SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN**
TỈNH YÊN BÁI	**DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT**
	NĂM HỌC 2021 - 2022

ĐỀ 01	Môn thi: **TOÁN**
(Đề thi có 05 câu, gồm 01 trang)	Thời gian: **180 phút** *(không kể giao đề)*
	Ngày thi: **29/9/2021.**

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=12 \\ x^5+y^5+z^5=120 \end{cases}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}^3-3u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}, \forall n\geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho tam giác ABC $\left(ABC<ACB\right)$ vuông tại A và nội tiếp đường tròn (ω). Tiếp tuyến tại A của (ω) cắt đường thẳng BC tại D, E là điểm đối xứng của A qua đường thẳng BC, X là hình chiếu vuông góc của A lên BE, Y là trung điểm của AX, đường thẳng BY cắt đường tròn (ω) tại điểm thứ hai là Z. Chứng minh BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADZ.

Câu 4. *(4,0 điểm)*

1) Một lớp học có 17 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 37 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho xuất hiện đúng một cặp nam - nữ mà học sinh nam đứng trước học sinh nữ?

2) Một dãy phòng có 19 phòng. Ban đầu mỗi phòng có một người. Sau đó cứ mỗi ngày có hai người nào đó được chuyển sang hai phòng bên cạnh nhưng theo hai chiều ngược nhau. Hỏi sau một số ngày có hay không trường hợp mà

a) không có ai ở phòng thứ tự chẵn.

b) có 10 người ở phòng cuối.

Câu 5. *(4,0 điểm)*

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số nguyên dương n,x,y thỏa mãn $p^n=x^3+y^3$.

................................Hết................................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **TỈNH YÊN BÁI**	**KỲ THI LẬP ĐỘI TUYỂN** **DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT** **NĂM HỌC 2021 - 2022**
ĐỀ 01 *(Đề thi có 04 câu, gồm 01 trang)*	Môn thi: **TOÁN** Thời gian: **180 phút** *(không kể giao đề)* Ngày thi: **30/9/2021.**

Câu 1. *(5,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{21}{2}$$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(2022 f\left(x+y\right)\right) = f(x+y) + 2022 f(x) f(y) - \frac{xy}{2022}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Câu 3. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A di động trên (O) sao cho tam giác ABC $(AB < AC)$ nhọn và không cân. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của BC. Các đường thẳng BH, CH cắt các cạnh đối diện tại E, F. Các đường tròn (IBF) và (ICE) cắt nhau tại D khác I.

1) Chứng minh rằng đường thẳng AD luôn đi qua một điểm cố định và giao điểm của hai đường thẳng DH và EF nằm trên một đường thẳng cố định.

2) Gọi AL là đường phân giác góc A của tam giác ABC với $L \in BC$. Đường tròn (ADL) cắt (O) tại K khác A và cắt đường thẳng BC ở S (S không nằm trong đoạn BC). Giả sử AK, AS cắt đường tròn (AEF) lần lượt ở G, T. Chứng minh rằng $TG = TD$.

Câu 4. *(5,0 điểm)*

1) Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ đồng thời $a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$ là số nguyên tố.

2) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n luôn tồn tại số tự nhiên x sao cho $f\left(x\right) = 64x^2 + 21x + 27$ chia hết cho 2^n.

.................................*Hết*.................................