

Câu 1. (4,00 điểm)

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \frac{2}{y-1} = 2 \\ x - y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (3,00 điểm)

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất $S = \frac{x}{3-yz} + \frac{y}{3-zx} + \frac{z}{3-xy}$.

Câu 3. (4,00 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao AM , trực tâm H . Đường thẳng BH cắt đường tròn đường kính AC tại D, E ($BD < BE$). Đường thẳng CH cắt đường tròn đường kính AB tại F, G ($CF < CG$). Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF cắt BC tại điểm thứ hai là N .

a) Chứng minh rằng các điểm G, M, N, E cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BF, CD, HN đồng quy.

Câu 4. (4,00 điểm)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = 2021 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^{2021} - u_n + 16}{u_n^{2020} - u_n + 7} \end{cases}$$
, với $n = 1, 2, 3, \dots$

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) không tồn tại giới hạn hữu hạn.

b) Đặt $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i^{2020} + 3}$. Tính $\lim S_n$.

Câu 5. (3,00 điểm)

Cho $P(x), Q(x)$ là các đa thức có hệ số cao nhất bằng 1 và các hệ số đều là số thực và $\deg P(x) = \deg Q(x) = 2020$. Chứng minh rằng nếu phương trình $P(x) = Q(x)$ không có nghiệm thực thì phương trình $P(x+2021) = Q(x-2021)$ có nghiệm thực.

Câu 6. (2,00 điểm)

Cho p là số nguyên tố khác 2; a và b là hai số tự nhiên lẻ sao cho

$(a+b) : p, (a-b) : (p-1)$. Chứng minh rằng $(a^b + b^a) : 2p$.

-----Hết-----