SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT LÊ LAI

Mã đề thi: 132

ĐỀ THI KSCL CÁC MÔN THI TỐT NGHIỆP THPT LẦN 3
NĂM HỌC 2020 - 2021
Bài thi : **TOÁN**
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian giao đề
Đề thi gồm có 50 câu; 06 trang

Họ và tên thí sinh ……………………………………… SBD:………………

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

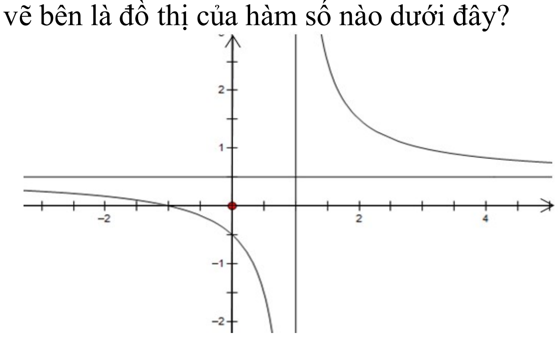
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và công bội $q = 6$. Giá trị của u_2 bằng

A. 8. **B.** 36. **C.** 3. **D.** 12.

Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \dfrac{x+1}{2x-2}$. **B.** $y = x^3 - 3x + 2$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 - 3$. **D.** $y = -x^3 + 3x - 1$.

Câu 4. Với a là số thực dương và $a \neq 1$, khi đó $\log_a(a^2)$ bằng

A. 3. **B.** a. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5. Biết $\int_1^5 f(x)dx = 6, \int_1^5 g(x)dx = -2$. Giá trị của $\int_1^5 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 8. **B.** -12. **C.** -3. **D.** 4.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ là đường thẳng

A. $y = 2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Câu 7. Số giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - 2x + 1$ và $y = x^2 + x + 1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y = 2021^x$ là

A. $y' = \dfrac{2021^x}{\ln 2021}$. **B.** $y' = 2021^x \ln 2021$. **C.** $y' = x.2021^x$. **D.** $y' = 2021^x$.

Câu 9. Cho a là số thực dương tùy ý, viết biểu thức $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}$ về dạng luỹ thừa của a là

A. a^2. **B.** $a^{-\frac{7}{3}}$. **C.** $a^{\frac{2}{9}}$. **D.** $a^{\frac{11}{3}}$.

Câu 10. Trong các số phức sau, số phức nào là số thuần ảo?

A. $z=4$. **B.** $z=-3+\sqrt{3}i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $z=-i$.

Câu 11. Lớp 12A1 có 35 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 em làm cán bộ lớp, trong đó 1 em làm bí thư, 1 em làm lớp trưởng, 1 em làm lớp phó, biết rằng 35 em đều có khả năng như nhau?

A. 35^3. **B.** A_{35}^3. **C.** C_{35}^3. **D.** $3!$.

Câu 12. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+e^x$ là

A. x^2+e^x+C. **B.** $2x^2+e^x+C$. **C.** $1+e^x+C$. **D.** $\frac{1}{2}x^2+e^x+C$.

Câu 13. Cho $F(x)=\int x\cos x dx$. Khi đó $F(x)$ bằng

A. $x\sin x+\cos x+C$. **B.** $x\sin x+C$. **C.** $x\cos x+C$. **D.** $x\sin x-\cos x+C$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $3^{2x+1}=27$ là

A. $x=5$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Câu 15. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)=2$ là

A. $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=5$. **D.** $x=3$.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 17. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)=x(x-1)$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 19. Tính thể tích của khối chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $3a$.

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** a^3. **D.** $3a^2$.

Câu 20. Cho số phức $z=20i-21$. Môđun của số phức z bằng

A. $|z|=20$. **B.** $|z|=\sqrt{29}$. **C.** $|z|=29$. **D.** $|z|=841$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=3-t\\y=-2+3t\\z=5\end{cases}$. Véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d:?

A. $\vec{u}=(3;-2;5)$. **B.** $\vec{u}=(-3;2;-5)$. **C.** $\vec{u}=(-1;3;5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;3;0)$.

Câu 22. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là a, độ dài đường sinh là $3a$. Khi đó thể tích của khối trụ là

A. $3\pi a^3$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **C.** πa^3. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$.

Câu 23. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $7cm^2$, chiều cao bằng $3cm$. Thể tích khối lăng trụ đó bằng

A. $21\ cm^3$. **B.** $63cm^3$. **C.** $7\ cm^3$. **D.** $147\ cm^3$.

Câu 24. Cho hai số phức $z_1 = 1 - 4i$ và $z_2 = 2 + i$. Tìm số phức $w = 2z_1 - 3z_2$.

A. $w = -4 + 11i$. **B.** $w = -4 - 11i$. **C.** $w = 4 + 11i$. **D.** $w = 4 - 11i$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu *(S)*: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 5 = 0$. Mặt cầu *(S)* có toạ độ tâm I là

A. $I(-1;-3;2)$. **B.** $I(2;6;-4)$. **C.** $I(1;3;-2)$. **D.** $I(-2;-6;4)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-3)$, $B(-2;1;-1)$.Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là.

A. $\overrightarrow{AB} = (3;-1;-2)$ **B.** $\overrightarrow{AB} = (-3;1;2)$ **C.** $\overrightarrow{AB} = (-3;1;-2)$ **D.** $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;2)$

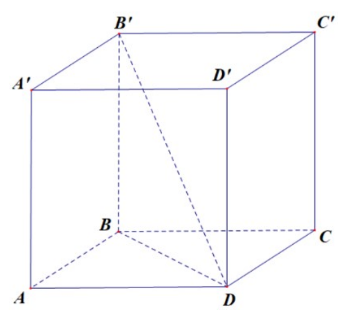
Câu 27. Một mặt cầu có diện tích là 2π thì có bán kính bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 12x$ trên đoạn $[0;3]$. Giá trị $M - m$ bằng

A. 4. **B.** 16. **C.** 64. **D.** 32.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $2a$ (tham khảo hình bên). Tang của góc giữa đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5.4^x + 4 \ge 0$ là:

A. $T = (-\infty;1] \cup [4;+\infty)$. **B.** $T = (-\infty;1) \cup (4;+\infty)$.

C. $T = (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$. **D.** $T = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;2;1)$ và $B(2;4;5)$. Mặt cầu (S) có đường kính AB có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 14$. **B.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 56$.

C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 56$. **D.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 14$.

Câu 32. Cho số phức z thỏa mãn $z - (2+3i)\overline{z} = 1 - 9i$. Tính tích phần thực và phần ảo của số phức z.

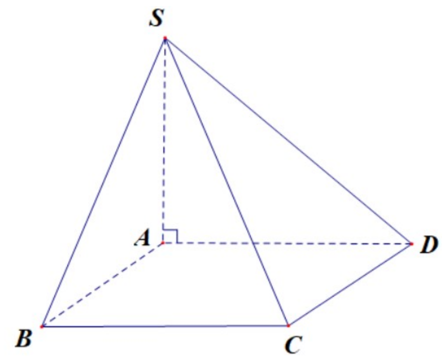
A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;-1)$ và song song với đường thẳng

$d:\begin{cases}x=1-t\\y=5+2t\\z=2+3t\end{cases}$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=-1+t\\y=2+2t\\z=3-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=-1+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+2t\\z=1+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=-1+3t\end{cases}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy (tham khảo hình bên). Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).



A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{a\sqrt{39}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{2a}{13}$.

Câu 35. Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x dx = a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** 5. **D.** -3.

Câu 36. Cho hàm số: $y=f(x)=x^3+3x^2+3x+2$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại $x=1$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

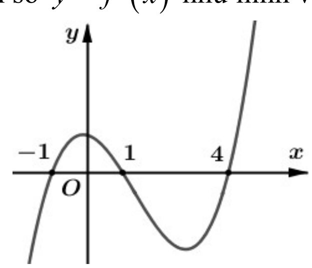
Câu 37. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(2;-2;5);B(-4;6;3)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là:

A. $3x-4y+z-7=0$. **B.** $3x-4y+z+7=0$. **C.** $3x-4y+z-19=0$. **D.** $x+y+z-5=0$.

Câu 38. Cho 20 thẻ được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Rút ngẫu nhiên hai thẻ. Tính xác suất để tổng hai số được ghi trên hai thẻ là số chẵn.

A. $\frac{9}{19}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{9}{38}$. **D.** $\frac{10}{19}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



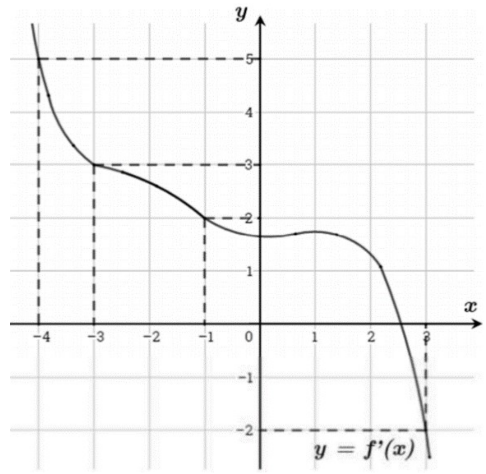
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 40. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x+3y-2z+2=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;-1)$, cắt mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt tại B và C sao cho C là trung điểm AB là

A. $\begin{cases} x=-17+18t \\ y=5+3t \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1-18t \\ y=2-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+18t \\ y=2-3t \\ z=-1+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-17+18t \\ y=5-3t \\ z=-t \end{cases}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên đoạn $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào?



A. $x=-4$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-1$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD, cạnh bên SB hợp với đáy một góc $60°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$.

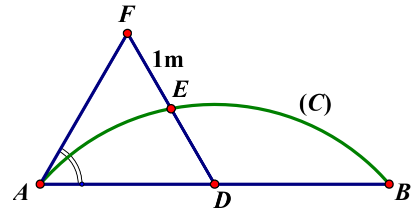
Câu 43. Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z|=5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P=|a|+|b|$.

A. $P=7$ **B.** $P=4$ **C.** $P=8$ **D.** $P=5$

Câu 44. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & khi\ x\ge 1 \\ 2x & khi\ x<1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin 2x.f(2\sin^3 x)dx$ bằng

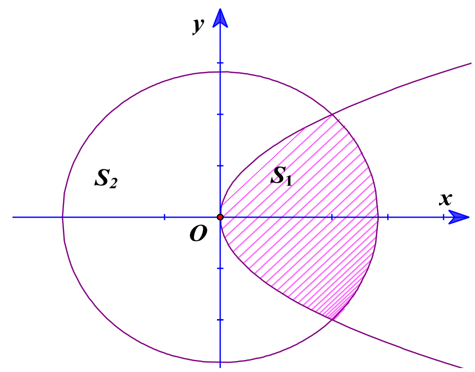
A. $\frac{5}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{13}{9}$.

Câu 45. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB=4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây lan can là cung tròn đi qua điểm E cách D một khoảng là 1m (D là trung điểm của AB). Biết $AF=2m$, $\widehat{DAF}=60^0$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/m^2. Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



A. $8,124,000$. **B.** $9,977,000$. **C.** $10,405,000$. **D.** $7,568,000$.

Câu 46. Biết rằng parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (như hình vẽ). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \frac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.



A. $S = 13$. **B.** $S = 15$ **C.** $S = 14$. **D.** $S = 16$.

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+i)|z|z - (1-2i)z\right| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

A. $M = \sqrt{19}$. **B.** $M = 5$. **C.** $M = 19$. **D.** $M = 25$.

Câu 48. Cho $0 \le x, y \le 1$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \frac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$. Khi đó $M + m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{391}{16}$. **B.** $\frac{136}{3}$. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $\frac{383}{16}$.

Câu 49. Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2021}(x+y) \le 0$ và $x + y + \sqrt{2xy + m} \ge 1$

A. $m = -\frac{1}{3}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = 0$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

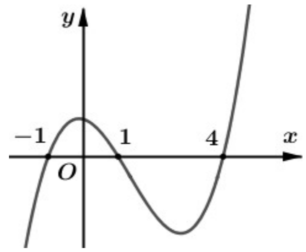
A. $a + b + c = 8$. **B.** $a + b + c = 6$. **C.** $a + b + c = 5$. **D.** $a + b + c = 7$.

------ HẾT ------

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	**2.D**	**3.A**	**4.C**	**5.A**	**6.C**	**7.D**	**8.B**	**9.B**	**10.D**
11.B	**12.D**	**13.A**	**14.B**	**15.D**	**16.B**	**17.C**	**18.C**	**19.C**	**20.C**
21.D	**22.A**	**23.A**	**24.B**	**25.C**	**26.D**	**27.D**	**28.B**	**29.C**	**30.C**
31.D	**32.A**	**33.B**	**34.C**	**35.A**	**36.D**	**37.B**	**38.A**	**39.B**	**40.D**
41.D	**42.A**	**43.A**	**44.D**	**45.B**	**46.B**	**47.A**	**48.A**	**49.C**	**50.D**

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $g'(x) = 2f'(x).e^{2f(x)+1} + f'(x).5^{f(x)}.\ln 5 = f'(x).\left[2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}.\ln 5\right]$.

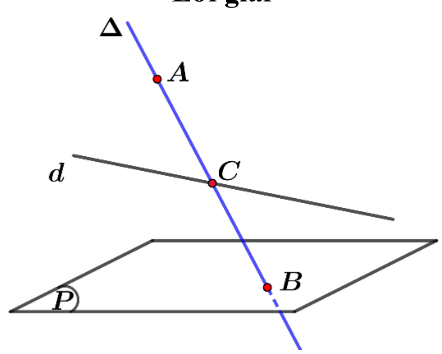
Vì $2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}.\ln 5 > 0$ với mọi x nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Câu 40. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;-1)$, cắt mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt tại B và C sao cho C là trung điểm AB là

A. $\begin{cases} x = 1 + 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 + 3t \\ z = t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 - 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$.

Lời giải



Từ giả thiết ta có: $C \in d \Rightarrow C(1 + 2t; -1 - t; 4 + t)$.

Do C là trung điểm của $AB \Rightarrow B(4t + 1; -2t - 4; 2t + 9)$.

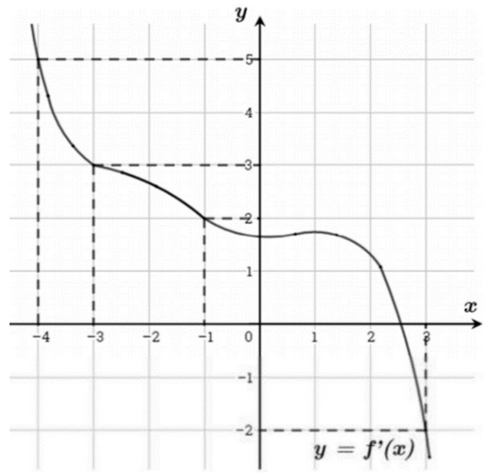
Ta có : $\Delta \cap (P) = B \Rightarrow B \in (P) \Rightarrow 4t + 1 + 3(-2t - 4) - 2(2t + 9) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{9}{2}$.

Suy ra $B(-17;5;0)$. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm B và A.

Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{BA} = (18; -3; -1)$.

Vậy phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào?



A. $x=-1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=-3$.

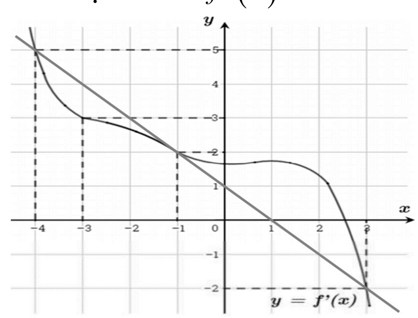
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=2f(x)+(1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

Ta có: $g'(x)=2f'(x)-2(1-x)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1-x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y=1-x$.



Từ đồ thị ta thấy $f'(x)=1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-4)$	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$

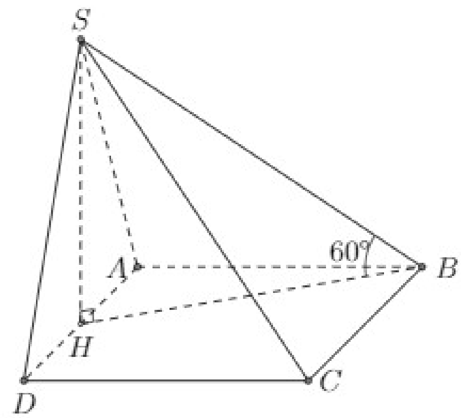
Vậy $\min\limits_{[-4;3]} g(x)=g(-1) \Leftrightarrow x=-1$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AD, cạnh bên SB hợp với đáy một góc $60°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow BH$ là hình chiếu vuông góc của SB trên $(ABCD)$.

$\Rightarrow \widehat{SBH} = \widehat{(SB,(ABCD))} = 60°$.

ΔABH vuông tại $A \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

ΔSBH vuông tại $H \Rightarrow SH = HB.\tan 60° = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 43. Cho số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z| = 5$ và $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực. Tính $P = |a| + |b|$.

A. $P = 8$ **B.** $P = 4$ **C.** $P = 5$ **D.** $P = 7$

Lời giải

Ta có $z(2+i)(1-2i) = (a+bi)(4-3i) = 4a + 3b + (-3a+4b)i$. (1)

Do $z(2+i)(1-2i)$ là một số thực nên từ (1) suy ra $-3a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}a$. (2)

Mặt khác $|z| = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$. (3)

Thế (2) vào (3) ta được phương trình $a^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm 4$.

Với $a = 4 \Rightarrow b = 3$ và $a = -4 \Rightarrow b = -3$.
Vậy $P = |a| + |b| = 3 + 4 = 7$.

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \ge 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin 2x.f\left(2\sin^3 x\right)dx$ bằng

A. $\frac{13}{9}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn A

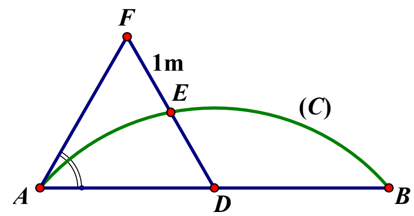
Đặt $t = 2\sin^3 x$

$\Rightarrow dt = 2.3\sin^2 x.\cos x dx$

$\Leftrightarrow dt = 3\sin 2x.\sin x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.\sin 2x.f\left(2\sin^3 x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{1}{3}\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left[\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx\right] = \frac{1}{3}\left[\int_0^1 (2\mathrm{x})\,dx + \int_1^2 \left(x^2+1\right)dx\right] = \frac{13}{9}.$$

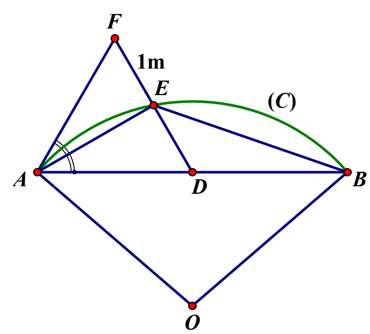
Câu 45. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An xây lan can là cung tròn đi qua điểm E cách D một khoảng là 1m (D là trung điểm của AB). Biết $AF = 2m$, $\widehat{DAF} = 60^0$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/m^2. Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



A. $7,568,000$. **B.** $10,405,000$. **C.** $9,977,000$. **D.** $8,124,000$.

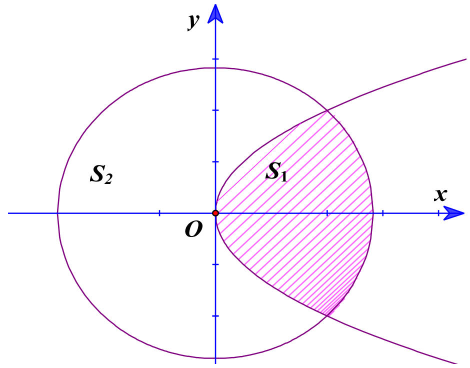
Lời giải

Theo giả thiết, ta có ΔAFD đều nên $FD = 2m$ suy ra $ED = 1m$, $\widehat{EAD} = 30^0$ và $\widehat{EDB} = 120^0$.
Trong tam giác ΔEDB có $EB^2 = DE^2 + DB^2 - 2DE.DB.\cos 120^0 = 7$.
Gọi R là bán kính của đường tròn (C) tâm O, áp dụng định lý sin trong tam giác ΔAEB ta có $\dfrac{EB}{\sin \widehat{EAD}} = 2\mathrm{R}$, suy ra $R = \sqrt{7}$.



Xét tam giác OAB có $R = OA = OB = \sqrt{7}$, $AB = 4$, suy ra $\cos \widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA.OB} = -\dfrac{1}{7}$.
Khi đó $\widehat{AOB} \simeq 98,2^0$, suy ra độ dài cung (C) xấp xỉ $4,54m$.
Vì chiều cao của lan can là $1m$ và giá kính là 2,2 triệu/m^2 nên số tiền ông An phải trả xấp xỉ $9,977,000$ đ.

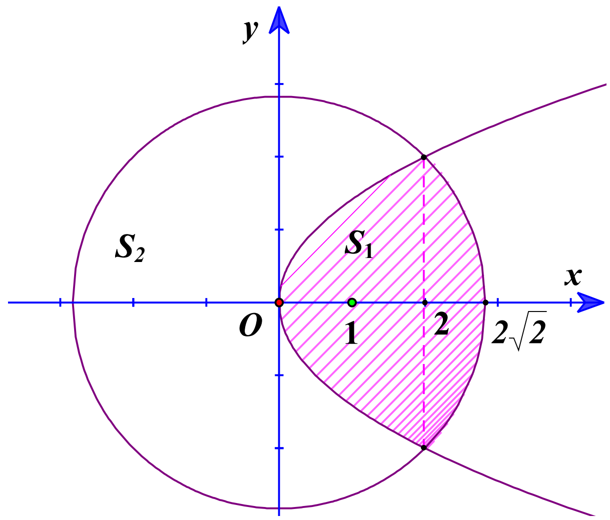
Câu 46. Biết rằng parabol $(P): y^2 = 2x$ chia đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần lần lượt có diện tích là S_1, S_2 (như hình vẽ). Khi đó $S_2 - S_1 = a\pi - \dfrac{b}{c}$ với a, b, c nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.



A. $S=13$. **B.** $S=16$. **C.** $S=15$ **D.** $S=14$.

Lời giải

Chọn C



Xét hệ $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8=0 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \vee x=2 \\ y^2=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y^2=4 \end{cases}$.

$S_1=2\int\limits_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x+2\int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\mathrm{d}x$

$I_1=2\int\limits_0^2 \sqrt{2x}\mathrm{d}x=\left(2.\sqrt{2}.\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^2=\frac{16}{3}$.

$I_2=2\int\limits_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2}\mathrm{d}x$

Đặt $x=2\sqrt{2}\cos t \Rightarrow \mathrm{d}x=-2\sqrt{2}\sin t\mathrm{d}t$

$x=2 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, $x=2\sqrt{2} \Rightarrow t=0$.

$I_2=2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{8-8\cos^2 t}\left(-2\sqrt{2}\sin t\mathrm{d}t\right) =16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\mathrm{d}t =8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2t)\mathrm{d}t=8\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =2\pi-4$

$\Rightarrow S_1=I_1+I_2=2\pi+\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow S_2=\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2-S_1=6\pi-\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow S_2-S_1=4\pi-\frac{8}{3}$.

Vậy $a=4$, $\mathrm{b}=8$, $c=3$ $\Rightarrow S=a+b+c=15$.

Câu 47. Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $\left|(2+i)|z|z-(1-2i)z\right|=|1+3i|$ và $|z_1-z_2|=1$. Tính $M=|2z_1+3z_2|$.

A. $M=19$. **B.** $M=25$. **C.** $M=5$. **D.** $M=\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn D

Ta chia cả hai vế cho $|2+i|$ và được $\left||z|z+iz\right|=|1+i|=\sqrt{2}$. Đặt $|z|=m\geq 0$ thì ta có $m|m+i|=\sqrt{2}\Rightarrow m^2\left(m^2+1\right)=2\Rightarrow m=1$ hay ta có $|z|=1$, nói cách khác hai số z_1, z_2 cùng thuộc đương tròn tâm O, bán kính $R = 1$. Gọi A, B biểu diễn các số z_1, z_2 thì từ $|z_1-z_2|=1$ suy ra OAB là tam giác đều. Không giảm tổng quát chọn $A(1;0), B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Thì $M=\left|2(1+0i)+3\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\left|\frac{7+i3\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{19}$.

Câu 48. Cho $0\leq x, y\leq 1$ thỏa mãn $2020^{1-x-y}=\frac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{136}{3}$. **B.** $\frac{391}{16}$. **C.** $\frac{383}{16}$. **D.** $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2020^{1-x-y}=\frac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}\Leftrightarrow\frac{2020^{1-y}}{2020^x}=\frac{x^2+2021}{(1-y)^2+2021}$

$2020^x\left(x^2+2021\right)=2020^{1-y}\left[(1-y)^2+2021\right]\Leftrightarrow f(x)=f(1-y)$

Xét hàm số $f(t)=2020^t\left(t^2+2021\right)=t^2.2020^t+2021.2020^t$, có

$f'(t)=2t.2020^t+t^2.2020^t.\ln 2020+2021.2020^t.\ln 2020>0;\forall t>0$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ mà $f(x)=f(1-y)\Rightarrow x+y=1$

Lại có

$P=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy=16x^2y^2+12x^3+12y^3+34xy$

$\Rightarrow 16x^2y^2+12\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+34xy=16x^2y^2+12(1-3xy)+34xy=16x^2y^2-2xy+12$

Mà $1=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\leq\frac{1}{4}$ nên đặt $t=xy\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$ khi đó $P=f(t)=16t^2-2t+12$

Xét hàm số $f(t)=16t^2-2t+12$ trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ ta được $\begin{cases} m=\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{191}{16} \\ M=\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{2} \end{cases}$

Suy ra $M+m=\frac{191}{16}+\frac{25}{16}=\frac{391}{16}$.

Câu 49. Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2021}(x+y)\leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1$

A. $m=2$. **B.** $m=-\frac{1}{3}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện cần: Xét hệ bất phương trình: $\begin{cases} \log_{2021}(x+y) \le 0 \quad (1) \\ x+y+\sqrt{2xy+m} \ge 1 \ (2) \end{cases}$

$(x;y)$ là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x = y$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 0 < 2x \le 1 \ \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{2}$.

Với $0 < x \le \frac{1}{2}$; (2) $\Leftrightarrow 2x + \sqrt{2x^2+m} \ge 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+m} \ge 1-2x$

$\Leftrightarrow 2x^2+m \ge 1-4x+4x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+1 \le m$

Đặt $f(x) = 2x^2-4x+1$

$f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ nên $f(x) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ \forall x \in \left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Điều kiện đủ: Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} \log_{2021}(x+y) \le 0 \quad (1) \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \ge 1 \ (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \le 1 \\ x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \ge 1 \end{cases}$

Ta có $1 \le x+y+\sqrt{2xy-\frac{1}{2}} \le x+y+\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{1}{2}} \le 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Câu 50. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất. Khi đó:

A. $a+b+c=8$.
B. $a+b+c=5$.
C. $a+b+c=6$.
D. $a+b+c=7$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt (S) cầu có tâm $I(1;2;3), R=3$.

$d(I,(P)) = \frac{|2.1-2.2+3+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{4}{3} < R$ mặt phẳng cắt mặt cầu theo một đường tròn

Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất.

Khi đó M thuộc đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với (P)

$\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$. Thay vào mặt cầu $(S) \Rightarrow (2t)^2+(-2t)^2+(t)^2 = 9 \Rightarrow 9t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 1$

Với $t=1 \Rightarrow M\left(3;0;4\right) \Rightarrow d\left(M;\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|2.3-2.0+4+3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2+1^2}}=\dfrac{10}{3}$

Với $t=-1 \Rightarrow M\left(-1;4;2\right) \Rightarrow d\left(M;\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|2.\left(-1\right)-2.4+2+3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2+1^2}}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $M\left(3;0;4\right) \Rightarrow a+b+c=7$.

HẾT