SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12
CHƯƠNG TRÌNH THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2021-2022
ĐỀ THI MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. Cho dãy số (x_n), (y_n), (z_n), $n=1,2,...$ được xác định như sau:

$$x_1 = 2021,\ x_{n+1} = 2022 + \sum_{k=1}^{n}(kx_k),\ y_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k},\ z_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[k]{x_k}},\ n = 1,2,...$$

a) Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $z_p > 2021^{2022}$.

Câu 2. Cho hàm số $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $f(x)+f(y)-xy$ là ước số nguyên dương của $xf(x)+y^3$ với mọi số nguyên dương x, y.

a) Tính các giá trị của $f(1), f(2), f(3)$.

b) Tìm tất cả các hàm số đã cho.

Câu 3. Cho m, n là các số nguyên dương. Kí hiệu $S(m,n)$ là số bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ gồm n số nguyên $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i) $0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le n$.

(ii) $x_1 + x_2 + ... + x_n$ chia hết cho m.

Tính các giá trị của $S(m,n)$ khi:

a) $m=3, n=6$.

b) $m=47, n=2021$.

Câu 4. Cho đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng Δ. Tam giác ABC thay đổi và ngoại tiếp đường tròn (I) sao cho hai đỉnh B, C nằm trên đường thẳng Δ; trung điểm E của đoạn thẳng AD nằm trên đường tròn (I), trong đó D là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ. Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EJ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BEC. Đường thẳng EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC tại điểm thứ hai là G. Chứng minh rằng đường thẳng GJ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BFC.

------------**Hết**------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:...; Số báo danh:....................