(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$

$I(1;2;-2);R=5$

Dễ thấy $A(1;-3;0);B(3;1;4)\in d$ nên:

$(P):a(x-1)+b(y+3)+cz=0$

$a.(3-1)+b(1+3)+c.4=0$

$\Rightarrow a=-2b-2c$

$\Rightarrow (P):(-2b-2c)(x-1)+b(y+3)+cz=0$

(P) tiếp xúc với (S) khi:

$d_{I/(P)}=R\Leftrightarrow\frac{|(-2b-2c)(1-1)+b(2+3)+c(-2)|}{\sqrt{(-2b-2c)^2+b^2+c^2}}=5$

$\Leftrightarrow\frac{|5b-2c|}{\sqrt{5b^2+8bc+5c^2}}=5$

$\Leftrightarrow 25b^2-20bc+4c^2=25(5b^2+8bc+5c^2)$

$\Leftrightarrow 100b^2+220bc+121c^2=0$

$\Leftrightarrow (10b+11c)^2=0\Leftrightarrow b=\frac{-11}{10}c$

$\Rightarrow (P): \left(-2.\left(-\frac{11}{10}\right)-2\right)(x-1)-\frac{11}{10}(y+3)+z=0$

$\Rightarrow (P): 2x-11y+10z-35=0$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 75: Đáp án B

Giả sử đường thẳng cần tìm là (d') đi qua M:

$(d'): \frac{x+2}{a}=\frac{y+2}{b}=\frac{z-1}{c}$

$(d)\perp(d') \Leftrightarrow 2a+2b-c=0 \Leftrightarrow c=2a+2b$

Gọi H là hình chiếu của A lên (d').

$H\in(d') \Rightarrow H(ah-2;bh-2;ch+1)$

$\Rightarrow AH=(ah-3;bh-4;ch+4)$

$AH\perp(d') \Leftrightarrow (ah-3).a+(bh-4).b+(ch+4).c=0$

$\Leftrightarrow h=\frac{3a+4b-4c}{a^2+b^2+c^2}$

$\Rightarrow AH=\sqrt{41-2.h(3a+4b-4c)+h^2(a^2+b^2+c^2)}$

$\Rightarrow AH=\sqrt{41-\frac{(3a+4b-4c)^2}{a^2+b^2+c^2}}$

$\Rightarrow AH=\sqrt{41-\frac{(3a+4b-4(2a+2b))^2}{a^2+b^2+(2a+2b)^2}}$

$\Rightarrow AH=\sqrt{41-\frac{25a^2+40ab+16b^2}{5a^2+5b^2+8ab}}$

$\Rightarrow AH\geq\sqrt{41-\frac{5(5a^2+5b^2+8ab)}{5a^2+5b^2+8ab}}$

$\Rightarrow AH\geq 6$

Dấu "=" xảy ra khi $b=0$. Do đó, ta có:

$(d'): \frac{x+2}{1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{u}=(1;0;2)$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 76: Đáp án B.

Chọn $B(3;-1;-1), C(1;0;0)$ là hai điểm nằm trên đường thẳng d, suy ra hai điểm A, B cũng nằm trong mặt phẳng (P) cần tìm.

Bài toán trở thành viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(3;1;0), B(3;-1;-1), C(1;0;0)$. Đây là dạng toán mà tôi đã đề cập rất chi tiết trong sách "Bộ đề tinh túy môn Toán năm 2017".

Mặt phẳng (P) có vtpt

$\vec{n}=\left[\vec{AB},\vec{BC}\right]=(-1;2;-4)=-1(1;-2;4)$

mà mặt phẳng (P) chứa điểm $C(1;0;0)$ nên

$(P): x-2y+4z-1=0$.

Câu 77: Đáp án A

d song song với mặt phẳng (P) khi:

$\vec{u_d}.\vec{n_{(P)}}=0 \Leftrightarrow (2;1;1).(1;-3;2m)=0$

$\Leftrightarrow 2.1+1.(-3)+1.2m=0$

$\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 78: Đáp án D

$I\left(\frac{-1+3}{2};\frac{1+1}{2};\frac{0-2}{2}\right) \Rightarrow I(1;1;-1)$

$\vec{AB}=(4;0;-2)$

$\Rightarrow (P): 4(x-1)+0(y-1)-2(z+1)=0$

$\Rightarrow (P): 4x-2z-6=0$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 79: Đáp án C

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_1)

Khi đó, có:

$(P): 1(x-1)+4(y+1)-2(z-3)=0$

$(P): x+4y-2z+9=0$

Gọi giao điểm $(d_2);(P)$ là $B(a;b;c)$.

$\begin{cases} a+4b-2c+9=0 \\ \frac{a-2}{1}=\frac{b+1}{-1}=\frac{c-1}{1} \end{cases}$

$\Rightarrow B(3;0;2)$

$\Rightarrow \vec{AB}(2;-1;-1)$

$\Rightarrow (AB)\equiv(d): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 81: Đáp án A

$A(2;2;3), B(1;3;3), C(1;2;4) \Rightarrow \begin{cases} \vec{AB}=(-1;1;0) \\ \vec{AC}=(-1;0;1) \\ \vec{BC}=(0;-1;1) \end{cases}$

$\Rightarrow AB=BC=AC$ nên ΔABC đều

Câu 82: Đáp án B

$M\in d \Rightarrow M(m;2m-1;3m-2)$ với m<0

$d(M,(P))=\frac{|m+2(2m-1)-2(3m-2)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$

$\Leftrightarrow |5-m|=6 \Leftrightarrow m=-1 \Rightarrow M(-1;-3;-5)$

Câu 83: Đáp án D

Theo công thức tọa độ trọng tâm ta có

$\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{1+2+0}{3}=1 \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{3+0+9}{3}=4 \\ z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{5+1+0}{3}=2 \end{cases} \Rightarrow G(1;4;2)$

Câu 84: Đáp án A

Gọi $A(0;0;1)\in(\Delta)$

Ta có: $\vec{MA}=(0;-3;3)$

$$\vec{n_P}=\left[\vec{MA};\vec{u_\Delta}\right]=(-15;3;3)$$

Từ đó: $\Rightarrow(P):-15x+3(y-3)+3(z+2)=0$

$\Leftrightarrow(P):5x-y-z+1=0$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 85: Đáp án A

Gọi $A(0;0;1);B(1;1;5)\in\Delta$. Khi đó, ta có:

$M\in(Q)\Rightarrow(Q):a(x-0)+b(y-3)+c(z+2)=0$

$d_{A/(Q)}=d_{B/(Q)}=3$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{a(0-0)+b(0-3)+c(1+2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{a(1-0)+b(1-3)+c(5+2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=3$$

$$\Leftrightarrow\frac{|3b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|a-2b+7c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=3$$

Nếu $c=0$ thì $\frac{|3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Rightarrow a=0$. Suy ra vô lý.

Nếu $c\neq0$ thì chọn: $c=1$. Giải hệ hai ẩn trên được: $a=4;b=-8$

Do đó, đáp án đúng là **A.**

Câu 86: Đáp án D

$N\in d\Rightarrow N(2a+1;-a-2;2a+3)$

$\Rightarrow\vec{NA}=(2a+1;-a-3;2a+3);$

$\vec{NB}=(2a-1;-a-4;2a+1)$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{NA};\vec{NB}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|(4a+9;-4;-4a-7)\right|$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(4a+9)^2+(-4)^2+(-4a-7)^2}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{32a^2+128a+146}=\frac{1}{2}\sqrt{2(4a+8)^2+18}$$

$$S\geq\frac{1}{2}\sqrt{18}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $a=-2\Rightarrow N(-3;0;-1)$

Vậy đáp án đúng là **D.**

Câu 87: Đáp án B

$B(-1;0;3)$, $C(2;-2;0)$, $D(-3;2;1)$

$\Rightarrow\vec{BC}=(3;-2;-3);\vec{BD}=(-2;2;-2)$

$$\Rightarrow S_{BCD}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{BC};\vec{BD}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+12^2+2^2}$$

$S_{BCD}=\sqrt{62}$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 88: Đáp án B

$(MNP):ax+by+cz+d=0$

$$\begin{cases}a+2c+d=0\\-3a-4b+c+d=0\\2a+5b+3c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{d}{31}\\b=\dfrac{3d}{31}\\c=\dfrac{-16d}{31}\end{cases}$$

$(MNP):x+3y-16z+31=0$

Vậy đáp án đúng là **B.**

Câu 89: Đáp án D

$(P)\perp\Delta\Leftrightarrow\vec{n_p}=\vec{u_d}=(2;-2;1)$

$\Rightarrow(P):2(x-x_0)-2(y-y_0)+(z-z_0)=0$

$(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$

$\Rightarrow I(1;-2;1);R=3$

(P) tiếp xúc (S) khi:

$d_{I/(P)}=3$

$$\Leftrightarrow\frac{|2(1-x_0)-2(-2-y_0)+(1-z_0)|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$$

$\Leftrightarrow|2x_0-2y_0+z_0-7|=9$

Do đó, đáp án đúng là **D.**

Câu 90: Đáp án C

Mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với (Δ) :

$(P):3(x-4)+0(y+2)-1(z-3)=0$

$(P):3x-z-9=0$

Giao điểm B của $\Delta;(P)$ là:

$$\begin{cases}x=2+3t\\y=4\\z=1-t\\3x-z-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{16}{5}\\y=4\\z=\dfrac{3}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{16}{5};4;\frac{3}{5}\right)\Rightarrow\vec{AB}=\left(-\frac{4}{5};6;-\frac{12}{5}\right)$$

$\Rightarrow\vec{u_d}=(-2;15;-6)$

Vậy đáp án đúng là **C.**

Câu 91: Đáp án A

$$\cos\left((P);(Q)\right)=\frac{|1.2+(-1).0+4.(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{2^2+2^2}}$$

$$\cos\left((P);(Q)\right)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow\left((P);(Q)\right)=60^0$$

Vậy đáp án đúng là **A.**

Câu 92: Đáp án A

$M\in\Delta\Rightarrow M(3a+1;2a;a-2)$

$MA=MB\Rightarrow(3a)^2+(2a-2)^2+(a-2)^2$

$=(3a+3)^2+(2a-3)^2+(a-3)^2$

$\Rightarrow a = -\frac{19}{12} \Rightarrow M\left(\frac{-15}{4};\frac{-19}{6};\frac{-43}{12}\right)$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 93: Đáp án B

Hiển nhiên nhìn ra ngay vì nó vuông góc với (Oxz).

Câu 94: Đáp án C

$M \in Oy \Rightarrow M(0;y;0)$

$\Rightarrow MA + MB = \sqrt{1+(y-1)^2} + \sqrt{4+(y-3)^2}$.

$\geq \sqrt{(1+2)^2 + (y-1+3-y)^2} = \sqrt{13}$

Dấu "=" xảy ra khi:

$\frac{y-1}{1} = \frac{3-y}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5}{3}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 95: Đáp án C.

M là trung điểm AC cũng là trung điểm BD nên:

$\begin{cases} x_D = 1+1-1=1 \\ y_D = 2+0-1=1 \Rightarrow D(1;1;3) \\ z_D = 1+2-0=3 \end{cases}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 96: Đáp án A

$(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$

$\Leftrightarrow (ABC): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 97: Đáp án A

$(P)//(Q)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{-n} = \frac{m}{3} \neq \frac{5}{3}$

$\Leftrightarrow n = 4; m = \frac{3}{2}$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 98: Đáp án A

Ta có:

$u_d = n_{(P)} = (1;2;-2)$

$\Rightarrow (d): \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 99: Đáp án A

$N \in Oz \Rightarrow N(0;0;z)$

$NM = d_{N/(P)} = \frac{|z-17|}{\sqrt{2^2+3^2+1}}$

$\Rightarrow \sqrt{2^2+3^2+(z-4)^2} = \frac{|z-17|}{\sqrt{2^2+3^2+1}} \Leftrightarrow z = 3$

Câu 101: Đáp án B

$I\left(\frac{3+5}{2};\frac{3+1}{2};\frac{2+4}{2}\right) \Rightarrow I(4;2;3)$

Câu 102: Đáp án C

Câu 103: Đáp án A

$(ABC): ax + by + cz + d = 0$

$\begin{cases} 4a+2b+5c+d=0 \\ 3a+b+3c+d=0 \\ 2a+6b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2d}{3} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$

$(ABC): 2x - z - 3 = 0$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 104: Đáp án:

Gọi $(P) = \begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp d_1 \end{cases}$, khi đó:

$(P): 2(x-2) + 1(y-2) + 2(z-1) = 0$

$\Rightarrow (P): 2x + y + 2z - 8 = 0$

$B(a,b,c) = (d_2) \cap (P)$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a-3}{1} = \frac{b-2}{2} = \frac{c}{3} \\ 2a+b+2c-8=0 \end{cases}$

$\Rightarrow B(3;2;0)$

$\Rightarrow AB \equiv u_d = (1;0;-1)$

$\Rightarrow (d): \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2 \quad (t \in R) \\ z = 1-t \end{cases}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 105: Đáp án C

$(d) \subset (P) \Rightarrow u_d \perp n_P$

$(d) \perp (\Delta) \Rightarrow u_d \perp u_\Delta$

$\Rightarrow u_d = [n_P, u_\Delta] = (4;-3;1)$

$A = (\Delta) \cap (P) \Rightarrow A(t;t+1;-t+2)$

$\Rightarrow t + 2(t+1) + 2(-t+2) - 4 = 0$

$\Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow A(-2;-1;4)$

$\Rightarrow (d): \begin{cases} x = -2-4t \\ y = -1+3t \, (t \in R) \\ z = 4-t \end{cases}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 106: (sai đáp án) Đáp án

Dễ thấy:

$(x_A + 2y_A - 2z_A + 12)(x_B + 2y_B - 2z_B + 12) > 0$

Kẻ $BH \perp (P)$; B' là điểm đối xứng B qua H. Khi đó, ta có:

$H \in (P) \Rightarrow H(-2b+2c-12;b;c)$

$BH \perp (P) \Leftrightarrow \frac{-2b+2c-12}{1} = \frac{b+1}{2} = \frac{c-2}{-2}$

$\Leftrightarrow b=\frac{-7}{3};c=\frac{10}{3}\Rightarrow H\left(\frac{-2}{3};\frac{-7}{3};\frac{10}{3}\right)$

$\Rightarrow B'\left(2.\frac{-2}{3}-0;2.\frac{-7}{3}+1;2.\frac{10}{3}-2\right)$

$\Rightarrow B'\left(\frac{-4}{3};\frac{-11}{3};\frac{14}{3}\right)\Rightarrow AB'=\left(\frac{-7}{3};\frac{-11}{3};\frac{8}{3}\right)$

$\Rightarrow (AB'):\frac{x-1}{7}=\frac{y}{11}=\frac{z-2}{-8}$

$N=AB'\cap(P)\Rightarrow N(7a+1;11a;-8a+2)$

$\Rightarrow (7a+1)+2(11a)-2(-8a+2)+12=0$

$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{5}\Rightarrow N\left(\frac{-2}{5};\frac{-11}{5};\frac{18}{5}\right)$

$MA+MB=MA+MB'\ge AB'$

Dấu "=" khi $M\equiv N$

Câu 107: Đáp án D

Do $(P)\parallel(Q)\Rightarrow(P):x+2y+z+m=0$

Lại có:

$d(D,(P))=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|1+2.0+3+m|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{6}$

$\Rightarrow\frac{|m+4|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|m+4|=6$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-10\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(P):x+2y+z+2=0\\(P):x+2y+z-10=0\end{array}\right.$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 108: Đáp án A

$A,B\in(Q)\Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{n_Q}$

$(P)\perp(Q)\Rightarrow\vec{n_P}\perp\vec{n_Q}$

Có $\Rightarrow\vec{n_Q}=\left[\vec{AB},\vec{n_P}\right]=(0;-8;-12)$

$\Rightarrow(Q)=\begin{cases}A\in Q\\ \vec{n_Q}=(0;-8;-12)\end{cases}$

$\Rightarrow(Q):2x+3y-11=0$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 109: Đáp án A

$BC=\sqrt{(4-0)^2+(2-2)^2+(1-4)^2}=5$

$D\in Ox\Rightarrow D(a;0;0)$

$AD=BC\Rightarrow\sqrt{(a-3)^2+(0+4)^2+(0-0)^2}=5$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-3)^2+16}=5\Leftrightarrow(a-3)^2=9$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}D(6;0;0)\\D(0;0;0)\end{array}\right.$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 110: Đáp án A

$\left[\vec{AB};\vec{AC}\right]=(-3;-6;6)$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB};\vec{AC}\right]\right|=\frac{9}{2}$

$\Rightarrow d_{M/(ABC)}=\frac{3V}{S}=\frac{9}{9/2}=2$

$(ABC):(x-0)+2(y-1)-2z=0$

$M\in(d)\Rightarrow M(2m+1;-m-2;2m+3)$

$d_{M/(ABC)}=2\Leftrightarrow\frac{|(2m+1)+2(-m-3)-2(2m+3)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=2$

$\Leftrightarrow|4m+11|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{-5}{4}\\m=\frac{-17}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(\frac{-3}{2};-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)\\M\left(-\frac{15}{2};\frac{9}{4};\frac{-11}{2}\right)\end{array}\right.$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 111: Đáp án C

Gọi $\vec{n_P}=(a,b,c)(a^2+b^2+c^2\ne0)$

Ta có:

$A,B\in(P)\Rightarrow\vec{AB}\perp\vec{n_P}\Rightarrow3a-2b=0$

$\Leftrightarrow3a=2b\Leftrightarrow9a^2=4b^2\ (1)$

$\cos(P,Oyz)=\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{|\vec{n_P}.\vec{n_{Oyz}}|}{|\vec{n_P}|.|\vec{n_{Oyz}}|}=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}}=\frac{2}{7}$

$\Leftrightarrow\frac{|a|}{\sqrt{a^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2+c^2}}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow\frac{|a|}{\sqrt{\frac{13}{4}a^2+c^2}}=\frac{2}{7}$

$\Leftrightarrow a^2=\frac{4}{49}\left(\frac{13}{4}a^2+c^2\right)\Leftrightarrow9a^2=c^2\ (2)$

$(1),(2)\Rightarrow c^2=4b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=2b\\c=-2b\end{array}\right.$

Chọn:

$a=2\Rightarrow b=3\Rightarrow c=6\Rightarrow(P):2x+3y+6z-12=0$

$a=-2\Rightarrow b=-3\Rightarrow c=6\Rightarrow(P):2x+3y-6z=0$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 112: Đáp án A

Gọi H là hình chiếu của A lên (P).

$H(a;-2a+2c-1;c)$

$HA\perp(P)\Leftrightarrow\frac{a-1}{2}=\frac{-2a+2c+1}{1}=\frac{c-3}{-2}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{19}{9}\\c=\frac{17}{9}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{19}{9};\frac{-13}{9};\frac{17}{9}\right)$

$(P)\equiv(ABH):mx+ny+pz+q=0$

$\begin{cases}m-2n+3p+q=0\\3m+2n-p+q=0\\19m-13n+17p+9q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\frac{2q}{7}\\n=-\frac{2q}{7}\\p=-\frac{3q}{7}\end{cases}$

$(P): 2x+2y+3z-7=0$

Đáp án đúng là A.

Câu 114: Đáp án D

Gọi $(P)=\begin{cases}A\in(P)\\(P)\perp d_1\end{cases}$, khi đó:

$(P): 2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0$

$\Rightarrow (P): 2x-y+z-3=0$

$B(a,b,c)=(\Delta)\cap(P)$

$\Rightarrow\begin{cases}a=1-t\\b=1+2t\\c=-1+t\\2a-b+c-3=0\end{cases}$

$\Rightarrow B(2;-1;-2)$

$\Rightarrow \vec{AB}\equiv u_\Delta=(1;-3;-5)$

$\Rightarrow (\Delta): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-5}$

Vậy đáp án đúng là D.

Câu 116: Đáp án C

$\vec{AB}=(-3;4;0); \vec{AC}=(0;0;1)$

$\Rightarrow u_d=\dfrac{\vec{AB}}{AB}+\dfrac{\vec{AC}}{AC}=\left(\dfrac{-3}{5};\dfrac{4}{5};1\right)$

$\Rightarrow (d): \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-1}{-5}$

$(d)\cap(Oyz)=A(0;a;b)$

$\Rightarrow \dfrac{0-1}{3}=\dfrac{a+2}{-4}=\dfrac{b-1}{-5}$

$\Rightarrow A\left(0;-\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right)$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 117: Đáp án B

$(ABC): ax+by+cz+d=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2c+d=0\\a+b+c+d=0\\2a+3b+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=d\\b=-d\\c=-d\end{cases}$

$\Rightarrow (ABC): x-y-z+1=0$

Vậy đáp án đúng là B.

Câu 118: Đáp án A

Sử dụng công thức:

$\vec{AB}=(2;-3;1); \vec{AC}=(0;-1;1)$

$\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\vec{AB};\vec{AC}\right]\right\|=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 119: Đáp án C

Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Theo bài???

Ta có:

$\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{OH^2}\geq\dfrac{1}{OM^2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $H\equiv M$ tức là $OM\perp(ABC)$.

$\Rightarrow (ABC): (x-1)+2(y-2)+(z-1)=0$

$\Leftrightarrow (ABC): x+2y+z-6=0$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 120: Đáp án A

Giả sử $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ thì:

$(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1;$

$G\left(\dfrac{a+0+0}{3};\dfrac{0+b+0}{3};\dfrac{0+0+c}{3}\right)$

$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{9}=1$

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 121: Đáp án C

Vì $M\in(Oxz)$ nên $M(x;0;y)$. Ta có:

$MA^2+MB^2+MC^2=$

$=(x-1)^2+(0-1)^2+(y-0)^2$

$+(x-3)^2+(0-(-1))^2+(y-2)^2$

$+(x-(-1))^2+(0-6)^2+(y-7)^2$

$=3(x-1)^2+3(y-3)^2+73\geq 73$

Dấu "=" xảy ra khi: $x=1; y=3\Rightarrow M(1;0;3)$.

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 122: Đáp án C.

Dễ thấy $M(1;7;3)\in(d): \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z-3}{4}$. Khi đó ta có:

$d_{(\alpha);(\beta)}=d_{(d);(\alpha)}=d_{M;(\alpha)}=\dfrac{|3.1-2.7-3+5|}{\sqrt{3^2+2^2+1}}=\dfrac{9}{\sqrt{14}}$

Vậy đáp án đúng là C.

Câu 123: Đáp án D

Theo tính chất đường xiên đường vuông góc dễ thấy: $d_{A;(P)}\leq d_{A;(d)}=const$. Điều này xảy ra khi: $H(a;b;c)$ là hình chiếu của A lên (d) cũng là hình chiếu của A lên (P). Do đó, ta có:

$H\in(d)\Rightarrow H(2b+1;b;2b+2)$

$AH\perp(d)\Rightarrow 2.(2b+1-2)+1.(b-5)+2(2b+2-3)=0$

$\Rightarrow b=\dfrac{9}{9}=1\Rightarrow H(3;1;4)\Rightarrow \vec{AH}=(1;-4;1)$

$\Rightarrow (P): (x-3)-4(y-1)+(z-4)=0$

$\Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$

Vậy đáp án đúng là D.

Mặt cầu

1. Phương trình mặt cầu.

Định lý

> Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (1).

Phương trình có dạng như phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu tâm I, bán kính R.

Nhận xét: Khi biến đổi phương trình (1) ta được:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0$

Nếu đặt $a^2+b^2+c^2-R^2=d$ thì phương trình trên trở thành

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0 \qquad (2)$$

Với điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$ thì phương trình (2) được gọi là phương trình tổng quát của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

2. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng.

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Đặt $d=d(I;(P))$. Khi đó ta có các trường hợp:

a. Trường hợp 1: $d>R\Leftrightarrow(S)\cap(P)=\varnothing$

b. Trường hợp 2: $d=R\Leftrightarrow(S)\cap(P)=\{M\}$, M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P). Trường hợp này ta nói mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M. Lúc này (P) được gọi là *tiếp diện* của mặt cầu (S), M được gọi là tiếp điểm của (P) và (S).

Đọc thêm: Với trường hợp 2: Ta dễ thấy với $\forall N$, ta có $N\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}=R^2$.

Từ đó ta thu được kết quả sau

> Cho mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c^2)=R^2$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)\in(S)$. Khi đó tiếp diện của (S) tại M có phương trình
> $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=R^2$.

STUDY TIP:
Phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ bán kính R tại điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có phương trình

$$\boxed{\begin{aligned}&(x_0-a)(x-a)+\\&+(y_0-b)(y-b)+\\&+(z_0-c)(z-c)=R^2\end{aligned}}$$

Ví dụ: Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $x^2+y^2+z^2=9$ tại điểm $M(2;-2;1)$.

Lời giải

Áp dụng công thức ở trên ta được mặt phẳng (P) có phương trình

$2x-2y+z-9=0$.

c. Trường hợp 3: $d<R\Leftrightarrow(S)\cap(P)=(C)$, (C) là đường tròn có tâm H là hình chiếu của I trên (P), có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

3. Các dạng toán thường gặp liên quan đến mặt cầu.

Dạng I: Viết phương trình mặt cầu cho trước tâm $I(a,b,c)$.

a. Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P): $Ax+By+Cz+D=0$.

$\Rightarrow$ mặt cầu có bán kính $\boxed{R = \dfrac{|A.a + B.b + C.c + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$.

b. Mặt cầu cắt mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ theo một đường tròn có bán kính r cho trước.

$\Rightarrow$ bán kính mặt cầu được xác định bởi: $\boxed{R^2 = r^2 + \left[d\left(I;(P)\right)\right]^2}$.

c. Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng $d: \dfrac{x - x_o}{A} = \dfrac{y - y_o}{B} = \dfrac{z - z_o}{C}$.

$\Rightarrow$ bán kính mặt cầu được xác định bởi công thức: $\boxed{R = \dfrac{\left|\left[\vec{u_d}, \vec{MI}\right]\right|}{\left|\vec{u_d}\right|}}$ trong đó M là một điểm trên đường thẳng d. (công thức ở phần khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong bài Phương trình đường thẳng).

d. Mặt cầu cắt đường thẳng d theo một dây cung có độ dài l cho trước.

$\Rightarrow$ bán kính mặt cầu được tính bằng công thức: $\boxed{R^2 = \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + \left[d(I,d)\right]^2}$

Dạng II: Viết phương trình mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng d cho trước và thỏa mãn một điều kiện nào đó trong phần I.

Cách làm: Viết phương trình đường thẳng d về dạng tham số, khi đó tham số hóa tọa độ điểm I theo một ẩn, sử dụng dữ kiện đề bài tìm ra I, từ đó quay về dạng I, tìm R.

Dạng III: Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ tại điểm M cho trước.

Cách 1:

Ở phần 2. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng (trường hợp 2) ta có bài toán ngược của bài toán này.

Với mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại $M(x_0; y_0; z_0)$ thì có phương trình
$(P): (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = R^2$.

Vậy ở đây khi đã biết mặt phẳng (P); điểm M nênta sẽ tìm tâm I và bán kính R bằng cách đồng nhất hệ số phương trình mặt phẳng (P).

STUDY TIP:
Phương trình mặt phẳng (P) cần tìm có dạng
$(x_0 - a)(x - a) +$
$+ (y_0 - b)(y - b) +$
$+ (z_0 - c)(z - c) = R^2$
Do vậy khi đã biết phương trình mặt phẳng
$(P): Ax + By + Cz + D = 0$
ở đề bài, do vậy ta chỉ cần giải hệ:
$\begin{cases} x_0 - a = A \\ y_0 - b = B \\ z_0 - c = C \end{cases}$ thì bài toán được giải quyết.

Cách 2:

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm M

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IM \perp (P) \\ R = IM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_{IM}} = \vec{n_P} = (A; B; C) \\ R = IM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = (x_0 + At; y_0 + Bt; z_0 + Ct) \\ R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.|t| \end{cases}$$

Tiếp theo, sử dụng các công thức ở dạng I tìm ra t.

Từ đây ta có I, có R nên viết được phương trình chính tắc của mặt cầu.

Dạng IV: Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm không đồng phẳng cho trước trong không gian.

Ta gọi phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ (1).

Do A, B, C, D thuộc mặt cầu (S) thế nên thay tọa độ từng điểm vào (1) ta sẽ có hệ phương trình bốn ẩn a, b, c, d.

Giải hệ ta tìm được a, b, c, d. Từ đây ta có mặt cầu tâm $I(a,b,c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

1. Mặt cầu

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$. Mặt phẳng (P) chứa A và d. Phương trình mặt cầu tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

A. $x^2+y^2+z^2=\frac{12}{5}$ B. $x^2+y^2+z^2=3$

C. $x^2+y^2+z^2=6$ D. $x^2+y^2+z^2=\frac{24}{5}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Phan Bội Châu-Lần II)

Câu 2: Gọi I là tâm mặt cầu đi qua 4 điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;1)$, $Q(1;1;1)$. Tìm tọa độ tâm I.

A. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. B. $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Biên Hòa-Lần I)

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$. Mệnh đề nào đúng?

A. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxy).

B. Mặt cầu (S) không tiếp xúc với cả ba mặt (Oxy), (Oxz), (Oyz).

C. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oyz).

D. Mặt cầu (S) tiếp xúc với (Oxz).

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Biên Hòa-Lần I)

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình mặt cầu nhận AB làm đường kính là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$

B. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$

C. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$

D. $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần III)

Câu 5: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;4;-7)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 6x+6y-7z+42=0$.

A. $(S):(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=\frac{3}{4}$

B. $(S):(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$

C. $(S):(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$

D. $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Vị Thanh-Hậu Giang)

Câu 6: Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu:

$$(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0.$$

A. $I(0;0;1), R=3$ **B.** $I(3;-2;1), R=3$

C. $I(3;-1;8), R=4$ **D.** $I(1;2;2), R=3$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Vị Thanh-Hậu Giang)

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(3;1;4)$. Mặt cầu (S) đường kính AB có phương trình là:

A. $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=\sqrt{3}$

B. $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=3$

C. $(x+2)^2+y^2+(z+3)^2=3$

D. $(x+2)^2+y^2+(z+3)^2=\sqrt{3}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+10=0$ theo một đường tròn có chu vi bằng 8π. Phương trình mặt cầu (S) là:

A. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=5$

B. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=5$

C. $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$

D. $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=25$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;1;1), B(1;2;1), C(1;1;2), D(2;2;1)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tọa độ:

A. $(3;3;-3)$ B. $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ D. $(3;3;3)$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần IV)

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-3)$ đi qua điểm $A(1;0;4)$ có phương trình là:

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=53$

B. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=53$

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=53$

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=53$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần IV)

Câu 11: Cho hai điểm $A(1;1;0), B(1;-1;-4)$. Phương trình của mặt cầu (S) đường kính AB là:

A. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$

B. $(x+1)^2+y^2+(z+4)^2=5$

C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=5$

D. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=5$

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần V)

Câu 12: Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m+t \end{cases}$. Tìm m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

A. $m=-1$ hoặc $m=-4$ B. $m=0$ hoặc $m=-4$

C. $m=-1$ hoặc $m=0$ D. Cả A, B, C đều sai

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần V)

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x+6y-4z-2=0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A. $I(1;3;-2), R=2\sqrt{3}$. B. $I(-1;-3;2), R=2\sqrt{3}$

C. $I(-1;-3;2), R=4$. D. $I(1;3;-2), R=4$.

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần VI)

Câu 14: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=2$ có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$.

B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=2$.

D. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$.

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần VI)

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-2y-2z+3=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. (P) cắt (S).

B. (P) tiếp xúc với (S).

C. (P) không cắt (S).

D. Tâm của mặt cầu (S) nằm trên mặt phẳng (P)

(Trích đề toán học tuổi trẻ-Lần VI)

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-2z+m=0$. Tìm m để (α) và (S) không có điểm chung.

A. $m<-9$ hoặc $m>21$ B. $-9<m<21$

C. $-9\le m\le 21$ D. $m\le -9$ hoặc $m\ge 21$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Trãi -Lần I)

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$ và 2 mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có phương trình $x+2y+2z+3=0$; $x+2y+2z+7=0$ Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng (d), tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P) và (Q).

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\frac{4}{9}$.

B. $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$

D. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}$

(Trích đề thi thử Chuyên Nguyễn Trãi -Lần I)

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-m=0$. có bán kính $R=5$. Tìm giá trị của m.

A. $m=-16$. B. $m=16$.

C. $m=4$. D. $m=-4$.

(Trích đề thi thử Chuyên ĐH Vinh -Lần I)

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0.$$

Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu?

A. $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$

B. $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$

C. $I(1;-2;3)$ và $R=5$

D. $I(-1;2;-3)$ và $R=5$

(Trích đề thi thử Chuyên KHTN -Lần II)

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$.

Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S).

A. $I(2;-1;1)$ và $R=3$. B. $I(-2;1;-1)$ và $R=3$.

C. $I(2;-1;1)$ và $R=9$. D. $I(-2;1;-1)$ và $R=9$.

(Trích đề thi thử Chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2}=\frac{z-3}{1}=\frac{y-2}{1}$ và hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0$, $(Q): x-2y+3z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S). Viết phương trình của mặt cầu (S).

A. $(S): (x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=\frac{2}{7}$.

B. $(S): (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\frac{9}{14}$.

C. $(S): (x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\frac{2}{7}$.

D. $(S): (x+2)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=\frac{9}{14}$.

(Trích đề thi thử Chuyên Lê Hồng Phong)

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$. Viết phương trình mặt mặt cầu (S) đi qua điểm A, tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

A. $(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=9$

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$

C. $(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=9$

D. $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=9$

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Phú Thọ)

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta): 2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. -2 B. -4 C. -1 D. $m=-3$.

(Trích đề thi thử Sở GD-ĐT Phú Thọ)

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$$

Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là:

A. $I(-1;3;2)$ và $R=3$ B. $I(2;-6;-4)$ và $R=5$

C. $I(1;-3;-2)$ và $R=3$ D. $I(-1;3;2)$ và $R=\sqrt{19}$

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 27: Mặt cầu $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ cắt mp(P): $2x-2y-z+9=0$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là:

A. 8 B. $2\sqrt{2}$ C. 10 D. 6

(Trích đề thi thử THPT Xuân Trường C)

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(-1;3;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+3=0$.

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$

B. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$

D. $(x+5)^2+(y+1)^2+z^2=9$

(Trích đề THPT Trần Hưng Đạo-Ninh Bình-Lần III)

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(-1;1;2)$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là:

A. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=\sqrt{14}$

B. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\sqrt{14}$

C. $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=14$

D. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ)

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1;1;2)$, $B(3;0;1)$ và có tâm thuộc trục Ox. Phương trình mặt cầu (S) là:

A. $(x-1)^2+y^2+z^2=5$

B. $(x-1)^2+y^2+z^2=\sqrt{5}$

C. $(x+1)^2+y^2+z^2=5$

D. $(x+1)^2+y^2+z^2=\sqrt{5}$

(Trích đề thi thử THPT Chuyên Thái Bình-Lần II)

Hướng dẫn giải chi tiết

Câu 1: Đáp án C.

Ta có: $A(2;1;3)$; $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Do $\begin{cases}A\in(P)\\ d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (P) là:

$2(x-2)-(y-1)+z-3=0\Leftrightarrow 2x-y+z-6=0$

$\Rightarrow d(O;(P))=\dfrac{|2.0-0+0-6|}{\sqrt{4+1+1}}=\sqrt{6}$.

Mặt cầu cần tìm có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=d(O;(P))$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $x^2+y^2+z^2=6$.

Câu 2: Đáp án C.

Phương trình mặt cầu có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

(ĐK: $a^2+b^2+c^2>d$)

Do M, N, P, Q thuộc mặt cầu

$$\Rightarrow\begin{cases}1-2a+d=0\\1-2b+d=0\\1-2c+d=0\\3-2a+-2b-2c+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=b=c=\dfrac{1}{2}\\ d=0\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 3: Đáp án A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và bán kính $R=3$.

Mặt phẳng $(Oxy): z=0\Rightarrow d(I;(Oxy))=3=R$.

Mặt phẳng $(Oyz): x=0\Rightarrow d(I;(Oyz))=2<R$.

Mặt phẳng $(Oxz): y=0\Rightarrow d(I;(Oxz))=1<R$.

Câu 4: Đáp án B.

Ta có: $A(1;-2;3)$, $B(5;4;7)$.

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I(3;1;5)$.

Theo bài ra, mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;5)$ và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=AI=\sqrt{17}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17.$$

Câu 5: Đáp án C.

Ta có: $d(I;(P))=11$.

Do (S) tiếp xúc với (P) nên mặt cầu (S) có tâm $I(1;4;-7)$ và bán kính $R=d(I;(P))=11$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121.$$

Câu 6: Đáp án B.

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z+5=0$

$$\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$ và bán kính $R=3$.

Câu 7: Đáp án B.

I là trung điểm $AB\Rightarrow I(2;0;3)$.

Do (S) nhận AB là đường kính nên mặt cầu (S) có tâm I và bán kính $AI=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=3.$$

Câu 8: Đáp án C.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;3)$ và bán kính R.

$C=8\pi\Rightarrow r=4$.

Mặt phẳng $(P): 2x-y-2z+10=0$.

$\Rightarrow d(I;(P))=3\Rightarrow R=\sqrt{d^2(I;(P))+r^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25.$$

Câu 9: Đáp án C.

Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có dạng:

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (ĐK: $a^2+b^2+c^2>d$)

Do (S) ngoại tiếp $ABCD$ nên $A, B, C, D\in(S)$

$$\Rightarrow\begin{cases}3-2a-2b-2c+d=0\\6-2a-4b-2c+d=0\\6-2a-2b-4c+d=0\\9-4a-4b-2c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b+2c+d=3\\2a+4b+2c+d=6\\2a+2b+4c+d=6\\4a+4b+2c+d=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=\dfrac{3}{2}\\c=\dfrac{3}{2}\\d=-6\end{cases}\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 10: Đáp án C.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{53}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=53.$$

Câu 11: Đáp án D.

Ta có: AB là đường kính

I là trung điểm $AB \Rightarrow I(1;0;-2)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=5.$$

Câu 12: Đáp án A.

Phân tích: ta có nếu hai mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với nhau thì hai vtpt của hai mặt phẳng này cũng vuông góc với nhau. Mà hai vtpt của hai mặt phẳng này chính là $\vec{IA},\vec{IB}$. Với $I(1;0;-2)$ là tâm của mặt cầu (S).

Vậy ta có hai điều kiện sau:

1. d cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

2. $\vec{IA}.\vec{IB}=0$.

Lời giải: Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trước tiên d phải cắt mặt cầu, tức là phương trình

$(2-t)^2+t^2+(m+t)^2-2.(2-t)+4.(m+t)+1=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 3t^2+2(m+1)t+m^2+4m+1=0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi

$\Delta'>0 \Leftrightarrow (m+1)^2-3m^2-12m-3>0$

$\Leftrightarrow m^2+5m+1<0$.

Với phương trình có hai nghiệm phân biệt, áp dụng định lí Viet ta có $t_1t_2=\dfrac{m^2+4m+1}{3};t_1+t_2=\dfrac{-2}{3}(m+1)$

Khi đó

$\vec{IA}=(1-t_1;t_1;m+2+t_1),\vec{IB}=(1-t_2;t_2;m+2+t_2)$.

Vậy

$\vec{IA}.\vec{IB}=(1-t_1)(1-t_2)+t_1t_2+(m+2+t_1)(m+2+t_2)=0$

$\Leftrightarrow 3t_1t_2+(m+1)(t_1+t_2)+(m+2)^2+1=0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+1-\dfrac{2}{3}(m+1)^2+(m+2)^2+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$ (TM).

Câu 13: Đáp án C.

Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x+6y-4z-2=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=4^2.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-1;-3;2)$ và bán kính $R=4$.

Câu 14: Đáp án A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và bán kính $R=2$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4.$$

Câu 15: Đáp án B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R=2$.

Mặt phẳng $(P): x-2y-2z+3=0$.

$d(I;(P))=2=R \Rightarrow (P)$ tiếp xúc với (S).

Câu 16: Đáp án A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và bán kính $R=5$.

(S) và (α) không có điểm chung

$\Leftrightarrow d(I;(\alpha))>R \Leftrightarrow \dfrac{|-2+2-6+m|}{3}>5$

$\Leftrightarrow |m-6|>15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>21 \\ m<-9 \end{array}\right.$

Câu 17: Đáp án B.

Ta có: $I\in(d) \Rightarrow I(t;-1;-t)$.

(S) tiếp xúc với (P) và (Q)

$\Rightarrow d(I;(P))=d(I;(Q))=R$

$\Leftrightarrow |t-2-2t+3|=|t-2-2t+7|$

$\Leftrightarrow |1-t|=|5-t|$

$\Leftrightarrow 1-2t+t^2=25-10t+t^2$

$\Leftrightarrow 8t=24 \Leftrightarrow t=3$.

$\Rightarrow I(3;-1;-3) \Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-1;-3)$ và bán kính $R=d(I;(P))=\dfrac{2}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=\frac{4}{9}.$$

Câu 19: Đáp án B.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2-9-m=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=m+9$$

$\Rightarrow m+9=25 \Leftrightarrow m=16$.

Câu 20: Đáp án B.

Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=5.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 21: Đáp án A.

Mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Câu 22: Đáp án A.

Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

Đường thẳng $d:\begin{cases} x=0+2t \\ y=3+t \\ z=2+t \end{cases}$

$I\in(d)\Rightarrow I(2t;3+t;2+t)$.

Mặt khác $I\in(P)\Rightarrow 2t-2(3+t)+2(2+t)=0$

$$\Leftrightarrow 2t-6-2t+4+2t=0\Leftrightarrow t=1$$

$\Rightarrow I(2;4;3)$.

(S) tiếp xúc với $(Q)\Rightarrow R=d(I;(Q))=\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=\frac{2}{7}.$$

Câu 23: Đáp án C.

Đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=2+t \end{cases}$

Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

Do $I\in d\Rightarrow I(1+t;2-2t;2+t)$.

(S) qua A và (S) tiếp xúc với $(P)\Rightarrow IA=d(I;(P))$

$\Leftrightarrow t^2+4t^2+(t+1)^2=\dfrac{\left[1+t-2(2-2t)+2(2+t)+1\right]^2}{9}$

$\Leftrightarrow 6t^2+2t+1=\dfrac{(1+t-4+4t+4+2t+1)^2}{9}$

$\Leftrightarrow 6t^2+2t+1=\dfrac{(2+7t)^2}{9}$

$\Leftrightarrow 5t^2-10t+5=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(2;0;3)$ và bán kính $R=3$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-2)^2+y^2+(z-3)^2=9.$$

Câu 24: Đáp án D.

Ta có: $C=8\pi=2\pi r\Rightarrow r=4$.

$(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+m-17=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=17-m\quad (m<17)$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$ và $R^2=17-m$.

Theo bài ra ta có: $R^2=d^2(I;(\beta))+r^2$

$$\Leftrightarrow 17-m=4+16\Leftrightarrow m=-3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 26: Đáp án A.

Mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2+2x-6y-4z+5=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9.$$

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;2)$ và bán kính $R=3$.

Câu 27: Đáp án A.

Mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(3;-2;1)$ và bán kính $R=10$.

Mặt phẳng $(P):2x-2y-z+9=0$

$\Rightarrow d(I;(P))=6\Rightarrow r=\sqrt{R^2-d^2(I;(P))}=8$.

Câu 28: Đáp án A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;2)$ và bán kính $R(R>0)$.

Mặt phẳng $(P):2x+2y+z+3=0$

Do (S) tiếp xúc với $(P)\Rightarrow R=d(I;(P))=3$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9.$$

Câu 30: Đáp án A.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{BC}=(-3;0;1) \\ \overrightarrow{BD}=(-4;-1;2) \end{cases}\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(1;2;3)$

Mặt phẳng (BCD) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;2;3)$ và đi qua điểm $C(0;2;1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là:

$$x+2(y-2)+3(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y+3z-7=0$$

$d(A;(BCD))=\sqrt{14}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;-2)$ và bán kính $R(R>0)$.

Do (S) tiếp xúc với $(BCD)\Rightarrow R=d(A;(BCD))=\sqrt{14}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14.$$

Câu 32: Đáp án A.

Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính $R(R>0)$.

Do $I\in Ox\Rightarrow I(a;0;0)$

Lại có (S) qua $A,B\Rightarrow IA=IB$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+5=(a-3)^2+1$

$\Leftrightarrow 4a=4\Leftrightarrow a=1$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=IA=\sqrt{5}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là:

$$(x-1)^2+y^2+z^2=5.$$

Chủ đề 8: Tổng ôn luyện

Hệ thống 10 đề tổng ôn luyện

Lưu ý: Đáp án và lời giải chi tiết của 10 đề tổng ôn luyện sẽ được gửi qua Mail. Quý độc giả vui lòng khai báo sách chính hãng tại website congphatoan.com để nhận được Mail. Cứ 2 ngày, quý độc giả sẽ nhận được đáp án và lời giải chi tiết 1 đề qua Mail, tính từ ngày đầu tiên khai báo sách chính hãng.

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 1

(THPT Lam Kinh)

Câu 1: Cho hình lập phương có cạnh bằng a và tâm O. Tính diện tích mặt cầu tâm O tiếp xúc với các mặt của hình lập phương.

A. $2\pi a^2$ B. $8\pi a^2$ C. πa^2 D. $4\pi a^2$

Câu 2: Cho hàm số $y=\dfrac{3}{x-2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 3: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng a ta được thiết diện là một hình vuông. Tính thể tích khối trụ.

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$ B. $\pi a^3\sqrt{3}$ C. πa^3 D. $3\pi a^3$

Câu 4: Cho $m=\log_2 20$. Tính $\log_{20}5$ theo m được:

A. $\dfrac{m-2}{m}$ B. $\dfrac{m-1}{m}$ C. $\dfrac{m}{2-m}$ D. $\dfrac{m+2}{m}$

Câu 5: Đặt $I=\int\dfrac{1}{e^x+1}dx$, khi đó:

A. $I=e^x+x+C$ B. $I=\dfrac{1}{e^x+1}+C$

C. $I=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}+C$ D. $I=\ln\left|e^x+1\right|+C$

Câu 6: Thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông cạnh $2a$ là:

A. a^3 B. $a^3\sqrt{2}$ C. $\dfrac{2a^3}{3}$ D. $2a^3$

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(x^2-1\right)\sqrt{4-x^2}+m=0$ có nghiệm.

A. $-2\le m\le 2$ B. $m\ge 2$

C. $0\le m\le 2$ D. $-2\le m\le 0$

Câu 8: Hàm số $f\left(x\right)=2^x$ có đạo hàm là:

A. $x.2^{x-1}$ B. $2^x\ln 2$ C. $\dfrac{2^x}{\ln 2}$ D. 2^x

Câu 9: Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1}}{a^{\sqrt{3}-3}.a^{1-\sqrt{3}}}$ $\left(0<a\ne 1\right)$ được kết quả là:

A. a^4 B. $\dfrac{1}{a^4}$ C. 1 D. a^3

Câu 10: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$ và $f\left(1\right)=1$ thì $f\left(5\right)$ bằng:

A. $\ln 3+1$ B. $\ln 2$ C. $\ln 2+1$ D. $\ln 3$

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4-2\left(m+1\right)x^2+m^2-1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. $m<-1$ B. $m\ge 1$ hoặc $m\le -1$

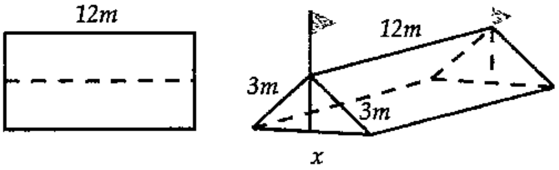
C. $m=-1$ D. $m\le -1$

Câu 12: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=-\log_{\frac{1}{3}}x$ B. $y=\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

C. $y=\log_{\pi}x$ D. $y=\log_2 x$

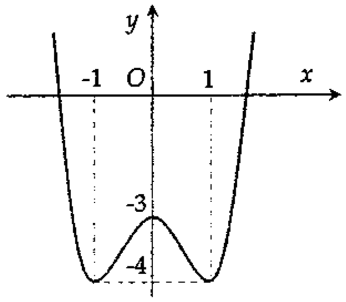
Câu 13: Một lớp học sinh tổ chức đi tham quan nhân Lễ hội Lam Kinh năm 2016. Để có chỗ nghỉ ngơi, các em đã dựng trên mặt đất phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài 12 mét và chiều rộng 6 mét bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt bám sát mặt đất và cách nhau x mét (xem hình vẽ). Tìm giá trị của x để không gian phía trong lều lớn nhất?



A. $x=4$ B. $x=3\sqrt{3}$

C. $x=3$ D. $x=3\sqrt{2}$

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm thực phân biệt.



A. $0<m<4$ B. $m>4$; $m=0$

C. $3<m<4$ D. $0<m<3$

Câu 15: Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $f(x)=x^4-2(m-2)x^2+m^2-1$ có đúng một cực trị?

A. $m\le 2$ B. $m\ge 2$ C. $m>2$ D. $m<2$

Câu 16: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai?

A. $\log x<0\Leftrightarrow 0<x<1$

B. $\log_{\frac{1}{3}} a=\log_{\frac{1}{3}} b\Leftrightarrow a=b>0$

C. $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$

D. $\log_{0,5} a>\log_{0,5} b\Leftrightarrow a>b>0$

Câu 17: Cho hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy là R. Diện tích toàn phần của hình trụ đó là:

A. $S_{tp}=\pi R(R+2h)$ B. $S_{tp}=\pi R(R+h)$

C. $S_{tp}=2\pi R(R+h)$ D. $S_{tp}=\pi R(2R+h)$

Câu 18: Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB=a$. Tính thể tích khối đa diện $ABCC'B'$.

A. $\frac{3a^3}{4}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ C. $a^3\sqrt{3}$ D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 19: Hàm số $y=x^3+2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$ B. $\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$ C. $(-\infty;+\infty)$ D. $(-\infty;-1)$

Câu 20: Cho hàm số $y=(x+1)x^2+mx+1$ có đồ thị (C). Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m=4$ B. $m=3$ C. $m=1$ D. $m=2$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB).

A. $a\sqrt{2}$ B. $2a$ C. a D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 22: Cho hàm số $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)$. Nghiệm của bất phương trình $g(x)>0$ là:

A. $x>3$ B. $x<2$ hoặc $x>3$

C. $2<x<3$ D. $x<2$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=k$. Xác định k sao cho mặt phẳng (BMC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau.

A. $k=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ B. $k=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

C. $k=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ D. $k=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Câu 24: Người ta xếp 7 viên bi có cùng bán kính r vào một cái lọ hình trụ sao cho tất cả các viên bi đều tiếp xúc với cả hai đáy, viên bi nằm chính giữa tiếp xúc với 6 viên bi xung quanh và mỗi viên bi xung quanh đều tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Khi đó diện tích 1 đáy của cái lọ hình trụ là:

A. $16\pi r^2$ B. $36\pi r^2$ C. $9\pi r^2$ D. $18\pi r^2$

Câu 25: Phương trình $(1,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ có nghiệm là:

A. $x=2$ B. $x=1$ C. $x=\frac{4}{3}$ D. $x=\frac{3}{2}$

Câu 26: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+2$. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm:

A. $(1;14)$ B. $(1;13)$ C. $(-1;0)$ D. $(1;12)$

Câu 27: Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2-7x+5}=1$ là:

A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 28: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_2 x-1}$ là:

A. $[2;+\infty)$ B. $(2;+\infty)$ C. $(0;1)$ D. $(1;+\infty)$

Câu 29: Phương trình $9^x-2.6^x+m^2 4^x=0$ có hai nghiệm trái dấu khi:

A. $m<-1$ hoặc $m>1$ B. $m\ge -1$

C. $m\in(-1;0)\cup(0;1)$ D. $m\le 1$

Câu 30: Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 31: Giá trị của biểu thức $64^{\frac{1}{2}\log_2 10}$ bằng:

A. 200 B. 400 C. 1000 D. 1200

Câu 32: Giá trị của tham số m để phương trình $4^x-2m.2^x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ sao cho $x_1+x_2=3$ là:

A. $m=4$ B. $m=-1$ C. $m=-2$ D. $m=3$

Câu 33: Phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$, khi đó tích $x_1.x_2$ bằng:

A. 22 B. 16 C. 32 D. 36

Câu 34: Khối nón có độ dài đường sinh là a, góc giữa một đường sinh và mặt đáy là $60°$. Thể tích khối nón là:

A. $\frac{3}{24}\pi a^3$ B. $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$ C. $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$ D. $\frac{3}{8}\pi a^3$

Câu 35: Cho hình tứ diện $SABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc; $SA=3a$, $SB=2a$, $SC=a$. Tính thể tích khối tứ diện $SABC$.

A. a^3 B. $2a^3$ C. $\frac{a^3}{2}$ D. $6a^3$

Câu 36: Tính $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx$, kết quả là:

A. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$ B. $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-4\ln|x|+C$

C. $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$ D. $-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+4\ln|x|+C$

Câu 37: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4-2x^2-1$ với trục hoành là:

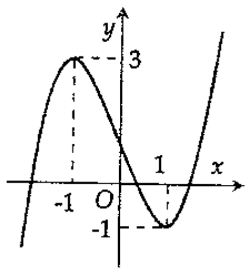
A. 1 B. 0 C. 3 D. 2

Câu 38: Đặt $I=\int 3^x dx$, khi đó:

A. $I=\frac{3^x}{x}+C$ B. $I=3^x\ln 3+C$

C. $I=3^x+C$ D. $I=\frac{3^x}{\ln 3}+C$

Câu 39: Đồ thị như hình bên là của hàm số nào?



A. $y=x^3-3x+1$ B. $y=-x^3+3x^2+1$

C. $y=-x^3-3x^2-1$ D. $y=x^3-3x-1$

Câu 40: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3^2 x\le\log_3\frac{x}{9}+4$ là:

A. $\left(\frac{1}{3};9\right)$ B. $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ C. $(0;9]$ D. $\left[\frac{1}{3};9\right]$

Câu 41: Cho hàm số $y=x^3-x-1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là:

A. $y=-x+1$ B. $y=-x-1$

C. $y=2x+2$ D. $y=2x-1$

Câu 42: Biểu thức $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ $(0<a\ne 1)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{5}{6}}$ B. $a^{\frac{7}{6}}$ C. $a^{\frac{6}{5}}$ D. $a^{\frac{11}{6}}$

Câu 43: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. M là trung điểm của cạnh SD. Tính theo a thể tích khối chóp $M.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{a^3}{8}$

Câu 44: Cho các số thực dương a, b, x, y với $a\neq 1, b\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $\ln\frac{x}{\sqrt{y}}=\ln x-\frac{1}{2}\ln y$

B. $y=x^3+2x^2+x+1$

C. $\log_a b.\log_b a=1$

D. $\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} y=\log_a\left(xy^3\right)$

Câu 45: Cho x,y là các số thực dương, rút gọn biểu thức $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}$ ta được:

A. $K=x$ B. $K=x+1$

C. $K=2x$ D. $K=x-1$

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=-x+m\sqrt{x}-1$ có cực trị.

A. $m\le 0$ B. $m>0$ C. $m\ge 0$ D. $m<0$

Câu 47: Cho $0<a\neq 1$. Khi đó giá trị biểu thức $\log_{\sqrt{a}} a^5$ bằng:

A. $\frac{5}{2}$ B. 10 C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{10}$

Câu 48: Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-3x^2+1$ trên đoạn $\left[-2;4\right]$ là:

A. -18 B. -22 C. 14 D. -2

Câu 49: Khi sản xuất vỏ lon sữa hình trụ, nhà sản xuất luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức diện tích toàn phần của vỏ lon hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích của lon sữa bằng $1\ dm^3$ thì nhà sản xuất cần phải thiết kế hình trụ có bán kính đáy R bằng bao nhiêu để chi phí nguyên liệu thấp nhất?

A. $\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}(dm)$ B. $\sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}(dm)$

C. $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}(dm)$ D. $\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}(dm)$

Câu 50: Tìm họ nguyên hàm $\int(3x-1)^5dx$.

A. $-\frac{(3x-1)^6}{6}+C$ B. $-\frac{(3x-1)^6}{18}+C$

C. $\frac{(3x-1)^6}{6}+C$ D. $\frac{1}{18}(3x-1)^6+C$

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 2

(THPT Đông Sơn - Thanh Hóa)

Câu 1: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+(m-4)x-7$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là:

A. $\varnothing$ B. $\{0\}$ C. $\{1\}$ D. $\{2\}$

Câu 2: Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và đường chéo của mặt bên bằng $4a$.

A. $12a^3$ B. $6\sqrt{3}a^3$ C. $2\sqrt{3}a^3$ D. $4a^3$

Câu 3: Cắt một hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có chu vi bằng $40cm$. Tìm thể tích của khối trụ đó.

A. $1000\pi cm^3$ B. $\frac{250\pi}{3}cm^3$

C. $250\pi cm^3$ D. $16000cm^3$

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ B. $m\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$

C. $-2<m<2$ D. $-2\le m\le 2$

Câu 5: Tính tích phân $I=\int_1^5\frac{dx}{x.\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị $a^2+ab+3b^2$ là:

A. 4 B. 1 C. 0 D. 5

Câu 6: Tính diện tích toàn phần của hình bát diện đều có cạnh bằng $\sqrt[4]{3}$.

A. 3 B. 6 C. $3\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

Câu 7: Biết $a=\frac{\log_2(\log_2 10)}{\log_2 10}$. Giá trị của 10^a là:

A. 1 B. $\log_2 10$ C. 4 D. 2

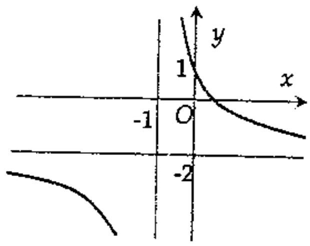
Câu 8: Phương trình $\log_2(x-3)+\log_2(x-1)=3$ có nghiệm là:

A. $x=11$ B. $x=9$ C. $x=7$ D. $x=5$

Câu 9: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-4x$ và trục Ox là:

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 10: Đồ thị hình bên dưới là của hàm số:



A. $y=\frac{3-2x}{x+1}$ B. $y=\frac{1-2x}{x-1}$

C. $y=\frac{1-2x}{1-x}$ D. $y=\frac{1-2x}{x+1}$

Câu 11: Giá trị m để hàm số $F(x)=mx^3+(3m+2)x^2-4x+3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+10x-4$ là:

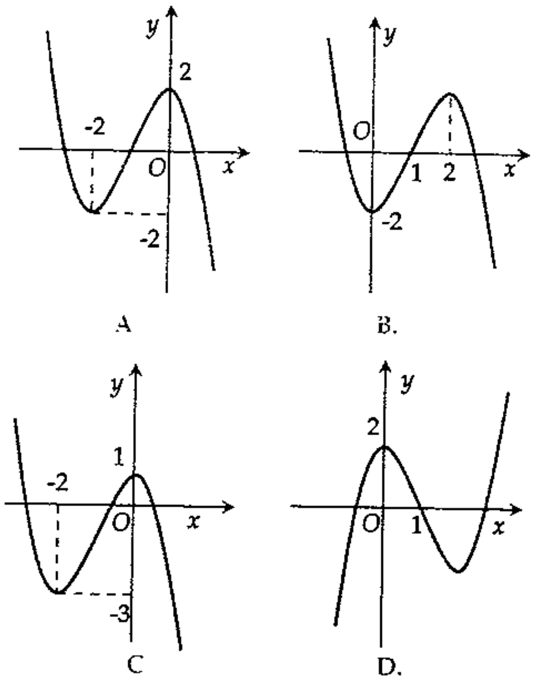
A. $m=1$ B. $m=2$ C. $m=0$ D. $m=3$

Câu 12: Bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x-\frac{3}{4}\right)\le 2-\log_2 5$ có nghiệm là:

A. $x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$ B. $x\in[-2;1]$

C. $x\in[-1;2]$ D. $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$

Câu 13: Hàm số $y=-x^3-3x^2+2$ có đồ thị nào dưới đây?



Câu 14: Các nghiệm của phương trình $(\sqrt{2}-1)^x+(\sqrt{2}+1)^x-2\sqrt{2}=0$ có tổng bằng:

A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

Câu 15: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$ trên đoạn $[-3;3]$ là:

A. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=1;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-35$

B. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=1;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-10$

C. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=17;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-10$

D. $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=17;\ \min\limits_{[-3;3]} f(x)=-35$

Câu 16: Số nghiệm của phương trình $2^{2+x}-2^{2-x}=15$ là:

A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 17: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người cho thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng? Khi đó có bao nhiêu căn hộ cho thuê?

A. Cho thuê 5 căn hộ với giá mỗi căn hộ là 2.250.000 đồng.

B. Cho thuê 50 căn hộ với giá mỗi căn hộ là 2.000.000 đồng.

C. Cho thuê 45 căn hộ với giá mỗi căn hộ là 2.250.000 đồng.

D. Cho thuê 40 căn hộ với giá mỗi căn hộ là 2.250.000 đồng.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tâm đối xứng là điểm nào dưới đây?

A. $(1;2)$ B. $(-1;1)$ C. $(2;1)$ D. $(1;-1)$

Câu 19: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dx.$$

A. $\dfrac{x^3}{3}+3\ln x-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

B. $-\dfrac{x^3}{3}+3\ln|x|-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

C. $\dfrac{x^3}{3}+3\ln|x|+\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

D. $\dfrac{x^3}{3}-3\ln|x|-\dfrac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$

Câu 20: Giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$ là:

A. 1 B. 0 C. –1 D. 4

Câu 21: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$ là:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 22: Tính $K=\int\limits_1^2(2x-1)\ln x dx$.

A. $K=2\ln2-\dfrac{1}{2}$ B. $K=\dfrac{1}{2}$

C. $K=2\ln2+\dfrac{1}{2}$ D. $K=2\ln2$

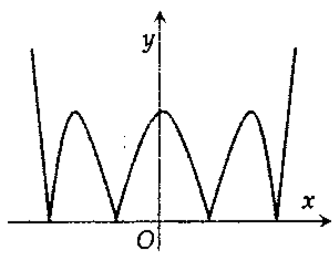
Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{2x+c}$ có tiệm cận ngang $y=2$ và tiệm cận đứng $x=1$ thì $a+c$ bằng:

A. 1 B. 2 C. 4 D. 6

Câu 24: Tổng diện tích các mặt của một khối lập phương là $600\,cm^2$. Tính thể tích của khối đó.

A. $1000cm^3$ B. $250cm^3$ C. $750cm^3$ D. $1250cm^3$

Câu 25: Cho hàm số có đồ thi như hình bên.



Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào sai?

A. Hàm số có 4 điểm cực tiểu

B. Hàm số đồng biến trên 4 khoảng

C. Hàm số nghịch biến trên 4 khoảng

D. Hàm số có 5 điểm cực đại

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\log x}{\sqrt{x-x^2+2}}$ là:

A. $D=(2;+\infty)$ B. $D=(-1;2)\backslash\{0\}$

C. $D=(-1;2)$ D. $D=(0;2)$

Câu 27: Đồ thị hàm số nào sau đây có 1 đường tiệm cận.

A. $y=\sqrt{x^2-4x+10}+x$ B. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

C. $y=\dfrac{-1}{x}$ D. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-4}$

Câu 28: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$ và $AC=a\sqrt{3}$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l=a$ B. $l=a\sqrt{2}$

C. $l=a\sqrt{3}$ D. $l=2a$

Câu 29: Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$, đồng biến trên $(1;3)$

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{-1}{3}\right);(1;+\infty)$ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{3};1\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1);(3;+\infty)$ đồng biến trên $(1;3)$

D. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\frac{-1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$ đồng biến trên $\left(-\frac{1}{3};1\right)$

Câu 30: Hai khối chóp lần lượt có diện tích đáy, chiều cao và thể tích là B_1,h_1,V_1 và B_2,h_2,V_2. Biết $B_1=B_2$ và $h_1=2h_2$. Khi đó $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. 2 B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 3

Câu 31: Cho đồ thị:

$$(C): y=x^3-3mx^2+(3m-1)x+6m.$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3=20$.

A. $m=\frac{5\pm\sqrt{5}}{3}$ B. $m=\frac{2\pm\sqrt{22}}{3}$

C. $m=\frac{2\pm\sqrt{3}}{3}$ D. $m=\frac{3\pm\sqrt{33}}{3}$

Câu 32: Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là:

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. 0

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2017}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $1\le m\le 2017$

B. $m\le 0$ hoặc $1\le m\le 2017$

C. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2017$

D. $m\ge 0$

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' cách đều các điểm A, B, C. Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt lăng trụ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu 35: Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x-(2m+1)$ có cực đại, cực tiểu.

A. $m\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$

B. $m\in(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)$

C. $m\in(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

D. $m\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

Câu 36: Biết rằng bất phương trình $\frac{1}{\log_4(x^2+3x)}<\frac{1}{\log_2(3x-1)}$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Khi đó giá trị của a^2+b^2 bằng:

A. $\frac{65}{64}$ B. $\frac{10}{9}$ C. $\frac{265}{576}$ D. $\frac{13}{9}$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=a$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{3\pi a^2}{7}$ B. $\frac{7\pi a^2}{12}$ C. $\frac{7\pi a^2}{3}$ D. $\frac{\pi a^2}{7}$

Câu 38: Cho các hàm số $y=x^4-2x^2-3$, $y=-2x^4+x^2-3$, $y=\left|x^2-1\right|-4$, $y=x^2-2|x|-3$.

Hỏi có bao nhiêu hàm số có bảng biến thiên dưới đây?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

A. 1 B. 3 C. 2 D. 4

Câu 39: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-4$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

A. $m>\frac{12}{7}$ B. $m<\frac{12}{7}$ C. $m\le\frac{12}{7}$ D. $m\ge\frac{12}{7}$

Câu 40: Gọi M là điểm thuộc đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x-2}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=2\sqrt{10}$. Khi đó tổng các hoành độ của tất cả các điểm M như trên bằng bao nhiêu?

A. 5 B. 8 C. 6 D. 7

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $\log_2(-x^2-3x-m+10)=3$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

A. $m<4$ B. $m<2$ C. $m>2$ D. $m>4$

Câu 42: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=-2x^3+x^2+x+5$ và đồ thị (C') của hàm số $y=x^2-x+5$ bằng:

A. 3 B. 1 C. 0 D. 2

Câu 43: Cho $x^2-xy+y^2=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+xy+y^2$ bằng:

A. 2 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 44: Đáy của một khối hộp đứng là một hình thoi cạnh a, góc nhọn bằng $60°$. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của khối hộp. Tính thể tích của khối hộp đó.

A. $\frac{3a^3}{2}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $BC=2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$ B. $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$

Câu 46: Cho hình hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=\frac{3}{4}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

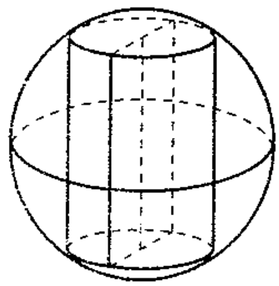
A. $\frac{3\sqrt{39}}{32}$ B. $\frac{\sqrt{39}}{96}$ C. $\frac{\sqrt{39}}{32}$ D. $\frac{\sqrt{39}}{16}$

Câu 47: Để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh một tam giác vuông cân thì giá trị của m là:

A. $m=-1$ B. $m=0$

C. $m=0$ hoặc $m=1$ D. $m=1$

Câu 48: Một hình trụ có chiều cao bằng 6 nội tiếp trong hình cầu có bán kính bằng 5. Tính thể tích của khối trụ.



A. 96π B. 36π C. 192π D. 48π

Câu 49: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.

A. $m\in[-3;1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};1]$

B. $m\in[-3;-1-\sqrt{3})\cup(-1-\sqrt{3};1]$

C. $m\in[-3;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};1]$

D. $m\in(-3;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};1)$

Câu 50: Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{A}}A(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3574 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 63%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

A. 3674 năm B. 3833 năm

C. 3656 năm D. 3754 năm

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 3

(THPT Anh Sơn)

Câu 1: Khối đa diện nào sau đây có công thức tính thể tích là $V=\frac{1}{3}B.h$ (với B là diện tích đáy; h là chiều cao).

A. Khối lăng trụ. B. Khối chóp.

C. Khối hộp chữ nhật. D. Khối lập phương.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$, mặt phẳng $(P): 4x+3y+m=0$. Tìm các giá trị của m để (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn?

A. $m<11$.

B. $m<-19$ hoặc $m>11$.

C. $-19<m<11$.

D. $m=11$ hoặc $m=-19$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=a$, biết $SA=2a$ và $SA\perp(ABC)$, gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB và SC. Tính bán kính R của mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K.

A. $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $R=a$.

C. $R=a\sqrt{2}$. D. $R=\frac{a}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số đa thức bậc ba: $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có giá trị cực tiểu bằng 2, có giá trị cực đại bằng 6. Tìm các giá trị của m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

A. $2<m<6$. B. $\left[\begin{array}{l} m\le 2 \\ m\ge 6 \end{array}\right.$.

C. $2\le m\le 6$. D. $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Câu 5: Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ đều và $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc 60^0. Thể tích của hình trụ là:

A. $V=\frac{2\pi R^3\sqrt{7}}{7}$. B. $V=\frac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7}$.

C. $V=\frac{\pi R^3\sqrt{7}}{7}$. D. $V=\frac{4\pi R^3\sqrt{7}}{7}$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{x^2+x+1}$.

A. $y'=(2x+1)e^{x^2+x+1}$. B. $y'=e^{x^2+x}$.

C. $y'=e^{x^2+x+1}$. D. $y'=e^{2x+1}$.

Câu 7: Bất phương trình:

$\log_{\frac{2}{3}}(3x-2)<\log_{\frac{2}{3}}(6-5x)$ có tập nghiệm:

A. $\left(1;\frac{6}{5}\right)$. B. $(-\infty;1)$.

C. $\left(\frac{2}{3};1\right)$. D. $(1;+\infty)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-8}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-8}{-1}$. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u}=(1;-2;1)$.

B. $\vec{u}=(-1;-2;1)$.

C. Đáp án A, B, D đều sai.

D. $\vec{u}=(8;5;8)$.

Câu 9: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f_1(x); y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a; x=b$ được tính theo công thức nào sau đây?

A. $S=\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx$.

B. $S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx$.

C. $S=\left|\int_a^b f_1(x)-f_2(x)dx\right|$.

D. $S=\int_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx$.

Câu 10: Với $f(x); g(x)$ là hai hàm số liên tục trên tập D và $k\neq 0$ thì mệnh đề nào sau đây là sai:

A. $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx.\int g(x)dx.$

B. $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx.$

C. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

D. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=25.$ Tọa độ tâm I và bán kính R của (S) là:

A. $I(-1;2;0); R=5.$　　B. $I(1;2;0); R=25.$

C. $I(1;-2;0); R=25.$　　D. $I(1;-2;0); R=5.$

Câu 12: Tìm m để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8].$

A. $3 \le m \le 6.$　　B. $6 \le m \le 9.$

C. $2 \le m \le 6.$　　D. $2 \le m \le 3.$

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1.$ Giá trị lớn nhất của $|z|$ là:

A. $4\sqrt{2}-2.$　　B. $3\sqrt{2}-1.$

C. $2\sqrt{2}+1.$　　D. $\sqrt{2}+2.$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm bán kính R của mặt cầu (S) biết rằng mặt phẳng Oxy và mặt phẳng $(P): z=2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính lần lượt bằng 2 và 8.

A. $R=16.$　　B. $R=2\sqrt{17}.$

C. $R=6.$　　D. $R=2\sqrt{65}.$

Câu 15: Cho số phức $z=(2-3i)(3+i).$ Phần ảo của số z là:

A. 9.　　B. 7i.　　C. -7.　　D. -7i.

Câu 16: Tìm các mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số $y=\log_2 x$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty).$

B. Hàm số $y=\log_{\frac{2}{3}} x$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty).$

C. Hàm số $y=2^x$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty).$

D. Hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty).$

Câu 17: Phát biểu nào sau đây là **đúng**?

A. $\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx.$

B. $\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x dx.$

C. $\int_0^1 x^2e^x dx = 2xe^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx.$

D. $\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx.$

Câu 18: Biết $I=\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = a+\ln b.$ Với a, b là các số nguyên. Chọn khẳng định đúng:

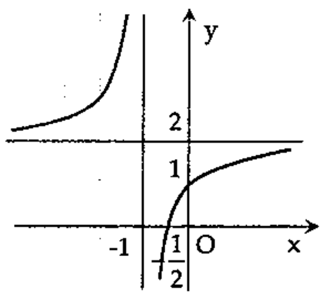
A. $a+2=b.$　　B. $a-b=1.$

C. $2a+b=5.$　　D. $a+b=3.$

Câu 19: Đáy của hình chóp $S.ABCD$ là một hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài là a. Thể tích của khối tứ diện $S.BCD$ bằng:

A. $\frac{a^3}{6}.$　　B. $\frac{a^3}{8}.$　　C. $\frac{a^3}{4}.$　　D. $\frac{a^3}{3}.$

Câu 20: Đồ thị bên là của hàm số nào?



A. $y=\frac{x+2}{x+1}.$　　B. $y=\frac{2x+1}{x+1}.$

C. $y=\frac{x+3}{1-x}.$　　D. $y=\frac{2x-1}{x+1}.$

Câu 21: Cho khối nón tròn xoay có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đường tròn đáy bằng R. Diện tích toàn phần của khối nón là:

A. $S_{tp}=\pi R(2l+R).$　　B. $S_{tp}=\pi R(l+R).$

C. $S_{tp}=2\pi R(l+R).$　　D. $S_{tp}=\pi R(l+2R).$

Câu 22: Tìm các nghiệm của phương trình $\log_2(x-3)=6$.

A. $x=67$. B. $x=61$.

C. $x=15$. D. $x=64$.

Câu 23: Cho các số thực dương a, b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a \frac{\sqrt{a}}{b^2}=\log_a b$.

B. $\log_a \frac{\sqrt{a}}{b^2}=\frac{1}{2}-2\log_a b$.

C. $\log_a \frac{\sqrt{a}}{b^2}=2-\frac{1}{2}\log_a b$.

D. $\log_a \frac{\sqrt{a}}{b^2}=\frac{1}{2}\log_a \frac{1}{b}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;0;3);B(0;3;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

A. $M(3;3;3)$. B. $M\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$.

C. $M\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. D. $M\left(\sqrt{3};\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Câu 25: Tìm điểm biểu diễn hình học của số phức $z=8-9i$.

A. $M(8;-9i)$. B. $M(-9;8)$.

C. $M(8;-9)$. D. $M(8;9)$.

Câu 26: Để hàm số $y=x^3+6x^2+3(m+2)x-m-6$ có cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho $x_1<-1<x_2$ thì giá trị m là:

A. $m<2$. B. $m>-1$.

C. $m<1$. D. $m>1$.

Câu 27: Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2|+|z+2|=10$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trình là:

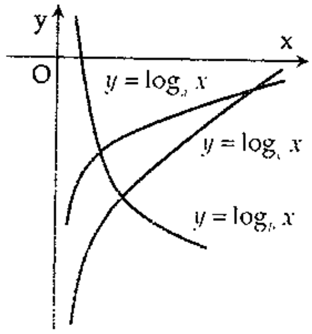
A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{21}=1$.

B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

C. $(x-2)^2+(y+2)^2=10$.

D. $2x^2+5y^2+2x-4y-10=0$.

Câu 28: Cho 3 số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y=\log_a x; y=\log_b x; y=\log_c x$. Chọn khẳng định đúng?



A. $a<c<b$. B. $b<a<c$.

C. $a<b<c$. D. $c<a<b$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Khi đó, tỉ số $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'BC}}=?$

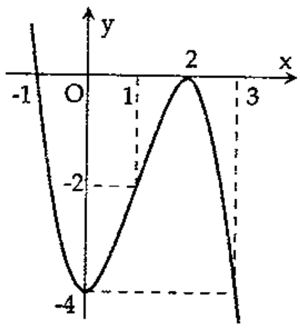
A. $\frac{1}{4}$. B. 4. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 30: Một hình trụ có thể tích bằng $16dm^3$. Hỏi chiều cao h của hình trụ bằng bao nhiêu, biết bán kính đáy bằng $2dm^3$.

A. $h=\frac{8}{\pi}dm$. B. $h=\frac{1}{\pi}dm$.

C. $h=\frac{2}{\pi}dm$. D. $h=\frac{4}{\pi}dm$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?



A. $x=-4$. B. $x=-1$.

C. $x=2$. D. $x=0$.

Câu 32: Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2;5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha):4x-3y+2z+5=0$.

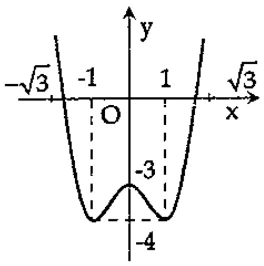
A. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{2}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{2}$.

D. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{2}$.

Câu 33: Hàm số $y=ax^4+bx^2+c;(a\neq 0)$ có đồ thị hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a<0;b>0;c<0$. B. $a>0;b<0;c<0$.

C. $a>0;b<0;c>0$. D. $a>0;b>0;c>0$.

Câu 34: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+(m+1)x+4m$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi:

A. $-10\leq m\leq 2$. B. $m\leq -10$.

C. $m\geq 2$. D. $-10<m<2$.

Câu 35: Số giao điểm của hai đường cong sau $y=x^3-x^2-2x+3$ và $y=x^2-x+1$ là:

A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 36: Cho x, y là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $\left(x^n\right)^m=\left(x^m\right)^n$. B. $(xy)^n=x^n.y^n$.

C. $x^m.x^n=x^{m+n}$. D. $x^{m^n}=\left(x^m\right)^2$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+1=0$. Vecto nào sau đây là vecto pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(1;2;0)$. B. $\vec{n}=(1;-2;1)$.

C. $\vec{n}=(1;2;1)$. D. $\vec{n}=(1;-2;0)$.

Câu 38: Cho số phức $z=a+bi$ thỏa mãn: $2iz+3\bar{z}=1+5i$. Tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b=-4$. B. $\frac{a}{b}=\frac{13}{7}$.

C. $a-b=6$. D. $a.b<0$.

Câu 39: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê công nhân để xây hồ là 500.000 đồng/m^2. Khi đó, kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất là:

A. Chiều dài 20m, chiều rộng 10m, chiều cao $\frac{5}{6}m$.

B. Chiều dài 30m, chiều rộng 15m, chiều cao $\frac{10}{27}m$.

C. Một đáp án khác.

D. Chiều dài 10m, chiều rộng 5, chiều cao $\frac{10}{3}m$.

Câu 40: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x)=\sin 6x.$$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\cos 6x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}\cos 6x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos 6x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=6\cos 6x+C$.

Câu 41: Một người gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép như sau: Mỗi tháng người này tiết kiệm một số tiền cố định là X đồng rồi gửi vào ngân hàng theo kì hạn một tháng với lãi suất 0,8%/tháng. Tìm X để sau ba năm kể từ ngày gửi đầu tiên người đó có được tổng cộng số tiền là 500 triệu đồng.

A. $X=\frac{4.10^6}{1,008^{37}-1}$. B. $X=\frac{4.10^6}{1,008\left(1,008^{36}-1\right)}$.

C. $X=\frac{4.10^6}{1-1,008^{37}}$. D. $X=\frac{4.10^6}{1,008^{36}-1}$.

Câu 42: Cho $a>0$ và $a\neq 1, b>0, b\neq 1$, x và y là hai số dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\log_a\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_a x}$.

B. $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$.

C. $\log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_b y}$.

D. $\log_b x = \log_b a.\log_a x$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2), B(-3;1;0)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $2x+y-z-4=0$. B. $2x+y+z-1=0$.

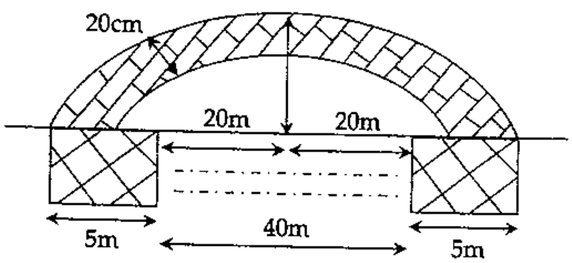
C. $2x+y+z-7=0$. D. $4x+y+z-1=0$.

Câu 44: Hàm số $y=-x^3+6x^2-9x+4$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;3)$. B. $(3;+\infty)$.

C. $(-\infty;3)$. D. $(1;+\infty)$.

Câu 45: Huyện Anh Sơn dự định xây cây cầu bắc ngang con Sông Lam dài 500m, nối xã Lĩnh Sơn và Tào Sơn. Biết rằng người ta xây dựng cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau 40m, biết 2 bên đầu cầu và giữa nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng 5m. Bề dày nhịp cầu không đổi là 20cm. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu (bỏ qua diện tích cốt sắt trong mỗi nhịp cầu)



A. $20m^3$. B. $50m^3$. C. $40m^3$. D. $100m^3$.

Câu 46: Đường thẳng nào sau đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$?

A. $x=-1$. B. $x=1$.

C. $y=1$. D. $y=1$ và $x=1$.

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(2-i)(1+i)+\bar{z}=4-2i$. Tính môđun của z.

A. $|z|=\sqrt{10}$. B. $|z|=\sqrt{50}$.

C. $|z|=\dfrac{\sqrt{370}}{5}$. D. $|z|=\sqrt{12}$.

Câu 48: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ trên đoạn $[1;2]$ là một số dương?

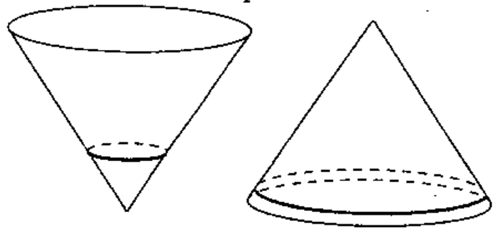
A. $m\le -2$. B. $-2<m<\dfrac{1}{2}$.

C. $m<-2$ hoặc $m>\dfrac{1}{2}$. D. $m\ge\dfrac{1}{2}$.

Câu 49: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=x^2-2x$ và $y=-x^2+x$ có kết quả là:

A. $\dfrac{10}{3}$. B. 12. C. 6. D. $\dfrac{9}{8}$.

Câu 50: Một cái phễu có hình dạng nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng $\dfrac{1}{3}$ chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15cm.



A. 0,333 cm. B. 0,166 cm.

C. 0,188 cm. D. 0,3 cm.

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 4
(THPT Đông Thụy Anh)

Câu 1: Cho $a>0;b>0$ và biểu thức $T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Khi đó:

A. $T=1$. B. $T=\frac{1}{3}$. C. $T=\frac{2}{3}$. D. $T=\frac{1}{2}$.

Câu 2: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và $y=0$. Tính thể tích khối tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng (H) khi quay nó quanh Ox.

A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{17\pi}{15}$. C. $\frac{19\pi}{15}$. D. $\frac{18\pi}{15}$.

Câu 3: Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{2x-4}{x+1}$ và hai trục tọa độ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo bởi hình phẳng (H) khi quay quanh trục hoành.

A. $(30-12\ln 3)\pi$. B. $(32-11\ln 3)\pi$.

C. $(32+12\ln 3)\pi$. D. $(32-24\ln 3)\pi$.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln(x^2+x-2)$ trên đoạn $[3;6]$ là:

A. $\ln 40$. B. $\ln 20$. C. $-\frac{9}{4}$. D. $\ln 10$.

Câu 5: Hàm số $y=x^2\ln x$ đạt cực trị tại điểm:

A. $x=\frac{1}{e}$. B. $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$. C. $x=\sqrt{e}$. D. $x=e$.

Câu 6: Hàm số $y=(x^2-2x+2)e^x$ có đạo hàm là:

A. $y'=-2xe^x$. B. Kết quả khác.

C. $y'=(2x-2)e^x$. D. $y'=x^2e^x$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\ge(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là:

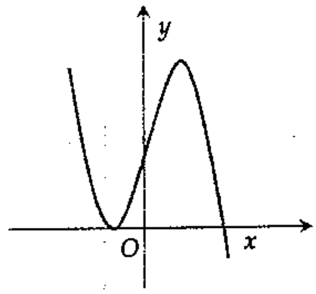
A. $S=(-\infty;-2]\cup(-1;1]$.

B. $S=[-2;-1)\cup[1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-3]\cup(-1;2]$.

D. $S=[-2;-1)\cup[2;+\infty)$.

Câu 8: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^3+3x+2$. B. $y=-x^3+3x-2$.

C. $y=x^3-3x+2$. D. $y=x^3-3x+2$.

Câu 9: Hai điểm A,B nằm trên mặt cầu có phương trình: $(x-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$. Biết rằng AB song song với OI, trong đó O là gốc tọa độ và I là tâm của mặt cầu. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của AB.

A. $2x-y-z-6=0$. B. $2x-y-z-12=0$.

C. $2x+y+z+4=0$. D. $2x+y+z-4=0$.

Câu 10: Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh bằng a và thể tích là $V=\frac{a^3}{\sqrt{6}}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy của khối chóp.

A. $45°$. B. $30°$. C. $60°$. D. $75°$.

Câu 11: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{1}$ trên mặt phẳng (Oxy).

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=-2+3t\\z=0\end{cases}$. B. $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+3t\\z=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-3t\\z=0\end{cases}$. D. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-3t\\z=0\end{cases}$.

Câu 12: Hàm số $y=x-\sqrt{x}+2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. B. $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

C. $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. D. $(0;4)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z+2=0.$$

Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu.

A. $I(-1;2;-1)$ và $R=2$.

B. $I(-1;2;-1)$ và $R=4$.

C. $I(1;-2;1)$ và $R=4$.

D. $I(1;-2;1)$ và $R=2$.

Câu 14: Tìm m để đường thẳng $y=-1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $\begin{cases} m<-1 \\ m\neq 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}<m\leq 1 \\ m\neq 0 \end{cases}$,

C. $-\dfrac{1}{3}<m<1$.

D. $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}<m<1 \\ m\neq 0 \end{cases}$.

Câu 15: Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. $\log_{\frac{2}{3}}a<\log_{\frac{2}{3}}b\Leftrightarrow a>b>0$.

B. $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$.

C. $\log_3 a>\log_3 b\Leftrightarrow 0<a<b$.

D. $\log x<0\Leftrightarrow 0<x<1$.

Câu 16: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}$.

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 17: Một hình nón có thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua trục là tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối nón?

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. B. $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $\dfrac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$. D. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối cầu nội tiếp và ngoại tiếp lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

B. $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{3}$.

C. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\dfrac{V_1}{V_2}=3\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB=a, AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm H của BC. Góc giữa AA' và (ABC) bằng 45^0. Thể tích khối lăng trụ là:

A. $\dfrac{a^3}{2}$. B. $\dfrac{3a^3}{2}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+6\ (m>0)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ bằng 2 khi:

A. $m=1$.

B. $m=2$.

C. $m>\dfrac{3}{2}$.

D. $m=\dfrac{31}{27}$.

Câu 21: Bạn An muốn xây một bể chứa hình lăng trụ tứ giác đều (không có nắp đậy, đáy của lăng trụ là đáy của bể) với dung tích là 1000 lít. Tìm chiều cao h của lăng trụ sao cho tổng diện tích các mặt của bể (trừ đi nắp đậy) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $h=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(dm)$.

B. $h=\sqrt[3]{2}(dm)$.

C. $h=1(dm)$.

D. $h=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(m)$.

Câu 22: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. 5. B. 20. C. 4. D. 22.

Câu 23: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 2-2$.

B. $F(0)=-\dfrac{2}{3}\ln 2+2$.

C. $F(0)=-\dfrac{2}{3}\ln 2-2$.

D. $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 2+2$.

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+\dfrac{3}{x}$ trên $[2;3]$.

A. $m=\dfrac{15}{2}$.

B. $m=28$.

C. $m=\dfrac{19}{2}$.

D. $m=4$.

Câu 25: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\sin 3x+m\sin x$ đạt cực tiểu tại $x=\frac{\pi}{3}$.

A. $m=6$. B. $m=-6$.

C. $m=5$. D. không có m.

Câu 26: Cho $\int_1^3 f(x)dx=6$.

Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(2\cos x+1)dx$.

A. $I=3$. B. $I=12$. C. $I=1$. D. $I=6$.

Câu 27: Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^{2x+3}-33.2^x+4=0$, khi đó tích của x_1 và x_2 là:

A. 6 B. -6. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Tính các giá trị cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số bằng?

A. -6. B. -3. C. 0 D. 3

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{245}{108}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{64}{27}$. D. $\frac{75}{32}$.

Câu 30: Cho $a<b<c$, $\int_a^b f(x)dx=5$, $\int_c^b f(x)dx=3$

Tính $\int_a^c f(x)dx$.

A. $\int_a^c f(x)dx=-2$. B. $\int_a^c f(x)dx=8$.

C. $\int_a^c f(x)dx=0$. D. $\int_a^c f(x)dx=2$.

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ, gọi A,B,C,D lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức $z_1=2+3i_1$, $z_2=-i$, $z_3=5-i$, $z_4=3+3i$. Hỏi tứ giác $ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang cân B. Hình chữ nhật

C. Hình bình hành D. Hình vuông.

Câu 32: Tìm m để phương trình $4^{2+x}+4^{2-x}=(m+1)(2^{2+x}-2^{2-x})+2m$ có nghiệm $x\in[0;1]$.

A. $\sqrt{11}-2\le m\le 4$. B. $\sqrt{11}-2\le m\le \frac{11}{8}$.

C. $m\ge 4$. D. $\frac{11}{8}\le m\le 4$.

Câu 33: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

A. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\ln x+C$.

B. $\int f(x)dx=\ln x+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

D. $\int f(x)dx=-\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Câu 34: Tìm m để hàm số $y=\frac{x-1}{x+m}$ nghịch biến trong khoảng $(2;+\infty)$.

A. $m\le -1$. B. $m>-1$.

C. $m<-1$. D. $m\in[-2;-1)$.

Câu 35: Tìm m để phương trình $x^3-12x+m-2=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $-4<m<4$. B. $-18<m<14$.

C. $-14<m<18$. D. $-16<m<16$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$ cho $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ và $B(0;1;-4)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABO là:

A. $(-1;-1;-2)$. B. $(1;-1;-2)$.

C. $\left(1;-\frac{1}{3};-2\right)$. D. $\left(1;-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 37: Tập nghiệm của bất phương trình $4x^2+x.2^{x^2+1}+3.2^{x^2}>x^2.2^{x^2}+8x+12$ là:

A. $S=(-\sqrt{2};-1)\cup(\sqrt{3};3)$.

B. $S=(-1;\sqrt{2})\cup(3;+\infty)$.

C. $S=(-\sqrt{2};-1)\cup(\sqrt{2};3)$.

D. $S=(-\infty;-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};3)$.

Câu 38: Bát diện đều thuộc loại nào sau đây:

A. $\{3;4\}$. B. $\{4;3\}$. C. $\{5;3\}$. D. $\{3;5\}$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x+2y+x+2017=0$ có phương trình là:

A. $\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{3}$.

B. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{3-z}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{3-z}{1}$.

D. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{1}$.

Câu 40: Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $\frac{7\pi a^2}{3}$. B. $\frac{7\pi a^3}{3}$. C. $\frac{7a^3}{3}$. D. $\frac{7a^2}{3}$.

Câu 41: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+5=0$, trong đó z_1 có phần ảo dương. Tìm số phức liên hợp của số phức z_1+2z_2+2.

A. $1+6i$. B. $-1-2i$. C. $-1+2i$. D. 0.

Câu 42: Gọi T là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|\overline{z}-2-3i|$. Gọi a là môđun nhỏ nhất của z với $z \in T$. Khi đó giá trị của a là:

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. $\sqrt{13}$.

Câu 43: Hàm số $y=x+\sqrt{1-x^2}$ có tập giá trị là:

A. $[0;1]$. B. $[1;\sqrt{2}]$.

C. $[-1;\sqrt{2}]$. D. $[-1;1]$.

Câu 44: Tìm số phức $z \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{2}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=1$.

A. $3+i$. B. $2i$. C. 3. D. $2-i$.

Câu 45: Cho $a=\log 3; b=\log 5$. Khi đó $\log_{15} 8$ bằng:

A. $\frac{3(1-b)}{a-b}$. B. $\frac{3(1-b)}{a+b}$.

C. $\frac{3(1-a)}{a+b}$. D. $\frac{3(1+b)}{a+b}$.

Câu 46: Cho số phức $z=2-3i$. Tìm môđun của số phức $w=2z+(1+i)\overline{z}$.

A. $|w|=2$. B. $|w|=2\sqrt{2}$.

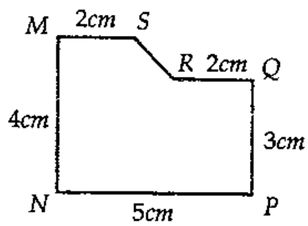
C. $|w|=4$. D. $|w|=\sqrt{10}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$ và $d_1: \frac{3-x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$. Xét vị trí tương đối giữa d và d_1.

A. Trùng nhau. B. Cắt nhau.

C. Song song. D. Chéo nhau.

Câu 48: Cho hình phẳng (H) như hình vẽ. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình phẳng (H) quanh cạnh MN.



A. $V=\frac{94\pi}{3}cm^3$. B. $V=94\pi cm^3$.

C. $V=75\pi cm^3$. D. $V=\frac{244\pi}{3}cm^3$.

Câu 49: Góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$ bằng:

A. 30°. B. 60°. C. 45°. D. 90°.

Câu 50: Cho $\int_1^2 \frac{x^2}{x+1}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$. Tính $S=2a-b+c$.

A. $S=3$. B. $S=1$. C. $S=4$. D. $S=2$.

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 5
(THPT HOẰNG HÓA 4 – THANH HÓA)

Câu 1: Xét tích phân $\int_3^8 \frac{xdx}{1+\sqrt{x+1}}$. Nếu đặt $t=1+\sqrt{x+1}$ thì khẳng định nào trong các khẳng định sau là **đúng**?

A. $I=2\int_3^4(t^2-3t+2)dt$. B. $I=\int_8^3(t+t^2)dt$.

C. $I=\int_4^3(t-t^2)dt$. D. $I=2\int_3^8(t^2-3t+2)dt$.

Câu 2: Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2x^2+4x+5}{x^2+1}$, tính $M+m$.

A. 4. B. 1. C. 3. D. 7.

Câu 3: Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây?

A. Số phức $z=\sqrt{2}i$ là số thuần ảo.

B. Số 0 không phải là số phức.

C. Số phức $z=5-3i$ có phần thực là 5, phần ảo là –3.

D. Điểm $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$.

Câu 4: Cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2$ (1). Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp, đồng thời M cũng là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài.

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 5: Cho bất phương trình:

$$\log_{\frac{2}{3}}|x+1|+\log_{1,5}(x+2)>0(*).$$

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ |x+1|>x+2\end{cases}$. B. $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\ x+2>0\\ |x+1|>x+2\end{cases}$.

C. $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ |x+1|<x+2\end{cases}$. D. $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\ |x+1|<x+2\end{cases}$.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3+\frac{3}{x}$ trên đoạn $[2;3]$.

A. $\min\limits_{[2;3]} y=\frac{15}{2}$. B. $\min\limits_{[2;3]} y=\frac{19}{2}$.

C. $\min\limits_{[2;3]} y=28$. D. $\min\limits_{[2;3]} y=4$.

Câu 7: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=x^3+x^2-x+2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2-x+5$ cắt nhau tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ điểm đó. Tìm y_0.

A. $y_0=3$. B. $y_0=4$.

C. $y_0=-1$. D. $y_0=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(1;1;1), N(2;0;-1)$ và $P(-1;2;1)$. Tìm tọa độ của điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

A. $(2;-3;-3)$. B. $(2;3;3)$.

C. $(2;-3;3)$. D. $(-2;3;3)$.

Câu 9: Cho khối hộp đứng có đáy là một hình thoi cạnh a, góc nhọn 60^0. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của khối hộp. Tính thể tích của khối hộp đó.

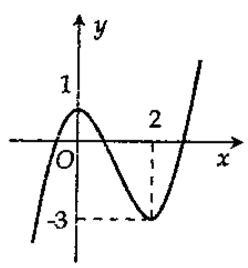
A. $\frac{3a^3}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;4)$ và cắt các trục độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại các điểm A, B, C thỏa mãn $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm nào dưới đây?

A. $T(-3;5;2)$. B. $T(2;-2;6)$.

C. $T(1;-2;4)$. D. $T(-1;1;5)$.

Câu 11: Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?



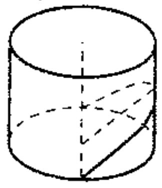
A. $y=-\frac{x^3}{3}+x^2+1$. B. $y=x^3-3x^2+1$.

C. $y=x^3+3x^2+1$. D. $y=-x^3-3x^2+1$.

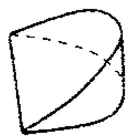
Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\cos x+mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<1$. B. $m>1$. C. $m\geq 1$. D. $m\leq 1$.

Câu 13: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính $30cm$, người ta cắt khúc gỗ theo một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45^0 để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây).



Hình 1



Hình 2

Kí hiệu V là thể tích của hình nêm (Hình 2). Tính V.

A. $V=1350\left(cm^3\right)$. B. $V=2250\left(cm^3\right)$.

C. $V=\frac{225\pi}{4}\left(cm^3\right)$. D. $V=1250\left(cm^3\right)$.

Câu 14: Tích tính phân $I=\int_0^{100}\frac{4^x-1}{2^x+1}dx$.

A. $I=\frac{2^{100}-100.\ln 2-1}{\ln 2}$. B. $I=\frac{16^{25}}{\ln 2}$.

C. $I=\frac{2^{101}-1}{2.\ln 2}$. D. $I=\frac{2^{100}+1}{\ln 2}$.

Câu 15: Cho khối chóp tứ giác đều cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 45^0. Tính thể tích của khối chóp đó.

A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $a^3\sqrt{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16: Một đại lý xăng dầu cần làm một cái bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $16\pi\left(m^3\right)$. Tìm bán kính đáy r của hình trụ sao cho hình trụ được làm ra ít tốn nguyên vật liệu nhất.

A. $2,4m$. B. $2m$. C. $0,8m$. D. $1,2m$.

Câu 17: Tìm tất cả các đường tiệm cận ngang và đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{3x+2}{|x|+1}$.

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=3$ và không có tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có tất cả hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-3; y=3$ và không có tiệm cận đứng.

C. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1; x=1$.

D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận ngang và có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-1$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Gọi điểm thay đổi trên mặt phẳng (ABC) và N là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON=1$. Biết rằng N luôn thuộc một mặt cầu cố định. Viết phương trình mặt cầu đó.

A. $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$.

B. $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$.

C. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{49}{144}$.

D. $\left(x-\frac{36}{49}\right)^2+\left(y-\frac{18}{49}\right)^2+\left(z-\frac{12}{49}\right)^2=\frac{25}{49}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Tìm m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$.

A. $\begin{cases}-\frac{1}{4}<m<1\\ m\neq 0\end{cases}$. B. $\frac{1}{4}<m<1$.

C. $-\frac{1}{4}<m<1$. D. $\begin{cases}m\neq 0\\ m<1\end{cases}$.

Câu 20: Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t)=m_0.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ (tại thời điểm $t=0$); T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa khối lượng các chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cacbon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong một mẫu đồ cổ một lượng Cacbon và xác định được nó đã mất khoảng 25% lượng Cacbon ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó có tuổi là bao nhiêu?

A. 2387 năm. B. 2300 năm.

C. 2378 năm. D. 2400 năm.

Câu 21: Cho biết tích phân:

$$I=\int_1^e x\left(2x^2+\ln x\right)dx=\frac{a.e^4+b.e^2+c}{4}$$

với a, b, c là các ước nguyên của 4.

Tính tổng $a+b+c$.

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 22: Cho đường cong: $(C): y=\sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung và đường thẳng $y=m(m>0)$. Cho (H) quay xung quanh trục tung ta được một vật thể tròn xoay có thể tích $V=\frac{32\pi}{5}$ (đvtt). Tìm giá trị của m.

A. $m=2$. B. $m=1$.

C. $m=4$. D. $m=3$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng chứa 2 điểm $A(1;0;1)$ và $B(-1;2;2)$ và song song với trục Ox.

A. $2y-z+1=0$. B. $x+y-z=0$.

C. $y-2z+2=0$. D. $x+2z-3=0$.

Câu 24: Cắt hình nón (N) bằng một mặt phẳng đi qua trục của hình nón được thiết diện là một tam giác vuông cân có diện tích bằng $3a^2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón (N).

A. $\sqrt{2}\pi a^2$. B. $6\sqrt{2}\pi a^2$.

C. $6\pi a^2$. D. $3\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 25: Cho hình lập phương có tổng diện tích các mặt là $150cm^2$. Tính thể tích của khối lập phương đó.

A. $100cm^3$. B. $125cm^3$.

C. $75cm^3$. D. $25cm^3$.

Câu 26: Cho hàm số $y=\frac{1}{3^x}$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. $y'=\frac{1}{3^x}.\ln\frac{1}{3}$.

C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là trục hoành.

D. Toàn bộ đồ thị hàm số đã cho nằm phía trên trục hoành.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2z+3=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\vec{n}=(3;-2;1)$. B. $\vec{n}=(1;-2;0)$.

C. $\vec{n}=(1;-2;3)$. D. $\vec{n}=(2;0;-4)$.

Câu 28: Giải bất phương trình:

$$(0,4)^{x(x+1)}>(2,5)^{3-2x^2}$$

A. $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

B. Bất phương trình vô nghiệm.

C. $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

D. $x<\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ hoặc $x>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(m;-3;17); B(2;0;-1); C(-1;4;0)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại C.

A. $m=-\frac{14}{3}$. B. $m=4$.

C. $m=-\frac{11}{3}$. D. $m=1$.

Câu 30: Cho $a<b<c$; $\int_a^b f(x)dx=5$, $\int_c^b f(x)dx=2$.

Tính $\int_a^c f(x)dx$.

A. $\int_a^c f(x)dx=3$. B. $\int_a^c f(x)dx=10$.

C. $\int_a^c f(x)dx=-3$. D. $\int_a^c f(x)dx=7$.

Câu 31: Tìm tập nghiệm S của phương trình: $2^{x^2}.4^{x-1}=1$.

A. $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

B. $S=\left\{-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right\}$.

C. $S=\{0;1\}$.

D. $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa điều kiện $|z+1|=|z-i|$. Tìm số phức $\omega=z+2i-3$ có môđun nhỏ nhất.

A. $\omega=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$. B. $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

C. $\omega=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$. D. $\omega=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$.

Câu 33: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

A. $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{1\}$. B. $D=(-\infty;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;1)$. D. $D=(-\infty;1]$.

Câu 34: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a; hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 35: Biết $\int f(u)du=F(u)+C$. Tìm khẳng định đúng.

A. $\int f(2x-3)dx=F(2x-3)+C$.

B. $\int f(2x-3)dx=\frac{1}{2}F(2x-3)+C$.

C. $\int f(2x-3)dx=2F(x)-3+C$.

D. $\int f(2x-3)dx=2F(2x-3)+C$.

Câu 36: Gọi S là số đo diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=\pi$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\tan\frac{S}{4}=1$. B. $\cos 2S=1$.

C. $\sin S=1$. D. $\sin\frac{S}{2}=1$.

Câu 37: Cho a là một số thực dương, khác 1. Đặt $\log_3 a=\alpha$. Tính giá trị của biểu thức: $P=\log_{\frac{1}{3}}a-\log_{\sqrt{3}}a^2+\log_a 9$ theo α.

A. $P=\frac{1-10\alpha^2}{\alpha}$. B. $P=-3\alpha$.

C. $P=\frac{2(1-\alpha^2)}{\alpha}$. D. $P=\frac{2-5\alpha^2}{\alpha}$.

Câu 38: Tính môđun của số phức:

$$z=(1-i)^2(3+2i)+|\cos\alpha+i\sin\alpha|,\alpha\in\mathbb{R}$$

A. $\sqrt{61}$. B. $2\sqrt{13}$. C. 1. D. 51.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	||	$-$	||	$-$	
y	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2

Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=0$.

B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=-2$ và $y=2$.

C. Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$.

Câu 40: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để bất phương trình:

$$\log 5+\log(x^2+1)\geq\log(mx^2+4x+m)$$

nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. 1. B. $\forall m\in\mathbb{Z}$ và $m\leq 3$.

C. 0. D. 2.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính R; đi qua 3 điểm $A(2;0;1); B(1;0;0); C(1;1;1)$ và tâm I thuộc mặt phẳng: $x+y+z-2=0$.

Tính $(a+2b+3c).R$.

A. 12. B. 8. C. 4. D. 6.

Câu 42: Cắt mặt cầu (S) bằng một mặt phẳng cách tâm một khoảng bằng 4cm được một thiết diện là một hình tròn có diện tích $9\pi cm^2$. Tính thể tích của khối cầu (S).

A. $\frac{500\pi}{3}cm^3$. B. $\frac{2500\pi}{3}cm^3$.

C. $\frac{25\pi}{3}cm^3$. D. $\frac{250\pi}{3}cm^3$.

Câu 43: Cho a và b là các số thực dương, $a \neq 1$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=4+2\log_a b$.

B. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=4\log_a\left(a+b\right)$.

C. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=2+2\log_a\left(a+b\right)$.

D. $\log_{\sqrt{a}}\left(a^2+ab\right)=1+4\log_a b$.

Câu 44: Giải phương trình:

$$\log_5 x+\log_{25} x=\log_{0,2}\sqrt{3}.$$

A. $x=\sqrt[3]{3}$. B. $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

C. $x=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. D. $x=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 45: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f\left(x\right)=2017^x$$

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2017^x+C$.

B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=2017^x\ln 2017+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}2017^x+C$.

D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2017^x}{\ln 2017}+C$.

Câu 46: Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2^x=3^y=6^{-z}$. Tính giá trị của biểu thức $M=xy+yz+zx$.

A. 1. B. 6. C. 0. D. 3.

Câu 47: Tính giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-12x+20$.

A. $y_{CT}=36$. B. $y_{CT}=20$.

C. $y_{CT}=0$. D. $y_{CT}=4$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tâm và bán kính của mặt cầu:

$$(S):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+\left(z-3\right)^2=16.$$

A. $I\left(1;2;3\right);R=16$. B. $I\left(-1;-2;-3\right);R=16$.

C. $I\left(1;2;3\right);R=4$. D. $I\left(-1;-2;-3\right);R=4$.

Câu 49: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-1;3\right)$.

A. $y=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x-2$.

B. $y=x^4+18x^2-2$.

C. $y=\frac{2x-3}{3x+1}$.

D. $y=2x^2-6x-2$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, biết $SA=a\sqrt{3}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{4\pi a^2}{5}$. B. $5\pi a^2$.

C. $\frac{4\pi a^2}{3}$. D. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 6
(THPT TRẦN HƯNG ĐẠO - NINH BÌNH)

Câu 1: Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x^3-6x+m}{4x-m}$ không có tiệm cận đứng?

A. $m=2$ B. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=8 \end{array}\right.$ C. $m=16$ D. $m=1$

Câu 2: Hàm số $y=2x^4-8x^3+15$:

A. Nhận điểm $x=3$ làm điểm cực đại

B. Nhận điểm $x=0$ làm điểm cực đại

C. Nhận điểm $x=3$ làm điểm cực tiểu

D. Nhận điểm $x=3$ làm điểm cực đại

Câu 3: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-(3m+2)x+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi m bằng:

A. $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-2 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} m\geq -1 \\ m\leq -2 \end{array}\right.$

C. $-2\leq m\leq -1$ D. $-2<m<-1$

Câu 4: Tìm m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+mx^2-(m^2-m+1)x+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

A. $m=-2$ B. $m=-1$ C. $m=2$ D. $m=1$

Câu 5: Những giá trị của m để đường thẳng $y=x+m-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=2\sqrt{3}$ là:

A. $m=4\pm\sqrt{10}$ B. $m=4\pm\sqrt{3}$

C. $m=2\pm\sqrt{3}$ D. $m=2\pm\sqrt{10}$

Câu 6: Hàm số $y=\dfrac{4}{x^2+1}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét trên tập xác định của hàm số. Hãy chọn khẳng định đúng?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng 0

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0

C. Không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

D. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4

Câu 7: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị đó tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

A. $m=\sqrt[5]{4}$ B. $m=16$

C. $m=\sqrt[5]{16}$ D. $m=-\sqrt[3]{16}$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng:

A. -1 B. 6 C. $\dfrac{23}{27}$ D. 1

Câu 9: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=-2t^3+18t^2+2t+1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t=5s$ B. $t=6s$ C. $t=3s$ D. $t=1s$

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x(2-\ln x)$ trên $[2;3]$ là:

A. 1 B. $4-2\ln 2$

C. e D. $-2+2\ln 2$

Câu 11: Đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại 2 điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi m có giá trị là:

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ B. $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

C. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$ D. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$

Câu 12: Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai cạnh bất kì có ít nhất một điểm chung

B. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung

C. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt

D. Hai mặt bất kì có ít nhất một cạnh chung

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=2cm$ và có thể tích là $81cm^3$. Tính chiều cao của hình chóp đã cho.

A. $h=3cm$ B. $h=6cm$

C. $h=10cm$ D. $h=12cm$

Câu 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=2\sqrt{2}cm$ và $AA_1=2cm$. Tính thể tích V của khối chóp BA_1ACC_1.

A. $V=\frac{16}{3}cm^3$ B. $V=\frac{18}{3}cm^3$

C. $V=\frac{12}{3}cm^3$ D. $V=8cm^3$

Câu 15: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi M,N,P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác ABC, ABD, ACD. Tính thể tích V của khối chóp $AMNP$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{162}cm^3$ B. $V=\frac{2\sqrt{2}}{81}cm^3$

C. $V=\frac{4\sqrt{2}}{81}cm^3$ D. $V=\frac{\sqrt{2}}{144}cm^3$

Câu 16: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AC=2a$, $ABC=30°$. Tính độ dài đường sinh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh trục AB.

A. $l=4a$ B. $l=a\sqrt{3}$ C. $l=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $l=2a$

Câu 17: Một thùng hình trụ có thể tích là 48π, chiều cao là 3. Diện tích xung quanh của thùng đó là:

A. 12π B. 24π C. 4π D. 18π

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại A, $Ab=3, AC=4$, SA vuông góc với đáy, $SA=2\sqrt{14}$. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

A. $V=\frac{169\pi}{6}$ B. $V=\frac{729\pi}{6}$

C. $V=\frac{2197\pi}{8}$ D. $V=\frac{13\pi}{8}$

Câu 19: Người ta cần đổ một ống thoát nước hình trụ với chiều cao $200cm$, độ dày của thành ống là $15cm$, đường kính của ống là $80cm$. Lượng bê tông cần phải đổ là:

A. $0{,}195\pi m^3$ B. $0{,}18\pi m^3$

C. $0{,}14\pi m^3$ D. πm^3

Câu 20: Số phức $z=a+bi$ thỏa mãn $2z+\bar{z}-5+i=0$. Tính $3a+2b$?

A. 3 B. –7 C. 6 D. –3

Câu 21: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+1=0$. Tính môđun của số phức: $z=z_1^2+z_2^2+4-3i$.

A. $|z|=6$ B. $|z|=3\sqrt{2}$

C. $|z|=2\sqrt{3}$ D. $|z|=18$

Câu 22: Cho hai số phức $z_1=2+i$, $z_2=5-3i$. Số phức liên hợp của số phức $z=z_1(3-2i)+z_2$ là:

A. $\bar{z}=-13-4i$ B. $\bar{z}=-13+4i$

C. $\bar{z}=13-4i$ D. $\bar{z}=13+4i$

Câu 23: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z=1-2i$ B. $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

C. $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ D. $z=-1+2i$

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích:

A. $S=9\pi$ B. $S=12\pi$ C. $S=16\pi$ D. $S=25\pi$

Câu 25: Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1|=|z_2|$. Chọn phương án đúng:

A. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}=0$

B. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0

C. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số thực

D. $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ là số thuần ảo

Câu 26: Tìm nguyên hàm của hàm số:

$$f(x)=\cos 5x.$$

A. $\int f(x)dx=-\frac{1}{5}\sin 5x+C$

B. $\int f(x)dx=5\sin 5x+C$

C. $\int f(x)dx=\frac{1}{5}\sin 5x+C$

D. $\int f(x)dx=-5\sin 5x+C$

Câu 27: Cho hàm số $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[-1;1]$. Có $g(-1)=3$ và tích phân $I=\int_{-1}^{1} g'(x)dx=-2$. Tính $g(1)$.

A. 1 B. –5 C. –6 D. $-\frac{3}{2}$

Câu 28: Biết $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=\frac{2x-5}{2-x}$ và $G(1)=3$. Tính $G(4)$.

A. $\ln 2+3$ B. $3-\ln 2$
C. $-\ln 2-3$ D. $\ln 2-3$

Câu 29: Cho $\int_{1}^{2} f(x)dx=-3$, tính $I=\int_{2}^{4} f\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

A. –6 B. $-\frac{3}{2}$ C. –1 D. 5

Câu 30: Biết rằng:

$$\int_{0}^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln^a 2+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}.$$

Trong đó a,b,c là những số nguyên. Khi đó $S=a+b-c$ bằng:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$ và $y^2=6-3x$ bằng:

A. $\frac{2\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 32: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t)=\frac{4000}{1+0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250000con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu?

A. 258 959 con B. 253 584 con
C. 257 167 con D. 264 334 con

Câu 33: Cho $\log 3=m;\ \ln 3=n$. Hãy biểu diễn $\ln 30$ theo m và n.

A. $\ln 30=\frac{n}{m}+1$ B. $\ln 30=\frac{m}{n}+n$
C. $\ln 30=\frac{n+m}{n}$ D. $\ln 30=\frac{n}{m}+n$

Câu 34: Tập xác định của hàm số $y=(x+3)^{\frac{3}{2}}-\sqrt[4]{5-x}$ là:

A. $D=(-3;+\infty)$ B. $D=(-3;5)$
C. $D=(-3;+\infty)\setminus\{5\}$ D. $D=(-3;5]$

Câu 35: Bạn Hùng trúng tuyển vào đại học nhưng vì không đủ nộp tiền học phí Hùng quyết định vay ngân hàng trong 4 năm mỗi nam 3.000.000 đồng để nộp học với lãi suất 3%/năm. Sau khi tốt nghiệp đại học Hùng phải trả góp hàng tháng số tiền T (không đổi) cùng với lãi suất 0,25%/tháng trong vòng 5 năm. Số tiền T mà Hùng phải trả cho ngân hàng (làm tròn đến hàng đơn vị) là:

A. 232518 đồng B. 309604 đồng
C. 215456 đồng D. 232289 đồng

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\log_3(x^2-2x)$. Tập nghiệm S của phương trình $f''(x)=0$ là:

A. $S=\varnothing$ B. $S=\{1\pm\sqrt{2}\}$
C. $S=\{0;2\}$ D. $S=\{1\}$

Câu 37: Bất phương trình $3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\le 3$ có tập nghiệm là:

A. $(1;2]$ B. $[1;2]$ C. $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ D. $\left(-\frac{1}{2};2\right]$

Câu 38: Mọi số thực dương a,b. Mệnh đề nào đúng?

A. $\log_{\frac{3}{4}} a<\log_{\frac{3}{4}} b\Leftrightarrow a>b$
B. $\log_2(a^2+b^2)=2\log(a+b)$
C. $\log_{a^2+1} a\ge\log_{a^2+1} b$
D. $\log_2 a^2=\frac{1}{2}\log_2 a$

Câu 39: Rút gọn biểu thức: $P=\frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{-\sqrt{3}+2}.a^{2+\sqrt{3}}}$ $(a>0)$. Kết quả là:

A. 1 B. a^6 C. a^4 D. $\frac{1}{a^4}$

Câu 40: Giải phương trình

$$x^2.5^{x-1}-\left(3^x-3.5^{x-1}\right)x+2.5^{x-1}-3^x=0.$$

A. $x=1, x=2$ B. $x=0, x=1$
C. $x=\pm1$ D. $x=\pm2$

Câu 41: Phương trình $\left(3+\sqrt{5}\right)^x+\left(3-\sqrt{5}\right)^x=3.2^x$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Câu 42: Tập nghiệm của bất phương trình: $3^{2x+1}-10.3^x+3\le 0$ là:

A. $[-1;0)$ B. $(-1;1)$ C. $(0;1]$ D. $[-1;1]$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;2)$ và $B(5;1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I\left(\frac{7}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$ B. $I(4;2;3)$

C. $I\left(2;\frac{3}{2};-1\right)$ D. $I\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=4+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d?

A. $\vec{u_1}=(0;2;4)$ B. $\vec{u_1}=(2;-1;0)$

C. $\vec{u_1}=(1;-1;1)$ D. $\vec{u_1}=(-2;3;5)$

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;5)$, $B(3;1;3)$, $C(2;6;1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $2x-z-3=0$ B. $2x+y+z-3=0$

C. $4x-y-5z+13=0$ D. $9x-y+z-16=0$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(-1;3;2)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2x+2y+z+3=0$.

A. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=9$

B. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4$

D. $(x+5)^2+(y+1)^2+z^2=9$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$ và đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$; $d_2:\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{3}$.
Phương trình đường thẳng d đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là:

A. $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-5}$ B. $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-4}$

C. $d:\begin{cases}x=2+t\\y=2\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ D. $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là:

A. $d:\begin{cases}x=-3+t\\y=1-2t\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ B. $d:\begin{cases}x=3t\\y=2+t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

C. $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ D. $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3-3t\\z=3-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$ B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{25}{11}\right)$

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$ D. $M\left(-\frac{6}{15};-\frac{11}{15};-\frac{18}{15}\right)$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng: $d_1:\begin{cases}x=1\\y=1,t\in\mathbb{R};\\z=t\end{cases}$

$d_1:\begin{cases}x=2\\y=u\quad,u\in\mathbb{R};\\z=1+u\end{cases}$ $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.

Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1,d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ?

A. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$

B. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

D. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 7

(THPT AN LÃO – HẢI PHÒNG)

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$.

A. $(P): 3x+y+2z-6=0.$

B. $(P): 2x+3y-z-4=0.$

C. $(P): 2x+y+z-4=0.$

D. $(P): x+2y-z-2=0.$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn chu vi bằng 8π.

A. $(\alpha): 3x+z+2=0.$ B. $(\alpha): 3x+z=0.$

C. $(\alpha): x-3z=0.$ D. $(\alpha): 3x-z=0.$

Câu 3: Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $0 \le m \le 1.$ B. $m \le 0 \vee m \ge 1.$

C. $0 < m < 1.$ D. $0 < m \le 1.$

Câu 4: Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành do quay quanh trục hoành một Elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550. B. 400. C. 670. D. 335.

Câu 5: Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

A. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.

B. Ba khối tứ diện.

C. Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.

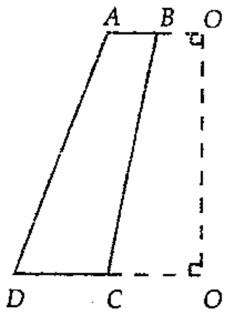
D. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB = 2a, CD = a, ABC = 60°$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trên mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$ B. $R = a.$

C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$ D. $R = \frac{2a}{3}.$

Câu 7: Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục OO', biết $OO' = 200, O'D = 20, O'C = 10, OA = 10, OB = 5$.



A. $V = 75000\pi.$ B. $V = 40000\pi.$

C. $V = 35000\pi.$ D. $V = 37500\pi.$

Câu 8: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2+5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S.

A. $S = \frac{4}{3}.$ B. $S = \frac{7}{3}.$ C. $S = \frac{8}{3}.$ D. $S = \frac{5}{3}.$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x+y-3z+1=0$. Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của (P).

A. $\vec{n} = (-4;2;6).$ B. $\vec{n} = (2;1;3).$

C. $\vec{n} = (-6;-3;9).$ D. $\vec{n} = (6;-3;-9).$

Câu 10: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a > 0, a \ne 1$. Tính giá trị $M = f\left(2017^{2016}\right)$.

A. $M = 2017^{1008} - 1.$ B. $M = -2017^{1008} - 1.$

C. $M = 2017^{2016} - 1.$ D. $M = 1 - 2017^{2016}.$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $I(-1;2;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình

$x+2y-2z+8=0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với (P).

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=9$.

B. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=4$.

D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

Câu 12: Ngày 01 tháng 01 năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01 tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi.

A. $800.(1,005)^{11}-72$ (triệu đồng).

B. $1200-400.(1,005)^{12}$ (triệu đồng).

C. $800.(1,005)^{12}-72$ (triệu đồng).

D. $1200-400.(1,005)^{11}$ (triệu đồng).

Câu 13: Biết $I=\int_{-1}^{0}\frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\frac{2}{3}+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó, tính giá trị của $a+4b$.

A. 50. B. 60. C. 59. D. 40.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0\in(0;2)$.

A. $0<m<1$. B. $m>1$.

C. $m>2$. D. $-1<m<1$.

Câu 15: Tìm tập nghiệm S của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

A. $S=\varnothing$. B. $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$.

C. $S=\{0;2\}$. D. $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 16: Có tất cả bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$?

A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD=10, AB=10, BC=24$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V=1200$. B. $V=960$.

C. $V=400$. D. $V=\frac{1300}{3}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2), B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC.

A. $AM:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-2}{1}$.

B. $AM:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+2}{1}$.

C. $AM:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z+2}{-1}$.

D. $AM:\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+1}{3}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}(1;2;-1), \vec{b}(3;4;3)$. Tìm tọa độ của $\vec{x}$ biết $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$.

A. $\vec{x}(1;1;2)$. B. $\vec{x}(-2;-2;4)$.

C. $\vec{x}(-2;-2;-4)$. D. $\vec{x}(2;2;4)$.

Câu 20: Cho tam giác ABC vuông góc A, $\widehat{ABC}=60°$. Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh bởi khi quay ΔABC quanh trục AB, biết $BC=2a$.

A. $V=a^3$. B. $V=3a^3$.

C. $V=\pi a^3$. D. $V=\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 21: Cho a,b,c là các số thực dương $(a,b\neq1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_a\left(\frac{b}{a^3}\right)=\frac{1}{3}\log_a b$.

B. $a^{\log_a b}=b$.

C. $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b$ $(\alpha\neq0)$.

D. $\log_a c=\log_b c.\log_a b$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x+y+z+2=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho giá trị biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+3=0$.

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{121}{54}$. C. 24. D. $\frac{91}{54}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$ có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1,y_2. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $2y_1-y_2=5$. B. $y_1+3y_2=15$.

C. $y_2-y_1=2\sqrt{3}$. D. $y_1+y_2=12$.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 5.

C. Hàm số có đúng một cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 25: Đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\frac{2}{x+1}$. B. $y=\frac{-2x+3}{x-2}$.

C. $y=\frac{2x-2}{x+2}$. D. $y=\frac{1+x}{1-2x}$.

Câu 26: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2, mx=y^2\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

A. $m=1$. B. $m=2$. C. $m=3$. D. $m=4$.

Câu 27: Cho a,b,c là các số thực dương $(a,b\neq 1)$ và $\log_a b=5;\log_b c=7$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{b}{c}\right)$.

A. $P=\frac{2}{7}$. B. $P=-15$.

C. $P=\frac{1}{14}$. D. $P=-60$.

Câu 28: Một cửa hàng cà phê sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá 20.000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 20.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc cà phê với giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất?

A. 25.000 đồng. B. 22.000 đồng.

C. 31.000 đồng. D. 29.000 đồng.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SA, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $SA=6a$, $AB=2a, AC=4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R=2a\sqrt{7}$. B. $R=a\sqrt{14}$.

C. $R=2a\sqrt{3}$. D. $R=2a\sqrt{5}$.

Câu 30: Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d.

A. $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{1}$.

B. $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$.

D. $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 31: Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

A. $I=\frac{1}{e}$. B. $I=\frac{1}{e}+1$.

C. $I=1$. D. $I=e$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;-1), B(-1;0;1)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A,B và vuông góc với (P).

A. $(Q):2x-y+3=0$. B. $(Q):-x+y+z=0$.

C. $(Q):x+z=0$. D. $(Q):3x-y+z=0$.

Câu 33: Tìm nguyên hàm $\int x\left(x^2+7\right)^{15}dx$.

A. $\frac{1}{2}\left(x^2+7\right)^{16}+C$. B. $-\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

C. $\frac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}+C$. D. $\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $mx-\ln x=0$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;3)$.

A. $\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{\ln 3}{3}\right)$. B. $\left(-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right)\cup\left(\frac{\ln 3}{3};+\infty\right)$.

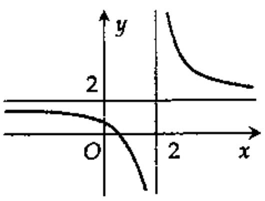
C. $\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{1}{e}\right)$. D. $\left(\frac{\ln 3}{3};\frac{1}{e}\right)$.

Câu 35: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)$.

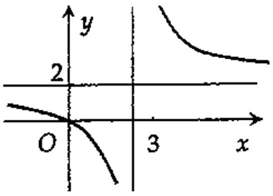
A. $S=\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$. B. $S=\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$.

C. $S=\left(-\frac{3}{2};1\right)$. D. $S=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$.

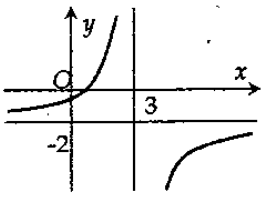
Câu 36: Tìm đồ thị của hàm số $y=\frac{2x-1}{x-3}$ trong các đồ thị hàm số dưới đây.



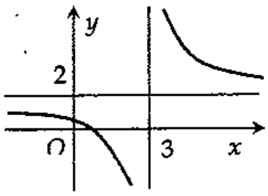
A.



B.



C.



D.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=6$, $AC=4$; ABC là tam giác vuông cân tại B. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=16\sqrt{7}$. B. $V=\frac{16\sqrt{7}}{3}$.

C. $V=16\sqrt{2}$. D. $V=\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Câu 38: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$. B. $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

C. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$. D. $y=(0,5)^x$.

Câu 39: Cho hàm số $y=\log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

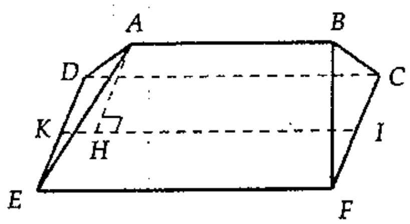
A. Đạo hàm của hàm số là $y'=\frac{1}{x\ln 2}$.

B. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm tiệm cận đứng.

C. Tập xác định của hàm số là $(-\infty;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 40: Người ta cần lợp tôn cho một mái nhà như hình vẽ. Biết mái trước, mái sau là các hình thang cân $ABCD, ABFE$; hai đầu hồi là hai tam giác cân ADE, BCF tại A và B; hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(CDEF)$ là H; $AB=16m, CD=EF=20m; AH=1,73m; ED=CF=6m$. Tính tổng diện tích S của mái nhà (diện tích của hai mái trước, sau và hai đầu hồi).



A. $S\approx 281m^2$. B. $S\approx 78m^2$.

C. $S\approx 141m^2$. D. $S\approx 261m^2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=mx^3+\left(m^2-6\right)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m đó là hàm số có 3 điểm cực trị trong đó có đúng 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Câu 42: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S.

A. $S=1-4\ln\frac{4}{3}$. B. $S=4\ln\frac{4}{3}$.

C. $S=4\ln\frac{4}{3}-1$. D. $S=\ln\frac{4}{3}-1$.

Câu 43: Giả sử $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x dx = a+b\frac{\sqrt{2}}{2}\ (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó tính giá trị của $a-b$.

A. $-\frac{1}{6}$. B. 0. C. $-\frac{3}{10}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 44: Cho phương trình $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2=0$ (1). Nếu đặt $t=3^{x+5}\ (t>0)$ thì (1) trở thành phương trình nào sau đây?

A. $9t^2-6t-2=0$. B. $t^2-2t-2=0$.
C. $t^2-18t-2=0$. D. $9t^2-2t-2=0$.

Câu 45: Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+3$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số có 1 cực đại và 2 cực tiểu.
B. Hàm số có 2 cực đại và 1 cực tiểu.
C. Hàm số không có cực đại, chỉ có 1 cực tiểu.
D. Hàm số có 1 cực đại và 1 cực tiểu.

Câu 46: Hàm số $y=-x^4+8x^2+6$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;2)$. B. $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.
C. $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$. D. $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 47: Tìm x để hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $x=2\sqrt{2}$. B. $x=-2$.
C. $x=1$. D. $x=\sqrt{2}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính x_1x_2.

A. $x_1x_2=-\frac{1}{4}$. B. $x_1x_2=1$.
C. $x_1x_2=\frac{3}{4}$. D. $x_1x_2=0$.

Câu 49: Cho $f(x)=2^{\sqrt{x}}\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x)=2^{\sqrt{x}}+C$. B. $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)+C$.
C. $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}+1\right)+C$. D. $F(x)=2^{\sqrt{x}+1}+C$.

Câu 50: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2+2x-3\right)^{\sqrt{2}}$.

A. $D=\mathbb{R}$. B. $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.
C. $D=(0;+\infty)$. D. $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$.

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 8

(THPT A KIM BẢNG – HÀ NAM)

Câu 1: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$?

A. $x=1$. B. $x=-1$. C. $y=1$. D. $y=-1$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(1-2017e^{-2x}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2017e^{-x}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-2017e^{-x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{2017}{2}e^{-x}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+\dfrac{2017}{2}e^{-x}+C$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 24 và G là trọng tâm tam giác ACD. Tính thể tích V của khối chóp $B.GAC$.

A. $V=8$. B. $V=10$. C. $V=2$. D. $V=6$.

Câu 4: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ và $F(-2)=1$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=\ln 3-1$. B. $F(2)=\dfrac{-1}{2}$.

C. $F(2)=\ln 3+1$. D. $F(2)=3$.

Câu 5: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $|z|>2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|\dfrac{z+i}{z}\right|$.

A. $P=1$. B. $P=\dfrac{1}{2}$. C. $P=\dfrac{3}{2}$. D. $P=\dfrac{2}{3}$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
y	-3		$\Vert$ $+\infty$				$\Vert$ $+\infty$		
		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	2	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
			$-\infty$ $\Vert$				$-\infty$ $\Vert$		3

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=2m+1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\leq -2$. B. $m<-2$ và $m>1$.

C. $m\geq 1$. D. $m\leq -2$ hoặc $m\geq 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-2z-6=0$ và mặt phẳng $(P'): -x-y+2z+2=0$. Xác định quỹ tích tâm các mặt cầu tiếp xúc với (P), tiếp xúc với (P').

A. Mặt phẳng có phương trình $x+y-2z-8=0$.

B. Mặt phẳng có phương trình $x+y-2z+8=0$.

C. Hai mặt phẳng có phương trình $x+y-2z=8$, $x+y-2z=-8$.

D. Mặt phẳng $x+y-2z-4=0$.

Câu 9: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(3-2i)\bar{z}-4(1-i)=(2+i)z$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-4$. B. $P=2$. C. $P=4$. D. $P=-2$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$ và $B(5;4;7)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu nhận AB làm đường kính.

A. $(x-5)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=17$.

B. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z-5)^2=17$.

C. $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=17$.

D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=17$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y=\log_{\sqrt{2}}\left(x.3^{2x}+1\right).$$

A. $y'=\dfrac{3^{2x}.\ln 9+1}{\left(x.3^{2x}+1\right)\ln\sqrt{2}}$. B. $y'=\dfrac{(x\ln 9+1).3^{2x}}{\left(x.3^{2x}+1\right)\ln\sqrt{2}}$.

C. $y'=\dfrac{3^{2x}+4x^2.3^{2x-1}}{\left(x.3^{2x}+1\right)\ln\sqrt{2}}$. D. $y'=\dfrac{(x\ln 3+1).3^{2x}}{\left(x.3^{2x}+1\right)\ln\sqrt{2}}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $(1;2;3)$ đến mặt phẳng đi qua ba điểm $(1;0;0),(1;2;0),(0;3;0)$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 6.

Câu 13: Hỏi hàm số $y=|x|^3-3x+1$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

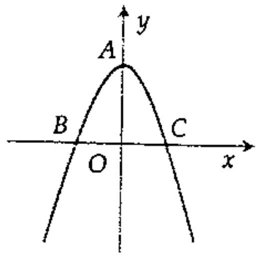
A. Có ba điểm cực trị.

B. Có hai điểm cực trị.

C. Không có điểm cực trị.

D. Có một điểm cực trị.

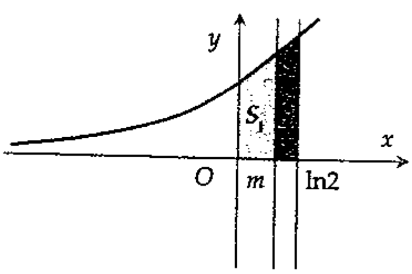
Câu 14: Vòm cửa lớn của một trường THPT có dạng hình Parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho cửa này. Hayx tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8m$ và rộng $8m$.(biết $OA=8m,\ BC=8m$)



A. $128\left(m^2\right)$. B. $\frac{128}{3}\left(m^2\right)$.

C. $\frac{8}{3}\left(m^2\right)$. D. $\frac{28}{3}\left(m^2\right)$.

Câu 15: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=\ln 2$. Đường thẳng $x=m\ (0<m<\ln 2)$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ. Tìm m để $S_1=2S_2$.



A. $m=\frac{3}{2}\ln 2$. B. $m=\frac{1}{2}\ln 3$.

C. $m=\ln 3$. D. $m=2\ln 3$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

A. $x+2y-z=0$. B. $x-y-z=0$.

C. $x+y+z-2=0$. D. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1$.

Câu 17: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $32.4^x-18.2^x+1<0$.

A. $S=(1;4)$. B. $S=(-5;-2)$.

C. $S=(-4;-1)$. D. $S=(-3;1)$.

Câu 18: Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

A. 3. B. 9. C. 6. D. 12.

Câu 19: Cho biểu thức $P=\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$, với $a>0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

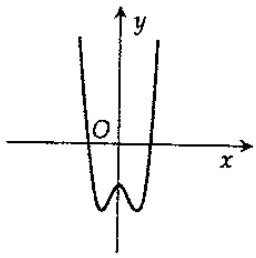
A. $P=a^3$. B. $P=a^5$. C. $P=a$. D. $P=a^4$.

Câu 20: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\left[-\frac{1}{2017};+\infty\right)$. B. $\left[\frac{1}{2017};+\infty\right)$.

C. $[2017;+\infty)$. D. $(0;+\infty)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a<0,\ b<0,\ c<0$. B. $a>0,\ b<0,\ c>0$.

C. $a>0,\ b>0,\ c<0$. D. $a>0,\ b<0,\ c<0$.

Câu 22: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_3 a+\log_3 b$.

B. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b}\right)=1+3\log_3 a+\log_3 b$.

C. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_3 a-\log_3 b$.

D. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b}\right)=1+3\log_3 a-\log_3 b$.

Câu 23: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s=6t^2-t^3-9t+1$, với t (giây) là khoảng thời gian đó. Trong 5 giây đầu tiên, thời điểm t mà tại đó vận tốc của vật chuyển động đạt giá trị lớn nhất là:

A. $t=2$. B. $t=3$. C. $t=4$. D. $t=1$.

Câu 24: Biết $\int_0^1 \frac{2x+3}{2-x}dx=a\ln 2+b$, với a,b là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=-5$. B. $S=5$. C. $S=-9$. D. $S=9$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{MN}=(0;1;-1)$ và $M(1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm N.

A. $N(-1;-1;-1)$. B. $N(1;-1;3)$.

C. $N(-1;1;-3)$. D. $N(1;1;1)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -x+3y+5z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

A. $\vec{n_2}(-1;-3;5)$. B. $\vec{n_1}(-1;3;5)$.

C. $\vec{n_3}(1;-3;5)$. D. $\vec{n_4}(2;0;2)$.

Câu 27: Tính môđun số phức z thỏa mãn $(1+i)z+i=3$.

A. $|z|=\frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $|z|=\sqrt{5}$.

C. $|z|=\frac{3\sqrt{5}}{4}$. D. $|z|=5$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng $S=f\left(\frac{1}{2017}\right)+f\left(\frac{2}{2017}\right)+...+f\left(\frac{2016}{2017}\right)$.

A. $S=1008$. B. $S=1007$.

C. $S=1973$. D. $S=2017$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x-m.\left(\frac{1}{3}\right)^x+2m+1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $-\frac{1}{2}<m<4+2\sqrt{5}$.

B. $-\frac{1}{2}\le m<4+2\sqrt{5}$.

C. $m<-\frac{1}{2}$ hoặc $m\ge 4+2\sqrt{5}$.

D. $m\le -\frac{1}{2}$ hoặc $m>4+2\sqrt{5}$.

Câu 30: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn được tính theo công thức $f(t)=A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng $(r>0)$, t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

A. $5\ln 20$ (giờ). B. $10\log_5 20$ (giờ).

C. $10\log_5 10$ (giờ). D. $5\ln 10$ (giờ).

Câu 31: Tìm nghiệm của phương trình $\log_3(3x-2)=3$.

A. $\frac{11}{3}$. B. 87. C. $\frac{25}{3}$. D. $\frac{29}{3}$.

Câu 32: Đồ thị của hàm số $y=x^3+2x^2-x+1$ và đồ thị của hàm số $y=x^2-x+3$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 33: Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng 0.

B. Cực tiểu của hàm số bằng -1.

C. Cực tiểu của hàm số bằng 2.

D. Cực tiểu của hàm số bằng -2.

Câu 34: Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{\pi a^2h}{3}$. B. $V=3\pi a^2h$.

C. $V=\pi a^2h$. D. $V=\frac{\pi a^2h}{9}$.

Câu 35: Cho $\int_0^9 f(x)dx=9$. Tính $I=\int_0^3 f(3x)dx$.

A. $I=2$. B. $I=1$. C. $I=3$. D. $I=4$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$. B. $h=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.

C. $h=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{2}}$. D. $h=\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.

Câu 37: Biết $M(-2;0), N(0;-4)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=1$.

A. $y(1)=2$. B. $y(1)=12$.

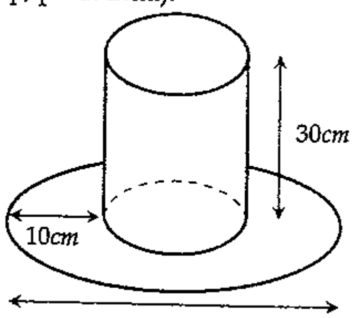
C. $y(1)=0$. D. $y(1)=-1$.

Câu 38: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log\frac{a}{b}=\frac{\log a}{\log b}$. B. $\log\frac{a}{b}=\log b-\log a$.

C. $\log(ab)=\log a.\log b$. D. $\log(ab)=\log a+\log b$.

Câu 39: Một cái mũ bằng vải của nhà ảo thuật với các kích thước như hình vẽ. Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ đó (không kể viền, mép, phần thừa).



A. $750,25\pi(cm^2)$. B. $756,25\pi(cm^2)$.

C. $700\pi(cm^2)$. D. $754,25\pi(cm^2)$.

Câu 40: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $DC=a, DA=2a$ và $DD'=2a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $DCB'C'$.

A. $R=\frac{3a}{2}$. B. $R=\frac{3a}{4}$.

C. $R=3a$. D. $R=2a$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, cạnh $AB=2\sqrt{2}$. Biết BC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° và $BC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCA'C'$.

A. $V=\frac{16}{3}$. B. $V=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

C. $V=\frac{8\sqrt{3}}{3}$. D. $V=\frac{8}{3}$.

Câu 42: Tìm số phức liên hợp của số phức $z=(1-i)(3+2i)$.

A. $\bar{z}=5-i$. B. $\bar{z}=5+i$.

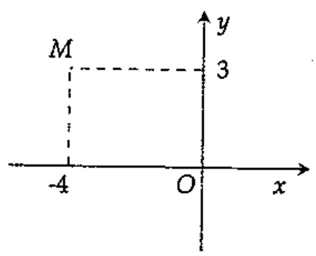
C. $\bar{z}=1-i$. D. $\bar{z}=1+i$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tập hợp các điểm có tọa độ $(x;y;z)$ sao cho $-1\le x\le 3, -1\le y\le 3, -1\le z\le 3$ là tập các điểm của một khối đa diện (lồi) có tâm đối xứng. Tìm tọa độ của tâm đối xứng.

A. $(0;0;0)$. B. $(2;2;2)$.

C. $(1;1;1)$. D. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 44: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
B. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
C. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
D. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;0;0), B(0;-2;0)$ và $C(0;0;6)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC)?

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{3}=1$. B. $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=0$.

C. $3x-6y+2z-12=0$. D. $3x-6y+2z-1=0$.

Câu 46: Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$. Tính thể tích của khối nón (N).

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $V=\frac{\pi a^3 3}{\sqrt{3}}$. D. $V=\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 47: Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $2z^2+4z+3=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$. B. $M_4\left(\sqrt{2};1\right)$.

C. $M_3\left(-\sqrt{2};1\right)$. D. $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-1\right)$.

Câu 48: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y=-\left(3^x\right)+2x+1$. B. $y=x^2+x$.

C. $y=3^x-x-1$. D. $y=x^2-x$.

Câu 49: Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x+1+\sqrt{4x^2+2x+1}}{x^2+4x-5}$.

A. $x=-5$. B. $x=5$.

C. $x=-1$ và $x=5$. D. $x=1$ và $x=-5$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[0;\pi]$, $f(0)=\pi$ và $f(\pi)=4\pi$. Tính $I=\int_0^\pi f'(x)\,dx$.

A. $I=2\pi$. B. $I=\pi$. C. $I=3\pi$. D. $I=4\pi$.

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 9
(SỞ GD&ĐT BẮC NINH)

Câu 1: Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người). Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm giữ nguyên thì đầu năm 2025 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

A. $(1.424.000;\ 1.424.100)$

B. $(1.424.300;\ 1.424.400)$

C. $(1.424.200;\ 1.424.300)$

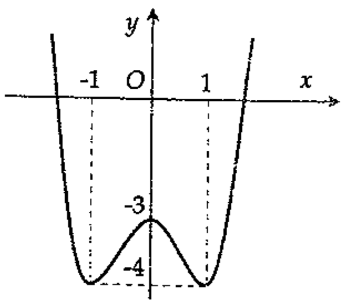
D. $(1.424.100;\ 1.424.200)$

Câu 2: Thiết diện qua trục của hình nón (N) là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng $2a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón này.

A. $S_{tp} = \pi a^2\left(2\sqrt{2}+2\right)$ B. $S_{tp} = \pi a^2\left(2+4\sqrt{2}\right)$

C. $S_{tp} = \pi a^2\left(4+2\sqrt{2}\right)$ D. $S_{tp} = 4\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m-2$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-4 < m < -3$ B. $-4 \le m \le -3$

C. $-2 < m < -1$ D. $-2 \le m \le -1$

Câu 4: Giải bất phương trình $2^{-x^2+4x} > 8$.

A. $2 < x < 3$ B. $1 < x < 3$

C. $\left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 1 \end{array}\right.$ D. $1 < x < 2$

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - m^2x^2 + m$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ song song với đường thẳng $d: y = -5x$.

A. Không có giá trị của m B. $m = 2$

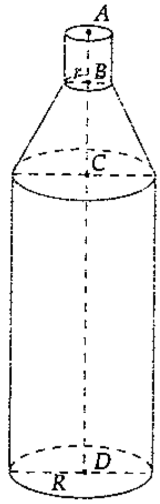
C. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$ D. $m = -2$

Câu 6: Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+2}$ lần lượt là:

A. $y = 2;\ x = -1$ B. $x = -2;\ y = 1$

C. $x = 2;\ y = 1$ D. $x = -2;\ y = -1$

Câu 7: Phần không gian bên trong của chai nước ngọt có hình dạng như hình bên. Biết bán kính đáy bằng $R = 5cm$, bán kính cổ $r = 2cm$, $AB = 3cm$, $BC = 6cm$, $CD = 16cm$. Thể tích phần không gian bên trong của chai nước ngọt đó bằng:



A. $495\pi\left(cm^3\right)$

B. $490\pi\left(cm^3\right)$

C. $462\pi\left(cm^3\right)$

D. $412\pi\left(cm^3\right)$

Câu 8: Diện tích của hình cầu đường kính bằng $3a$ là:

A. $S = 36\pi a^2$ B. $S = 3\pi a^2$

C. $S = 12\pi a^2$ D. $S = 9\pi a^2$

Câu 9: Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x-1}$. Xét các mệnh đề sau:

1. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

2. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

3. Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

4. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Số mệnh đề đúng là:

A. 1 B. 3 C. 0 D. 2

Câu 10: Một công ty chuyên sản xuất gỗ muốn thiết kế các thùng đựng hàng bên trong dạng hình lăng trụ tứ giác đều không nắp, có thể tích là $62,5dm^3$. Để tiết kiệm vật liệu làm thùng, người ta cần thiết kế thùng sao cho tổng S của diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy là nhỏ nhất, S bằng:

A. $106,25dm^2$ B. $125dm^2$

C. $75dm^2$ D. $50\sqrt{5}dm^2$

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{16\log_2 x}{\log_2 x^2+3}-\frac{3\log_2 x^2}{\log_2 x+1}>0 \text{ là:}$$

A. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};1\right)\cup\left(\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)\cup\left(3\sqrt{2};+\infty\right)$

B. $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$

D. $\left(0;\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{2};1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

Câu 12: Hàm số $y=-x^4+2x^2+1$ có mấy điểm cực trị?

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 13: Cho a, b là hai số thực dương. Rút gọn biểu thức sau: $\frac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}$.

A. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ B. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ C. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt[3]{ab}$

Câu 14: Cho hàm số $y=\left(\frac{1+a^2}{a}\right)^{1-x}$ với $a>0$ là một hằng số. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

B. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$

C. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

D. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $m=\min\limits_D f(x)$ nếu $f(x)\le m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$

B. Nếu $M=\max\limits_D f(x)$ thì $f(x)\le M$ với mọi x thuộc D

C. $M=\max\limits_D f(x)$ nếu $f(x)\le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=M$

D. $m=\min\limits_D f(x)$ nếu $f(x)\ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại $x_0\in D$ sao cho $f(x_0)=m$

Câu 16: Thể tích của khối trụ có bán kính đáy R, chiều cao h là:

A. $V=\pi R^2h$ B. $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$

C. $V=\frac{4}{3}\pi R^2h$ D. $V=2\pi R^2h$

Câu 17: Gọi $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x$. Tính giá trị $P=3x_1-6x_2$.

A. 8 B. –10 C. 11 D. –9

Câu 18: Khối lăng trụ tam giác có bao nhiêu mặt?

A. 3 B. 6 C. 4 D. 5

Câu 19: Giải phương trình $\log_3(10x+5)=2$.

A. $x=\frac{2}{5}$ B. $x=\frac{1}{6}$ C. $x=\frac{9}{4}$ D. $x=2$

Câu 20: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-9x+1$ và đường thẳng $d: y=1$ là:

A. 1 B. 2 C. 4 D. 3

Câu 21: Hàm số $y=\ln(-x^2+16)$ đồng biến trên tập nào?

A. $(-\infty;4)$ B. $(-4;0)$ C. $(-4;4)$ D. $(-\infty;4]$

Câu 22: Giải bất phương trình $2^{\frac{4x-1}{2x+1}}<2^{\frac{2-2x}{2x+1}}+1$.

A. $x>1$ B. $-\frac{1}{2}<x<1$

C. $\left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{2}\\x>1\end{array}\right.$ D. $x<-\frac{1}{2}$

Câu 23: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

A. $\frac{9a^3}{4}$ B. $\frac{5a^3}{8}$ C. $\frac{3a^3}{4}$ D. $\frac{4a^3}{9}$

Câu 24: Hàm số $y=\left|x^2+3x+2\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=3a$, có hai mặt phẳng $(SAB);(SAC)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC với mặt đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{30}{31}}$ B. $\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{30}{31}}$ C. $a\sqrt{\frac{30}{31}}$ D. $2a\sqrt{\frac{30}{31}}$

Câu 26: Hàm số $y=x^3-3x^2-2$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$ B. $(0;2)$

C. $(-\infty;2)$ D. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{3x}\sin x$.

A. $3e^{3x}\cos x$ B. $e^{3x}(3\sin x-\cos x)$

C. $e^{3x}(3\sin x+\cos x)$ D. $e^{3x}(\sin x+\cos x)$

Câu 28: Cho một hình trụ có chiều cao bằng 6 nội tiếp trong một hình cầu bán kính bằng 4. Tính thể tích khối trụ này?

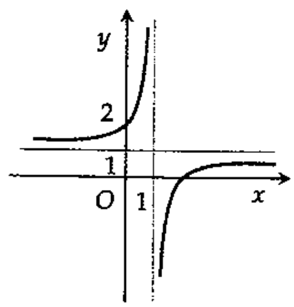
A. 42π B. 14π C. 96π D. 84π

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ bằng 2.

A. $m=-1+\sqrt{2}$ B. $m=1$

C. $m=0$ D. $m=3$

Câu 30: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y=\frac{x+2}{x+1}$ B. $y=\frac{x-2}{x+1}$

C. $y=\frac{x-2}{x-1}$ D. $y=\frac{2x-1}{x-1}$

Câu 31: Xét các mệnh đề sau:

1. Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2x-3}$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang

2. Đồ thị hàm số $y=\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ có hai đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận đứng

3. Đồ thị hàm số $y=\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$ có một đường tiệm cận ngang và hai đường tiệm cận đứng

Số mệnh đề đúng là:

A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{1+x}=\sqrt{m+1+x-x^2}$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m\in\left[4;\frac{19}{4}\right]$ B. $m\in\left[4;\frac{19}{4}\right)\cup\{5\}$

C. $m\in\left(4;\frac{19}{4}\right)\cup\{5\}$ D. $m\in[4;6]$

Câu 33: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',BC,CC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1. Gọi V là thể tích khối lăng trụ. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{61}{144}$ B. $\frac{37}{144}$ C. $\frac{25}{144}$ D. $\frac{49}{144}$

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\frac{x^2+9}{x}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\max\limits_{[2;4]}y=11$ B. $\max\limits_{[2;4]}y=10$

C. $\max\limits_{[2;4]}y=\frac{25}{4}$ D. $\max\limits_{[2;4]}y=\frac{13}{2}$

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi điểm O là giao điểm của AC và BD. Biết khoảng cách từ O đến SC bằng $\frac{a}{\sqrt{5}}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 36: Chọn cụm từ (hoặc từ) cho dưới đây để sau khi điền nó vào chỗ trống mệnh đề sau trở thành mệnh đề đúng?

"Số cạnh của một hình đa diện luôn .... số đỉnh của hình đa diện ấy."

A. lớn hơn B. nhỏ hơn

C. nhỏ hơn hoặc bằng D. bằng

Câu 37: Tính giá trị của biểu thức sau:

$$\log^2_{\frac{1}{a}} a^2 + \log_{a^2} a^{\frac{1}{3}};\ 1 \neq a > 0.$$

A. $\frac{25}{6}$ B. $-\frac{11}{6}$ C. $\frac{13}{6}$ D. $-\frac{23}{6}$

Câu 38: Cho một hình trụ (T) có chiều cao và bán kính đều bằng $3a$. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB, CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy, cạnh AD, BC không phải là đường sinh của hình trụ (T). Tính cạnh của hình vuông này?

A. $3a\sqrt{5}$ B. $6a$ C. $3a$ D. $\frac{3a\sqrt{10}}{2}$

Câu 39: Cho $\log_2 b = 3, \log_2 c = -6$. Hãy tính $\log_2(b^2c)$.

A. 4 B. 7 C. 0 D. 8

Câu 40: Tập tất cả các giá trị của m để phương trình

$2^{(x-1)^2}.\log_2(x^2-2x+3) = 4^{|x-m|}.\log_2(2|x-m|+2)$

có đúng bốn nghiệm phân biệt là:

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\setminus\{1\}$ B. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)\setminus\{1\}$

C. $\left(0;\frac{3}{2}\right)\setminus\{1\}$ D. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\setminus\{1\}$

Câu 41: Cho a,b là các số thực dương. Viết biểu thức $\sqrt[12]{a^2b^3}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{4}}$ B. $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}$ C. $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{6}}$ D. $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{9}}$

Câu 42: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2\log_5(x-4)+\log_5(x-6)^2=0$ bằng:

A. $10-\sqrt{2}$ B. $5+\sqrt{2}$ C. $10+\sqrt{2}$ D. 10

Câu 43: Hàm số $y=-x^3+3x^2-1$ có điểm cực tiểu bằng:

A. $M(0;-1)$ B. 2 C. -1 D. 0

Câu 44: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm cảu SB,SC. Tính thể tích khối chóp $A.BCNM$. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$ B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$ C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Câu 45: Cho một hình nón (N) có đáy là hình tròn tâm O, đường kính a và đường cao $SO=a$. Cho điểm H thay đổi trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo đường tròn (C). Khối nón có đỉnh là O và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\pi a^3}{162}$ B. $\frac{\pi a^3}{81}$ C. $\frac{4\pi a^3}{81}$ D. $\frac{2\pi a^3}{81}$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=2x^3-6x^2+3$. Số nghiệm của phương trình $f(f(x))=0$ là:

A. 9 B. 6 C. 3 D. 7

Câu 47: Cho các hàm số $y=x^5-x^3+2x$; $y=\frac{x-1}{x+1}$; $y=-x^3-4x-4\sin x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số đồng biến trên tập xác định của chúng?

A. 0 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=2a$, $AB=a$, $AC=2a$, $BAC=60°$. Tính diện tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $S=\frac{8}{3}\pi a^2$ B. $S=32\pi a^2$

C. $S=8\pi a^2$ D. $S=\frac{32}{3}\pi a^2$

Câu 49: Một hộp giấy hình hộp chữ nhật có thể tích $3dm^3$. Nếu tăng mỗi cạnh của hộp giấy thêm $\sqrt[3]{3}dm$ thì thể tích của hộp giấy là $24dm^3$. Hỏi nếu tăng mỗi cạnh của hộp giấy ban đầu lên $3\sqrt[3]{3}dm$ thì thể tích hộp giấy mới là:

A. $324dm^3$ B. $64dm^3$ C. $192dm^3$ D. $81dm^3$

Câu 50: Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\left(-x^2+7x-10\right)^{\frac{1}{3}}.$$

A. $\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$ B. $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$

C. $\mathbb{R}$ D. $(2;5)$

ĐỀ TỰ LUYỆN SỐ 10

(SỞ GD&ĐT QUẢNG NINH)

Câu 1: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=3+\dfrac{1}{x-3}$.

A. $y=-3$. B. $x=3$. C. $x=-3$. D. $y=3$.

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^4-3x^2+5$ và đường thẳng $y=9$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Tính x_1+x_2.

A. $x_1+x_2=3$. B. $x_1+x_2=0$.

C. $x_1+x_2=18$. D. $x_1+x_2=5$.

Câu 3: Hàm số nào trong bốm hàm số được liệt kê ở bốn phướng án A, B, C, D dưới đây, không có cực trị?

A. $y=x^3+3x^2-4x+1$. B. $y=-x^4-4x^2+3$.

C. $y=x^3-3x+5$. D. $y=\dfrac{x+4}{x-1}$.

Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x-1$.

A. $(-\infty;3)$. B. $(1;+\infty)$.

C. $(1;3)$. D. $(-\infty;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
y	-2	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	2

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của thàm số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-2;2]$. B. $(-2;2)$.

C. $(-\infty;+\infty)$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 6: Tìm điểm cực đại $x_{CĐ}$ (nếu có) của hàm số $y=\sqrt{x-3}-\sqrt{6-x}$.

A. $M(0;2;1)$.

B. $x_{CĐ}=6$.

C. $x_{CĐ}=\sqrt{6}$.

D. Hàm số không có điểm cực đại.

Câu 7: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x)=0,024x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp (x được tính bằng mg). Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.

A. $20\,mg$. B. $0,5\,mg$. C. $2,8\,mg$ D. $15\,mg$.

Câu 8: Tìm tất cả các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-3x^2+20}{x^2-5x-14}$.

A. $x=-2$ và $x=7$. B. $x=-2$.

C. $x=2$ và $x=-7$. D. $x=7$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m\sqrt{2+\tan^2 x}=m+\tan x$ có ít nhất một nghiệm thực.

A. $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$. B. $-1<m<1$.

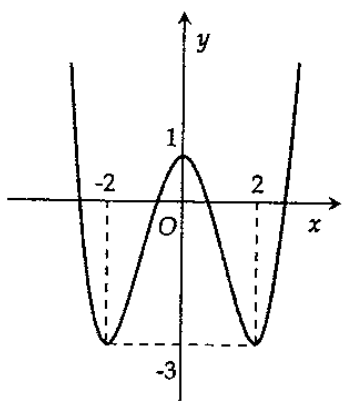
C. $-\sqrt{2}\le m\le\sqrt{2}$. D. $-1<m<1$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-4x^2+(1-m^2)x+1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối xứng với trục tung?

A. $-\dfrac{1}{3}<m<\dfrac{1}{3}$. B. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$.

C. $-1<m<1$. D. $-1<m<1$.

Câu 11: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^4+8x^2+1$. B. $y=x^4-8x^2+1$.

C. $y=-x^3+3x^2+1$. D. $y=|x|^3-3x^2+1$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(3x^2-1\right)^{-2}$

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

B. $D=\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

C. $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

D. $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{\frac{2}{3}}|x|$

A. $y'=\frac{\ln 3}{x\ln 2}$. B. $y'=\frac{\ln 3}{|x|\ln 2}$.

C. $y'=\frac{1}{|x|(\ln 2-\ln 3)}$. D. $y'=\frac{1}{x(\ln 2-\ln 3)}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\frac{2^x}{5^{x^2-1}}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định sai?

A. $f(x)>1\Leftrightarrow x>\left(x^2-1\right).\log_2 5$.

B. $f(x)>1\Leftrightarrow \frac{x}{1+\log_2 5}>\frac{x^2-1}{1+\log_5 2}$.

C. $f(x)>1\Leftrightarrow x.\log_{\frac{1}{3}} 2>\left(x^2-1\right).\log_2 5$.

D. $f(x)>1\Leftrightarrow x.\ln 2>\left(x^2-1\right).\ln 5$.

Câu 15: Tìm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3\left(1-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$

A. $x=0$. B. $x=1$.

C. $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. D. $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 16: Cho $a=\log_2 m$ với $0<m\ne 1$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\log_m 8m=\frac{3+a}{a}$. B. $\log_m 8m=(3-a)a$.

C. $\log_m 8m=\frac{3-a}{a}$. D. $\log_m 8m=(3+a)a$.

Câu 17: Một học sinh giải bất phương trình:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}}\le\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5}.$$

Bước 1: Điều kiện $x\ne 0$.

Bước 2: Vì $0<\frac{2}{\sqrt{5}}<1$ nên

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-\frac{1}{x}}\le\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{-5}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le 5$$

Bước 3: Từ đó suy ra $1\le 5x\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{5}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$.

A. Sai ở bước 1. B. Sai ở bước 2.

C. Sai ở bước 3. D. Đúng.

Câu 18: Cho hàm số $y=\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-2x+2}$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số luôn đồng biến trên trên $(-\infty;1)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 19: Với những giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=3^{x+1}$ nằm phía trên đường thẳng $y=27$.

A. $x>2$. B. $x>3$. C. $x\le 2$. D. $x\le 3$.

Câu 20: Một loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận một lượng nhỏ Carbon 14 (một đơn vị của Carbon). Khi cây đó chết đi thì hiện tượng quang hợp cũng sẽ ngưng và nó sẽ không nhận Carbon 14 nữa. Lượng Carbon 14 của nó sẽ phân hủy chậm chạp và chuyển hóa thành Nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm Carbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức:

$$P(t)=100.(0,5)^{\frac{t}{5350}}\%.$$

Phân tích một mẫu gỗ từ công trình kiến trúc gỗ, người ta thấy lượng Carbon 14 còn lại trong gỗ là $65,21\%$. Hãy xác định số tuổi của công trình kiến trúc đó.

A. 3574 (năm). B. 3754 (năm).
C. 3475 (năm). D. 3547 (năm).

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng

$S=f\left(\frac{1}{2015}\right)+f\left(\frac{2}{2015}\right)+f\left(\frac{3}{2015}\right)+\dots+f\left(\frac{2013}{2015}\right)+f\left(\frac{2014}{2015}\right)$

A. 2014. B. 2015. C. 1008. D. 1007.

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos(2x+1)+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\cos(2x+1)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos(2x+1)+C$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn:

$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7,\ \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3.$$

Tính $P=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=10$. B. $P=4$. C. $P=7$. D. $P=-4$.

Câu 24: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 2+2$. B. $F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2+2$.

C. $F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2-2$. D. $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 2-2$.

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. B. $I=-2$. C. $I=0$. D. $I=1$.

Câu 26: Giả sử:

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3;\ a,b\in\mathbb{Q}.$$

Tính $P=ab$.

A. $P=8$. B. $P=-6$. C. $P=-4$. D. $P=-5$.

Câu 27: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V=-\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. B. $V=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

C. $V=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$. D. $V=\pi\left(2-\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 28: Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc $10(\mathrm{m/s})$ thì anh ta tăng tốc với vận tốc $a(t)=6t(\mathrm{m/s^2})$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(\mathrm{s})$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. $1100\mathrm{m}$. B. $100\mathrm{m}$.

C. $1010\mathrm{m}$. D. $1110\mathrm{m}$.

Câu 29: Cho số phức $z_1=1+3i$ và $z_2=3-4i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{15}$. C. 4. D. 8.

Câu 30: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. 15. B. 20. C. 19. D. 17.

Câu 31: Tìm điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $(1+i)z+(2+i)\bar{z}=3+i$.

A. $(1;-1)$. B. $(1;2)$. C. $(1;1)$. D. $(-1;1)$.

Câu 32: Cho số phức $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $z^5+z^6+z^7+z^8$.

A. 4. B. 0. C. $4i$. D. 2.

Câu 33: Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$. B. $z=-2+2i$.

C. $z=2+2i$. D. $z=3+2i$.

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$.

A. $P=1-i$. B. $P=-1-i$.

C. $P=-1$. D. $P=1+i$.

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$, các cạnh bên có chiều dài là $2a$. Tính chiều cao của hình chóp đó theo a.

A. $a\sqrt{2}$. B. $2a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 36: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của một hình tứ diện đều bằng 14.

B. Số cạnh của một hình hai mươi mặt đều bằng 30.

C. Số mặt của một hình mười hai mặt đều bằng 12.

D. Số đỉnh của một hình bát diện đều bằng 8.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC=a$, $ACB=60°$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc $30°$. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a.

A. $V=\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V=a^3\sqrt{6}$.

C. $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 39: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=2, AC=\sqrt{5}$ quay xung quanh cạnh AC tạo thành hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

A. $S_{xq}=2\sqrt{5}\pi$. B. $S_{xq}=12\pi$.

C. $S_{xq}=6\pi$. D. $S_{xq}=3\sqrt{5}\pi$.

Câu 40: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

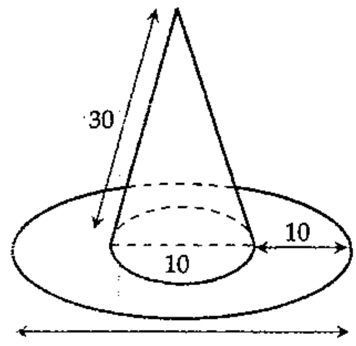
C. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\frac{5\pi a^3\sqrt{15}}{18}$. B. $\frac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$.

C. $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 42: Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềm, mép)



A. 350π. B. 400π.

C. 450π. D. 500π.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;2;1)$ và $N(1;3;0)$. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng Oxz.

A. $E(2;0;3)$. B. $H(-2;0;3)$.

C. $F(2;0;-3)$. D. $K(-2;1;3)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(1;-2;1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

A. $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

B. $\Delta:\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$.

C. $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$.

D. $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{1-z}{-2}$ và

A. 3574 (năm). B. 3754 (năm).
C. 3475 (năm). D. 3547 (năm).

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính tổng $S=f\left(\dfrac{1}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2}{2015}\right)+f\left(\dfrac{3}{2015}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2013}{2015}\right)+f\left(\dfrac{2014}{2015}\right)$

A. 2014. B. 2015. C. 1008. D. 1007.

Câu 22: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin(2x+1)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\cos(2x+1)+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{-1}{2}\cos(2x+1)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\cos(2x+1)+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos(2x+1)+C$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn:

$$\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7,\ \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3.$$

Tính $P=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $P=10$. B. $P=4$. C. $P=7$. D. $P=-4$.

Câu 24: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 2+2$. B. $F(0)=-\dfrac{2}{3}\ln 2+2$.

C. $F(0)=-\dfrac{2}{3}\ln 2-2$. D. $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 2-2$.

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} x\cos x\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. B. $I=-2$. C. $I=0$. D. $I=1$.

Câu 26: Giả sử:

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3;\ a,b\in\mathbb{Q}.$$

Tính $P=a.b$.

A. $P=8$. B. $P=-6$. C. $P=-4$. D. $P=-5$.

Câu 27: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\tan x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4}$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V=-\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$. B. $V=\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $V=\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$. D. $V=\pi\left(2-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 28: Một vận động viên đua xe F đang chạy với vận tốc $10(\mathrm{m/s})$ thì anh ta tăng tốc với vận tốc $a(t)=6t\left(\mathrm{m/s}^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc tăng tốc. Hỏi quãng đường xe của anh ta đi được trong thời gian $10(\mathrm{s})$ kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là bao nhiêu?

A. $1100\mathrm{m}$. B. $100\mathrm{m}$.
C. $1010\mathrm{m}$. D. $1110\mathrm{m}$.

Câu 29: Cho số phức $z_1=1+3i$ và $z_2=3-4i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $\sqrt{17}$. B. $\sqrt{15}$. C. 4. D. 8.

Câu 30: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. 15. B. 20. C. 19. D. 17.

Câu 31: Tìm điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $(1+i)z+(2+i)\bar{z}=3+i$.

A. $(1;-1)$. B. $(1;2)$. C. $(1;1)$. D. $(-1;1)$.

Câu 32: Cho số phức $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Tính $z^5+z^6+z^7+z^8$.

A. 4. B. 0. C. $4i$. D. 2.

Câu 33: Cho số phức z thoả mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$. B. $z=-2+2i$.
C. $z=2+2i$. D. $z=3+2i$.

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2$.

A. $P=1-i$. B. $P=-1-i$.
C. $P=-1$. D. $P=1+i$.

Câu 35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a\sqrt{2}$, các cạnh bên có chiều dài là $2a$. Tính chiều cao của hình chóp đó theo a.

A. $a\sqrt{2}$. B. $2a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 36: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Tổng số đỉnh, số cạnh và số mặt của một hình tứ diện đều bằng 14.

B. Số cạnh của một hình hai mươi mặt đều bằng 30.

C. Số mặt của một hình mười hai mặt đều bằng 12.

D. Số đỉnh của một hình bát diện đều bằng 8.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC=a$, $ACB=60°$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc $30°$. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a.

A. $V=\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V=a^3\sqrt{6}$.

C. $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. D. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 39: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=2, AC=\sqrt{5}$ quay xung quanh cạnh AC tạo thành hình nón tròn xoay. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đó.

A. $S_{xq}=2\sqrt{5}\pi$. B. $S_{xq}=12\pi$.

C. $S_{xq}=6\pi$. D. $S_{xq}=3\sqrt{5}\pi$.

Câu 40: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

A. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

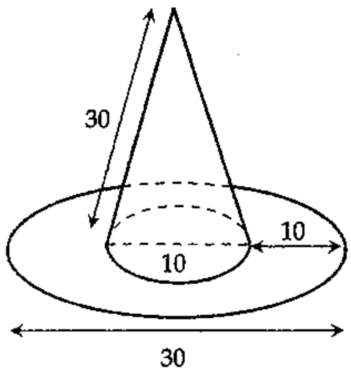
C. $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi a^2\sqrt{6}}{2}$

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\frac{5\pi a^3\sqrt{15}}{18}$. B. $\frac{5\pi a^3\sqrt{15}}{54}$.

C. $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. D. $\frac{5\pi a^3}{3}$.

Câu 42: Tính diện tích vải cần có để may một cái mũ có hình dạng và kích thước (cùng đơn vị đo) được cho bởi hình vẽ bên (không kể riềm, mép)



A. 350π. B. 400π.

C. 450π. D. 500π.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;2;1)$ và $N(1;3;0)$. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng Oxz.

A. $E(2;0;3)$. B. $H(-2;0;3)$.

C. $F(2;0;-3)$. D. $K(-2;1;3)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$ và $B(1;-2;1)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

A. $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$.

B. $\Delta:\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$.

C. $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2}$.

D. $\Delta:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{1-z}{-2}$ và

$d':\begin{cases}x=4t\\y=1+6t\\z=-1+4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'.

A. d và d' song song với nhau.

B. d và d' trùng nhau.

C. d và d' cắt nhau.

D. d và d' chéo nhau.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2)B(2;-1;3)$, Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=2+t\end{cases}$.

B. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

C. $\Delta: x-y+z-3=0$.

D. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $(Q): 2y+3z-1=0$.

B. $(Q): 2x+3z-11=0$.

C. $(Q): 2y+3z-12=0$.

D. $(Q): 2y+3z-11=0$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$ và cho mặt phẳng $(P): 2x+2y-z-18=0$. Tìm phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) đồng thời (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S).

A. $(Q): 2x+2y-z+22=0$.

B. $(Q): 2x+2y-z-28=0$.

C. $(Q): 2x+2y-z-18=0$.

D. $(Q): 2x+2y-z+12=0$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;-3;2)$, $B(1;0;1)$, $C(2;3;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

A. $3x-y-3z=0$.

B. $3x+y+3z-6=0$.

C. $15x-y-3z-12=0$.

D. $y+3z-3=0$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x+2y+3z-11=0$.

B. $(P): x+2y+3z-14=0$.

C. $(P): x+2y+z-14=0$.

D. $(P): x+y+z-6=0$.

Tài liệu tham khảo

1. Sách giáo khoa Toán cơ bản lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục

2. Sách giáo khoa Toán nâng cao lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục

3. Sách bài tập Toán cơ bản lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục

4. Sách bài tập Toán nâng cao lớp 10, 11, 12, NXB Giáo Dục

5. Bộ đề tinh túy Toán, 2016 – Nhóm tác giả Lovebook, NXB Đại học Quốc gia HN

6. Tạp chí Toán học – Tuổi trẻ, NXB Giáo Dục

7. Calculus with Analytic Geometry, 4th edition, Murray H. Protter, University of California, Berkeley.

8. Introduction to Mathematical Physics, 2nd edition, Chun Wa Wong, Oxford Press

9. Applications of Caculus, MAA Notes Number 29, Philips Straffin.

10. Elementary Calculus of Financial Mathematics.

Từ bỏ là đánh mất hạnh phúc

Hãy biết nỗ lực cho đến giây phút cuối cùng, cho đến thời điểm kết quả ngã ngũ, để không tiếc nuối và dằn vặt vì hai từ "giá như".

Chúng ta đã bao nhiêu lần bỏ qua cơ hội được đón nhận hạnh phúc cho mình? Là những lần dễ dàng buông tay đánh rơi những cơ hội khác nhau, là những lần mặc nhiên cắt đứt tất cả cội rễ tình cảm để cố kiếm tìm những cái khác xa xôi hơn?

Mỗi một lần từ bỏ, là một lần đánh mất cơ hội để hạnh phúc. Bởi vì may mắn vốn chỉ là một vài lần ghé qua. Khi còn trẻ, người ta dễ dàng từ bỏ cơ hội để được hạnh phúc, vì người ta nghĩ rằng, sẽ có những thứ hạnh phúc khác tìm đến. Thế nhưng, người ta không biết rằng, hạnh phúc thật sự chỉ đến một lần trong đời mà thôi.
Tức là, nếu không nắm lấy thì sẽ mất vĩnh viễn, nếu không trân trọng thì sẽ chẳng có lần sau.
Cuộc đời có bao nhiêu thời gian để phung phí, cũng như cơ hội đến bao nhiêu lần để mà đứng nhìn nó lướt qua? Từ bỏ hay khước từ, cũng chính là một cách thức nhận thua quá sớm, khi trở thành kẻ hèn nhát mỗi khi gặp thử thách đón đường.

Thế nên, khi tình yêu đến thì hãy nắm lấy thật chặt, khi cơ may đến thì hãy biết tận dụng, có điều kiện thì hãy phấn đấu hết mình cho những mục tiêu, khi còn có thể thì đừng buông bỏ bất cứ thứ gì, kể cả ước mơ thời thơ bé.

Nếu bạn chưa cố gắng hết mình mà từ bỏ, nếu bạn chưa thử níu kéo mà từ bỏ, nếu bạn vì ngần ngại chần chừ mà từ bỏ, có thể, bạn đã bỏ qua hạnh phúc lớn lao nhất của cuộc đời mình.
Không từ bỏ không phải là cố chấp giằng co, không từ bỏ chính là việc bạn thử cố gắng để giữ lại những thứ thuộc về mình, hoặc những thứ nên thuộc về mình, chứ không phải cố ngoái lại những gì đã chẳng phải là của mình nữa.

Không từ bỏ có nghĩa là, bạn đem tất cả khả năng và nỗ lực của bản thân ra đánh cược, để rồi kể cả có thua cuộc cũng không hổ thẹn vì buông tay quá sớm, cũng không tiếc nuối vì đã cố gắng hết mình.
Nhiều trong chúng ta đều cho rằng, cuộc đời dài đằng đẵng, rồi sẽ có rất nhiều cơ hội sẽ dẫn đến phía sau lưng, thế nên chỉ đợi chờ mà không gắt gao nắm lấy từng mảnh vỡ nhỏ nhặt để ghép thành cuộc sống cho riêng mình.

Nhưng, những gì đã đi qua, còn có thể lấy lại lần nữa hay sao?
Hãy biết nâng niu những thứ đến gần với cuộc sống của bạn, hãy biết trân trọng từng chút một những thứ hạnh phúc bé nhỏ thuộc về mình, rồi sẽ có ngày, bạn sẽ nhận thấy mình sáng suốt biết bao, vì đã không từ bỏ. Hãy biết nỗ lực cho đến giây phút cuối cùng, cho đến thời điểm kết quả ngã ngũ, để không tiếc nuối và dằn vặt vì hai từ "giá như".

Những người hay nói "giá như", là những người thường từ bỏ dễ dàng, là những người bỏ qua quá nhiều cơ hội để hạnh phúc, là những người sẽ ôm sự nuối tiếc đến mãi về sau.
Vậy nên cho dù thế nào cũng đừng từ bỏ điều gì quá dễ dàng, bởi vì chỉ cần một lần vô tâm mà nới lỏng tay, hạnh phúc có thể sẽ theo những thứ trượt ra khỏi cuộc sống của bạn khi ấy, và bay mất, không trở về.

Bạn à, thế nên, đừng nghĩ đến việc từ bỏ cái gì quá sớm, bởi vì biết đâu đấy, chỉ cần kiên nhẫn một chút, bạn sẽ giữ được hạnh phúc cả đời của mình ...

Cuối cùng, toàn thể anh chị em ĐẠI GIA ĐÌNH LOVEBOOK muốn gửi riêng tới các em học sinh:

Nhất định các em sẽ làm được

Đừng bao giờ nản chí các em nhé!