

Bài 1 (5.0 điểm).

1) Giải phương trình $\frac{6 - 10\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+2)\sqrt{x-y} = y\sqrt{x-y} + 3x - y + 6 \\ \sqrt{3x+1} - \sqrt{5-y} = -x^3 + 5x^2 + 3 \end{cases}$.

Bài 2 (4.0 điểm).

1) Cho đa giác đều (H) có n đỉnh ($n \geq 8$). Gọi S là tập hợp tất cả các tứ giác có bốn đỉnh là bốn trong n đỉnh của đa giác (H) và bốn cạnh đều là đường chéo của đa giác (H) . Tìm n biết số phần tử của tập hợp S là 25.

2) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = f\left(x + \frac{1}{2021}\right)$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$.

Bài 3 (3.0 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + \frac{n-2}{n^2+n}}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) và tính $\lim u_n$.

Bài 4 (4.0 điểm).

1) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng \widehat{BAC} . Tính $P = \tan \widehat{BAC} \cdot \cos \widehat{ASB}$.

2) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kí hiệu $S; S_1; S_2; S_3$ lần lượt là diện tích các tam giác ABC, OAB, OBC, OCA .

Chứng minh rằng $\frac{S_1^2}{2S_1^2 + S^2} + \frac{S_2^2}{2S_2^2 + S^2} + \frac{S_3^2}{2S_3^2 + S^2} \leq \frac{3}{5}$.

Bài 5 (2.0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC ; các điểm $M(6; -1), N$ lần lượt là trung điểm của HB và HC ; điểm $K(1; 2)$ là trực tâm tam giác AMN . Tìm tọa độ đỉnh C , biết A thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$ và có tung độ âm.

Bài 6 (2.0 điểm).

Cho x, y, z là các số thực thay đổi, đôi một khác nhau và thuộc đoạn $[0; 2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}$.

-----HẾT-----