STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY
Volume 4

Problems in Mathematical Analysis I

Real Numbers, Sequences and Series

W. J. Kaczor
M. T. Nowak

AMS
American Mathematical Society

Mục lục

Lời nói đầu

Bạn đang có trong tay tập I của một trong những sách bài tập giải tích (theo chúng tôi) hay nhất thế giới .

Trước đây, hầu hết những người làm toán của Việt Nam thường sử dụng hai cuốn sách nổi tiếng sau (bằng tiếng Nga và đã được dịch ra tiếng Việt):

1. **BÀI TẬP GIẢI TÍCH TOÁN HỌC**" *của Demidovich (B. P. Demidovich; 1969, Sbornik Zadach i Uprazhnenii po Matematicheskomu Analizu, Izdatelp1stvo Nauka," Moskva)*

   và

2. **GIẢI TÍCH TOÁN HỌC, CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP**" *của Ljaszko, Bojachuk, Gai, Golovach (I. I. Lyashko, A. K. Boyachuk, YA. G. Gai, G. P. Golobach; 1975, Matematicheski Analiz v Primerakh i Zadachakh, Tom 1, 2. Izdatelp1stvo Vishaya Shkola).*

để giảng dạy hoặc học giải tích.

Cần chú ý rằng, cuốn thứ nhất chỉ có bài tập và đáp số. Cuốn thứ hai cho lời giải chi tiết đối với phần lớn bài tập của cuốn thứ nhất và một số bài toán khác.

Lần này chúng tôi chọn cuốn sách (bằng tiếng Ba Lan và đã được dịch ra tiếng Anh):

3. **BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP I: SỐ THỰC, DÃY SỐ VÀ CHUỖI SỐ**" *(W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, Zadania z Analizy Matematycznej, Cześć Pierwsza, Liczby Rzeczywiste, Ciągi i Szeregi Liczbowe, Wydawnictwo Universytetu Marii Curie - Sklodowskiej, Lublin, 1996),*

4. **BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP II: LIÊN TỤC VÀ VI PHÂN**" *(W. J. Kaczkor, M. T. Nowak, Zadania z Analizy Matematycznej, Cześć Druga, Funkcje*

Jednej ZmiennejRachunek Rózniczowy, Wydawnictwo Universytetu Marii Curie - Sklodowskiej, Lublin, 1998).

để biên dịch nhằm cung cấp thêm một tài liệu tốt giúp bạn đọc học và dạy giải tích. Khi biên dịch, chúng tôi đã tham khảo bản tiếng Anh:

3*. *W. J. Kaczkor, M. T. Nowak,* **PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS I, REAL NUMBERS, SEQUENCES AND SERIES,** *AMS, 2000.*

4*. *W. J. Kaczkor, M. T. Nowak,* **PROBLEMS IN MATHEMATICAL ANALYSIS II, CONTINUITY AND DIFFERENTIATION,** *AMS, 2001.*

Sách này có các ưu điểm sau:

- *Các bài tập được xắp xếp từ dễ cho tới khó và có nhiều bài tập hay.*
- *Lời giải khá đầy đủ và chi tiết.*
- *Kết hợp được những ý tưởng hay giữa toán học sơ cấp và toán học hiện đại. Nhiều bài tập được lấy từ các tạp chí nổi tiếng như, American Mathematical Monthly (tiếng Anh), Mathematics Today (tiếng Nga), Delta (tiếng Balan). Vì thế, sách này có thể dùng làm tài liệu cho các học sinh phổ thông ở các lớp chuyên cũng như cho các sinh viên đại học ngành toán.*

Các kiến thức cơ bản để giải các bài tập trong sách này có thể tìm trong

5. *Nguyễn Duy Tiến,* **BÀGIẢNG GIẢI TÍCH, TẬP I,** *NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2000.*

6. *W. Rudin,* **PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS,** *McGraw -Hil Book Company, New York, 1964.*

Tuy vậy, trước mỗi chương chúng tôi trình bày tóm tắt lý thuyết để giúp bạn đọc nhớ lại các kiến thức cơ bản cần thiết khi giải bài tập trong chương tương ứng.

Tập I và II của sách chỉ bàn đến **HÀ SỐ MỘT BIẾN SỐ** *(trừ phần không gian metric trong tập II). Kaczkor, Nowak chắc sẽ còn viết Bài Tập Giải Tích cho hàm nhiều biến và phép tính tích phân.*

Chúng tôi đang biên dịch tập II, sắp tới sẽ xuất bản.

Chúng tôi rất biết ơn :

- Giáo sư Phạm Xuân Yêm (Pháp) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh tập I của sách này,

- Giáo sư Nguyễn Hữu Việt Hưng (Việt Nam) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh tập II của sách này,

- Giáo sư Spencer Shaw (Mỹ) đã gửi cho chúng tôi bản gốc tiếng Anh cuốn sách nổi tiếng của W. Rudin (nói trên), xuất bản lần thứ ba, 1976,

- TS Dương Tất Thắng đã cổ vũ và tạo điều kiện để chúng tôi biên dịch cuốn sách này.

Chúng tôi chân thành cảm ơn tập thể sinh viên Toán - Lý K5 Hệ Đào Tạo Cử Nhân Khoa Học Tài Năng, Trường ĐHKHTN, ĐHQGHN, đã đọc kỹ bản thảo và sửa nhiều lỗi chế bản của bản đánh máy đầu tiên.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách này sẽ được đông đảo bạn đọc đón nhận và góp nhiều ý kiến quí báu về phần biên dịch và trình bày. Rất mong nhận được sự chỉ giáo của quý vị bạn đọc, những ý kiến góp ý xin gửi về: **CHI ĐOÀN CÁN BỘ, KHOA TOÁN CƠ TIN HỌC, TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN, ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀNỘI, 334 NGUYỄN TRÃI, THANH XUÂN, HÀNỘI.**

Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, Xuân 2002.
Nhóm biên dịch
Đoàn Chi

Các ký hiệu và khái niệm

- $\mathbb{R}$ - *tập các số thực*
- $\mathbb{R}_+$ - *tập các số thực dương*
- $\mathbb{Z}$ - *tập các số nguyên*
- $\mathbb{N}$ - *tập các số nguyên dương hay các số tự nhiên*
- $\mathbb{Q}$ - *tập các số hữu tỷ*
- (a, b) - *khoảng mở có hai đầu mút là a và b*
- $[a, b]$ - *đoạn (khoảng đóng) có hai đầu mút là a và b*
- $[x]$ - *phần nguyên của số thực x*
- *Với $x \in \mathbb{R}$, hàm dấu của x là*

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \textit{với} \quad x > 0, \\ -1 & \textit{với} \quad x < 0, \\ 0 & \textit{với} \quad x = 0. \end{cases}$$

- *Với $x \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \\ (2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot (2n), \\ (2n-1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1). \end{aligned}$$

- *Ký hiệu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, là hệ số của khai triển nhị thức Newton.*

- *Nếu* $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ *khác rỗng và bị chặn trên thì ta ký hiệu* $\sup \mathbf{A}$ *là cận trên đúng của nó, nếu nó không bị chặn trên thì ta quy ước rằng* $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

- *Nếu* $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ *khác rỗng và bị chặn dưới thì ta ký hiệu* $\inf \mathbf{A}$ *là cận dưới đúng của nó, nếu nó không bị chặn dưới thì ta quy ước rằng* $\inf \mathbf{A} = -\infty$.

- *Dãy* $\{a_n\}$ *các số thực được gọi là đơn điệu tăng (tương ứng đơn điệu giảm) nếu* $a_{n+1} \geq a_n$ *(tương ứng nếu* $a_{n+1} \leq a_n$*) với mọi* $n \in \mathbb{N}$. *Lớp các dãy đơn điệu chứa các dãy tăng và giảm.*

- *Số thực* c *được gọi là điểm giới hạn của dãy* $\{a_n\}$ *nếu tồn tại một dãy con* $\{a_{n_k}\}$ *của* $\{a_n\}$ *hội tụ về* c.

- *Cho* $\mathbf{S}$ *là tập các điểm tụ của dãy* $\{a_n\}$. *Cận dưới đúng và cận trên đúng của dãy , ký hiệu lần lượt là* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *được xác định như sau*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ không bị chặn trên,} \\ -\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn trên và } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \sup \mathbf{S} & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn trên và } \mathbf{S} \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ không bị chặn dưới,} \\ +\infty & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn dưới và } \mathbf{S} = \emptyset, \\ \inf \mathbf{S} & \text{nếu } \{a_n\} \text{ bị chặn dưới và } \mathbf{S} \neq \emptyset. \end{cases}$$

- *Tích vô hạn* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ nếu tồn tại* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho* $a_n \neq 0$ *với* $n \geq n_0$ *và dãy* $\{a_{n_0} a_{n_0+1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n}\}$ *hội tụ khi* $n \to \infty$ *tới một giới hạn* $P_0 \neq 0$. *Số* $P = a_{n_0} a_{n_0-1} \cdot \ldots \cdot a_{n_0+n} \cdot P_0$ *được gọi là giá trị của tích vô hạn.*

- *Trong phần lớn các sách toán ở nước ta từ trước đến nay, các hàm tang và côtang cũng như các hàm ngược của chúng được ký hiệu là* $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$ *theo cách ký hiệu của các sách có nguồn gốc từ Pháp và Nga, tuy nhiên trong các sách toán của Mỹ và phần lớn các nước châu Âu, chúng được ký hiệu tương tự là* $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$. *Trong cuốn sách này chúng tôi sẽ sử dụng những ký hiệu này để bạn đọc làm quen với những ký hiệu đã được chuẩn hoá trên thế giới.*

Bài tập

Chương 1

Số thực

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• *Cho A là tập con không rỗng của tập các số thực $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*

Số thực $x \in \mathbb{R}$ được gọi là một **CẬN TRÊN** *của A nếu*

$$a \leqslant x, \forall x \in A.$$

Tập A được gọi là **BỊ CHẶN TRÊN** *nếu A có ít nhất một cận trên.*

Số thực $x \in \mathbb{R}$ được gọi là một **CẬN DƯỚI** *của A nếu*

$$a \geq x, \forall a \in A.$$

Tập A được gọi là **BỊ CHẶN DƯỚI** *nếu A có ít nhất một cận dưới.*

Tập A được gọi là **BỊ CHẶN** *nếu A vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới. Rõ ràng A bị chặn khi và chỉ khi tồn tại $x > 0$ sao cho*

$$|a| \leqslant x, \forall a \in A.$$

• *Cho A là tập con không rỗng của tập các số thực $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*

Số thực $x \in \mathbb{R}$ được gọi là **GIÁ TRỊ LỚN NHẤT** *của A nếu*

$$x \in A, \quad a \leqslant x, \forall a \in A.$$

Khi đó, ta viết

$$x = \max\{a : a \in A\} = \max_{a \in A} a.$$

Số thực $x \in \mathbb{R}$ được gọi là **GIÁ TRỊ BÉ NHẤT** *của A nếu*

$$x \in A, \quad a \geq x, \forall a \in A.$$

Khi đó, ta viết

$$x = \min\{a : a \in A\} = \min_{a \in A} a.$$

• *Cho A là tập con không rỗng của tập các số thực $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Giả sử A bị chặn trên.*

Số thực $x \in \mathbb{R}$ được gọi là **CẬN TRÊN ĐÚNG CỦA** *A, nếu x là một cận trên của A và là cận trên bé nhất trong tập các cận trên của A. Tức là,*

$$a \leqslant x, \forall a \in A,$$

$$\forall \epsilon > o, \exists a_\epsilon \in A, \quad a_\epsilon > x - \epsilon.$$

Khi đó, ta viết

$$x = \sup\{a : a \in A\} = \sup_{a \in A} a.$$

Cho A là tập con không rỗng của tập các số thực $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Giả sử A bị chặn dưới.

Số thực $x \in \mathbb{R}$ được gọi là **CẬN DƯỚI ĐÚNG** *của A, nếu x là một cận dưới của A và là cận trên lớn nhất trong tập các cận dưới của A. Tức là,*

$$a \geq x, \forall a \in A,$$

$$\forall \epsilon > o, \exists a_\epsilon \in A, \quad a_\epsilon < x + \epsilon.$$

Khi đó, ta viết

$$x = \inf\{a : a \in A\} = \inf_{a \in A} a.$$

• **TIÊN ĐỀ VỀ CẬN TRÊN ĐÚNG** *nói rằng nếu A là tập con không rỗng, bị chặn trên của tập các số thực, thì A có cận trên đúng (duy nhất).*

Tiên đề trên tương đương với: nếu A là tập con không rỗng, bị chặn dưới của tập các số thực, thì A có cận dưới đúng (duy nhất).

Từ đó suy ra rằng A là tập con không rỗng, bị chặn của tập các số thực, thì A có cận trên đúng, và có cận dưới đúng.

• *Nếu tập A không bị chặn trên, thì ta qui ước $\sup A = +\infty$; Nếu tập A không bị chặn dưới, thì ta qui ước $\inf A = -\infty$;*

• *Cho hai số nguyên a, b. Ta nói rằng b* **CHIA HẾT** *cho a hoặc a chia b, nếu tồn tại số nguyên c, sao cho $b = a.c$. Trong trường hợp đó ta nói a là ước của b (hoặc b là bội của a) và viết $a|b$.*

Cho hai số nguyên a_1, a_2. Số nguyên m được gọi là **ƯỚC CHUNG** *của a_1, a_2 nếu $m|a_1$, $m|a_2$. Số nguyên m được gọi là* **BỘI CHUNG** *của a_1, a_2 nếu $a_1|m$, $a_2|m$.*

Ước chung $m \geq 0$ của a_1, a_2 có tính chất là chia hết cho bất kỳ ước chung nào của a_1, a_2) được gọi là **ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT** *của a_1, a_2 và được ký hiệu là (a_1, a_2).*

Bội chung $m \geq 0$ của a_1, a_2 có tính chất là ước của bất kỳ bội chung nào của a_1, a_2 được gọi là **BỘI CHUNG NHỎ NHẤT** *của a_1, a_2 và được ký hiệu là $[a_1, a_2]$.*

Nếu $(a, b) = 1$ thì ta nói a, b **NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU**.

Số nguyên dương $p \in \mathbb{N}$ được gọi là **SỐ NGUYÊN TỐ**, *nếu p chỉ có hai ước (tầm thường) là 1 và p.*

Gỉa sử m là số nguyên dương. Hai số nguyên a, b được gọi là **ĐỒNG DƯ THEO MODULO** *m, nếu $m|(a - b)$. Trong trường hợp đó ta viết*

$$a = b \quad (mod\ m).$$

• *Ta gọi r là số hữu tỷ (hay phân số), nếu tồn tại $p, q \in \mathbb{Z}$ sao cho $r = p/q$. Phân số này là tối giản nếu $(p, q) = 1$.*

Số vô tỷ là số thực nhưng không phải là số vô tỷ. **TẬP HỢP CÁC SỐ HỮU TỶ TRÙ MẬT TRONG TẬP CÁC SỐ THỰC**, *tức là, giữa hai số thực khác nhau bất kỳ ($a < b$) tồn tại ít nhất một số hữu tỷ (r: $a < r < b$).*

• **PHẦN NGUYÊN** *của số thực x, được ký hiệu là $[x]$, là số nguyên (duy nhất) sao cho $x - 1 < [x] \leqslant x$.* **PHẦN LẺ** *của số thực x, được ký hiệu là $\{x\}$, là số thực xác định theo công thức $\{x\} = x - [x]$.*

• *Các hàm số sơ cấp $a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x$ được định nghĩa theo cách thông thường. Tuy nhiên, cần chú ý rằng, tài liệu này dùng các* **KÝ HIỆU TIÊU CHUẨN QUỐC TẾ** *sau*

$$\tan x = \sin x/\cos x, \quad \cot x = \cos x/\sin x,$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\tanh x = \sinh x/\cosh x, \quad \coth x = \cosh x/\sinh x.$$

Tương tự ta có các ký hiệu về hàm ngược $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

1.1 Cận trên đúng và cận dưới đúng của tập các số thực. Liên phân số

1.1.1. Chứng minh rằng

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

1.1.2. Cho $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}$ *khác rỗng. Định nghĩa* $-\mathbf{A} = \{x : -x \in \mathbf{A}\}$. *Chứng minh rằng*

$$\sup(-\mathbf{A}) = -\inf \mathbf{A},$$
$$\inf(-\mathbf{A}) = -\sup \mathbf{A}.$$

1.1.3. Cho $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ *là không rỗng. Định nghĩa*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{z = x + y \,:\, x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \{z = x - y : x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\}.$$

Chứng minh rằng

$$\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B},$$
$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

Thiết lập những công thức tương tự cho $\inf(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ *và* $\inf(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

1.1.4. Cho các tập không rỗng $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$ *những số thực dương, định nghĩa*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \{z = x \cdot y \,:\, x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}\},$$
$$\frac{1}{\mathbf{A}} = \left\{z = \frac{1}{x} \,:\, x \in \mathbf{A}\right\}.$$

Chứng minh rằng

$$\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} \cdot \sup \mathbf{B}.$$

và nếu $\inf \mathbf{A} > 0$ *thì*

$$\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\inf \mathbf{A}},$$

khi $\inf \mathbf{A} = 0$ *thì* $\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = +\infty$. *Hơn nữa nếu* $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$ *là các tập số thực bị chặn thì*

$$\begin{aligned} &\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \max\{\sup \mathbf{A} \cdot \sup \mathbf{B}, \sup \mathbf{A} \cdot \inf \mathbf{B}, \inf \mathbf{A} \cdot \sup \mathbf{B}, \inf \mathbf{A} \cdot \inf \mathbf{B}\}. \end{aligned}$$

1.1.5. Cho $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$ *là những tập con khác rỗng các số thực. Chứng minh rằng*

$$\sup(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = \max\{\sup\mathbf{A}, \sup\mathbf{B}\}$$

và

$$\inf(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = \min\{\inf\mathbf{A}, \inf\mathbf{B}\}.$$

1.1.6. Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ *xác định bởi*

$$\mathbf{A}_1 = \left\{2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left(2+\frac{3}{n}\right) : n\in\mathbb{N}\right\},$$
$$\mathbf{A}_2 = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

1.1.7. Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của các tập $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$*, trong đó* $\mathbf{A} = \{0,2; 0,22; 0,222; \dots\}$ *và* $\mathbf{B}$ *là tập các phân số thập phân giữa 0 và 1 mà chỉ gồm các chữ số 0 và 1.*

1.1.8. Tìm cận dưới đúng và cận trên đúng của tập các số $\frac{(n+1)^2}{2^n}$*, trong đó* $n\in\mathbb{N}$.

1.1.9. Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của tập các số $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$*, trong đó* $n, m\in\mathbb{N}$.

1.1.10. Xác định cận trên đúng và cận dưới đúng của các tập sau:

(a) $$\mathbf{A} = \left\{\frac{m}{n} : m, n\in\mathbb{N}, m<2n\right\},$$

(b) $$\mathbf{B} = \left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

1.1.11. Hãy tìm

(a) $$\sup\left\{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1>0\right\},$$

(b) $$\inf\left\{z = x + x^{-1} : x>0\right\},$$

(c) $$\inf\left\{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} > 0\right\}.$$

1.1.12. Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của những tập sau:

(a) $$\mathbf{A} = \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}\right\},$$

(b) $$\mathbf{B} = \left\{\frac{mn}{4m^2 + n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

(c) $$\mathbf{C} = \left\{\frac{m}{m + n} : m, n \in \mathbb{N}\right\},$$

(d) $$\mathbf{D} = \left\{\frac{m}{|m| + n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

(e) $$\mathbf{E} = \left\{\frac{mn}{1 + m + n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1.1.13. Cho $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Xét tất cả dãy dương hữu hạn $(a_1, \ldots, a_n)$, hãy tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của tập các số

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}},$$

trong đó $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$.

1.1.14. Chứng minh rằng với mỗi số vô tỷ α và với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại một số nguyên dương q_n và một số nguyên p_n sao cho

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n}.$$

Đồng thời có thể chọn dãy $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ sao cho

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n^2}}.$$

1.1.15. Cho α là số vô tỷ. Chứng minh rằng $\mathbf{A} = \{m + n\alpha : m, n \in \mathbb{Z}\}$ là trù mật trong $\mathbb{R}$, tức là trong bất kỳ khoảng mở nào đều có ít nhất một phần tử của $\mathbf{A}$.

1.1.16. Chứng minh rằng $\{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$ là trù mật trong đoạn $[-1, 1]$.

1.1.17. Cho $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ và dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}, \ \ldots, \quad x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}.$$

khi đó

$$x = [x] + \cfrac{1}{[x_1] + \cfrac{1}{[x_2] + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{[x_{n-1}] + \cfrac{1}{x_n}}}}}.$$

Chứng minh rằng x là số hữu tỷ khi và chỉ khi tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho x_n là một số nguyên.

Chú ý. Ta gọi biểu diễn trên của x là một liên phân số hữu hạn. Biểu thức

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

được viết gọn thành

$$a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}.$$

1.1.18. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, đặt

$$\begin{aligned} &p_0 = a_0, && q_0 = 1, \\ &p_1 = a_0 a_1 + 1, && q_1 = a_1, \\ &p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2}, && q_k = q_{k-1} a_k + q_{k-2}, \quad \text{với} \quad k = 2, 3, \ldots, n, \end{aligned}$$

và định nghĩa

$$R_0 = a_0, \quad R_k = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$\Big($*R_k được gọi là phần tử hội tụ thứ k đến $a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}$*$\Big)$.

Chứng minh rằng

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{với} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

1.1.19. Chứng minh rằng nếu p_k, q_k được định nghĩa như trong bài toán trên và $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số nguyên thì

$$p_{k-1} q_k - q_{k-1} p_k = (-1)^k \quad \text{với} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Sử dụng đẳng thức trên để kết luận rằng p_k và q_k là nguyên tố cùng nhau.

1.1.20. Cho x là một số vô tỷ, ta định nghĩa dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_1 = \frac{1}{x - [x]}, \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - [x_1]}, \dots, \quad x_n = \frac{1}{x_{n-1} - [x_{n-1}]}, \dots .$$

Ngoài ra, chúng ta cho đặt $a_0 = [x]$, $a_n = [x_n]$, $n = 1, 2, \dots$, và

$$R_n = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \dots + \frac{1|}{|a_k}.$$

Chứng minh rằng độ lệch giữa số x và phần tử hội tụ thứ n của nó được cho bởi công thức

$$x - R_n = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n},$$

trong đó p_n, q_n là được định nghĩa trong 1.1.18. Từ đó hãy suy ra rằng x nằm giữa hai phần tử hội tụ liên tiếp của nó.

1.1.21. Chứng minh rằng tập $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$ là trù mật trong $[-1, 1]$.

1.1.22. Sử dụng kết quả trong bài 1.1.20 chứng minh rằng với mọi số vô tỷ x tồn tại dãy $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ các số hữu tỷ, với q_n lẻ, sao cho

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

(So sánh với 1.1.14.)

1.1.23. Kiểm tra công thức sau về hiệu số giữa hai phần tử hội tụ liên tiếp:

$$R_{n+1} - R_n = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.$$

1.1.24. Cho x là số vô tỷ. Chứng minh rằng phần tử hội tụ R_n định nghĩa trong 1.1.20 tiến tới x sao cho

$$|x - R_{n+1}| < |x - R_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

1.1.25. Chứng minh rằng phần tử hội tụ $R_n = p_n/q_n$ là ước lượng tốt nhất của x trong tất cả các phân số hữu tỷ với mẫu số q_n hoặc nhỏ hơn. Tức là: nếu r/s là một số hữu tỷ với mẫu số dương có dạng $|x - r/s| < |x - R_n|$ thì $s > q_n$.

1.1.26. Khai triển mỗi biểu thức sau thành các liên phân số vô hạn: $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1.1.27. Cho số nguyên dương k, biểu diễn của $\sqrt{k^2 + k}$ thành liên phân số vô hạn.

1.1.28. Tìm tất cả các số $x \in (0, 1)$ mà sự biểu diễn liên tục vô hạn có a_1 (xem 1.1.20) tương ứng với số nguyên dương n cho trước.

1.2 Một số bất đẳng thức sơ cấp

1.2.1. *Chứng minh rằng nếu $a_k > -1$, $k = 1, \dots, n$ là các số cùng dương hoặc cùng âm thì*

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Chú ý. *Nếu $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ thì ta có bất đẳng thức Bernoulli:* $(1 + a)^n \geq 1 + na$, $a > -1$.

1.2.2. *Sử dụng phép qui nạp, hãy chứng minh kết quả sau: Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ thì $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$.*

1.2.3. *Ký hiệu A_n, G_n và H_n lần lượt là trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hoà của n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$, tức là*

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$
$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Chứng minh rằng $A_n \geq G_n \geq H_n$.

1.2.4. *Sử dụng kết quả $G_n \leqslant A_n$ trong bài toán trước kiểm tra bất đẳng thức Bernoulli*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{với} \quad x > 0.$$

1.2.5. *Cho $n \in \mathbb{N}$, hãy kiểm tra các khẳng định sau:*

(a) $$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n} > \frac{2}{3},$$

(b) $$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1,$$

(c) $$\frac{1}{2} < \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \ldots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{2}{3},$$

(d) $$(n\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right), \; n > 1.$$

1.2.6. Chứng minh rằng với mỗi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\frac{x^n}{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

1.2.7. Cho $\{a_n\}$ là một cấp số cộng với các số hạng dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

1.2.8. Chứng minh rằng

$$\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2.9. Cho a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, là các số dương thoả mãn điều kiện $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2.$$

1.2.10. Cho $a_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n$ $(n > 1)$ và đặt $s = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Hãy kiểm tra các khẳng định sau:

(a) $$n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s - a_k} \right)^{-1} \leqslant n - 1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{s - a_k}{a_k},$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{s}{s - a_k} \geq \frac{n^2}{n-1},$$

(c) $$n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s + a_k} \right)^{-1} \geq n + 1.$$

1.2.11. Chứng minh rằng nếu $a_k > 0, k = 1, \ldots, n$ và $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ thì

$$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

1.2.12. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy [1]:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

[1] *Còn gọi là bất đẳng thức Buniakovskii- Cauchy - Schwarz*

1.2.13. *Chứng minh rằng*

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.14. *Chứng minh rằng nếu* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 1$ *thì*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 1.$$

1.2.15. *Cho* $a_k > 0, k = 1, 2, \ldots, n$, *hãy kiểm tra những khẳng định sau*

(a) $$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq n^2.$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_k} \geq n \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k),$$

(c) $$(\log_a a_1)^2 + (\log_a a_2)^2 + \ldots + (\log_a a_n)^2 \geq \frac{1}{n},$$

với điều kiện $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = a \neq 1.$

1.2.16. *Cho* $\alpha > 0$, *chứng minh rằng*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1.2.17. *Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

1.2.18. *Chứng minh rằng*

(a) $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}.$$

(b) $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$$

1.2.19. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^{p+q} \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q},$$

với mỗi p, q và mỗi bộ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1.2.20. *Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ *với điều kiện* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

1.2.21. *Cho* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^2$ *với điều kiện* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

1.2.22. *Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant (n-1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\right).$$

1.2.23. *Chứng minh các bất đẳng thức sau:*

(a) $$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

(b) $$\left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

1.2.24. *Cho* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

với điều kiện $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = 1$.

1.2.25. *Chứng minh bất đẳng thức Chebyshev.*

Nếu

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \quad \text{và} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n.$$

hoặc

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \quad \text{và} \quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n.$$

thì

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1.2.26. Giả sử $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ và $p \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^p.$$

1.2.27. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)^2 \leqslant (1+c)a^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)b^2$$

với số dương c và số thực a, b bất kỳ.

1.2.28. Chứng minh rằng $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|$.

1.2.29. Cho các số dương a, b, c, kiểm tra các khẳng định sau:

(a) $$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq (a+b+c),$$

(b) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

(c) $$\frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} + \frac{2}{a+b} \geq \frac{9}{(a+b+c)},$$

(d) $$\frac{b^2-a^2}{c+a} + \frac{c^2-b^2}{a+b} + \frac{a^2-c^2}{b+c} \geq 0,$$

(e) $$\frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{a} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8}\frac{(a-b)^2}{b} \quad \text{với} \quad b \leqslant a.$$

1.2.30. Cho $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, đặt

$$m = \min\left\{\frac{a_k}{b_k} \, : \, k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

và

$$M = \max\left\{\frac{a_k}{b_k} \, : \, k = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Chứng minh rằng

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leqslant M$$

1.2.31. *Chứng minh rằng nếu* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}, n > 1$ *thì*

$$\tan\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \tan\alpha_n.$$

1.2.32. *Cho* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *dương và* $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, *đặt*

$$S = \max\left\{ \sqrt[k_1]{c_1}, \sqrt[k_2]{c_2}, \ldots, \sqrt[k_n]{c_n} \right\},$$
$$s = \min\left\{ \sqrt[k_1]{c_1}, \sqrt[k_2]{c_2}, \ldots, \sqrt[k_n]{c_n} \right\}.$$

Chứng minh rằng

$$s \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{\frac{1}{k_1+k_2+\ldots+k_n}} \leqslant S.$$

1.2.33. *Cho* $a_k > 0,\ b_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$, *đặt*

$$M = \max\left\{ \frac{a_k}{b_k} \, : \, k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n}{b_1 + Mb_2^2 + \ldots + M^{n-1}b_n^n} \leqslant M.$$

1.2.34. *Chứng minh rằng nếu* x *là một số thực lớn hơn các số* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *thì*

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n} \geq \frac{n}{x - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}.$$

1.2.35. *Đặt* $c_k = \binom{n}{k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \ldots + \sqrt{c_n} \leqslant \sqrt{n(2^n - 1)}.$$

1.2.36. *Cho* $n \geq 2$, *chứng minh rằng*

$$\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \left(\frac{2^n - 2}{n - 1} \right)^{n-1}.$$

1.2.37. *Cho* $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ *và ký hiệu* A_n *là trung bình cộng của chúng. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^p \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{k=1}^{n} A_k^{p-1} a_k$$

với mỗi số nguyên $p > 1$.

1.2.38. Cho $a_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, đặt $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Hãy chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1} \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

1.2.39. Chứng minh rằng với mỗi hoán vị $b_1, b_2, \dots, b_n$ của các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta đều có

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

1.2.40. Chứng minh bất đẳng thức Weierstrass.

Nếu $0 < a_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$ thì

(a) $$1 + \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) < \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k},$$

(b) $$1 - \sum_{k=1}^{n} a_k < \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) < \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}.$$

1.2.41. Giả sử $0 < a_k < 1, k = 1, 2, \dots, n$, đặt $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k} \geq \frac{na}{n - a}.$$

1.2.42. Cho $0 < a_k \leqslant 1$, $k = 1, 2, \dots, n$ và $n \geq 2$. Kiểm tra bất đẳng thức sau:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} \leqslant \frac{n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + n \prod\limits_{k=1}^{n} a_k}.$$

1.2.43. Cho a_k, $k = 1, 2, \dots, n$ không âm sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$, chứng minh rằng

(a) $$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq (n+1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k,$$

(b) $$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geq (n-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

1.2.44. Chứng minh rằng nếu $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ và $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_n} = n - 1$ thì

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq (n-1)^n.$$

1.2.45. Chứng minh rằng với giả thiết cho trong bài 1.2.43 ta có

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)}{(n+1)^n} \geq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k)}{(n-1)^n}, \quad n > 1.$$

1.2.46. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương, chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{4}.$$

1.2.47. Cho t và $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực bất kỳ. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - a_1|}}{2^k}.$$

1.2.48. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số dương, chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}.$$

1.2.49. Giả sử rằng $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ và $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các số không âm mà $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{a_k}\right) \leqslant \frac{A^2}{G^2}.$$

trong đó $A = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$ và $G = \sqrt{a_1 a_n}$.

1.2.50. Cho số nguyên dương n, đặt tương ứng $\sigma(n)$ và $\tau(n)$ là tổng các ước số dương của n và số các ước số đó. Chứng minh rằng $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n}$.

Chương 2

Dãy số thực

Tóm tắt lý thuyết

• *Dãy số là một ánh xạ từ tập các số tự nhiên (hoặc các số nguyên không âm) vào tập các số thực*

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Đặt $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, *và dùng ký hiệu* $\{a_n\}$ *để chỉ dãy số.*

Dãy số $\{a_n\}$ *được gọi là*

- dương (âm) nếu $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ *với mọi* n;

- không âm (không dương) nếu $a_n \geq 0$ $(a_n \leqslant 0)$ *với mọi* n;

- đơn điệu tăng (giảm) nếu $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leqslant a_n)$ *với mọi* n;

- tăng (giảm) ngặt nếu $a_{n+1} > a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$ *với mọi* n;

- hội tụ tới $a \in \mathbb{R}$ *(hoặc có giới hạn hữu hạn là* a*), nếu với mọi số* $\epsilon > 0$ *cho trước bé tùy ý, tồn tại* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Trong trường hợp như thế, ta nói dãy $\{a_n\}$ *hội tụ, và gọi* a *là giới hạn của dãy* $\{a_n\}$ *và viết*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a;$$

- phân kỳ ra $+\infty$, *nếu với mọi số* $\Delta > 0$ *cho trước lớn tùy ý, tồn tại* $n_\Delta \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$a_n > \Delta, \quad \forall n \geq n_\Delta.$$

Trong trường hợp như thế, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty;$$

- phân kỳ ra $-\infty$, nếu với mọi số $\Delta > 0$ cho trước lớn tùy ý, tồn tại $n_\Delta \in \mathbb{N}$ sao cho

$$a_n < -\Delta, \quad \forall n \geq n_\Delta.$$

Trong trường hợp như thế, ta viết

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty;$$

- dãy Cauchy (hoặc dãy cơ bản), nếu với mọi số $\epsilon > 0$ cho trước bé tùy ý, tồn tại $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|a_m - a_n| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_\epsilon.$$

• **ĐỊNH LÝ HỘI TỤ ĐƠN ĐIỆU** *nói rằng dãy số đơn điệu (tăng hoặc giảm) và bị chặn có giới hạn hữu hạn.*

• **TIÊU CHUẨN CAUCHY** *nói rằng dãy số hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

• **CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA GIỚI HẠN** *là*

- Một dãy hội tụ thì bị chặn.

- Bảo toàn các phép tính số học, tức là, nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

thì

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha a \pm \beta b, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab; \lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = a/b \qquad \text{với } b \neq 0.$$

- Bảo toàn thứ tự theo nghĩa sau: nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, \quad a_n \leqslant b_n; \quad \text{với } n \geq n_0 \text{ nào đó},$$

thì $a \leqslant b$.

- Định lý kẹp: Cho ba dãy số thực $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. Nếu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = a, \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, \quad \text{với } n \geq n_0 \text{ nào đó}$$

thì $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

• *Cho* $\{a_n\}$ *là dãy số thực và* $\{n_k\}$ *là dãy các số tự nhiên tăng ngặt, tức là* $n_1 < n_2 < \cdots < a_k < a_{k+1} < \cdots$. *Khi đó, ta gọi* $\{a_{n_k}\}$ *là một* **DÃY CON** *của dãy* $\{a_n\}$. *Số thực* a *được gọi là* **GIỚI HẠN RIÊNG HAY LÀ ĐIỂM GIỚI HẠN** *của* $\{a_n\}$, *nếu tồn tại một dãy con* $\{a_{n_k}\}$ *hội tụ tới* a, *tức là,*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

• **ĐỊNH LÝ BOLZANO - WEIERSTRASS** *khẳng định rằng, mọi dãy số thực bị chặn có ít nhất một điểm giới hạn.*

Tập các giới hạn riêng của một dãy số thực bị chặn $\{a_n\}$ *có giá trị lớn nhất. Giá trị này được gọi là* **GIỚI HẠN TRÊN** *của dãy* $\{a_n\}$ *và được ký hiệu là*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Tập các giới hạn riêng của một dãy số thực bị chặn $\{a_n\}$ *có giá trị bé nhất. Giá trị này được gọi là* **GIỚI HẠN DƯỚI** *của dãy* $\{a_n\}$ *và được ký hiệu là*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

• *Nói rằng* $\{a_n\}$ *là* **DÃY TRUY HỒI** *cấp* h *nếu*

$$a_n = f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-h}), \quad \forall n \geq h,$$

trong đó f *là hàm số thực nào đó.*

• *Nói rằng* $\{a_n\}$ *là* **CẤP SỐ CỘNG** *nếu nó có dạng*

$$a_n = a_0 + nd,$$

(a_0 *là số hạng đầu,* d *là công sai).*

• *Nói rằng* $\{a_n\}$ *là* **CẤP SỐ NHÂN** *nếu nó có dạng*

$$a_n = a_0 q^n,$$

(a_0 *là số hạng đầu,* q *là công bội).*

• **CÁC KÝ HIỆU CỦA LANDAU.** *Cho hai dãy* $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$. *Ta nói rằng*

- Dãy $\{b_n\}$ **CHẶN** *dãy* $\{a_n\}$, *nếu tồn tại hằng số* $C > 0$ *và tồn tại số* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|a_n| \leqslant C|b_n|, \quad \forall n \geq n_0.$$

Trong trường hợp đó ta viết

$$a_n = O(b_n).$$

- *Dãy* $\{a_n\}$ **KHÔNG ĐÁNG KỂ** *so với* $\{b_n\}$, *nếu với mọi* $\epsilon > 0$ *tồn tại số* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|a_n| \leqslant \epsilon |b_n|, \quad \forall n \geq n_\epsilon,$$

tức là

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Trong trường hợp đó ta viết

$$a_n = o(b_n).$$

- *Dãy* $\{a_n\}$ *tương đương với* $\{b_n\}$, *nếu*

$$a_n - b_n = o(b_n),$$

tức là

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Trong trường hợp đó ta viết

$$a_n \sim b_n.$$

2.1 Dãy đơn điệu

2.1.1. Chứng minh rằng:

(a) Nếu $\{a_n\}$ *là dãy đơn điệu tăng thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) Nếu $\{a_n\}$ *là dãy đơn điệu giảm thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2.1.2. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_p$ *là những số dương cố định. Xét các dãy sau:*

$$s_n = \frac{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_p^n}{p} \quad \text{và} \quad x_n = \sqrt[n]{s_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ *là dãy đơn điệu tăng.*
Gợi ý. Trước tiên xét tính đơn điệu của dãy $\left\{\frac{s_n}{s_{n-1}}\right\}$, $n \geq 2$.

2.1.3. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$, *với* $a_n = \frac{n}{2^n}, n > 1$, *là dãy giảm ngặt và tìm giới hạn của dãy.*

2.1.4. Cho $\{a_n\}$ *là dãy bị chặn thoả mãn điều kiện* $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh rằng dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ.*
Gợi ý. Xét dãy $\left\{a_n - \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$.

2.1.5. Chứng minh sự hội tụ của các dãy sau:

(a) $$a_n = -2\sqrt{n} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

(b) $$b_n = -2\sqrt{n+1} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Gợi ý. Trước tiên thiết lập bất đẳng thức:

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.6. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ *được xác định theo công thức truy hồi*

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}, \quad \text{với} \quad n \geq 2$$

hội tụ và tìm giới hạn của nó.

2.1.7. Cho $c > 2$, xét dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = c^2, \quad a_{n+1} = (a_n - c)^2, \quad n \geq 1.$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ tăng ngặt.

2.1.8. Giả sử dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$0 < a_n < 1, \quad a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4} \text{ với } \quad n \in \mathbb{N}.$$

Thiết lập sự hội tụ của dãy và tìm giới hạn của nó.

2.1.9. Thiết lập sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy được xác định theo biểu thức

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \text{ với } \quad n \geq 1.$$

2.1.10. Chứng minh dãy được cho bởi

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + a_n + a_{n-1}^3) \quad \text{với} \quad n > 1$$

hội tụ và xác định giới hạn của nó.

2.1.11. Khảo sát tính đơn điệu của dãy

$$a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}, \quad n \geq 1,$$

và xác định giới hạn của nó.

2.1.12. Hãy xác định tính hội tụ hay phân kỳ của dãy

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n \geq 1.$$

2.1.13. Chứng minh sự hội tụ của các dãy sau

(a) $$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) $$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \frac{1}{n^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.14. Cho dãy $\{a_n\}$ có số hạng tổng quát

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy hội tụ.

2.1.15. Cho $p \in \mathbb{N}$, $a > 0$ và $a_1 > 0$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_{n-1} = \frac{1}{p}\left((p-1)a_n + \frac{a}{a_n^{p-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.1.16. Dãy $\{a_n\}$ được cho theo công thức truy hồi

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}} \text{ với } \quad n \geq 1.$$

Chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

2.1.17. Dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = 1, \quad a_{n-1} = \frac{2(2a_n+1)}{a_n+3} \text{ với } \quad n \in \mathbb{N}.$$

Thiết lập sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}$.

2.1.18. Tìm các hằng số $c > 0$ sao cho dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$a_1 = \frac{c}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(c + a_n^2) \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

là hội tụ. Trong trường hợp hội tụ hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.1.19. Cho $a > 0$ cố định, xét dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = a_n\frac{a_n^2+3a}{3a_n^2+a} \text{ với } \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tìm tất cả các số a_1 sao cho dãy trên hội tụ và trong những trường hợp đó hãy tìm giới hạn của dãy.

2.1.20. Cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa truy hồi bởi

$$a_{n+1} = \frac{1}{4-3a_n} \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Tìm các giá trị của a_1 để dãy trên hội tụ và trong các trường hợp đó hãy tìm giới hạn của dãy.

2.1.21. Cho a là một số cố định bất kỳ và ta định nghĩa $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 \in \mathbb{R} \text{ và } \quad a_{n+1} = a_n^2 + (1-2a)a_n + a^2 \text{ với } \quad n \in \mathbb{N}.$$

Xác định a_1 sao cho dãy trên hội tụ và trong trường hợp như thế tìm giới hạn của nó.

2.1.22. Cho $c > 0$ và $b > a > 0$, ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + ab}{a+b} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Với những giá trị của a, b và c dãy trên sẽ hội tụ ? Trong các trường hợp đó hãy xác định giới hạn của dãy.

2.1.23. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa bởi công thức

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = 6\frac{1+a_n}{7+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

hội tụ và tìm giới hạn của nó.

2.1.24. Cho $c \geq 0$ xét $\{a_n\}$ được cho bởi công thức

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó.

2.1.25. Khảo sát sự hội tụ của dãy được cho bởi công thức

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.26. Cho $k \in \mathbb{N}$, khảo sát sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$ được cho bởi công thức truy hồi sau

$$a_1 = \sqrt[k]{5}, \quad a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.27. Khảo sát sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$ sau

$$1 \leqslant a_1 \leqslant 2, \quad a_{n+1}^2 = 3a_n - 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.28. Với $c > 1$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ như sau:

(a) $\quad a_1 = \sqrt{c(c-1)}, \quad a_{n+1} = \sqrt{c(c-1) + a_n}, \quad n \geq 1,$

(b) $\quad b_1 = \sqrt{c}, \quad b_{n-1} = \sqrt{cb_n}, \quad n \geq 1.$

Chứng minh rằng cả hai dãy đều có giới hạn là c.

2.1.29. Cho $a > 0$ và $b > 0$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ bởi

$$0 < a_1 < b, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + a_n^2}{a+1}} \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Tìm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2.1.30. Chứng minh sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$ được cho bởi công thức truy hồi

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} \quad \text{với} \quad n \geq 1$$

và tìm giới hạn của nó.

2.1.31. Dãy $\{a_n\}$ được cho bởi

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \quad \text{với} \quad n \geq 2.$$

Chứng minh dãy trên bị chặn và tăng ngặt. Hãy tìm giới hạn của dãy này.

2.1.32. Dãy $\{a_n\}$ được xác định theo công thức truy hồi

$$a_1 = 9, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}, \quad \text{với} \quad n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy trên bị chặn và giảm ngặt. Tìm giới hạn của dãy này.

2.1.33. Dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ được cho bởi công thức

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ cùng tiến tới một giới hạn. (Giới hạn này được gọi là trung bình cộng - nhân của a_1 và b_1).

2.1.34. Chứng minh rằng cả hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ xác định theo công thức

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

đều đơn điệu và có cùng giới hạn.

2.1.35. Hai dãy truy hồi $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ được cho bởi công thức

$$0 < b_1 < a_1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh tính đơn điệu của hai dãy trên và chỉ ra rằng cả hai dãy đều tiến tới trung bình cộng - nhân của a_1 và b_1. (Xem bài toán 2.1.33).

2.1.36. Chứng minh sự hội tụ và tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}$ *với*

$$a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right) \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.1.37. Giả sử có một dãy bị chặn $\{a_n\}$ *thoả mãn*

$$a_{n+2} \leqslant \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy trên hội tụ.

2.1.38. Cho $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *định nghĩa bởi:*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng, nhân và điều hoà chứng minh rằng

(a) $a_n < b_n$ *với* $n \in \mathbb{N}$.

(b) dãy $\{a_n\}$ *tăng ngặt,*

(c) dãy $\{b_n\}$ *giảm ngặt,*

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *có cùng giới hạn, được gọi là số* e *của Euler.*

2.1.39. Cho

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Chứng tỏ rằng nếu $x > 0$ *thì dãy* $\{a_n\}$ *bị chặn và tăng ngặt.*

(b) Giả sử x *là một số thực tuỳ ý. Chứng minh rằng dãy* $\{a_n\}$ *bị chặn và tăng ngặt với* $n > -x$.

e^x *được định nghĩa là giới hạn của dãy này.*

2.1.40. Giả sử có $x > 0$, $l \in \mathbb{N}$ *và* $l > x$. *Chứng minh rằng dãy* $\{b_n\}$ *với*

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{l+n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N},$$

là dãy giảm ngặt.

2.1.41. Thiết lập tính đơn điệu của các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$, với

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N},$$
$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng cả hai dãy trên cùng tiến đến cùng một giới hạn γ, gọi là hằng số Euler.
Gợi ý. Sử dụng bất đẳng thức $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, (suy ra từ 2.1.38).

2.1.42. Cho $x > 0$ và đặt $a_n = \sqrt[2^n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng dãy $\{a_n\}$ bị chặn. Đồng thời chứng minh rằng dãy này tăng ngặt nếu $x < 1$ và giảm ngặt nếu $x > 1$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Hơn nữa, đặt

$$c_n = 2^n(a_n - 1) \text{ và } \quad d_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\{c_n\}$ là dãy giảm, còn $\{d_n\}$ là dãy tăng và cả hai dãy cùng có chung giới hạn.

2.2 Giới hạn. Tính chất của dãy hội tụ

2.2.1. *Tính:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^2+2^2+...+n^2}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n^2}{n+\cos n}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2+3-4+...+(-2n)}{\sqrt{n^2+1}}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})...(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}}$,

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}}$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right)$,

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^3+1}+\dfrac{2n}{n^3+2}+...+\dfrac{nn}{n^3+n}\right)$.

2.2.2. *Cho $s>0$ và $p>0$. Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^s}{(1+p)^n}=0.$$

2.2.3. *Cho $\alpha\in(0,1)$, tính*

$$\lim_{n\to\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha).$$

2.2.4. *Cho $\alpha\in\mathbb{Q}$, hãy tính*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(n!\alpha\pi).$$

2.2.5. *Chứng minh rằng không tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$.

2.2.6. *Chứng minh rằng với mọi số vô tỷ α,* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n\alpha\pi$ *không tồn tại.*

2.2.7. Với $a \in \mathbb{R}$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right).$$

2.2.8. Giả sử $a_n \neq 1$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Cho k nguyên dương, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^k - k}{a_n - 1}.$$

2.2.9. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)(n+2)}\right).$$

2.2.10. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

2.2.11. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{n^3}.$$

2.2.12. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(n+1).(n+2)}\right).$$

2.2.13. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}.$$

2.2.14. Cho $x \neq -1$ và $x \neq 1$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}}.$$

2.2.15. Với giá trị $x \in \mathbb{R}$ nào thì giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} (1+x^{2^k}).$$

tồn tại và tìm giá trị của giới hạn này.

2.2.16. Tìm tất cả $x \in \mathbb{R}$ sao cho giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{2}{x^{2^k} + x^{-2^k}}\right).$$

tồn tại và tìm giá trị của giới hạn này.

2.2.17. Với giá trị $x \in \mathbb{R}$ nào thì giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + x^{3^k} + x^{2.3^k}).$$

tồn tại và tìm giá trị của giới hạn này.

2.2.18. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1.1! + 2.2! + ... + n.n!}{(n+1)!}.$$

2.2.19. Với $x \in \mathbb{R}$ nào sao cho đẳng thức sau

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1999}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{2000}$$

được thực hiện

2.2.20. Cho a và b sao cho $a \geq b > 0$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = a + b, \quad a_n = a_1 - \frac{ab}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Hãy xác định số hạng thứ n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.2.21. Định nghĩa dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \text{ và } \quad a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2 \quad \text{với} \quad n \geq 2.$$

Hãy xác định số hạng thứ n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.2.22. Cho $a > 0, b > 0$, xét dãy $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{và}$$
$$a_n = \frac{aa_{n-1}}{\sqrt{a^2 + a_{n-1}^2}}, \quad n \geq 2.$$

Tìm số hạng thứ n của dãy và tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.2.23. Cho dãy truy hồi $\{a_n\}$ định nghĩa bởi

$$a_1 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}, \quad n \geq 2.$$

Tìm số hạng thứ n và giới hạn của dãy.

2.2.24. Hãy xét tính hội tụ của dãy cho bởi

$$a_1 = a, \quad a_n = 1 + ba_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

2.2.25. Ta định nghĩa dãy Fibonacci $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

trong đó α và β là nghiệm của phương trình $x^2 = x + 1$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

2.2.26. Cho hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ theo công thức sau:

$$\begin{aligned} a_1 &= a, & b_1 &= b, \\ a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, & b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} + b_n}{2}. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2.2.27. Cho $a \in \{1, 2, ..., 9\}$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a + aa + ... + \overbrace{aa...a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n}.$$

2.2.28. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n.$$

2.2.29. Giả sử rằng dãy $\{a_n\}$ hội tụ tới 0. Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n$.

2.2.30. Cho $p_1, p_2, ..., p_k$ và $a_1, a_2, ..., a_k$ là các số dương, tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + ... + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + ... + p_k a_k^n}.$$

2.2.31. Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. *Chứng minh rằng:*

(a) Nếu $q < 1$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

(b) Nếu $q > 1$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

2.2.32. Giả sử có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. *Chứng minh rằng:*

(a) Nếu $q < 1$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

(b) Nếu $q > 1$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

2.2.33. Cho α *là một số thực và* $x \in (0, 1)$, *hãy tính*

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha x^n.$$

2.2.34. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n, \quad \text{với} \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{và} \quad |x| < 1.$$

2.2.35. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *và* $\{b_n\}$ *một dãy bị chặn. Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

2.2.36. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$

2.2.37. Cho $a_n \geq -1$ *với* $n \in \mathbb{N}$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Cho* $p \in \mathbb{N}$, *hãy tìm*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{1 + a_n}.$$

2.2.38. Giả sử có dãy dương $\{a_n\}$ *hội tụ tới* 0. *Cho số tự nhiên* $p \geq 2$, *hãy xác định*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{1 + a_n} - 1}{a_n}.$$

2.2.39. Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_p$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[p]{(n+a_1)(n+a_2)...(n+a_p)}-n\right).$$

2.2.40. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right).$$

2.2.41. Cho $a_1, a_2, ..., a_p$ là các số dương, hãy tìm

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+...+a_p^n}{p}}.$$

2.2.42. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1999}}{n+1}+\cos^2\frac{n^{1999}}{n+1}}.$$

2.2.43. Tính

$$\lim_{n\to\infty}(n+1+n\cos n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}.$$

2.2.44. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

2.2.45. Hãy xác định

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right).$$

2.2.46. Cho các số dương a_k, $k=1,2,...,p$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sqrt[n]{a_k}\right)^p.$$

2.2.47. Cho $\alpha\in(0,1)$. Hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)^k.$$

2.2.48. Cho số thực $x \geq 1$, hãy chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} (2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2.$$

2.2.49. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2} = 1.$$

2.2.50. Trong những dãy dưới đây, dãy nào là dãy Cauchy ?

(a) $$a_n = \frac{\tan 1}{2} + \frac{\tan 2}{2^2} + \dots + \frac{\tan n}{2^n},$$

(b) $$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \dots + \frac{n^2}{4^n},$$

(c) $$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

(d) $$a_n = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)},$$

(e) $$a_n = \alpha_1 q^1 + \alpha_2 q^2 + \dots + \alpha_n q^n,$$
$$\text{với} \quad |q| < 1, \quad |\alpha_k| \leq M, \quad k = 1, 2, \dots,$$

(f) $$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

2.2.51. Cho dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$|a_{n+1} - a_{n+2}| < \lambda |a_n - a_{n+1}|.$$

với $\lambda \in (0, 1)$. Chứng minh rằng $\{a_n\}$ hội tụ .

2.2.52. Cho dãy $\{a_n\}$ các số nguyên dương, định nghĩa

$$S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

và

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Chứng minh rằng nếu $\{S_n\}$ hội tụ thì $\{\ln \sigma_n\}$ cũng hội tụ.

2.2.53. Chứng minh rằng nếu dãy $\{R_n\}$ hội tụ đến một số vô tỷ x (định nghĩa trong bài toán 1.1.20) thì nó là dãy Cauchy.

2.2.54. Cho một dãy cấp số cộng $\{a_n\}$ với các số hạng khác 0, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right).$$

2.2.55. Cho một dãy cấp số cộng $\{a_n\}$ với các số hạng dương, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right).$$

2.2.56. Tính

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$, *(b)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}}{n}$.

2.2.57. Cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa như sau:

$$a_1=a,\quad a_2=b,\quad a_{n+1}=pa_{n-1}+(1-p)a_n,\ n=2,3,\ldots$$

Xác định xem với giá trị a, b và p nào thì dãy trên hội tụ.

2.2.58. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ định nghĩa bởi

$$a_1=3,\quad b_1=2,\quad a_{n+1}=a_n+2b_n \text{ và } \quad b_{n+1}=a_n+b_n.$$

Hơn nữa cho

$$c_n=\frac{a_n}{b_n},\quad n\in\mathbb{N}.$$

(a) *Chứng tỏ rằng* $|c_{n+1}-\sqrt{2}|<\dfrac{1}{2}|c_n-\sqrt{2}|,\quad n\in\mathbb{N}$.

(b) *Tính* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

2.3 Định lý Toeplitz, định lý Stolz và ứng dụng

2.3.1. Chứng minh định lý Toeplitz sau về phép biến đổi chính qui từ dãy sang dãy.

Cho $\{c_{n,k} : 1 \le k \le n, n \ge 1\}$ là một bảng các số thực thoả mãn:

(i) $\quad c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *với mọi* $\ k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$

(iii) *tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương n thì*

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \le C.$$

Khi đó với mọi dãy hội tụ $\{a_n\}$ thì dãy biến đổi $\{b_n\}$ được cho bởi công thức $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k$, $n \ge 1$, cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.3.2. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

2.3.3.

(a) Chứng minh rằng giả thiết (iii) trong định lý Toeplitz (bài toán 2.3.1) có thể bỏ qua nếu tất cả $c_{n,k}$ là không âm.

(b) Cho $\{b_n\}$ là dãy được định nghĩa trong định lý Toeplitz (xem bài 2.3.1) với $c_{n,k} > 0, 1 \le k \le n, n \ge 1$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

2.3.4. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = +\infty.$$

2.3.5. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 1.a_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

2.3.6. Chứng minh rằng nếu dãy dương $\{a_n\}$ hội tụ tới a thì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = a.$$

2.3.7. Cho dãy dương $\{a_n\}$, chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

2.3.8. Cho $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n} = ab.$$

2.3.9. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy thoả mãn

(i) $b_n > 0, n \in \mathbb{N}$, *và* $\lim\limits_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = g$.

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = g.$$

2.3.10. Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy thoả mãn

(i) $b_n > 0, n \in \mathbb{N}$, *và* $\lim\limits_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = a.$$

2.3.11. Sử dụng các kết quả của bài trước, hãy chứng minh định lý Stolz.

Cho $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy thoả mãn:

(i) $\{y_n\}$ *tăng thực sự tới* $+\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g$.

Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = g.$$

2.3.12. Tính

(a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^{n+1}}\left(a+\frac{a^2}{2}+...+\frac{a^n}{n}\right),\quad a>1,$$

(c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(k!+\frac{(k+1)!}{1!}+...+\frac{(k+n)!}{n!}\right),\quad k\in\mathbb{N},$$

(d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}...+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

(e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+...+n^k}{n^{k+1}},\quad k\in\mathbb{N},$$

(f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+1.a+2.a^2...na^n}{na^{n+1}},\quad a>1,$$

(g) $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^k}(1^k+2^k+...+n^k)-\frac{n}{k+1}\right],\quad k\in\mathbb{N}.$$

2.3.13. Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. *Tìm*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(a_1+\frac{a_2}{\sqrt{2}}+\frac{a_3}{\sqrt{3}}+...+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right).$$

2.3.14. Chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ *thoả mãn*

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a,$$

thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a.$$

2.3.15. Cho $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. *Hãy tính*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2}+...+\frac{a_1}{2^{n-1}}\right).$$

2.3.16. Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. *Hãy tính*

(a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1.2}+\frac{a_{n-1}}{2.3}+...+\frac{a_1}{n.(n+1)}\right),$$

(b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}-\frac{a_{n-1}}{2^1}+...+(-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right).$$

2.3.17. Cho k là một số tự nhiên cố định bất kỳ lớn hơn 1. Hãy tính

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}.$$

2.3.18. Cho một cấp số cộng dương $\{a_n\}$, tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(a_1...a_n)^{\frac{1}{n}}}{a_1+a_2+...+a_n}.$$

2.3.19. Cho dãy $\{a_n\}$ sao cho dãy $\{b_n\}$ với $b_n = 2a_n + a_{n-1}$, $n \geq 2$, hội tụ tới b. Hãy xét tính hội tụ của $\{a_n\}$.

2.3.20. Cho dãy $\{a_n\}$ thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} n^x a_n = a$ với số thực x nào đó. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} n^x(a_1.a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} = ae^x.$$

2.3.21. Tính

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{\ln n},$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}}{\ln n}.$$

2.3.22. Giả sử $\{a_n\}$ tiến tới a. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{n}\right) = a.$$

2.3.23. Tính

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n!)^3}{n^{3n} e^{-n}}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}}$, (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{\frac{1}{n}}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$, $k \in \mathbb{N}$.

2.3.24. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = a.$$

2.3.25. Cho dãy $\{a_n\}$*, xét dãy* $\{A_n\}$ *các trung bình cộng* $A_n = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. *Chứng minh rằng nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = A.$$

2.3.26. Chứng minh điều ngược lại của định lý Toeplitz trong 2.3.1.

Cho $\{c_{n,k} : 1 \le k \le n, n \ge 1\}$ *là một bảng số thực bất kỳ. Nếu với mỗi dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ bất kỳ, dãy biến đổi* $\{b_n\}$ *cho bởi công thức*

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k, \quad n \ge 1$$

cũng hội tụ đến cùng một giới hạn thì

(i) $\quad c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ *với mọi* $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\quad \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

(iii) *tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho với mọi số nguyên dương* n*, ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n,k}| \le C.$$

2.4 Điểm giới hạn. Giới hạn trên và giới hạn dưới

2.4.1. Cho $\{a_n\}$ *là dãy thoả mãn* $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k-1}\}$ *và* $\{a_{3k}\}$ *hội tụ.*

(a) Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ *cũng hội tụ.*

(b) Liệu từ sự hội tụ của hai trong ba dãy con trên có suy ra được sự hội tụ của $\{a_n\}$*?*

2.4.2. Từ sự hội tụ của tất cả các dãy con của dãy $\{a_n\}$ dưới dạng $\{a_{s.n}\}$, $s > 1$, có suy ra được sự hội tụ của $\{a_n\}$?

2.4.3. Cho $\{a_{p_n}\}, \{a_{q_n}\}, \ldots, \{a_{s_n}\}$ là các dãy con của dãy $\{a_n\}$ sao cho $\{p_n\}, \{q_n\}, \ldots, \{s_n\}$ rời nhau từng cặp và hợp thành dãy $\{n\}$. Chứng minh rằng nếu $S, S_p, S_q, \ldots, S_s$ tương ứng là các tập các điểm giới hạn [1] của các dãy $\{a_n\}, \{a_{p_n}\}, \{a_{q_n}\}, \ldots, \{a_{s_n}\}$ thì

$$S = S_p \cup S_q \cup \ldots \cup S_s.$$

Chứng minh rằng nếu mỗi dãy con $\{a_{p_n}\}, \{a_{q_n}\}, \ldots, \{a_{s_n}\}$ hội tụ tới a thì dãy $\{a_n\}$ cũng hội tụ tới a.

2.4.4. Định lý trên (bài toán 2.4.3) có đúng trong trường hợp số lượng các dãy con là vô hạn không ?

2.4.5. Chứng minh rằng, nếu mọi dãy con $\{a_{n_k}\}$ của dãy $\{a_n\}$ đều chứa một dãy con $\left\{a_{n_{k_l}}\right\}$ hội tụ tới a thì dãy $\{a_n\}$ cũng hội tụ tới a.

2.4.6. Xác định tập các điểm giới hạn của dãy $\{a_n\}$, với

(a) $\quad a_n = \sqrt{4^{(-1)^n} + 2},$

(b) $\quad a_n = \dfrac{1}{2}\left(n - 2 - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right]\right)\left(n - 3 - 3\left[\dfrac{n-1}{3}\right]\right).$

(c) $\quad a_n = \dfrac{(1-(-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3},$

(d) $\quad a_n = \dfrac{(1+\cos n\pi)\ln 3n + \ln n}{\ln 2n},$

(e) $\quad a_n = \left(\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)^n,$

(f) $\quad a_n = \dfrac{2n^2}{7} - \left[\dfrac{2n^2}{7}\right].$

2.4.7. Tìm tập hợp các điểm giới hạn của dãy $\{a_n\}$ cho bởi công thức

(a) $\quad a_n = n\alpha - [n\alpha], \quad \alpha \in \mathbb{Q},$

(b) $\quad a_n = n\alpha - [n\alpha], \quad \alpha \notin \mathbb{Q},$

(c) $\quad a_n = \sin \pi n\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Q},$

(d) $\quad a_n = \sin \pi n\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{Q}.$

---

[1] *Còn gọi là các giới hạn riêng hay các điểm tụ của dãy.*

2.4.8. Cho $\{a_k\}$ là một dãy sinh ra từ cách đánh số một-một bất kỳ các phần tử của ma trận $\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m}\}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng mọi số thực đều là điểm giới hạn của dãy này.

2.4.9. Giả sử $\{a_n\}$ là dãy bị chặn. Chứng minh rằng tập các điểm giới hạn của nó là đóng và bị chặn.

2.4.10. Xác định $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ với:

(a) $$a_n = \frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right],$$

(b) $$a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3},$$

(c) $$a_n = (-1)^n n,$$

(d) $$a_n = n^{(-1)^n n},$$

(e) $$a_n = 1 + n\sin\frac{n\pi}{2},$$

(f) $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4},$$

(g) $$a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}},$$

(h) $$a_n = \left(2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)^n,$$

(i) $$a_n = \frac{\ln n - (1 + \cos n\pi)n}{\ln 2n}.$$

2.4.11. Tìm giới hạn trên và giới hạn dưới của các dãy sau:

(a) $$a_n = n\alpha - [n\alpha], \qquad \alpha \in \mathbb{Q},$$

(b) $$a_n = n\alpha - [n\alpha], \qquad \alpha \notin \mathbb{Q},$$

(c) $$a_n = \sin \pi n\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{Q},$$

(d) $$a_n = \sin \pi n\alpha, \qquad \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

2.4.12. Với dãy $\{a_n\}$ bất kỳ chứng minh rằng:

(a) nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n > k$, bất đẳng thức $a_n \le A$ luôn đúng thì $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \le A$,

(b) nếu với mọi $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $n_k > k$ để $a_{n_k} \leqslant A$ thì $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant A$,

(c) nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho bất đẳng thức $a_n \geq a$ đúng với mọi $n > k$ thì $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \geq a$,

(d) nếu với mọi $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $n_k > k$ sao cho $a_{n_k} \geq a$ thì $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \geq a$.

2.4.13. *Giả sử dãy $\{a_n\}$ tồn tại giới hạn trên và giới hạn dưới hữu hạn. Chứng minh rằng*

(a) $L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ khi và chỉ khi

(i) Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n < L + \varepsilon$ nếu $n > k$ và

(ii) Với mọi $\varepsilon > 0$ và $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $n_k > k$ sao cho $L - \varepsilon < a_{n_k}$

(b) $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ khi và chỉ khi

(i) Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n > l - \varepsilon$ nếu $n > k$ và

(ii) Với mọi $\varepsilon > 0$ và $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $n_k > k$ sao cho $a_{n_k} < l + \varepsilon$

Hãy phát biểu những khẳng định tương ứng cho giới hạn trên và giới hạn trong trường hợp vô hạn.

2.4.14. *Giả sử tồn tại một số nguyên n_0 sao cho với $n \geq n_0$, $a_n \leqslant b_n$. Chứng minh rằng*

(a)
$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

(b)
$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

2.4.15. *Chứng minh các bất đẳng thức sau (trừ trường hợp bất định $+\infty - \infty$ và $-\infty + \infty$):*

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Hãy đưa ra một số ví dụ sao cho dấu " $\leqslant$ " trong các bất đẳng thức trên được thay bằng dấu " $<$ ".

2.4.16. *Các bất đẳng thức sau*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

có đúng trong trường hợp có vô hạn dãy không ?

2.4.17. Lấy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là các dãy số không âm. Chứng minh rằng (trừ trường hợp $0.(+\infty)$ và $(+\infty).0$) các bất đẳng thức sau:

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} b_n &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n \\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Hãy đưa ra một số ví dụ sao cho dấu " $\leqslant$ " trong các bất đẳng thức trên được thay bằng dấu " $<$ ".

2.4.18. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một dãy $\{a_n\}$ hội tụ là cả giới hạn trên và giới hạn dưới hữu hạn và

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Chứng minh rằng bài toán vẫn đúng cho trường hợp các dãy phân kỳ tới $-\infty$ và $+\infty$.

2.4.19. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$ thì

$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \varlimsup_{n\to\infty} b_n,$$

2.4.20. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}, a > 0$, và tồn tại một số nguyên dương n_0 sao cho $b_n \geq 0$ với $n \geq n_0$, khi đó

$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n.b_n) = a.\varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n.b_n) = a.\varlimsup_{n\to\infty} b_n;$$

2.4.21. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{n\to\infty} (-a_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n\to\infty} a_n.$$

2.4.22. Chứng minh rằng với dãy số dương $\{a_n\}$ ta có

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n)}.$$

(ở đây $\frac{1}{+\infty}=0$, $\frac{1}{0^+}=+\infty$.*)*

2.4.23. Chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ *là dãy số dương thoã mãn*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1}{a_n}\right)=1,$$

thì dãy $\{a_n\}$ *hội tụ.*

2.4.24. Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ *là dãy thoã mãn với bất kỳ dãy* $\{b_n\}$,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n+\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n,$$

và

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n.$$

thì dãy $\{a_n\}$ *hội tụ.*

2.4.25. Chứng minh rằng, nếu $\{a_n\}$ *là một dãy dương thoả mãn với bất kì dãy dương* $\{b_n\}$,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n.$$

hoặc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n.b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n,$$

vì vậy $\{a_n\}$ *hội tụ.*

2.4.26. Chứng minh rằng với bất kì dãy dương $\{a_n\}$,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

2.4.27. Cho dãy $\{a_n\}$ *, lấy dãy* $\{b_n\}$ *xác định như sau*

$$b_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n.$$

2.4.28. Chứng minh rằng

(a) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\max\{a_n, b_n\}\right) = \max\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\right\},$$

(b) $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\min\{a_n, b_n\}\right) = \min\left\{\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\right\},$$

Kiểm tra các bất đẳng thức sau:

(a) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\min\{a_n, b_n\}\right) = \min\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\right\},$$

(d) $$\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\max\{a_n, b_n\}\right) = \max\left\{\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n\right\}$$

có đúng không?

2.4.29. Chứng minh rằng mọi dãy số thực đều chứa một dãy con đơn điệu.

2.4.30. Sử dụng kết quả bài trước để chứng minh định lí Bolzano-Weierstrass: Mọi dãy số thực bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.

2.4.31. Chứng minh rằng với mọi dãy số dương $\{a_n\}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \geq 4.$$

Chứng minh rằng 4 là đánh giá tốt nhất.

2.5 Các bài toán hỗn hợp

2.5.1. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *hay* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

2.5.2. Với $x \in \mathbb{R}$ *chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}.$$

2.5.3. Với $x > 0$ hãy kiểm chứng bất đẳng thức

$$\frac{x}{x+2} < \ln(x+1) < x.$$

(Sử dụng đạo hàm) chứng minh rằng bất đẳng thức trái có thể mạnh hơn như sau

$$\frac{x}{x+2} < \frac{2x}{x+2} < \ln(x+1), \quad x > 0.$$

2.5.4. Chứng minh rằng

(a) $$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a, \quad a > 0,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) = +\infty.$$

2.5.5. Lấy $\{a_n\}$ là dãy số dương với các số hạng khác 1, chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

2.5.6. Lấy

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e \quad \text{và} \quad 0 < e - a_n < \frac{1}{nn!}.$$

2.5.7. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

2.5.8. Chứng minh rằng

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2,$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\right) = \ln 2.$$

2.5.9. Tìm giới hạn của dãy $\{a_n\}$ *,trong đó*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.5.10. Lấy $\{a_n\}$ *là dãy được xác định qui nạp như sau*

$$a_1 = 1, \quad a_n = n(a_{n-1}+1) \qquad \text{với} \quad n = 2, 3, ...$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{a_k}\right).$$

2.5.11. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty}(n!e - [n!e]) = 0$.

2.5.12. Cho các số dương a *và* b*, chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$

2.5.13. Cho $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *là các dãy dương thỏa mãn*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n^n = b, \quad \text{trong đó} \quad a, b > 0,$$

và giả sử các số dương p, q *thỏa mãn* $p + q = 1$*. Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty}(pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$

2.5.14. Cho hai số thực a *và* b*, xác định dãy* $\{a_n\}$ *như sau*

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n}a_n + \frac{1}{n}a_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Tìm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2.5.15. Cho $\{a_n\}$ *là một dãy được xác định như sau*

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Tìm công thức hiển của các số hạng tổng quát của dãy.

2.5.16. Cho a và b xác định $\{a_n\}$ như sau

$$a_1 = a, \qquad a_2 = b, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2n}a_{n-1} + \frac{2n-1}{2n}a_n, \qquad n \geq 2.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.17. Cho

$$a_n = 3 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

(b) Chứng minh rằng $0 < a_n - e < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$.

2.5.18. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e)$.

2.5.19. Giả sử $\{a_n\}$ là dãy thoả mãn $a_n < n$, $n = 1, 2, \ldots$, và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Hãy xét tính hội tụ của dãy*

$$\left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2.5.20. Giả sử dãy $\{b_n\}$ dương hội tụ tới $+\infty$. Xét tính hội tụ của dãy

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2.5.21. Cho dãy truy hồi $\{a_n\}$ định nghĩa như sau

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n-1} = a_n(1 - a_n), \quad n \geq 1,$$

chứng minh rằng

(a) $$\lim_{n\to\infty} na_n = 1,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1-a_n)}{\ln n} = 1,$$

2.5.22. Xét dãy truy hồi $\{a_n\}$ như sau

$$0 < a_1 < \pi, \quad , a_{n+1} = \sin a_n, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n = \sqrt{3}$.

2.5.23. Cho

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}, \quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}} = 1.$$

2.5.24. Cho $\{a_n\}$ *như sau*

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \arctan a_n, \quad n \geq 1,$$

tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.25. Chứng minh rằng dãy đệ qui

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n-1} = \cos a_n, \quad n \geq 1.$$

hội tụ tới nghiệm duy nhất của phương trình $x = \cos x$.

2.5.26. Định nghĩa dãy $\{a_n\}$ *như sau*

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 1 - \sin(a_n - 1), \quad n \geq 1$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2.5.27. Cho $\{a_n\}$ *là dãy các nghiệm liên tiếp của phương trình* $\tan x = x,\ x > 0$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)$.

2.5.28. Cho $|a| \leqslant \frac{\pi}{2}$ *và* $a_1 \in \mathbb{R}$. *Nghiên cứu tính hội tụ của dãy* $\{a_n\}$ *cho bởi công thức sau:*

$$a_{n+1} = a \sin a_n, \quad n \geq 1.$$

2.5.29. Cho $a_1 > 0$, *xét dãy* $\{a_n\}$ *cho bởi*

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n), \quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

(a)
$$\lim_{n\to\infty} na_n = 2.$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(na_n - 2)}{\ln n} = \frac{2}{3}.$$

2.5.30. Cho dãy $\{a_n\}$ như sau

$$a_1 = 0 \quad \text{và} \quad a_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{a_n}, \; n \geq 1.$$

Hãy nghiên cứu tính hội tụ của dãy.

2.5.31. Cho $a_1 > 0$, định nghĩa dãy $\{a_n\}$ như sau:

$$a_{n+1} = 2^{1-a_n}, \quad n \geq 1.$$

Khảo sát tính hội tụ của dãy.

2.5.32. Tìm giới hạn của dãy cho bởi

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}}, \quad n \geq 1.$$

2.5.33. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0.$$

2.5.34. Chứng minh rằng nếu với dãy dương $\{a_n\}$ bất kỳ thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

tồn tại (hữu hạn hoặc vô hạn) thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$$

cũng tồn tại và cả hai giới hạn bằng nhau.

2.5.35. Cho $a_1, b_1 \in (0,1)$, Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ cho bởi công thức

$$a_{n+1} = a_1(1 - a_n - b_n) + a_n, \quad b_{n+1} = b_1(1 - a_n - b_n) + b_n, \quad n \geq 1$$

hội tụ và tìm giới hạn của chúng.

2.5.36. Cho a và a_1 dương, xét dãy $\{a_n\}$ như sau

$$a_{n+1} = a_n(2 - na_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Khảo sát sự hội tụ của dãy.

2.5.37. Chứng minh rằng nếu a_1 và a_2 là hai số dương và

$$a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

thì dãy $\{a_n\}$ hội tụ. Tìm giới hạn của dãy.

2.5.38. Giả sử $f : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ là một hàm tăng với mỗi biến và tồn tại $a > 0$ sao cho

$$f(x, x, \ldots, x) > x \text{ với } \quad 0 < x < a,$$
$$f(x, x, \ldots, x) < x \text{ với } \quad x > a.$$

Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_k$, định nghĩa dãy truy hồi $\{a_n\}$ như sau:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}), \text{ với } \quad n > k.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2.5.39. Cho a_1 và a_2 là hai số dương. Xét tính hội tụ của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa truy hồi như sau

$$a_{n+1} = a_n e^{a_n - a_{n-1}} \text{ với } \quad n \geq 1.$$

2.5.40. Cho $a > 1$ và $x > 0$, định nghĩa $\{a_n\}$ bởi $a_1 = a^x$, $a_{n-1} = a^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Hãy xét tính hội tụ của dãy.

2.5.41. Chứng minh rằng

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n\text{ - căn}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Sử dụng kết quả trên để tính giới hạn của dãy truy hồi cho bởi

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

2.5.42. Cho $\{\varepsilon_n\}$ là dãy sao cho các số hạng chỉ nhận một trong ba giá trị $-1, 0, 1$. Thiết lập công thức

$$\varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

và chứng tỏ rằng dãy

$$a_n = \varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \cdots + \varepsilon_n\sqrt{2}}}$$

hội tụ.

2.5.43. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2.2^2}+...+\arctan\frac{1}{2n^2}\right).$$

2.5.44. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})$.

2.5.45. Xét tính hội tụ của dãy truy hồi dưới đây

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_2=\sqrt{2+\sqrt{3}},\quad a_{n+2}=\sqrt{2+\sqrt{3+a_n}}\text{ với }\quad n\geq 1.$$

2.5.46. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+...\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}=3.$$

2.5.47. Cho $a>0$, cho dãy $\{a_n\}$ bởi

$$a_1<0,\quad a_{n+1}=\frac{a}{a_n}-1\text{ với }\quad n\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy trên hội tụ tới nghiệm âm của phương trình $x^2+x=a$.

2.5.48. Cho $a>0$, xét dãy $\{a_n\}$:

$$a_1>0,\quad a_{n+1}=\frac{a}{a_n+1}\text{ với }\quad n\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy hội tụ tới nghiệm dương của phương trình $x^2+x=a$.

2.5.49. Cho $\{a_n\}$ là dãy truy hồi cho bởi công thức sau

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{2+a_n}{1+a_n}\text{ với }\quad n\in\mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $\{a_n\}$ là dãy Cauchy và tìm giới hạn của nó.

2.5.50. Chứng minh rằng dãy định nghĩa bởi

$$a_1>0,\quad a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n},\quad n\in\mathbb{N},$$

là dãy Cauchy và tìm giới hạn của dãy.

2.5.51. Cho $a > 0$, định nghĩa $\{a_n\}$ như sau:

$$a_1 = 0 \quad a_{n+1} = \frac{a}{2 + a_n} \text{ với } \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hãy xét tính hội tụ của dãy $\{a_n\}$.

2.5.52. Giả sử rằng $a_1 \in \mathbb{R}$ và $a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}|$ với $n \in \mathbb{N}$. Hãy xét tính hội tụ của dãy và trong trường hợp hội tụ hãy tìm giới hạn đó.

2.5.53. Chứng minh rằng

(a) Nếu $0 < a < 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{ja^j}{n-j} = 0,$$

(b) Nếu $0 < a < 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} na^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ja^j} = \frac{1}{1-a},$$

(c) Nếu $b > 1$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} \sum_{j=1}^{n} \frac{b^{j-1}}{j} = \frac{1}{b-1}.$$

2.5.54. Tính

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+2} + ... + \sin\frac{\pi}{2n} \right).$$

2.5.55. Tính

(a) $$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{cn^3}\right), \quad \text{với} \quad c > 0,$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k^2}{cn^3}\right), \text{ với } \quad c > 1.$$

2.5.56. Xác định

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n\sqrt{n}}.$$

2.5.57. Cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa theo công thức sau:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}, \quad n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2.5.58. Tìm giá trị α sao cho dãy

$$a_n = \left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha}\right)\ldots\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\alpha}\right), \quad n \geq 2,$$

hội tụ.

2.5.59. Với $x \in \mathbb{R}$, định nghĩa $\{x\} = x - [x]$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{(2+\sqrt{3})^n\right\}$.

2.5.60. Cho $\{a_n\}$ là một dãy dương và đặt $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geq 1$. Giả sử ta có

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{S_{n-1}}((S_n - 1)a_n + a_{n-1}), \quad n > 1.$$

Hãy tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.61. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \infty.$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n^2}.$$

2.5.62. Xét hai dãy dương $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = 0.$$

Định nghĩa dãy $\{c_n\}$ như sau:

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_1 + c_2 + \ldots + c_n} = 0.$$

2.5.63. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}.$$

2.5.64. Giả sử dãy $\{a_n\}$ *bị chặn trên và thoả mãn điều kiện*

$$a_{n+1}-a_n > -\frac{1}{n^2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Hãy thiết lập sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$.

2.5.65. Giả sử dãy $\{a_n\}$ *bị chặn thoả mãn điều kiện*

$$a_{n+1}\sqrt[2^n]{2}\geq a_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Hãy thiết lập sự hội tụ của dãy $\{a_n\}$.

2.5.66. Ký hiệu l *và* L *tương ứng là giới hạn dưới và giới hạn trên của dãy* $\{a_n\}$ *. Chứng minh rằng nếu* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ *thì mỗi điểm trong khoảng mở* (l,L) *là điểm giới hạn của* $\{a_n\}$.

2.5.67. Ký hiệu l *và* L *tương ứng là giới hạn dưới và giới hạn trên của dãy* $\{a_n\}$ *. Giả sử rằng với mọi* n, $a_{n+1}-a_n > -\alpha_n$, *với* $\alpha_n>0$ *và* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n=0$. *Chứng minh rằng mỗi điểm trong khoảng mở* (l,L) *là điểm giới hạn của* $\{a_n\}$.

2.5.68. Cho $\{a_n\}$ *là dãy dương và đơn điệu tăng. Chứng minh rằng tập các điểm giới hạn của dãy*

$$\frac{a_n}{n+a_n}, \quad n\in\mathbb{N},$$

là một khoảng, khoảng này suy biến thành một điểm trong trường hợp hội tụ.

2.5.69. Cho $a_1\in\mathbb{R}$, *xét dãy* $\{a_n\}$ *như sau:*

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2} & \textit{nếu } n \textit{ chẵn},\\ \frac{1+a_n}{2} & \textit{nếu } n \textit{ lẻ}.\end{cases}$$

Tìm các điểm giới hạn của dãy trên.

2.5.70. Liệu 0 có phải là một điểm giới hạn của dãy $\{\sqrt{n}\sin n\}$ *?*

2.5.71. Chứng minh rằng với dãy dương $\{a_n\}$ *ta có*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geq e.$$

2.5.72. Chứng minh kết quả tổng quát của bài toán trên: Cho số nguyên dương p và dãy dương $\{a_n\}$, Chứng minh rằng

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{a_1+a_{n+p}}{a_n}\right)^n \geq e^p.$$

2.5.73. Chứng minh với dãy dương $\{a_n\}$ ta có

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right) \geq 1.$$

Chứng minh 1 là hằng số tốt nhất có thể được của bất đẳng thức trên.

2.5.74. Cho

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}_{n\text{ - căn}}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.5.75. Cho $\{a_n\}$ là dãy với các phần tử lớn hơn 1 . Giả sử ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\ln a_n}{n} = \alpha.$$

Xét dãy $\{b_n\}$ như sau:

$$b_n = \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_n}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng nếu $\alpha < \ln 2$ thì $\{b_n\}$ hội tụ, ngược lại nếu $\alpha < \ln 2$ thì dãy phân kì tới ∞.

2.5.76. Giả sử các số hạng của dãy của dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m \text{ với } \quad n, m \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ tồn tại.

2.5.77. Giả sử các số hạng của dãy của dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m \quad \text{với} \quad n, m \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ tồn tại.

2.5.78. Giả sử các số hạng của dãy của dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$|a_n| \le 1.$$
$$a_n + a_m - 1 \le a_{n+m} \le a_n + a_m + 1$$

với $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ tồn tại.

(b) Chứng minh rằng nếu giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$ thì

$$ng - 1 \le a_n \le ng + 1 \text{ với } \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.5.79. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương và đơn điệu tăng thoả mãn điều kiện

$$a_{n.m} \ge n a_m \quad \text{với} \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng nếu $\sup\left\{\frac{a_n}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} < +\infty$ thì dãy $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ hội tụ.

2.5.80. Cho hai số dương a_1 và a_2, chứng minh dãy truy hồi $\{a_n\}$ cho bởi

$$a_{n+2} = \frac{2}{a_{n+1} + a_n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

hội tụ.

2.5.81. Cho $b_1 \ge a_1 > 0$, xét hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ cho bởi công thức truy hồi:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n-1} b_n} \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng cả hai dãy đều hội tụ tới cùng một giới hạn.

2.5.82. Cho $a_{k,n}, b_{k,n}, n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, ..., n$, là hai bảng tam giác các số thực với $b_{k,n} \ne 0$. Giả sử rằng $\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ đều đối với k, có nghĩa là với mọi $\varepsilon > 0$, luôn tồn tại một số dương n_0 sao cho

$$\left|\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} - 1\right| < \varepsilon$$

với mọi $n > n_0$ và $k = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}$ tồn tại thì

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

2.5.83. Cho $a \neq 0$, tìm

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}.$$

2.5.84. Với $a > 0$, tính

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

2.5.85. Tính

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

2.5.86. Với $p \neq 0$ và $q > 0$, hãy tính

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{k^{q-1}}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right).$$

2.5.87. Cho các số dương a, b và d với $b > a$, tính

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a(a+d)\ldots(a+nd)}{b(b+d)\ldots(b+nd)}.$$

Chương 3

Chuỗi số thực

Tóm tắt lý thuyết

• *Cho chuỗi hình thức*

$$(A) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

a_n được gọi là số hạng thứ n hay số hạng tổng quát của chuỗi (A).

Dãy các **TỔNG RIÊNG** *của chuỗi (A) được định nghĩa là*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ n \in \mathbb{N}.$$

s_n được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi (A).

Nói rằng **CHUỖI** (A) **HỘI TỤ** *và có tổng bằng s, nếu*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Trong trường hợp này, phần dư của chuỗi (A) được định nghĩa là

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \ n \in \mathbb{N}.$$

Nói rằng **CHUỖI** (A) **PHÂN KỲ**, *nếu giới hạn nói trên không tồn tại*

• **ĐIỀU KIỆN CẦN** *để chuỗi* (A) *hội tụ là*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

• **ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ** *để chuỗi* (A) *hội tụ là: với* $\epsilon >$ *cho trước, tồn tại* $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

• (A) *được gọi là chuỗi dương nếu* $a_n \geq 0$ *với mọi* n.

• **TIÊU CHUẨN SO SÁNH.** *Cho hai chuỗi dương* (A) *và* (B)

(B)
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Giả sử

$$a_n \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó,

nếu chuỗi (B) *hội tụ, thì chuỗi* (A) *cũng hội tụ;*

nếu chuỗi (A) *phân kỳ, thì chuỗi* (B) *cũng phân kỳ.*

Đặc biệt, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0,$$

thì hai chuỗi $(A), (B)$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

• **TIÊU CHUẨN TỶ SỐ (D'ALEMBERT).** *Cho chuỗi dương* (A).

Nếu

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

thì chuỗi (A) *hội tụ.*

Nếu

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

thì chuỗi (A) *phân kỳ.*

Đặc biệt, giả sử tồn tại giới hạn

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

khi đó, nếu $a < 1$ thì chuỗi (A) hội tụ; nếu $a > 1$ thì chuỗi (A) phân kỳ.

• **TIÊU CHUẨN CĂN (CACHY).** *Cho chuỗi dương (A). Giả sử tồn tại giới hạn*

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n},$$

khi đó, nếu $c < 1$ thì chuỗi (A) hội tụ; nếu $c > 1$ thì chuỗi (A) phân kỳ.

• **TIÊU CHUẨN RAABE.** *Cho chuỗi dương (A).*

Nếu

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1.$$

thì chuỗi (A) hội tụ.

Nếu

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1.$$

thì chuỗi (A) phân kỳ.

Đặc biệt, giả sử tồn tại giới hạn

$$r = \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$$

khi đó, nếu $r > 1$ thì chuỗi (A) hội tụ; nếu $r < 1$ thì chuỗi (A) phân kỳ.

• *Nói rằng chuỗi (A)* **HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI**, *nếu chuỗi (gồm các trị số tuyệt đối)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

hội tu.

Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ. Điều ngược lại, nói chung, không đúng.

• *Nói rằng chuỗi (A)* **HỘI TỤ CÓ ĐIỀU KIỆN** *hay* **BÁN HỘI TỤ**, *nếu chuỗi nó hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.*

• **CHUỖI ĐAN DẤU** *là chuỗi có dạng*

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots, \quad b_n \geq 0.$$

• **TIÊU CHUẨN LEIBNIZ** *nói rằng, nếu dãy số* $\{b_n\}$ *đơn điệu giảm và hội tụ về* 0 *thì chuỗi đan dấu hội tụ.*

• **PHÉP BIẾN ĐỔI ABEL** *Cho hai chuỗi bất kỳ* (A) *và* (B). *Đặt*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \; B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \; C_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Khi đó ta có

$$C_n = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

• **TIÊU CHUẨN ABEL.** *Cho hai chuỗi bất kỳ* (A) *và* (B). *Xét chuỗi* (C) *như sau*

$$(C) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Nếu chuỗi (B) *hội tụ và dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu và bị chặn thì chuỗi* (C) *hội tụ.*

• **TIÊU CHUẨN DIRICHLET.** *Nếu dãy* $\{A_n\}$ *bị chặn, dãy* $\{b_n\}$ *đơn điệu và có giới hạn bằng* 0 *thì chuỗi* (C) *hội tụ.*

3.1 Tổng của chuỗi

3.1.1. *Tìm các chuỗi và tổng của chúng nếu dãy $\{S_n\}$ các tổng riêng của chúng được cho như sau:*

(a) $S_n = \dfrac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, (b) $S_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}$,

(c) $S_n = \arctan n,\ n \in \mathbb{N}$, (d) $S_n = \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}$.

3.1.2. *Tìm tổng của các chuỗi*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$.

3.1.3. *Tính các tổng sau*

(a) $$\ln\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}.$$

3.1.4. *Tìm tổng của các chuỗi*

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}, m \in \mathbb{N},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}, m \in \mathbb{N},$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

3.1.5. *Tính*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n!\pi}{720}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{\ln n}{n - \ln n}\right]$.

3.1.6. Tính

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}}.$$

3.1.7. Tìm

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}.$$

3.1.8. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

3.1.9. Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy thoả mãn

$$\lim_{n\to\infty} ((a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)) = g, \quad 0 < g \leqslant +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1)} = 1 - \frac{1}{g}.$$

(qui ước: $\frac{1}{\infty} = 0$).

3.1.10. Dùng kết quả trong bài toán trước, tìm tổng của các chuỗi

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n},$$

(c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}.$$

3.1.11. Gọi $\{a_n\}$ là dãy cho bởi

$$a_1 > 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1{}^2 - 4}}{2}.$$

3.1.12. Với $b > 2$, kiểm tra rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{1}{b-2}.$$

3.1.13. Cho $a > 0$ và $b > a+1$, chứng minh đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{a}{b-a-1}.$$

3.1.14. Cho $a > 0$ và $b > a+2$, kiểm tra đẳng thức sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} = \frac{a(b-1)}{(b-a-1)(b-a-2)}.$$

3.1.15. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ là chuỗi phân kỳ với các số hạng dương. Cho trước $b > 0$, tìm tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{(a_2+b)(a_3+b)\dots(a_{n+1}+b)}.$$

3.1.16. Tính

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^3 3^n x}{3^n}.$$

3.1.17. Cho các hằng số khác không a, b và c, giả sử các hàm f và g thoả mãn điều kiện $f(x) = af(bx) + cg(x)$.

(a) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a^n f(b^n x) = L(x)$ tồn tại thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n g(b^n x) = \frac{f(x) - L(x)}{c}.$$

(b) Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} f(b^{-n} x) = M(x)$ tồn tại thì

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} g(b^{-n} x) = \frac{M(x) - af(bx)}{c}.$$

3.1.18. Dùng đồng nhất thức $\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3}$*, chứng minh rằng*

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin^3\frac{x}{3^{n+1}} = \frac{x - \sin x}{4}.$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\sin^3\frac{x}{3^{n+1}} = \frac{3}{4}\sin\frac{x}{3}.$$

3.1.19. Dùng đồng nhất thức $\cot x = 2\cot(2x) + \tan x$ *với* $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$*, chứng minh rằng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} = \frac{1}{x} - 2\cot(2x).$$

3.1.20. Dùng đồng nhất thức $\arctan x = \arctan(bx) + \arctan\frac{(1-b)x}{1+bx^2}$*, thiết lập các công thức sau:*

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\frac{(1-b)b^n x}{1+b^{2n+1}x^2} = \arctan x \quad \text{với} \quad 0 < b < 1,$$

(b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\frac{(b-1)b^n x}{1+b^{2n+1}x^2} = \operatorname{arccot} x \quad \text{với} \quad x \neq 0 \quad \text{và} \quad b > 1.$$

3.1.21. Cho $\{a_n\}$ *là dãy Fibonacci được xác định bởi*

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1$$

và đặt $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^2$*. Tìm*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n}.$$

3.1.22. Với dãy Fibonacci $\{a_n\}$ *trong bài trên, tính*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+2}}.$$

3.1.23. Với dãy Fibonacci $\{a_n\}$ *trong bài trên, xác định tổng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{a_{2n}}.$$

3.1.24. Tìm tổng

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$. (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{8n}{n^4-2n^2+5}$.

3.1.25. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương phân kỳ tới vô cùng. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{a_{n+1}-a_n}{1+a_n a_{n+1}} = \arctan \frac{1}{a_1}.$$

3.1.26. Chứng minh rằng với bất kỳ hoán vị nào của các số hạng của chuỗi dương, tổng của chuỗi nhận được không thay đổi.

3.1.27. Chứng minh đồng nhất thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

3.1.28. Chứng minh rằng

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

3.1.29. Cho dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Tìm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

3.1.30. Cho dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \ln \frac{e^{a_n}-1}{a_n} \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

và đặt $b_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Tìm $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.1.31. Cho dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} - \sqrt{2} \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Tìm tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1.32. Tìm tổng của các chuỗi sau

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)},$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+2n-1} + \frac{1}{x+2n} - \frac{1}{x+n} \right), \quad x \neq -1, -2, \ldots.$$

3.1.33. Tính

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

3.1.34. Tính

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

3.1.35. Xác định tổng của các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right).$$

3.1.36. Giả sử hàm f khả vi trên $(0, +\infty)$, sao cho đạo hàm f' của nó đơn điệu trên một khoảng con $(a, +\infty)$, và $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Chứng minh rằng giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)dx \right)$$

tồn tại. Xét các trường hợp đặc biệt của khi hàm $f(x)$ có dạng $f(x) = \frac{1}{x}$ và $f(x) = \ln x$.

3.1.37. Xác định tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}.$$

3.1.38. Tìm

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right).$$

3.1.39. Cho trước số nguyên $k \geq 2$, chứng minh rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)k+1}+\frac{1}{(n-1)k+2}+\ldots+\frac{1}{nk-1}-\frac{x}{nk}\right)$$

hội tụ đối với duy nhất một giá trị của x. Tìm giá trị này và tổng của chuỗi.

3.1.40. Cho dãy $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$a_0 = 2,\ a_{n+1} = a_n + \frac{3+(-1)^n}{2},$$

tính

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{1}{a_n^2-1}.$$

3.1.41. Chứng minh rằng tổng của các chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$, *(b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}$

là vô tỷ.

3.1.42. Cho $\{\varepsilon_n\}$ là dãy với ε_n nhận hai giá trị 1 hoặc -1. Chứng minh rằng tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n!}$ là số vô tỷ.

3.1.43. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k , tổng của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^k}$$

là vô tỷ.

3.1.44. *Giả sử rằng $\{n_k\}$ là dãy đơn điệu tăng các số nguyên dương sao cho*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}} = +\infty.$$

Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ là vô tỷ.

3.1.45. *Chứng minh rằng nếu $\{n_k\}$ là dãy các số nguyên dương thoả mãn*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1}} = +\infty \quad \text{và} \quad \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{n_{k-1}} > 1,$$

thì $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$ là vô tỷ.

3.1.46. *Giả sử rằng $\{n_k\}$ là dãy đơn điệu tăng các số nguyên dương sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[2^k]{n_k} = \infty$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ là vô tỷ.*

3.1.47. *Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$, $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ là chuỗi hội tụ và giả sử*

$$\frac{p_n}{q_n - 1} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1} - 1} \geq \frac{p_n}{q_n}.$$

Ký hiệu $\mathbf{A}$ là tập tất cả các số n sao cho bất đẳng thức trên có dấu $>$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ vô tỷ khi và chỉ khi $\mathbf{A}$ là vô hạn.

3.1.48. *Chứng minh rằng với mọi dãy tăng ngặt các số nguyên dương $\{n_k\}$, tổng của chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n_k}}{n_k!}$ là vô tỷ.*

3.2 Chuỗi dương

3.2.1. Các chuỗi sau hội tụ hay phân kỳ

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}), \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2},$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \qquad \text{(d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)},$$

$$\text{(e)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right), \qquad \text{(f)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n,$$

$$\text{(g)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1), \quad a>1.$$

3.2.2. Kiểm tra sự hội tụ của các chuỗi sau đây

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1},$$

$$\text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}, \qquad \text{(d)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},$$

$$\text{(e)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}.$$

3.2.3. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là các chuỗi dương thoả mãn*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{với} \quad n \ge n_0.$$

Chứng minh rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ, thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng hội tụ.*

3.2.4. Kiểm tra sự hội tụ của các chuỗi sau đây

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^n n!}.$$

3.2.5. Tìm giá trị của α để các chuỗi sau hội tụ

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^{\alpha},\quad a>1,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{\alpha},$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right)^{\alpha},$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}.$

3.2.6. Chứng minh rằng nếu chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{a_n}-1\right),\quad a>1$$

cũng hội tụ.

3.2.7. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right).$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{(n+b)}(n+b)^{(n+a)}},\quad a,b>0.$

3.2.8. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ với các số hạng không âm hội tụ. Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$ cũng hội tụ. Chứng minh rằng điều ngược lại là không đúng, tuy nhiên nếu dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm thì điều ngược lại đúng.

3.2.9. Giả sử rằng chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kỳ. Nghiên cứu sự hội tụ các chuỗi sau đây

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}.$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+na_n}.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}.$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}.$

3.2.10. Giả sử chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ, ký hiệu dãy các tổng riêng của nó là* $\{S_n\}$ *. Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} \quad \text{phân kỳ.}$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2} \quad \text{hội tụ.}$$

3.2.11. Chứng minh rằng với các giả thiết như của bài trước, chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}}$$

hội tụ với mọi $\beta > 0$.

3.2.12. Chứng minh rằng các giả thiết cho ở bài tập 3.2.10 , chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$$

hội tụ nếu $\alpha > 1$ *và phân kỳ nếu* $\alpha \leqslant 1$.

3.2.13. Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ, ký hiệu* $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k; n \in \mathbb{N}$ *là dãy các phần dư của nó. Chứng minh rằng*

(a)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} \quad \text{phân kỳ,}$$

(b)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} \quad \text{hội tụ.}$$

3.2.14. Chứng minh rằng với các giả thiết được cho ở bài trước , chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}}$$

hội tụ nếu $\alpha < 1$ *và phân kỳ nếu* $\alpha \geq 1$.

3.2.15. Chứng minh rằng với giả thiết như ở bài 3.2.13, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \ln^2 r_n$ *hội tụ.*

3.2.16. Cho chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Giả sử rằng*

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g.$$

Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ nếu* $g > 1$ *và phân kỳ nếu* $g < 1$ *(kể cả trường hợp* $g = +\infty$ *và* $g = -\infty$*). Hãy đưa ví dụ chứng tỏ rằng khi* $g = 1$ *thì ta không thể đưa ra kết luận được.*

3.2.17. Nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau đây

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}, \quad a > 0$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}, \quad a > 0.$

3.2.18. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}, \quad a > 0.$$

3.2.19. Dùng kết quả của bài toán 3.2.16, chứng minh dạng giới hạn của Tiêu chuẩn Raabe.
Cho $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *đặt*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r.$$

Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ nếu* $r > 1$ *và phân kỳ nếu* $r < 1$.

3.2.20. Cho dãy $\{a_n\}$ *được xác định bởi*

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2} a_{n-1} \quad \text{với} \quad n \geq 2.$$

Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

3.2.21. *Cho a_1 và α là các số dương. Dãy $\{a_n\}$ được xác định như sau*

$$a_{n+1} = a_n e^{-a_n^\alpha}, \quad \text{với} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Hãy xác định α và β để chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\beta$ hội tụ.

3.2.22. *Xác định a để chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdot \ldots \cdot (a+n)}$$

hội tụ.

3.2.23. *Cho a là số dương tuỳ ý và $\{b_n\}$ là dãy số dương hội tụ tới b. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)\cdot \ldots \cdot (na+b_n)}.$$

3.2.24. *Chứng minh rằng nếu dãy các số dương $\{a_n\}$ thoả mãn*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n}.$$

trong đó $\gamma_n \geq \Gamma > 1$, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Mặt khác, nếu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n}.$$

trong đó $\gamma_n \leqslant \Gamma < 1$, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ. (Tiêu chuẩn Bertrand.)

3.2.25. *Dùng tiêu chuẩn Bertrand và Raabe để chứng minh tiêu chuẩn Gauss.*

Nếu dãy các số dương $\{a_n\}$ thoả mãn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^\lambda},$$

trong đó $\lambda > 1$, và $\{\vartheta_n\}$ là dãy bị chặn, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \leqslant 1$.

3.2.26. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}{n!}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)}$$

ở đây α, β và γ là các hằng số dương.

3.2.27. Tìm giá trị của p để chuỗi

$$\sum_{n-1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p}$$

hội tụ.

3.2.28. Chứng minh tiêu chuẩn cô đặc của Cauchy.

Cho $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm các số không âm. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hội tụ.

3.2.29. Kiểm tra sự hội tụ của các chuỗi sau đây

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}.$$

3.2.30. Chứng minh định lý Schlomilch (suy rộng của định lý Cauchy, xem bài tập 3.2.28).

Nếu $\{g_k\}$ là dãy tăng ngặt các số nguyên dương sao cho với $c > 0$ nào đó và với mọi $k \in \mathbb{N}$, $g_{k+1} - g_k \leqslant c(g_k - g_{k-1})$ và với dãy dương $\{a_n\}$ giảm ngặt, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(g_{k+1} - g_k)a_{g_k} < \infty.$$

3.2.31. Cho $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm các số dương. Chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi các chuỗi sau hội tụ

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n a_{3^n}$, *(b)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$, *(c)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$,

(d) Sử dụng tiêu chuẩn trên hãy nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi trong bài tập 3.2.17.

3.2.32. Giả sử $\{a_n\}$ *là dãy dương. Chứng minh rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ nếu*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n)^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e}.$$

3.2.33. Giả sử $\{a_n\}$ *là dãy dương.Chứng minh rằng*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e}$$

kéo theo sự hội tụ của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.2.34. Cho $\{a_n\}$ *là dãy dương, đơn điệu giảm thoả mãn*

$$\frac{2^n a_{2^n}}{a_n} \leqslant g < 1.$$

Chứng minh rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

3.2.35. Cho $\{a_n\}$ *là dãy không âm, đơn điệu giảm. Chứng minh rằng nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ, thì* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. *Chứng minh rằng đây không là điều kiện đủ cho sự hội tụ của chuỗi.*

3.2.36. Hãy nêu một ví dụ chuỗi dương hội tụ nhưng điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$ *không thoả mãn.*

3.2.37. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là chuỗi dương hội tụ. Tìm điều kiện cần và đủ để tồn tại dãy dương* $\{b_n\}$ *sao cho các chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

đều hội tụ.

3.2.38. Tồn tại hay không một dãy dương $\{a_n\}$ *sao cho các chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$$

đều hội tụ.

3.2.39. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}$$

phân kỳ với mọi dãy dương $\{a_n\}$.

3.2.40. Giả sử $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ đơn điệu giảm tới không sao cho các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ. Có thể nói gì về sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, trong đó $c_n = \min\{a_n, b_n\}$?

3.2.41. Cho $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, không âm sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ phân kỳ. Giả sử rằng

$$b_n = \min\left\{a_n, \frac{1}{\ln(n+1)}\right\}.$$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ cũng phân kỳ.

3.2.42. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương , bị chặn và đơn điệu tăng. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \quad \text{hội tụ.}$$

3.2.43. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương, tăng và phân kỳ ra vô cực. Chứng minh rằng :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \quad \text{phân kỳ.}$$

3.2.44. Cho $\{a_n\}$ là dãy dương đơn điệu tăng. Chứng tỏ rằng với mọi $\alpha > 0$ ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}}\right) \quad \text{hội tụ.}$$

3.2.45. Chứng tỏ rằng với chuỗi dương phân kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ bất kỳ, tồn tại một dãy $\{c_n\}$ đơn điệu giảm tới 0 sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ phân kỳ.

3.2.46. Chứng tỏ rằng với chuỗi dương hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bất kỳ, tồn tại một dãy* $\{c_n\}$ *đơn điệu tăng ra vô cực sao cho* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ *hội tụ.*

3.2.47. Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *là một chuỗi dương hội tụ và kí hiệu* $\{r_n\}$ *là dãy phần dư của nó. Chứng minh rằng nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ *hội tụ thì*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

3.2.48. Cho $\{a_n\}$ *là dãy dương, phân kỳ ra vô cực. Có thể nói gì về sự hội tụ của các chuỗi sau:*

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^n}, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\ln n}}, \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}?$$

3.2.49. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, ở đây :*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \cos a_n \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.50. Cho p *là một số không âm cố định. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, ở đây :*

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = n^{-p} \sin a_n \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.51. Cho $\{a_n\}$ *là dãy các nghiệm dương liên tiếp của phương trình* $\tan x = x$*. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$.

3.2.52. Cho $\{a_n\}$ *là dãy các nghiệm dương liên tiếp của phương trình* $\tan\sqrt{x} = x$*. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

3.2.53. Cho a_1 *là một số dương tuỳ ý và* $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ *với* $n \geq 1$*. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *.*

3.2.54. Cho dãy dương đơn điệu giảm $\{a_n\}$ *sao cho chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ. Chứng minh rằng:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = 1.$$

3.2.55. Cho $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$ và kí hiệu k_n là số nguyên dương nhỏ nhất để $S_k \geq n$. Tìm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n}.$$

3.2.56. Cho $\mathbf{A}$ là tập tất cả các số nguyên dương sao cho trong biểu diễn thập phân của chúng không chứa chữ số 0.

(a) Chứng tỏ rằng $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n}$ hội tụ.

(b) Tìm tất cả các giá trị α sao cho $\sum\limits_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ.

3.2.57. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi số với các số hạng dương và cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = g.$$

Chứng minh rằng nếu $g > 1$ thì chuỗi hội tụ, còn nếu $g < 1$ thì chuỗi phân kỳ (ở đây g có thể bằng $\pm\infty$).

Cho ví dụ chứng tỏ rằng trong trường hợp $g = 1$ thì chưa thể có kết luận gì.

3.2.58. Chứng tỏ rằng tiêu chuẩn Raabe (xem 3.2.19) và tiêu chuẩn cho trong bài tập 3.2.16 là tương đương. Hơn nữa, chứng tỏ rằng khẳng định trong bài tập trên là mạnh hơn các tiêu chuẩn đó.

3.2.59. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ với các số hạng được cho bởi :

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_n = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{ - căn}}}, \quad n \geq 2.$$

3.2.60. Cho $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu giảm tới 0. Chứng tỏ rằng nếu dãy số có số hạng tổng quát là

$$(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$$

bị chặn thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phải hội tụ.

3.2.61. Tìm chuỗi số có số hạng a_n thoả mãn các điều kiện sau:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n+2} + \ldots \quad \text{với} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

3.2.62. Giả sử các số hạng của một chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ có tổng S thoả mãn các điều kiện sau:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \quad \text{và} \quad 0 < a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Chứng tỏ rằng có thể biểu diễn tất cả các số s bất kỳ trong khoảng nửa đóng $(0, S]$ bởi một tổng hữu hạn các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hoặc bởi một chuỗi con vô hạn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, ở đây $\{a_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{a_n\}$.

3.2.63. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi có các số hạng dương đơn điệu giảm. Chứng tỏ rằng nếu mỗi số trong khoảng $(0, S)$, S là tổng chuỗi, đều có thể biểu diễn bởi một tổng hữu hạn các số hạng của $\{a_n\}$ hoặc bởi một chuỗi con vô hạn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$, trong đó $\{a_{n_k}\}$ là một dãy con của $\{a_n\}$, thì bất đẳng thức sau đúng:

$$a_n \leqslant a_{n+1} + a_{n-2} + \ldots, \quad \text{với mỗi} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.64. Cho một chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, giả thiết rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$, trong đó $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Chứng minh rằng:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 S_1^{-1} + a_2 S_2^{-1} + \ldots + a_n S_n^{-1}}{\ln S_n} = 1.$$

3.2.65. Sử dụng bài tập trên chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

3.2.66. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi hội tụ với các số hạng dương. Có thể nói gì về sự hội tụ của

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}?$$

3.2.67. Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ *là một dãy dương sao cho* $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq \sum\limits_{k=n+1}^{2n} a_k$ *với* $n \in \mathbb{N}$, *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 2ea_1$.

3.2.68. Chứng minh bất đẳng thức Carleman:

Nếu $\{a_n\}$ *là một dãy dương và chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì*

$$\sum_{n-1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} < e\sum_{n-1}^{\infty} a_n.$$

3.2.69. Chứng minh rằng nếu $\{a_n\}$ *là dãy số dương thì với mọi số nguyên dương* k

$$\sum_{n-1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{n-1}^{\infty} a_n \left(\frac{n+k}{n}\right)^n .$$

3.2.70. Cho $\{a_n\}$ *là dãy số dương. Chứng minh rằng từ sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *suy ra sự hội tụ của chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 a_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^{2} \right).$$

3.2.71. Cho $\{a_n\}$ *là dãy số dương đơn điệu tăng sao cho* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *phân kỳ. Chứng minh rằng chuỗi*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}}$$

cũng phân kỳ.

3.2.72. Cho $\{p_n\}$ *là dãy tất cả các số nguyên tố liên tiếp. Hãy nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$.

3.2.73. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np_n - (n-1)p_{n-1}},$$

trong đó p_n *là số nguyên tố thứ* n.

3.2.74. Hãy đánh giá giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}}{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n}}}.$$

3.2.75. Cho dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện:

$$0\leqslant a_n\leqslant 1 \quad \textit{với mọi} \quad n\in\mathbb{N} \quad \textit{và} \quad a_1\neq 0.$$

Đặt

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n \quad \textit{và} \quad T_n=S_1+S_2+\ldots+S_n.$$

Hãy xác định các giá trị $\alpha>0$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{T_n^{\alpha}}$ hội tụ.

3.2.76. Cho k là một số nguyên dương tuỳ ý. Giả sử $\{a_n\}$ là dãy số dương đơn điệu tăng sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ hội tụ. Chứng minh rằng hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k a_n}{a_n} \quad \textit{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^k n}{a_n}$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

3.2.77. Giả sử $f:\mathbb{N}\to(0,\infty)$ là hàm giảm và $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ là hàm tăng sao cho $\varphi(n)>n$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Hãy kiểm tra các bất đẳng thức sau:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{k=1}^{\varphi(n)-1}f(k)<\sum_{k=1}^{\varphi(1)-1}f(k)+\sum_{k=1}^{n-1}f(\varphi(k))(\varphi(k+1)-\varphi(k)).$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{k=\varphi(1)-1}^{\varphi(n)}f(k)>\sum_{k=2}^{n}f(\varphi(k))(\varphi(k)-\varphi(k-1)).$$

3.2.78. Với giả thiết của bài trên, chứng minh rằng nếu tồn tại số q sao cho với mọi $n\in\mathbb{N}$ bất đẳng thức sau

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n+1)-\varphi(n))}{f(n)}\leqslant q<1$$

đúng thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *hội tụ. Mặt khác, nếu*

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n)-\varphi(n-1))}{f(n)} \geq 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *phân kỳ.*

3.2.79. Suy ra từ bài trên dấu hiệu sau về sự hội tụ và phân kỳ của chuỗi số dương.

Chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với các số hạng đơn điệu giảm sẽ hội tụ nếu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g < \frac{1}{2}$$

và phân kỳ nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = g > \frac{1}{2}.$$

3.2.80. Suy ra từ bài 3.2.78 dấu hiệu sau về sự hội tụ và phân kỳ của chuỗi số dương (so sánh với bài 3.2.34).

Chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với các số hạng đơn điệu giảm sẽ hội tụ nếu*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2^n a_{2^n}}{a_n} = g < 1$$

và phân kỳ nếu

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{2^n a_{2^n}}{a_n} > 2.$$

3.2.81. Sử dụng bài 3.2.77, chứng minh tiêu chuẩn trong bài 3.2.31.

3.2.82. Chứng minh dấu hiệu Kummer.

Cho $\{a_n\}$ *là dãy số dương.*

(1) Nếu tồn tại một dãy dương $\{b_n\}$ *và một hằng số dương* c *sao cho*

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq c \quad \text{với mọi} \quad n \in \mathbb{N},$$

thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

(2) Nếu tồn tại một dãy dương $\{b_n\}$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ phân kỳ và

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0 \quad \text{với mọi} \quad n \in \mathbb{N},$$

thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3.2.83. Chứng minh các dấu hiệu dAlembert, Raabe (3.2.19) và Bertrand (3.2.24) đều là trường hợp riêng của dấu hiệu Kummer (3.2.82).

3.2.84. Chứng minh chiều ngược lại của dấu hiệu Kummer.

Cho $\{a_n\}$ là dãy số dương.

(1) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì tồn tại một dãy dương $\{b_n\}$ và một hằng số dương c sao cho

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq c.$$

(2) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì tồn tại một dãy dương $\{b_n\}$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ phân kỳ và

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0.$$

3.2.85. Chứng minh các dấu hiệu sau về sự hội tụ và phân kỳ của chuỗi số dương.

(a) Cho k là một số nguyên dương và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = g$. Nếu $g < 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, và nếu $g > 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

(b) Cho k là một số nguyên dương và $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+k}} - 1\right) = g$. Nếu $g > k$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, và nếu $g < k$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3.2.86. Cho hai dãy số dương $\{a_n\}$ và $\{\varphi_n\}$. Giả sử rằng $\varphi_n = O(\frac{1}{\ln n})$. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n^{1-\varphi_n}$ cũng hội tụ.

3.3 Dấu hiệu tích phân

3.3.1. Chứng minh dấu hiệu tích phân.

Giả sử f là một hàm dương và đơn điệu giảm trên đoạn $[1,\infty)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ khi và chỉ khi dãy $\{I_n\}$ bị chặn, trong đó $I_n = \int\limits_1^n f(x)dx$.

3.3.2. Cho f là hàm dương và khả vi trên khoảng $(0,\infty)$ sao cho f' đơn điệu giảm tới 0. Chứng minh rằng hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

3.3.3. Cho f là hàm dương và đơn điệu giảm trên $[1,\infty)$. Đặt

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n) \quad \text{và} \quad I_N = \int_1^N f(x)dx.$$

Chứng minh rằng dãy $\{S_N - I_N\}$ đơn điệu giảm và có giới hạn thuộc vào đoạn $[0, f(1)]$.

3.3.4. Chứng minh rằng giới hạn của các dãy sau

(a) $$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

(b) $$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} - \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx, \quad 0 < \alpha < 1,$$

đều thuộc vào khoảng $(0,1)$.

3.3.5. Sử dụng dấu hiệu tích phân, hãy nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi cho trong bài 3.2.29.

3.3.6. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi dương phân kỳ và $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 1$ với $n \geq 1$. Hãy kiểm tra các kết quả sau:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} \quad \text{phân kỳ,}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n} \quad \text{hội tụ.}$$

3.3.7. Cho f là hàm dương và đơn điệu giảm trên $[1, \infty)$. Giả sử hàm φ tăng ngặt, khả vi và thoả mãn $\varphi(x) > x$ với $x > 1$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $q < 1$ sao cho $\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)} \le q$ khi x đủ lớn thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ. Ngược lại, nếu $\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)} \ge 1$ khi x đủ lớn, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ.

3.3.8. Cho f, g là các hàm dương, khả vi liên tục trên khoảng $(0, \infty)$. Giả sử hàm f đơn điệu giảm. Chứng minh rằng:

(a) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ.

(b) Nếu dãy $\left\{\int\limits_1^n \frac{1}{g(x)}dx\right\}$ không bị chặn và $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \le 0$ khi x đủ lớn thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ.

3.3.9. Cho f là hàm dương, khả vi liên tục trên khoảng $(0, \infty)$. Chứng minh rằng:

(a) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{xf'(x)}{f(x)}\right) > 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ.

(b) Nếu $-\frac{xf'(x)}{f(x)} \le 1$ khi x đủ lớn thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ.

3.3.10. Cho f là hàm dương, khả vi liên tục trên khoảng $(0, \infty)$. Chứng minh rằng:

(a) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right)x\ln x > 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ.

(b) Nếu $\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right)x\ln x \le 1$ khi x đủ lớn thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ.

3.3.11. Chứng minh chiều ngược lại của định lý cho trong bài 3.3.8.

Cho f là hàm dương, đơn điệu giảm, khả vi liên tục trên khoảng $(0, \infty)$.

(a) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ thì sẽ tồn tại một hàm g dương, khả vi liên tục trên khoảng $(0, \infty)$ sao cho

$$\lim_{x\to\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0.$$

(b) Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ phân kỳ thì sẽ tồn tại một hàm g dương, khả vi liên tục trên khoảng $(0,\infty)$ sao cho dãy $\left\{\int\limits_1^n \frac{1}{g(x)}dx\right\}$ không bị chặn và khi x đủ lớn thì

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \leq 0.$$

3.3.12. Với $\gamma \geq 0$, nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}.$$

3.3.13. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}} \ln n}.$$

3.3.14. Cho $\{\lambda_n\}$ là dãy số dương đơn điệu tăng và f là hàm dương, đơn điệu tăng thoả mãn điều kiện

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{1}{tf(t)}dt < \infty.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right) \frac{1}{f(\lambda_n)} < \infty.$$

3.3.15. Chứng minh tiêu chuẩn tích phân suy rộng.

Cho $\{\lambda_n\}$ là dãy tăng ngặt tới vô cùng và f là hàm dương, liên tục đơn điệu giảm trên $[\lambda_1, \infty)$.

(a) Nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq M$ với $n \in \mathbb{N}$ và nếu tích phân $\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} f(t)dt$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$ cũng hội tụ.

(b) Nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq M$ với $n \in \mathbb{N}$ và nếu tích phân $\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} f(t)dt$ phân kỳ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$ cũng phân kỳ.

3.3.16. Giả sử rằng $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm dương, khả vi và có đạo hàm dương. Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ hội tụ.

3.3.17. *Kí hiệu* $\ln_1 x = \ln x$, $\ln_k x = \ln(\ln_{k-1} x)$ *với* $k > 1$ *và* x *đủ lớn. Với mỗi* $n \in \mathbb{N}$, *chọn số nguyên dương* $\varphi(n)$ *thoả mãn* $1 \le \ln_{\varphi(n)} n < e$. *Khi đó chuỗi*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln_1 n)(\ln_2 n)\ldots(\ln_{\varphi(n)} n)}$$

hội tụ hay phân kỳ?

3.4 Hội tụ tuyệt đối. Định lý Leibniz

3.4.1. *Hãy xét sự hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hoặc phân kỳ của các chuỗi sau theo* a *thuộc miền đã chỉ ra:*

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R},$$

(b) $$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}, \quad a \in \mathbb{R},$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{a}{n}, \quad a \in \mathbb{R},$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-8, 2\},$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}, \quad a \neq 0,$$

(f) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}, \quad a > 0.$$

3.4.2. *Với* $a \in \mathbb{R}$, *nghiên cứu sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi*

$$\sum_{n=n_a}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n},$$

trong đó n_a *là một chỉ số phụ thuộc vào* a *sao cho* $na^{n-1} + \ln n \neq 0$ *với* $n \ge n_a$.

3.4.3. *Giả sử* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là chuỗi hội tụ với các số hạng khác không. Hãy nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right).$$

3.4.4. Từ điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ có suy ra được rằng sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ tương đương với sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ không?

3.4.5. Giả sử rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ có điều kiện và đặt $p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}$, $q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}$. Chứng minh rằng cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ đều phân kỳ.

3.4.6. Giả sử rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ có điều kiện. Gọi $\{P_n\}$ và $\{Q_n\}$ lần lượt là dãy tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ định nghĩa trong bài trên. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=1.$$

3.4.7. Nghiên cứu sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}}{n}.$$

3.4.8. Với $a\in\mathbb{R}$, xác định khi nào chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^a}$$

hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hoặc phân kỳ.

3.4.9. Xác định xem chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hay phân kỳ.

3.4.10. Đặt

$$\varepsilon_n=\begin{cases}+1 & \textit{nếu}\quad 2^{2k}\le n<2^{2k+1},\\ -1 & \textit{nếu}\quad 2^{2k+1}\le n<2^{2k+2},\end{cases}$$

trong đó $k=0,1,2,\dots$. Hãy xét sự hội tụ của các chuỗi sau

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n},\qquad\qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{n\ln n}.$$

3.4.11. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3.4.12. Nghiên cứu sự hội tụ (tuyệt đối, có điều kiện) của các chuỗi sau:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)^n,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1),\quad a>1,$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1),$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right),$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-e\right).$$

3.4.13. Cho $a,b>0$, hãy xét sự hội tụ của các chuỗi sau:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^a}{n^b},$$ (b) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^b}.$$

3.4.14. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ là chuỗi đan dấu thoả mãn điều kiện của dấu hiệu Leibniz, tức là $0<a_{n+1}\le a_n$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Đặt r_n là phần dư thứ n của chuỗi, $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$. Chứng minh rằng r_n cùng dấu với số hạng $(-1)^n a_{n+1}$ và $|r_n|<a_{n+1}$.

3.4.15. Giả sử rằng dãy $\{a_n\}$ dần tới 0. Chứng minh rằng hai chuỗi sau

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

3.4.16. Cho dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến 0 và các số a, b, c thoả mãn $a+b+c \neq 0$. Chứng minh rằng hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$$

cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

3.4.17. Cho dãy $\{a_n\}$ có các số hạng khác 0 và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Chứng minh rằng hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)$$

cùng hội tụ tuyệt đối hoặc cùng không hội tụ tuyệt đối.

3.4.18. Chứng minh rằng nếu dãy $\{na_n\}$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

3.4.19. Cho dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm tới 0, hãy nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}.$$

3.4.20. Tìm các giá trị của a để chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n! \sin a \sin\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{a}{n}$$

hội tụ tuyệt đối và tìm các giá trị của a để chuỗi phân kỳ.

3.4.21. Cho a, b và c là các số dương, nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2}\right).$$

3.4.22. Hãy nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\cos n)^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sin n)^n.$$

3.4.23. Cho $\{a_n\}$ *là dãy số dương. Chứng minh rằng*

(a) nếu $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *hội tụ.*

(b) nếu $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *phân kỳ (đặc biệt, nếu* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *phân kỳ).*

3.4.24. Cho $\{a_n\}$ *là dãy số dương. Giả sử tồn tại* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *và một dãy bị chặn* $\{\beta_n\}$ *sao cho*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *hội tụ với* $\alpha > 0$ *và phân kỳ với* $\alpha \leq 0$.

3.4.25. Nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!e^n}{n^{n-p}}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

3.4.26. Giả sử rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* $\{p_n\}$ *là dãy dương đơn điệu tăng đến* $+\infty$. *Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n}{p_n} = 0.$$

3.4.27. Cho $\{a_n\}$ *là dãy số dương đơn điệu giảm tới* 0. *Chứng minh rằng nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *hội tụ thì*

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 0.$$

3.4.28. Cho α *là một số dương. Chứng minh rằng nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}$ *hội tụ thì*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n^\alpha} = 0.$$

3.4.29. Cho $\{k_n\}$ là dãy các số tự nhiên tăng ngặt. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ được gọi là chuỗi con của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Chứng minh rằng nếu tất cả các chuỗi con của một chuỗi hội tụ thì chuỗi đó hội tụ tuyệt đối.

3.4.30. Cho k, l là các số nguyên sao cho $k \geq 1$, $l \geq 2$. Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ có hội tụ tuyệt đối không nếu tất cả các chuỗi con có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k+(n-1)l}$$

đều hội tụ?

3.4.31. Hãy tìm ví dụ một chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ phân kỳ.

3.4.32. Có tồn tại hay không chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ sao cho tất cả các chuỗi có dạng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$, trong đó $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, đều phân kỳ?

3.4.33. Cho $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm các số dương sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ. Giả sử rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ hội tụ, trong đó ε_n bằng 1 hoặc -1. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n} \leq 0 \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n}{n}.$$

3.4.34. Giả sử $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm các số dương và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ hội tụ, trong đó ε_n bằng 1 hoặc -1. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) a_n = 0.$$

(Xem 3.2.35.)

3.4.35. Giả sử rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và $\{p_n\}$ là dãy đơn điệu tăng sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$. Chứng minh rằng

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n}{n} \leq 0 \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n}{n}.$$

3.4.36. Chứng minh rằng chuỗi nhận được từ chuỗi điều hoà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bằng cách cho p số hạng đầu mang dấu " + ", q số hạng tiếp theo mang dấu " − ", p số hạng tiếp theo mang dấu " + " ..., hội tụ khi và chỉ khi $p = q$.

3.4.37. Chứng minh định lý Toeplitz tổng quát (xem 2.3.1 và 2.3.36).

Cho $\{c_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}$ là bảng các số thực. Khi đó với mỗi dãy hội tụ $\{a_n\}$, dãy $\{b_n\}$ xác định bởi

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k, \quad n \geq 1,$$

sẽ hội tụ và có cùng giới hạn khi và chỉ khi ba điều kiện sau thoả mãn:

(i) $c_{n,k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *với mỗi* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,

(iii) *tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương n đều có*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| \leq C.$$

3.5 Tiêu chuẩn Dirichlet và tiêu chuẩn Abel

3.5.1. Sử dụng tiêu chuẩn Dirichlet và tiêu chuẩn Abel, hãy nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi sau:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

(c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi \frac{n^2}{n+1}\right),$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^a + \sin \frac{n\pi}{4}}, \quad a > 0.$$

3.5.2. *Chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\ln\ln n}$ *có hội tụ không?*

3.5.3. *Với* $a \in \mathbb{R}$, *hãy nghiên cứu sự hội tụ của các chuỗi*

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\cos(n^2a)}{n}.$$

3.5.4. *Chứng minh rằng chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(na)}{n}$$

hội tụ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

3.5.5. *Tìm* $a \in \mathbb{R}$ *sao cho chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(na)}{n}$ *hội tụ tuyệt đối.*

3.5.6. *Chứng minh rằng với* $a \in \mathbb{R}$ *và* $n \in \mathbb{N}$ *thì*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(ak)}{k}\right| < 2\sqrt{\pi}.$$

3.5.7. *Chứng minh rằng chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$$

hội tụ.

3.5.8. *Với* $x > 1$, *nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{\ln x}}{n}.$$

3.5.9. *Chứng minh bổ đề Kronecker.*

Cho chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ và* $\{b_n\}$ *là dãy đơn điệu tăng thoả mãn* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Khi đó*

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right), \qquad \text{(b)} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o(b_n),$$

trong đó $o(b_n)$ *là vô cùng bé của* b_n, *tức là* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{o(b_n)}{b_n} = 0$.

3.5.10. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n$ *hội tụ. Chứng minh rằng với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *chuỗi* $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k}$ *cũng hội tụ. Hơn nữa, nếu* $t_n = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k}$ *thì* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

3.5.11. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *có dãy tổng riêng bị chặn. Chứng minh rằng nếu chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ *hội tụ và* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *thì với mọi số tự nhiên* k, *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^k$ *cũng hội tụ.*

3.5.12. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ *hội tụ tuyệt đối và chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *cũng hội tụ.*

3.5.13. Sử dụng tiêu chuẩn Abel, chứng minh rằng từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *suy ra sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *với* $|x| < 1$.

3.5.14. Cho dãy số $\{a_n\}$. *Chứng minh rằng nếu chuỗi Dirichlet*

$$\sum_{n-1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

hội tụ với $x = x_0$ *thì nó sẽ hội tụ với mọi* $x > x_0$.

3.5.15. Chứng minh rằng sự hội tụ của chuỗi Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ *cho ta sự hội tụ của chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)\dots(x+n)}, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots .$$

3.5.16. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *hội tụ với* $|x| < 1$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ *cũng hội tụ.*

3.5.17. Sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *có là tuyệt đối không nếu mọi chuỗi con của nó có dạng*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kl^n}, \quad k \geq 1, \, l \geq 2,$$

đều hội tụ?

3.6 Tích Cauchy của các chuỗi vô hạn

3.6.1. Chứng minh định lý Mertens.

Nếu ít nhất một trong hai chuỗi hội tụ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *hội tụ tuyệt đối thì tích Cauchy của chúng (tức là chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *mà* $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$*) hội tụ. Hơn nữa nếu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ *và* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB$.

3.6.2. Tìm tổng các chuỗi sau:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, |x| < 1,$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ với } \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}, \ |x| < 1, \ |y| < 1.$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \text{ với } \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(n-k+1)!}.$$

3.6.3. Lập tích Cauchy của các chuỗi đã cho và tính các tổng của chúng:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{và} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!},$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

(c) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{và} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n.$$

3.6.4. Giả sử rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *hội tụ và đặt* $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$*. Chứng minh rằng với* $|x| < 1$ *chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ *hội tụ và*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

3.6.5. Tính tích Cauchy của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$, $x \in \mathbb{R}$ *với chính nó.*

Gợi ý. Sử dụng đẳng thức $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

3.6.6. Cho $a > 0$ và $|x| < 1$ hãy chứng tỏ các khẳng định sau:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\frac{x}{a+2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{a+4} + \ldots + \frac{1.3.\ldots(2n-1)}{2.4.\ldots.(2n)}\frac{x^n}{a+2n} + \ldots\right)$$
$$\times\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \ldots + \frac{1.3.\ldots(2n-1)}{2.4.\ldots(2n)}x^n + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{a+1}{a+2}x + \frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2 + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{(a+1)\ldots(a+2n-1)}{(a+2)\ldots(a+2n)}x^n + \ldots\right).$$

3.6.7. Chứng minh định lý Abel.

Nếu tích Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ của hai chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ cũng hội tụ tới C thì $C = AB$.

3.6.8. Chứng minh rằng chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

là tích Cauchy của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ với chính nó. Hãy tìm tổng đó.

3.6.9. Nghiên cứu tính hội tụ của tích Cauchy của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ với chính nó.

3.6.10. Chứng minh rằng nếu ít nhất một trong hai chuỗi dương phân kỳ thì tích Cauchy của chúng sẽ phân kỳ.

3.6.11. Tích Cauchy của hai chuỗi phân kỳ có nhất thiết phân kỳ không ?

3.6.12. Chứng minh rằng tích Cauchy của hai chuỗi hội tụ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}) = 0.$$

3.6.13. Cho hai dãy dương $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *giảm đơn điệu về 0. Chứng minh rằng tích Cauchy của các chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ *hội tụ khi và chỉ khi*

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_0) = 0 \quad \textit{và} \quad \lim_{n\to\infty} b_n(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) = 0.$$

3.6.14. Chứng minh rằng tích Cauchy của hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \textit{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

hội tụ khi và chỉ khi $\alpha + \beta > 1$.

3.6.15. Giả sử các dãy dương $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *đơn điệu giảm về 0. Chứng minh rằng sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *là điều kiện đủ để chuỗi tích Cauchy của chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ *hội tụ, và chứng minh rằng sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n b_n)^{1+\alpha}$ *với mọi* $\alpha > 0$ *là một điều kiện cần cho sự hội tụ của chuỗi Cauchy này.*

3.7 Sắp xếp lại chuỗi. Chuỗi kép

3.7.1. Cho $\{m_k\}$ *là một dãy tăng thực sự các số nguyên dương và đặt*

$$b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m_1}, \quad b_2 = a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \ldots + a_{m_2}, \ldots .$$

Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *cũng hội tụ và hai chuỗi có tổng bằng nhau.*

3.7.2. Xét chuỗi

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots ,$$

nhận được bằng cách thay đổi thứ tự của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *bằng cách đặt hai phần tử âm sau mỗi một phần tử dương, Hãy tìm tổng của chuỗi đó.*

3.7.3. Ta thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *sao cho khối* α *thành phần dương của chuỗi được xen kẽ với khối* β *thành phần âm của chuỗi, tức là*

$$1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\alpha - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha + 1} + \frac{1}{2\alpha + 3} + \ldots + \\ + \frac{1}{4\alpha - 1} - \frac{1}{2\beta + 2} - \frac{1}{2\beta + 4} - \ldots - \frac{1}{4\beta} + \ldots .$$

Hãy tìm tổng chuỗi vừa nhận được.

3.7.4. Chứng minh rằng

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \ldots = 0.$$

3.7.5. Hãy thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *để chuỗi nhận được tổng lớn gấp đôi chuỗi ban đầu.*

3.7.6. Hãy thay đổi thứ tự các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *để nhận được một chuỗi phân kỳ.*

3.7.7. Nghiên cứu tính hội tụ của chuỗi

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

nhận được bằng cách đặt liên tiếp hai phần tử dương và một phần tử âm của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

3.7.8. Chứng minh rằng mọi chuỗi nhận được bằng cách đổi chỗ các phần tử của một chuỗi hội tụ tuyệt đối sẽ hội tụ và có chung tổng.

3.7.9. Giả sử xét hàm $f : (0, +\infty) \to (0, \infty)$, *giảm tới 0 khi* $x \to \infty$ *sao cho dãy* $\{nf(n)\}$ *tăng tới* ∞. *Đặt* S *là tổng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(n)$. *Cho trước* l, *tìm một cách đổi thứ tự chuỗi trên để chuỗi nhận được hội tụ về* $S + l$.

3.7.10. Giả sử hàm $f : (0, +\infty) \to (0, \infty)$, *giảm tới 0 khi* $x \to \infty$ *thoả mãn điều kiện* $\lim\limits_{n\to\infty} nf(n) = g$, $g \in (0, +\infty)$. *Đặt* S *là tổng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(n)$. *Cho trước* l, *tìm một cách đổi thứ tự chuỗi trên để chuỗi nhận được hội tụ về* $S + l$.

3.7.11. *Hãy đổi chỗ các phần tử của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$, $p \in (0,1)$ *để tăng giá trị của tổng chuỗi đó lên* l.

3.7.12. *Cho trước số* $\alpha > 0$, *hãy sử dụng kết quả bài 3.7.10, tìm một cách đổi thứ tự của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ *để đạt được một chuỗi có tổng bằng* $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha$.

3.7.13. *Bằng cách đổi chỗ các số hạng, có thể làm nhanh độ phân kỳ của một chuỗi phân kỳ với các số hàng dương và giảm đơn điệu được không?*

3.7.14. *Giả sử chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với các số hạng dương phân kỳ và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Chứng minh rằng có thể làm chậm tốc độ phân kỳ một cách tuỳ ý bằng cách đổi chỗ các phần tử; tức là với mọi dãy* $\{Q_n\}$ *thoả mãn*

$$0 < Q_1 < Q_2 < \ldots < Q_n < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} Q_n = +\infty.$$

tồn tại một sự đổi chỗ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ *sao cho*

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_m} \leqslant Q_m, \quad \text{với } m \in \mathbb{N}.$$

3.7.15. *Cho* $\{r_n\}$ *và* $\{s_n\}$ *là hai dãy số nguyên dương tăng thực sự không có phần tử chung. Giả sử rằng mọi số nguyên dương đều xuất hiện ở một trong hai dãy này. Khi đó hai chuỗi con* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{r_n}$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{s_n}$ *được gọi là hai chuỗi con bù của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Ta nói rằng sự sắp xếp lại dịch chuyển hai chuỗi con bù nhau, nếu với mọi số nguyên dương* m *và* n *sao cho* $m < n$ *số hạng* a_{r_m} *xuất hiện trước* a_{r_n} *và số hạng* a_{s_m} *xuất hiện trước* a_{s_n}. *Chứng minh rằng, các số hạng của chuỗi hội tụ có điều kiện* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *có thể sắp xếp lại bằng cách dịch chuyển hai chuỗi con bù nhau của tất các các số hạng âm và số hạng dương của nó để nhận được một chuỗi hội tụ có tổng là một số định dấu tuỳ ý.*

3.7.16. *Cho* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *là một sự đổi chỗ của một chuỗi hội tụ có điều kiện* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Chứng minh rằng nếu* $\{n_k - k\}$ *là một dãy bị chặn, thì* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Điều gì sẽ xảy ra nếu dãy* $\{n_k - k\}$ *không bị chặn?*

3.7.17. *Cho* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *là một sự đổi chỗ của một chuỗi hội có điều kiện tụ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Chứng minh rằng* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *khi và chỉ khi tồn tại một số nguyên dương* N *sao cho mọi tập* $\{n_k : 1 \leqslant k \leqslant m\}$ *đều là hợp của nhiều nhất* N *khối rời nhau của các số nguyên dương liên tiếp nhau.*

3.7.18. *Từ một ma trận vô hạn* $\{a_{i,k}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ *của các số thực, ta thiết lập một chuỗi kép* $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$. *Ta nói rằng chuỗi kép hội tụ tới* $S \in \mathbb{R}$ *nếu với* $\varepsilon > 0$ *cho trước, tồn tại một số* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$|S_{m,n} - S| < \varepsilon \quad \text{với} \quad m, n > n_0,$$

trong đó

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.$$

Khi đó ta viết

$$S = \lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}.$$

Nói rằng dãy $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ *hội tụ tuyệt đối nếu* $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|$ *hội tụ. Chú ý rằng các số hạng của một ma trận vô hạn* $(a_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$ *có thể được xếp thứ tự thành một dãy* $\{c_n\}$, *và khi đó chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *được gọi là sự xếp thứ tự của* $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ *thành một chuỗi đơn. Chứng minh rằng nếu một trong các cách sắp xếp thứ tự của chuỗi kép hội tụ tuyệt đối thì chuỗi kép hội tụ (tuyệtđối) tới cùng tổng.*

3.7.19. *Chứng minh rằng nếu một chuỗi kép* $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ *hội tụ tuyệt đối, thì mọi cách xếp thứ tự của nó* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *hội tụ và*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

3.7.20. *Chứng minh rằng mọi chuỗi kép hội tụ tuyệt đối là hội tụ.*

3.7.21. *Ta gọi một chuỗi lặp* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right)$ *là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|\right)$ *hội tụ; định nghĩa tương tự cho chuỗi* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,k}\right)$. *Chứng minh rằng một chuỗi lặp hội tụ tuyệt đối là hội tụ.*

3.7.22. *Chứng minh rằng nếu chuỗi kép* $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ *hội tụ tuyệt đối thì hai chuỗi lặp*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right) \quad \text{và} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,k}\right)$$

hội tụ tuyệt đối và

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,k}\right) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}.$$

3.7.23. *Chứng minh rằng nếu một trong bốn chuỗi*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{i,k}|\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{i,k}|\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_{n,1}| + |a_{n-1,2}| + |a_{n-2,3}| + \ldots + |a_{1,n}|)$$

hội tụ thì mọi chuỗi

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,k}\right),$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n,1} + a_{n-1,2} + a_{n-2,3} + \ldots + a_{1,n})$$

đều hội tụ tới cùng một tổng.

3.7.24. *Tính*

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{1}{n!k!(n+k+1)}.$$

3.7.25. *Tính*

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nk(n+k+2)}.$$

3.7.26. Chứng minh rằng

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k+2)!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3.7.27. Cho $0 < x < 1$, xét ma trận vô hạn

$$\begin{pmatrix} x & -x^2 & x^2 & -x^3 & x^3 & \cdot \\ x(1-x) & -x^2(1-x^2) & x^2(1-x^2) & -x^3(1-x^3) & x^3(1-x^3) & \cdot \\ x(1-x)^2 & -x^2(1-x^2)^2 & x^2(1-x^2)^2 & -x^3(1-x^3)^2 & x^3(1-x^3)^2 & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

Chứng minh rằng chỉ có một chuỗi lặp tương ứng với ma trận này hội tụ (không hội tụ tuyệt đối).

3.7.28. Nghiên cứu tính hội tụ của các chuỗi kép sau:

(a) $$\sum_{i,k=0}^{\infty} x^i y^k, \quad \text{với} \quad |x|, |y| < 1.$$

(b) $$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha k^\beta}, \quad \text{với} \quad \alpha, \beta > 0.$$

(c) $$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^p}, \quad \text{với} \quad p > 0.$$

3.7.29. Tìm tổng của các chuỗi kép sau:

(a) $$\sum_{i,k=2}^{\infty} \frac{1}{(p+i)^k}, \quad \text{với} \quad p > -1.$$

(b) $$\sum_{i=2,k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^i},$$

(c) $$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(4i-1)^{2k}}.$$

3.7.30. Cho một ma trận vô hạn $(b_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$, chứng minh rằng tồn tại duy nhất một chuỗi kép $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$ sao cho

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = b_{m,n}, \quad m, n = 1, 2, \ldots .$$

3.7.31. Lấy

$$b_{i,k} = (-1)^{i+k}\left(\frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^k}\right), \quad i, k = 1, 2, \dots,$$

trong bài toán trên hãy nghiên cứu tính hội tụ của chuỗi kép tương ứng $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k}$.

3.7.32. Chứng minh rằng với $|x| < 1$*, chuỗi kép* $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} x^{ik}$ *hội tụ tuyệt đối Sử dụng điều đó hãy chứng minh rằng*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2},$$

trong đó $\theta(n)$ *là các ước tự nhiên của* n.

3.7.33. Chứng minh rằng với $|x| < 1$ *chuỗi kép* $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} ix^{ik}$ *hội tụ tuyệt đối. Hơn nữa, hãy chứng minh rằng*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} ix^{ik} = \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{i,k=1}^{\infty} \sigma(n)x^n,$$

trong đó $\sigma(n)$ *là tổng các ước tự nhiên của* n.

3.7.34. Cho $\zeta(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 1$*, là hàm zeta Riemann. Đặt*

$$S_p = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) - 1, \quad p > 1,$$

Chứng minh rằng

(a) $$\sum_{p=2}^{\infty} S_p = 1,$$ *(b)* $$\sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p S_p = \frac{1}{2}.$$

3.7.35. Chứng minh định lý Goldbach.

Nếu $\mathbf{A} = \{k^m \;;\; m, k = 2, 3, \dots\}$ *thì* $\sum\limits_{n \in \mathbf{A}} \frac{1}{n-1} = 1$.

3.7.36. Giả sử ζ là hàm zeta Riemann. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$,

$$\zeta(2)\zeta(2n-2) + \zeta(4)\zeta(2n-4) + \ldots + \zeta(2n-2)\zeta(2) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\zeta(2n).$$

3.7.37. Sử dụng kết quả của bài tập trên hãy tìm tổng của các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}.$$

3.8 Tích vô hạn

3.8.1. Tính:

(a) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, (b) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$,

(c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$, $x \neq 2^m\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

(d) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cosh\frac{x}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$, (e) $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + x^{2^n}\right)$, $|x| < 1$

(f) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$, (g) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$, $a > 0$

(h) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$, (i) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{9n^2}{9n^2-1}$,

3.8.2. Nghiên cứu tính hội tụ của tích vô hạn sau:

(a) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, (b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,

(c) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$,

3.8.3. Giả sử $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

3.8.4. Giả sử $a_n \geq 0$ và $a_n \neq 1$ với $n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

3.8.5. Cho

$$a_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, \qquad a_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng tích $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ mặc dù chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3.8.6. Nghiên cứu tính hội tụ của tích sau:

(a) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$, (b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$,

(c) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$ (d) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} n\ln(1+\frac{1}{n})$

(e) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}$, (f) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$

3.8.7. Giả sử rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng tích $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ phân kỳ thì tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ phân kỳ tới 0.

3.8.8. Giả sử rằng dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm về 0. Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n a_n)$ hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ.

3.8.9. Chứng minh rằng tích vô hạn

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

phân kỳ, nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ lại hội tụ .

3.8.10. Chứng minh rằng nếu hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}a_n^2\right) \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$$

hội tụ thì tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ.

3.8.11. Sự hội tụ của tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ có suy ra sự hội tụ của các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được không?

Gợi ý. Xét tích

$$\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{3^{2\alpha}}\right)\ldots,$$

trong đó $\frac{1}{3}<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.

3.8.12. Chứng minh kết quả tổng quát hoá của bài 3.8.10. Cho $k\geq 2$, nếu hai chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}a_n^2+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_n^k\right),\quad \text{và}\quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{k+1}$$

hội tụ thì tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ.

3.8.13. Chứng minh rằng từ sự hội tụ của tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ và của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ suy ra sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.8.14. Chứng minh rằng nếu tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ và tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ hội tụ thì các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ cũng hội tụ.

3.8.15. Giả sử dãy $\{a_n\}$ giảm đơn điệu về 1. Tích vô hạn

$$a_1\cdot\frac{1}{a_2}\cdot a_3\cdot\frac{1}{a_4}\cdot a_5\ldots$$

có luôn hội tụ không?

3.8.16. Cho các tích vô hạn hội tụ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ với các thừa số dương. Hãy nghiên cứu tính hội tụ của các tích sau:

(a) $$\prod_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n),$$ *(b)* $$\prod_{n=1}^{\infty}a_n^2,$$

(c) $$\prod_{n=1}^{\infty}a_nb_n,$$ *(d)* $$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

3.8.17. Chứng minh rằng với $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, *tích*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n \qquad \text{và} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *hội tụ.*

3.8.18. Cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *là chuỗi dương hội tụ, đặt* S_n *là tổng riêng thứ* n *của chuỗi. Chứng minh rằng*

$$a_1 \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n}{S_{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3.8.19. Chứng minh rằng nếu tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$, $a_n > -1$ *hội tụ về* P *thì chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)}$$

cũng hội tụ. Hơn nữa nếu S *là tổng của nó thì* $S = 1 - \frac{1}{P}$.

3.8.20. Giả sử tích vô hạn

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n), \quad \text{với} \quad a_n > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

phân kỳ. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)} = 1.$$

3.8.21. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)} = 1, \quad \text{với} \quad x > 1.$$

3.8.22. Cho $a_n \neq 0$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Chứng minh rằng tích vô hạn* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ khi và chỉ khi nó thoả mãn tiêu chuẩn Cauchy sau: Với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại số nguyên dương* n_0 *sao cho*

$$|a_n a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

với mọi $n > n_0$ *và* $k \in \mathbb{N}$.

3.8.23. Cho $|x| < 1$, hãy kiểm tra đẳng thức sau:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n) = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n-1})}.$$

3.8.24. Tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ hội tụ. Chứng minh rằng tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối.

3.8.25. Chứng minh rằng mọi tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ tuyệt đối là hội tụ.

3.8.26. Chứng minh rằng nếu tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ tuyệt đối thì

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{\substack{n_1,n_2=1\\ n_1<n_2}}^{\infty} a_{n_1}a_{n_2} + \\ + \ldots + \sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_k=1\\ n_1<n_2<\ldots<n_k}}^{\infty} a_{n_1}a_{n_2}\ldots a_{n_k} + \ldots$$

3.8.27. Giả sử tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ hội tụ tuyệt đối, chứng minh rằng tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_nx)$ hội tụ tuyệt đối với mọi $x \in \mathbb{R}$ và có thể khai triển thành một chuỗi hội tụ tuyệt đối theo hệ thức

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_nx) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k.$$

trong đó

$$A_k = \sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_k=1\\ n_1<n_2<\ldots<n_k}}^{\infty} a_{n_1}a_{n_2}\ldots a_{n_k}.$$

3.8.28. Thiết lập đẳng thức sau:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^nx) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^n)} x^n, \quad |q| < 1.$$

3.8.29. Kiểm tra đẳng thức sau:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdot\ldots\cdot(1-q^{2n})}x^n, \quad |q|<1.$$

3.8.30. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ tuyệt đối. Chứng minh rằng nếu* $x \neq 0$ *thì*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)\left(1+\frac{a_n}{x}\right) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right),$$

với $B_n = A_n + A_1 A_{n+1} + +A_2 A_{n+2} \ldots, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$ *và*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k \qquad (\text{ xem } 3.8.27).$$

3.8.31. Cho $|q|<1$ *và* $x \neq 0$ *hãy chứng minh đẳng thức sau:*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

3.8.32. Cho $|q|<1$*, hãy kiểm tra các đẳng thức sau:*

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2 &&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2},\\
&(b) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2 &&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2},\\
&(c) \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2 &&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n},
\end{aligned}$$

3.8.33. Cho $x>0$*, xét dãy* $\{a_n\}$ *như sau:*

$$a_1 = \frac{1}{1+x}, \qquad a_n = \frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x-k}{x+k}, \quad n>1.$$

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ, tìm tổng của nó.*

3.8.34. Chứng minh rằng nếu tích vô hạn $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+ca_n)$ *hội tụ với hai giá trị khác nhau của hằng số* $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *thì nó hội tụ với mọi* c.

3.8.35. Chứng minh rằng nếu chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=0}^{n}(x^2-k^2)$$

hội tụ tại $x = x_0$, $x_0 \notin \mathbb{Z}$ *thì nó hội tụ với mọi giá trị của* x.

3.8.36. Cho $\{p_n\}$ *là một dãy các số nguyên tố liên tiếp lớn hơn 1.*

(a) Chứng minh công thức tích Euler

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x} \quad \text{với} \quad x>1.$$

(b) Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ *phân kỳ (hãy so sánh với bài tập 3.2.72).*

3.8.37. Hãy dùng quy tắc DeMoivre để chứng minh các khẳng định sau:

(a)
$$\sin x = x\prod_{n-1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

(b)
$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

3.8.38. Sử dụng kết quả câu trên hãy chứng minh công thức Wallis

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

3.8.39. Nghiên cứu sự hội tụ của các tích sau:

(a)
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}, \quad x>-1,$$

(b)
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}, \quad x>-1.$$

3.8.40. Chứng minh rằng tích vô hạn $\prod\limits_{n-1}^{\infty}(1+a_n)$ *hội tụ tuyệt đối khi và chỉ khi mọi sự đổi chỗ các thừa số của nó không làm thay đổi giá trị của nó.*

3.8.41. Tính

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)\\
&\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2\beta+1}\right)\left(1+\frac{1}{2\alpha+2}\right)\dots
\end{aligned}
$$

tích này là sự đổi chỗ các nhân tử của tích $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ *bằng cách đặt các khối gồm* α *thừa số lớn hơn 1 và khối gồm* β *thừa số lớn hơn 1 xen kẽ nhau.*

3.8.42. Chứng minh rằng từ tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, $a_n > -1$ *hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối ta có thể đổi chỗ để nhận được một tích có giá trị là một số dương bất kỳ cho trước, hoặc một tích phân kỳ về 0 hoặc vô cùng. (So sánh với bài tập 3.7.15).*

Lời giải

Chương 1

Số thực

1.1 Cận trên đúng và cận dưới đúng của tập các số thực. Liên phân số

1.1.1. *Đặt* $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0,\ x^2 < 2\}$ *và* $s = \sup \mathbf{A}$, *dễ thấy* $s > 1$. *Ta sẽ chỉ ra rằng với số* n *nguyên dương bất kỳ thì*

$$\text{(1)} \qquad \left(s - \frac{1}{n}\right)^2 \leq 2 \leq \left(s + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Thật vậy, vì $s - \frac{1}{n}$ *không là cận trên của* $\mathbf{A}$ *nên tồn tại* $x^\star \in \mathbf{A}$ *sao cho* $s - \frac{1}{n} < x^\star$, *suy ra*

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 < (x^\star)^2 < 2.$$

Giả sử rằng $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. *Nếu s là số hữu tỉ thì* $s + \frac{1}{n} \in \mathbf{A}$ *và* $s + \frac{1}{n} > s$, *trái với giả thiết* $s = \sup \mathbf{A}$. *Nếu* s *là số vô tỉ thì* $w = \frac{[(n-1)s]}{n+1} + \frac{1}{n+1}$ *là số hữu tỷ thoả mãn* $s < w < s + \frac{1}{n}$, *do đó* $w^2 < \left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ *tức là* $w \in \mathbf{A}$, *mâu thuẫn. Vậy ta đã chứng minh được rằng* $\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 \geq 2$. *Sử dụng vế trái của (1) ta có* $s^2 - \frac{2s}{n} < s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 2$, *từ đó suy ra* $\frac{s^2-2}{2s} < \frac{1}{n}$. *Cho* $n \to \infty$, *ta nhận được* $s^2 - 2 \leq 0$. *Tương tự, từ bất đẳng thức ở vế phải của (1) suy ra* $\frac{s^2-2}{2s} \geq -\frac{1}{n}$, *suy ra* $s^2 - 2 \geq 0$. *Do đó* $s^2 = 2$.

1.1.2. *Giả sử* $\mathbf{A}$ *bị chặn dưới và đặt* $a = \inf \mathbf{A}$, *khi đó*

(1) $x \geq a$ *với mọi* $x \in \mathbf{A}$,

(2) *với* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $x^* \in \mathbf{A}$ *sao cho* $x^* < a + \varepsilon$.

Nhân hai bất đẳng thức trong (1) và (2) với -1, *ta có*

(1) $x \leq -a$ *với mọi* $x \in (-\mathbf{A})$,

(2) *với* $\varepsilon > 0$ *bất kỳ , tồn tại* $x^* \in (-\mathbf{A})$ *sao cho* $x^* > -a - \varepsilon$.

Từ đó suy ra $-a = \sup(-\mathbf{A})$. *Nếu* $\mathbf{A}$ *không bị chặn dưới thì* $-\mathbf{A}$ *không bị chặn trên và do đó* $\sup(-\mathbf{A}) = -\inf(\mathbf{A}) = +\infty$. *Các đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự.*

1.1.3. *Giả sử* $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$ *bị chặn trên và đặt* $a = \sup \mathbf{A}$ *và* $b = \sup \mathbf{B}$, *khi đó* a *là một cận trên của* $\mathbf{A}$, b *là một cận trên của* $\mathbf{B}$, *suy ra* $a + b$ *là một cận trên của* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. *Hơn nữa, với mọi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $x^* \in \mathbf{A}$ *và* $y^* \in \mathbf{B}$ *sao cho* $x^* > a - \frac{\varepsilon}{2}$ *và* $y^* > b - \frac{\varepsilon}{2}$, *do đó* $x^* + y^* > a + b - \varepsilon$. *Vì* $z^* = x^* + y^* \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$ *suy ra* $a + b = \sup(\mathbf{A} + \mathbf{B})$. *Nếu* $\mathbf{A}$ *hoặc* $\mathbf{B}$ *không bị chặn trên, thì* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *không bị chặn trên, từ định nghĩa của cận trên đúng ta suy ra* $\sup(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} + \sup \mathbf{B} = +\infty$.

Đẳng thức thứ hai là một hệ quả trực tiếp của đẳng thức thứ nhất và của bài toán trước. Thật vậy,

$$\sup(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \sup(\mathbf{A} + (-\mathbf{B})) = \sup \mathbf{A} + \sup(-\mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} - \inf \mathbf{B}.$$

Lập luận tương tự trên có thể suy ra các đẳng thức

$$\inf(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \inf \mathbf{A} + \inf \mathbf{B},$$
$$\inf(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \inf \mathbf{A} - \sup \mathbf{B}.$$

1.1.4. *Giả sử cả hai tập bị chặn trên, đặt* $a = \sup \mathbf{A}$ *và* $b = \sup \mathbf{B}$. *Vì các phần tử của* $\mathbf{A}$ *và của* $\mathbf{B}$ *là các số dương nên* $xy \leq ab$ *với* $x \in \mathbf{A}$ *và* $y \in \mathbf{B}$. *Ta sẽ chứng minh rằng* ab *là cận trên bé nhất của* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. *Cho trước* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $x^* \in \mathbf{A}$ *và* $y^* \in \mathbf{B}$ *sao cho* $x^* > a - \varepsilon$ *và* $y^* > b - \varepsilon$. *Khi đó* $x^* y^* > ab - \varepsilon(a + b - \varepsilon)$. *Vì* $\varepsilon(a + b - \varepsilon)$ *có thể nhỏ tuỳ ý với* ε *đủ nhỏ, ta thấy rằng bất kỳ số nào nhỏ hơn* ab *không thể là cận trên của* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. *Do đó* $ab = \sup \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. *Nếu* $\mathbf{A}$ *hoặc* $\mathbf{B}$ *không bị chặn trên thì* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *cũng không bị chặn. Do đó* $\sup(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sup \mathbf{A} \cdot \sup \mathbf{B} = +\infty$.

Công việc bây giờ là chứng minh $\sup\left(\frac{1}{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{\inf \mathbf{A}} > 0$ *nếu* $a' = \inf \mathbf{A} > 0$. *Thật vậy, với mọi* $x \in \mathbf{A}$, *bất đẳng thức* $x \geq a'$ *tương đương với* $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a'}$ *nên*

$\frac{1}{a'}$ *là cận trên của* $\frac{1}{\mathbf{A}}$. *Hơn nữa, với* $\varepsilon > 0$ *bất kỳ, tồn tại* $x^\star \in \mathbf{A}$ *sao cho* $x^\star < a' + \varepsilon$, *do đó*

$$\frac{1}{x^\star} > \frac{1}{a'+\varepsilon} = \frac{1}{a'} - \frac{\varepsilon}{a'(a'+\varepsilon)}.$$

Vì $\frac{\varepsilon}{a'(a'+\varepsilon)}$ *nhỏ tuỳ ý nên* $\frac{1}{a'}$ *là cận trên nhỏ nhất của* $\frac{1}{\mathbf{A}}$. *Xét trường hợp* $a' = 0$, *thấy rằng tập* $\frac{1}{\mathbf{A}}$ *là bị chặn (thật vậy, với* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $x^\star \in \frac{1}{\mathbf{A}}$ *sao cho* $x^\star > \frac{1}{\varepsilon}$). *Do đó,* $\sup \frac{1}{\mathbf{A}} = +\infty$.

Bây giờ giả sử rằng $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *là các tập bị chặn các số thực bất kỳ và đặt* $a = \sup \mathbf{A}, b = \sup \mathbf{B}, a' = \inf \mathbf{A}, b' = \inf \mathbf{B}$. *Nếu* a' *và* b' *là không âm thì sử dụng kết quả ở trên ta suy ra đẳng thức cần chứng minh. Nếu* $a' < 0$ *và* $a, b' > 0$ *thì* $xy \le ab$ *với bất kỳ* $x \in \mathbf{A}$ *và* $y \in \mathbf{B}$. *Chọn* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ để* $a - \varepsilon > 0$. *Khi đó tồn tại* $x^\star \in \mathbf{A}$ *sao cho* $x^\star > a - \varepsilon$. *Hơn nữa, tồn tại* $y^\star \in \mathbf{B}$ *sao cho* $y^\star > b - \varepsilon$. *Do đó*

$$x^\star y^\star > x^\star(b-\varepsilon) > (a-\varepsilon)(b-\varepsilon) = ab - \varepsilon(b + b - \varepsilon).$$

Vậy trong trường hợp này ta có $\sup(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = ab$.

Xét trường hợp $a', b' < 0$ *và* $a, b > 0$. *Với bất kỳ* $x \in \mathbf{A}$ *và* $y \in \mathbf{B}$ *ta có*

$$xy \le \max\{ab, a'b'\}.$$

Đầu tiên xét trường hợp $\max\{ab, a'b'\} = a'b'$. *Theo định nghĩa của cận dưới đúng, với* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ tồn tại* $x^\star \in \mathbf{A}$ *và* $y^\star \in \mathbf{B}$ *sao cho* $x^\star < a' + \varepsilon < 0$ *và* $y^\star < b' + \varepsilon < 0$, *suy ra*

$$x^\star y^\star > x^\star(b'+\varepsilon) > (a'+\varepsilon)(b'+\varepsilon) = a'b' + \varepsilon(a' + b' + (a' + b' + \varepsilon).$$

Từ nhận xét rằng $a' + b' + \varepsilon$ *là số âm suy ra* $a'b'$ *là cận trên bé nhất của* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. *Trong trường hợp* $\max\{ab, a'b'\} = ab$ *lập luận tương tự ta suy ra* $\sup(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = ab$. *Các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.*

1.1.5. *Trước hết giả sử* $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$ *bị chặn trên, đặt* $a = \sup \mathbf{A}$ *và* $b = \sup \mathbf{B}$, *không giảm tổng quát ta coi* $a \le b$, *thế thì với mọi* $x \in \mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ *ta có* $x \le b$. *Hơn nữa, với* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $x^\star \in \mathbf{B}$ *sao cho* $x^\star > b - \varepsilon$. *Hiển nhiên* $x^\star$ *thuộc vào* $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$. *Do đó đẳng thức thứ nhất là đúng. Nếu* $\mathbf{A}$ *hoặc* $\mathbf{B}$ *không bị chặn trên thì* $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ *cũng không bị chặn trên. Vì vậy* $\sup(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) = +\infty$, *và ta qui ước rằng* $\max\{+\infty, c\} = \max\{+\infty, +\infty\} = +\infty$ *mọi số thực* c. *Chứng minh đẳng thức thứ hai tương tự.*

1.1.6. *Ta có*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \left\{-3, -\frac{11}{2}, 5\right\}\\ &\cup \left\{\frac{3}{4k}, -\frac{3}{4k+1}, -4 - \frac{3}{4k+2}, 4 + \frac{3}{4k+3}\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\},\\ \mathbf{A}_2 &= \left\{\frac{3k-1}{3k+1}, -\frac{3k-2}{6k}, -\frac{3k-3}{2(3k-1)}\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

Do đó $\inf \mathbf{A}_1 = -\frac{11}{2}$, $\sup \mathbf{A}_1 = 5$ *và* $\inf \mathbf{A}_2 = -\frac{1}{2}$, $\sup \mathbf{A}_2 = 1$.

1.1.7. $\sup \mathbf{A} = \frac{2}{9}$, $\inf \mathbf{A} = \frac{1}{5}$, $\sup \mathbf{B} = \frac{1}{9}$, $\inf B = 0$.

1.1.8. *Có thể chỉ ra bằng quy nạp rằng với* $n \geq 11, 2^n > (n+1)^3$. *Do đó*

$$0 < \frac{(n+1)^2}{2^n} < \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3} = \frac{1}{n+1} \quad \text{với} \quad n \geq 11,$$

do đó 0 là cận dưới đúng của tập hợp đang xét. Bên cạnh đó ta dễ dàng chứng minh rằng $2^n > (n+1)^2$ *với* $n \geq 6$, *do đó* $\frac{(n+1)^2}{2^n} < 1$ *với* $n \geq 6$. *Các số* $2, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}$ *(lớn hơn 1) cũng nằm trong tập đang xét, suy ra cận trên đúng của tập là* $\frac{9}{4}$.

1.1.9. *Từ bài toán trước suy ra cận dưới đúng của tập này bằng 0. Sử dụng bất đẳng thức đã nêu trong lời giải bài trước ta được* $2^{nm} > (nm+1)^2$ *với* $nm \geq 6$. *Vì* $nm + 1 \geq n + m$ *với* $n, m \in \mathbb{N}$, *ta có*

$$\frac{(n+m)^2}{2^{nm}} < \frac{(n+m)^2}{(nm+1)^2} \leq \frac{(n+m)^2}{(n+m)^2} = 1 \quad \text{nếu} \quad nm \geq 6.$$

Với $nm < 6$, *các phần tử* $1, 2, \frac{9}{4}, \frac{25}{16}, \frac{36}{32}$ *cũng thuộc tập đang xét, do đó cận trên bé nhất là* $\frac{9}{4}$.

1.1.10.

(a) *Hiển nhiên 2 là cận trên của tập* $\mathbf{A}$, *ta sẽ chỉ ra rằng nó là cận trên đúng của* $\mathbf{A}$. *Thật vậy, nếu* $\varepsilon > 0$ *là một số cố định bất kỳ , thì với số nguyên dương bất kỳ* $n^* > \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, *ta thu được* $\frac{2(n^*-1)}{n^*} > 2 - \varepsilon$. *Cận trên đúng của* $\mathbf{A}$ *là 0, vì* $\frac{m}{n} > 0$ *với* $m, n \in \mathbb{N}$. *Cho trước* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $\widehat{n}$ *sao cho* $\frac{1}{\widehat{n}} < \varepsilon$.

(b) Hiển nhiên $0 \le \sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$. *Chọn* $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, *ta thấy rằng* $0 \in \mathbf{B}$, *do đó* $\inf \mathbf{B} = 0$. *Để chứng minh rằng* $\sup \mathbf{B} = 1$ *trước hết ta có* $\left[\sqrt{n^2+2n}\right] = n$ *với mỗi* n *nguyên dương, xét* $0 < \varepsilon < 1$, *thực hiện một số tính toán ta được bất đẳng thức*

$$\sqrt{n^2+2n} - \left[\sqrt{n^2+2n}\right] = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} > 1-\varepsilon$$

thoả mãn với bất kỳ $n > \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon}$.

1.1.11.

(a) $\sup\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\right\} = +\infty$.

(b) $\inf\left\{z = x + x^{-1} : x > 0\right\} = 2$,

(c) $\inf\left\{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\right\} = 4$.

Hai đẳng thức đầu tiên dễ kiểm tra. Để chứng minh đẳng thức thứ ba, chú ý rằng $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ *với* $a, b > 0$, *do đó*

$$\frac{2^x + 2^{\frac{1}{x}}}{2} \ge \sqrt{2^{\frac{1}{x}+x}} \ge \sqrt{2^2} = 2.$$

dấu đẳng thức khi và chỉ khi $x = 1$. *Ta được điều phải chứng minh.*

1.1.12.

(a) Sử dụng bất đẳng thức $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ *với* $a, b > 0$, *ta có*

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \ge 4,$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $m = 2n$. *Do đó* $\inf \mathbf{A} = 4$. *Lấy* $m = 1$, *có thể chỉ ra rằng tập* $\mathbf{A}$ *không bị chặn trên. Điều này có nghĩa* $\sup \mathbf{A} = +\infty$.

(b) Tương tự ta có

$$-\frac{1}{4} \le \frac{mn}{4m^2+n^2} \le \frac{1}{4},$$

các bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi lần lượt $m = -2n$ *và* $m = 2n$. *Kết quả là* $\inf \mathbf{B} = -\frac{1}{4}$, $\sup \mathbf{B} = \frac{1}{4}$.

(c) Ta có $\inf \mathbf{C} = 0$ *và* $\sup \mathbf{C} = 1$. *Thực vậy,* $0 < \frac{m}{m+n} < 1$, *và với bất kỳ* $\varepsilon > 0$, *tồn tại các số nguyên dương* n_1 *và* m_1 *sao cho*

$$\frac{1}{n_1} < \varepsilon \quad \text{và} \quad \frac{m_1}{m_1+1} > 1 - \varepsilon$$

(d) $\inf \mathbf{D} = -1$ *và* $\sup \mathbf{D} = 1$.

(e) Chọn $m = n$ *thì tập không bị chặn trên. Do đó* $\sup \mathbf{E} = +\infty$. *Trái lại, với bất kỳ* $m, n \in \mathbb{N}$ *ta có* $\frac{mn}{1+m+n} \geq \frac{1}{3}$, *dấu đẳng thức xảy ra khi* $m = n = 1$, *tức là* $\inf \mathbf{E} = \frac{1}{3}$.

1.1.13. ***Đặt*** $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, *ta có*

$$\frac{a_k}{s} \leq \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq 1 - \frac{a_{k-1}}{s} - \frac{a_{k+2}}{s},$$

suy ra

$$1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} \leq n - 2.$$

Bây giờ ta cần chứng minh rằng

$$\inf \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = 1 \quad \text{và} \quad \sup \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = n - 2.$$

Chọn $a_k = t^k, t > 0$ *thì*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} &= \frac{t}{t + t^2 + t^3} \\
&+ \ldots + \frac{t^{n-2}}{t^{n-2} + t^{n-1} + t^n} + \frac{t^{n-1}}{t^{n-1} + t^n + t} + \frac{t^n}{t^n + t + t^2} \\
&= (n-2)\frac{1}{1 + t + t^2} + \frac{t^{n-2}}{t^{n-1} + t^{n-2} + 1} + \frac{t^{n-1}}{t^{n-1} + t + 1}.
\end{aligned}$$

Cho $t \to 0^+$, *ta thấy rằng* $\sup \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = n - 2$, *và cho* $t \to +\infty$, *ta thu được* $\inf \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} = 1$.

1.1.14. *Cố định $n \in \mathbb{N}$ và xét $n+1$ số thực thuộc khoảng $[0,1)$*

$$0,\ \alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [2\alpha],\ \ldots,\ n\alpha - [n\alpha].$$

Vì n khoảng $\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, phủ $[0,1)$ nên tồn tại khoảng chứa ít nhất hai trong số những điểm này, giả sử như $n_1\alpha - [n_1\alpha]$ và $n_2\alpha - [n_2\alpha]$ với $0 \le n_1 < n_2 \le n$. Từ đó suy ra

$$|n_2\alpha - [n_2\alpha] - n_1\alpha + [n_1\alpha]| < \frac{1}{n}.$$

Bây giờ ta xét $q_n = n_2 - n_1$ và $p_n = [n_2\alpha] - [n_1\alpha]$, từ nhận xét trên suy ra $q_n \le n$, tức là bất đẳng thức thứ hai đúng.

1.1.15. *Ta sẽ chỉ ra rằng trong bất kỳ khoảng (p,q) tồn tại ít nhất một phần tử của $\mathbf{A}$. Gọi $0 < \varepsilon = q - p$. Từ bài toán trước suy ra tồn tại các số p_n và q_n sao cho*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Vì α là vô tỷ nên $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$. Do đó

$$|q_n\alpha - p_n| < \frac{1}{q_n} < \varepsilon.$$

với hầu hết n. Đặt $a = |q_n\alpha - p_n|$ thì ít nhất một trong các số $ma, m \in Z$, thuộc khoảng (p,q); tức là hoặc $mq_n\alpha - mp_n$ hoặc $-mq_n\alpha + mp_n$ thuộc khoảng này.

1.1.16. *Cho $t \in [-1,1]$, khi đó tồn tại x sao cho $t = \cos x$. Từ kết quả của bài toán trước, tồn tại các dãy số nguyên $\{m_n\}$ và $\{k_n\}$ sao cho $x = \lim\limits_{n\to\infty}(k_n 2\pi + m_n)$. Từ nhận xét này và tính liên tục của hàm $\cos x$ ta suy ra*

$$t = \cos x = \cos(\lim_{n\to\infty}(k_n 2\pi + m_n)) = \lim_{n\to\infty}\cos m_n = \lim_{n\to\infty}\cos|m_n|.$$

Vì vậy, mỗi số trong $[-1,1]$ là giới hạn của tập $\{\cos n : n \in \mathbb{N}\}$. Ta được điều phải chứng minh.

1.1.17. *Hiển nhiên, nếu tồn tại n sao cho x_n là một số nguyên, thì x là hữu tỷ. Bây giờ giả sử $x = \frac{p}{q}$ với $p \in Z$ và $q \in \mathbb{N}$. Nếu $x - [x] \ne 0$ thì $\frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right] = \frac{l}{q}$ với l là một số nguyên dương nhỏ hơn q. Do đó mẫu số của $x_1 = \frac{q}{l}$ nhỏ hơn mẫu số của x. Điều này có nghĩa $x_1, x_2, \ldots$ là dãy tăng chặt liên tiếp và không thể tạo thành một dãy vô hạn.*

1.1.18. *Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp . Dễ kiểm tra rằng*

$$R_k = \frac{p_k}{q_k} \quad \text{với} \quad k = 0, 1, 2.$$

Giả sử với $m \geq 2$ *bất kỳ chọn trước,*

$$R_m = \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_{m-1}a_m + p_{m-2}}{q_{m-1}a_m + q_{m-2}}.$$

Chú ý là nếu bây giờ thay a_m *trong* R_m *bằng* $a_m + \frac{1}{a_{m+1}}$, *thì ta thu được phần tử hội tụ* R_{m+1}. *Do đó*

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= \frac{p_{m-1}\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) + p_{m-2}}{q_{m-1}\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) + q_{m-2}} \\ &= \frac{(p_{m-1}a_m + p_{m-2})a_{m+1} + p_{m-1}}{(q_{m-1}a_m + q_{m-2})a_{m+1} + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}. \end{aligned}$$

1.1.19. *Kí hiệu*

$$\Delta_k = p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k \quad \text{với} \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó với $k > 1$,

$$\begin{aligned} \Delta_k &= p_{k-1}(q_{k-1}a_k + q_{k-2}) - q_{k-1}(p_{k-1}a_k + p_{k-2}) \\ &= -(p_{k-2}q_{k-1} - q_{k-2}p_{k-1}) = -\Delta_{k-1}. \end{aligned}$$

Vì $\Delta_1 = p_0q_1 - q_0p_1 = a_0a_1 - (a_0a_1 + 1) = -1$, *ta thu được* $\Delta_k = (-1)^k$, *từ đó suy ra* p_k *và* q_k *nguyên tố cùng nhau.*

1.1.20. *Theo lời giải của 1.1.18 ta có với* $n > 1$

$$R_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}.$$

Tương tự

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} \quad \text{với} \quad n = 1, 2, ...$$

Do đó

$$\begin{aligned} x - R_n &= \frac{p_n a_{n+1} + p_{n-1}}{q_n a_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n}, \end{aligned}$$

trong đó, đẳng thức cuối cùng suy ra từ kết quả trong 1.1.19. Do đó

$$x - R_n \begin{cases} > 0 & \text{với } n \text{ chẵn}, \\ < 0 & \text{với } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Do vậy x nằm giữa hai dãy hội tụ liên tiếp.

1.1.21. *Trước hết ta chứng minh rằng nếu α là một số vô tỉ dương, thì tập $\{n - m\alpha : \ n, m \in \mathbb{N}\}$ là trù mật trong $\mathbb{R}_+$. Để làm điều đó, lấy một khoảng (a, b), $0 < a < b$. Ta sẽ chỉ ra rằng khoảng này chứa ít nhất một phần tử của tập đã cho. Đặt $\varepsilon = b - a > 0$, từ kết quả bài toán trước, tồn tại một dãy hội tụ R_n sao cho*

$$(1) \qquad 0 < R_n - \alpha < \frac{1}{q_n^2}.$$

Thực vậy, lấy một số n lẻ và chú ý rằng

$$(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n > q_n^2.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, với n đủ lớn ta có $\frac{1}{q_n} < \varepsilon$. Từ điều này và (1) suy ra $0 < p_n - \alpha q_n < 1/q_n < \varepsilon$ với n đủ lớn, do đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_0(p_n - \alpha q_n) \in (a, b)$. Cho $t \in [-1, 1]$, tồn tại số nguyên x sao cho $t = \sin x$. Từ nhận xét ở trên suy ra tồn tại một dãy các số nguyên dương $\{m_n\}$ và $\{k_n\}$ với $x = \lim\limits_{n\to\infty}(m_n - 2\pi k_n) = +\infty$. Sử dụng tính liên tục của hàm $\sin x$ ta được

$$t = \sin x = \sin(\lim_{n\to\infty}(m_n - 2\pi k_n)) = \lim_{n\to\infty} \sin m_n).$$

Do vậy, ta đã chứng minh được rằng mọi số thuộc khoảng $[-1, 1]$ đều là điểm giới hạn của tập $\{\sin n : n \in \mathbb{N}\}$.

1.1.22. *Gọi p_n và q_n là các số nguyên được định nghĩa trong 1.1.20. Vì $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}} > a_{n+1}$, ta có $(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n > (q_n a_{n+1} + q_{n-1})q_n = q_{n+1}q_n$. Do đó, theo 1.1.20,*

$$|x - R_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Vì $q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} > q_n a_{n+1} > q_n$, kéo theo bất đẳng thức mong muốn. Ta sẽ chỉ ra rằng dãy $\{q_n\}$ chứa vô hạn các số lẻ. Thực vậy, theo kết quả trong 1.1.19, q_n và q_{n+1} không thể cùng chẵn.

1.1.23. *Sử dụng bài 1.1.19.*

1.1.24. Trước hết ta có nhận xét rằng dãy $\{q_n\}$ tăng ngặt và $q_n \geq n$. Hơn nữa từ bài 1.1.20 suy ra

$$|x - R_n| = \frac{1}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n}.$$

kết hợp với bất đẳng thức $x_{n+1} < a_{n+1} + 1$ ta suy ra

$$|x - R_n| > \frac{1}{(q_n(a_{n+1} + 1) + q_{n-1})q_n} = \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n}.$$

Vì $a_{n+2} \geq 1$ ta có

$$|x - R_{n+1}| < \frac{1}{(q_{n+1}a_{n+2} + q_n)q_{n+1}} < \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n}.$$

Từ các bất đẳng thức này suy ra điều cần chứng minh.

1.1.25. Giả sử $\left|x - \frac{r}{s}\right| < |x - R_n| < |x - R_{n-1}|$. Vì x nằm giữa R_n và R_{n-1} (xem bài toán 1.1.20), suy ra

$$\left|\frac{r}{s} - R_{n-1}\right| < |R_{n-1} - R_n|.$$

Do đó, theo kết quả của 1.1.23,

$$\frac{|rq_{n-1} - sp_{n-1}|}{sq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

Hơn nữa, ta có $\frac{1}{sq_{n-1}} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$ vì $|rq_{n-1} - sp_{n-1}| \geq 1$. Do đó $s > q_n$.

1.1.26. Theo thuật toán cho trong 1.1.20, ta có

$$a_0 = \left[\sqrt{2}\right] = 1, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Do đó, $a_1 = [x_1] = 2$. Tương tự,

$$x_2 = \frac{1}{\left(\sqrt{2} + 1\right) - 2} \quad \text{và} \quad a_2 = a_1 = 2.$$

Bằng quy nạp ,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \ldots.$$

Tương tự

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots.$$

1.1.27. *Vì* $k < \sqrt{k^2+k} < k+1$, $a_0 = \left[\sqrt{k^2+k}\right] = k$ *nên* $x_1 = \frac{\sqrt{k^2+k}+k}{k}$. *Vậy,* $2 < x_1 < 2 + \frac{1}{k}$ *và* $a_1 = 2$. *Hơn nữa,*

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{k^2+k}-k} - 2} = k + \sqrt{k^2+k}.$$

Do đó $2k < x_2 < 2k+1$ *và* $a_2 = 2k$. *Tương tự ta thu được* $a_3 = 2$. *Sử dụng quy nạp ta suy ra*

$$\sqrt{k^2+k} = k + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2k} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2k} + \ldots.$$

1.1.28. *Vì* $0 < x < 1$, *suy ra* $a_0 = 0$ *và* $x_1 = 1/x$. *Do đó* $a_1 = n$ *suy ra* $[1/x] = n$. *Từ* $1/x - 1 < n \leq 1/x$ *suy ra* $1/(n+1) < x \leq 1/n$.

1.2 Một số bất đẳng thức sơ cấp

1.2.1. *Ta sẽ sử dụng quy nạp sau. Với* $n = 1$, *bất đẳng thức là hiển nhiên. Lấy* n *nguyên dương bất kỳ và giả sử là*

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Thì

$$\begin{aligned}
&(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)(1+a_{n+1}) \\
&\geq (1+a_1+a_2+\ldots+a_n)(1+a_{n+1}) \\
&= 1+a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+a_{n+1}(1+a_1+a_2+\ldots+a_n) \\
&\geq (1+a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}).
\end{aligned}$$

Ta suy ra điều phải chứng minh.

1.2.2. *Ta sử dụng quy nạp. Với* $n = 1$, *điều khẳng định là hiển nhiên. Ta giả sử rằng khẳng định đúng với* n *bất kỳ chọn trước. Không mất tính tổng quát, giả sử* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *thoả mãn điều kiện* $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$ *được sắp theo thứ tự* $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1}$, *thế thì* $a_1 \leq 1$ *và* $a_{n+1} \geq 1$. *Vì* $a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot (a_{n+1} \cdot a_1) = 1$, *sử dụng giả thiết quy nạp suy ra* $a_2 + a_3 + \ldots + a_n + (a_{n+1} \cdot a_1) \geq n$, *do đó*

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} \geq n + a_{n+1} + a_1 - a_{n+1} \cdot a_1 \\
&= n + a_{n+1} \cdot (1 - a_1) + a_1 - 1 + 1 \\
&= n + 1 + (a_{n-1} - 1)(1 - a_1) \geq n + 1.
\end{aligned}$$

1.2.3. *Sử dụng kết quả trong bài 1.2.2. suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. Thực vậy, thay a_j bằng $\frac{a_j}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}$, ta có $A_n \geq G_n$, thay a_j bằng nghịch đảo của nó $\frac{1}{a_j}$ trong bất đẳng thức này ta suy ra bất đẳng thức $G_n \geq H_n$.*

1.2.4. *Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân của bộ số $a_1, \ldots, a_n$ ta có*

$$\sqrt[n]{(1+nx) \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot 1} \leq 1 + x \quad (n \text{ nhân tử}).$$

1.2.5.

(a) *Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà[1].*

(b) *Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà.*

(c) *Bất đẳng thức vế trái được chứng minh như trong (a) và (b). Để chứng minh bất đẳng thức vế phải, ta chú ý rằng*

$$\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+1} + \ldots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{1}{3n+1} + \frac{2n}{3n+2} < \frac{2}{3}.$$

(a) *Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân[2] ta được*

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{n+1}{n} > n\sqrt[n]{n+1},$$

do đó

$$1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \ldots + 1 + \frac{1}{n} > n\sqrt[n]{n+1}$$

và

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > n(\sqrt[n]{n+1} - 1).$$

Để chứng minh bất đẳng thức còn lại, ta cũng dùng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, có

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} > \frac{n}{\sqrt[n]{n+1}},$$

suy ra

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right).$$

---

[1] *Còn gọi là bất đẳng thức trung bình điều hoà.*

[2] *Còn gọi là bất đẳng thức Cauchy tổng quát.*

1.2.6. *Từ bất đẳng thức $G_n \le A_n$ suy ra*

$$x^n = \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot \ldots \cdot x^{2n}} \le \frac{1 + \ldots + x^{2n}}{2n+1}.$$

1.2.7. *Bất đẳng thức ở vế phải là hệ quả trực tiếp của $G_n \le A_n$. Có thể chứng minh bất đẳng thức còn lại bằng quy nạp. Rõ ràng bất đẳng thức đúng với $n = 1$, giả sử nó đúng với n, ta đi chứng minh bất đẳng thức đúng với $n+1$. Tức là ta cần chứng minh rằng $(a_1 \cdot a_{n+1})^{n+1} \le (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1})^n$ biết $(a_1 \cdot a_n)^n \le (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^2$. Quả vậy, ta có*

$$(a_1 a_{n+1})^{n+1} \le a_1 \cdot a_n (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 \cdot \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n+1}.$$

Suy ra ta chỉ còn phải chứng minh rằng

$$a_1 \frac{a_{n+1}^{n+1}}{a_n^n} \le a_{n+1}^2.$$

Nhưng bất đẳng thức cuối cùng có thể viết dưới dạng

$$a_1 \left(1 + \frac{d}{a_1 + (n-1)d}\right)^{n-1} \le a_1 + (n-1)d,$$

trong đó $a_n = a_1 + (n+1)d$, nên sử dụng quy nạp ta có thể chứng minh bất đẳng thức này dễ dàng, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

1.2.8. *Đây là một hệ quả trực tiếp của kết quả trước.*

1.2.9. *Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và điều hoà.*

1.2.10.

(a) Sử dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và điều hoà ta được

$$n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)^{-1} \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

cụ thể, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \ge \frac{n^2}{s}.$$

Tương tự như vậy, từ bất đẳng thức

$$n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}\right)^{-1}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s-a_k)$$

ta suy ra

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}\geq\frac{n^2}{s(n-1)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên cùng các đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s-a_k}=s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s-a_k}-n \quad \text{và} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{s-a_k}{a_k}=s\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}-n$$

suy ra điều phải chứng minh.

(b) Xem lời giải phần (a).

(c) Chứng minh tương tự câu (a).

1.2.11. Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1+a_k}{2}\geq\sqrt{a_k}$.

1.2.12. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2-\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2&=\sum_{k,j=1}^{n}a_k^2b_j^2-\sum_{k,j=1}^{n}a_kb_ka_jb_j\\&=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}(a_kb_j-b_ka_j)^2\geq 0.\end{aligned}$$

1.2.13. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\sum_{k,j=1}^{n}(a_ka_j+b_kb_j)\leq\sum_{k,j=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a_j^2+b_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

đây là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức [3]*hiển nhiên* $a_ka_j+b_kb_j\leq(a_k^2+b_k^2)^{\frac{1}{2}}(a_j^2+b_j^2)^{\frac{1}{2}}$.

1.2.14. Suy ra từ bất đẳng thức Cauchy.

[3] *Ta gọi đây là bất đẳng thức Buniakovskii - Cauchy - Schwarz.*

1.2.15.

(a) Theo bất đẳng thức Cauchy ,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k \frac{1}{a_k}} \right)^2 = n^2.$$

(b) Từ (a) suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1-a_k}{a_k} &= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - n \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\geq n^2 - n \sum_{k=1}^{n} a_k = n \sum_{k=1}^{n} (1 - a_k). \end{aligned}$$

(c) Theo giả thiết của ta thì $\log_a a_1 + \log_a a_2 + ... + \log_a a_n = 1$. Điều này kết hợp với bất đẳng thức Cauchy (bài 1.2.12) suy ra điều phải chứng minh.

1.2.16. *Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với*

$$0 \leq -4\alpha \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| + 4 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \alpha^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

bất đẳng thức này đúng với mỗi α thực, bởi vì

$$\Delta = 16 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 - 16 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq 0.$$

1.2.17. *Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} 1|a_k| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

1.2.18.

(a) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} a_k \frac{b_k}{\sqrt{k}} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}.$$

(b) Tương tự

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{\frac{3}{2}} a_k}{k^{\frac{5}{2}}}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} k^3 a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^5}.$$

1.2.19. Từ bất đẳng thức Cauchy suy ra

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\frac{p+q}{2}} a_k^{\frac{p-q}{2}}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q} \sum_{k=1}^{n} a_k^{p-q}.$$

1.2.20. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} 1 \ge \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = 1.$$

Vì $\sum\limits_{k-1}^{n} a_k^2 \ge \frac{1}{n}$, đẳng thức với $a_k = \frac{1}{n}, k = 1, 2, ..., n$. Do đó giá trị bé nhất cần tìm là $\frac{1}{n}$.

1.2.21. Hoàn toàn tương tự như lời giải của bài toán trên ta có

$$1 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k} a_k \frac{1}{\sqrt{p_k}}\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} p_k a_k^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}.$$

Do vậy,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k^2 \ge \frac{1}{\sum\limits_{k-1}^{n} \frac{1}{p_k}}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $a_k = \frac{1}{p_k}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$, suy ra giá trị nhỏ nhất cần tìm là $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$.

1.2.22. Từ lời giải của bài toán 1.2.20 suy ra

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le n \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Do đó

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \left((a_1+a_2)+\sum_{k=3}^{n} a_k\right)^2 \leq (n-1)\left((a_1+a_2)^2+\sum_{k=3}^{n} a_k^2\right)$$
$$= (n-1)(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2).$$

1.2.23.

(a) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(b) Sử dụng câu (a) ta được

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Từ bất đẳng thức trên cùng với bất đẳng thức nêu trong bài 1.2.17 ta suy ra

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|.$$

Tương tự

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$$

và ta có điều phải chứng minh.

1.2.24. *Vì* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = 1$ *nên* $1 = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (p_k - \alpha) a_k + \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *với mọi số thực* α. *Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có*

$$1 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (p_k - \alpha)^2 + \alpha^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \right),$$

do đó

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} (p_k - \alpha)^2 + \alpha^2 \right)^{-1}.$$

Đặt $\alpha = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$, *ta thu được cận dưới đúng. Do đó*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \geq \frac{n+1}{(n+1) \sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \right)^2},$$

bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi

$$a_k = \frac{(n+1) p_k - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k}{(n+1) \sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k \right)^2}.$$

1.2.25. *Sử dụng quy nạp. Với* $n = 1$ *ta có đẳng thức* $a_1 b_1 = a_1 b_1$. *Hơn nữa, nếu bất đẳng thức đúng với* n, *thì*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{k=1}^{n-1} b_k - (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k \\
&\leq a_{n+1} \sum_{k-1}^{n} b_k + b_{n+1} \sum_{k-1}^{n} a_k - n a_{n+1} b_{n+1} - \sum_{k-1}^{n} a_k b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (b_{n+1} - b_k)(a_k - a_{n-1}) \leq 0.
\end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp suy ra điều phải chứng minh.

1.2.26. Sử dụng quy nạp theo p. Với $p = 1$, đẳng thức $a_1^p = a_1^p$ luôn đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với p, ta sẽ chứng minh nó đúng với $p+1$. Rõ ràng, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng các số a_k được sắp xếp theo thứ tự sao cho $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$. theo giả thiết quy nạp và kết quả của bài toán trước ta suy ra

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{p+1} \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^p \sum_{k=1}^{n} a_k \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1}.$$

1.2.27. Ta có

$$(1+c)a^2 + \left(a + \frac{1}{c}\right)b^2 = a^2 + b^2 + \left(\sqrt{c}a - \frac{1}{\sqrt{c}}b\right)^2 + 2ab \ge (a+b)^2.$$

1.2.28. Rõ ràng $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} \ge |b| + |c| \ge |b+c|$. Do đó ta suy ra bất đẳng thức $|b^2 - c^2| \le |b-c| \left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2}\right)$ và nó tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh.

1.2.29.

(a) Với các số thực a, b, c ta có $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$. Do đó $b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 \ge abc(a+b+c)$, tương đương với kết luận của ta.

(b) Điều phải chứng minh được suy ra từ bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ theo cách hoàn toàn tương tự như trong (a).

(c) Đây là kết quả của bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà.

(d) Ta có

$$\frac{b^2 - a^2}{c+a} = \frac{b+a}{c+a}(b-a) = \frac{b+a}{c+a}((b+c) - (c+a)).$$

Đặt $u = a+b$, $v = b+c$ và $z = c+a$ ta thu được

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2-a^2}{c+a} + \frac{c^2-b^2}{a+b} + \frac{a^2-c^2}{b+c} = \frac{u}{z}(v-z) + \frac{v}{u}(z-u) + \frac{z}{v}(u-v)\\
&= \frac{u^2v^2 + v^2z^2 + z^2u^2 - (u^2vz + v^2uz + z^2uv)}{uvz}\\
&= \frac{u^2(v^2+z^2) + v^2(u^2+z^2) + z^2(u^2+z^2) - 2(u^2vz + v^2uz + z^2uv)}{2uvz}\\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

(e) Với $a = b$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Giả sử $0 < b < a$, thế thì

$$\frac{a-b}{2\sqrt{a}} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}} < \sqrt{a}-\sqrt{b} < \frac{a-b}{2\sqrt{b}}$$

và do đó

$$\frac{(a-b)^2}{4a} < \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 < \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{4b}.$$

1.2.30. Đặt $m = \frac{a_i}{b_i}$. Thế thì

$$m(b_1+...+b_n) = \frac{a_i}{b_i}(b_1+b_2+...+b_n) = \frac{a_i}{b_i}b_1 + \frac{a_i}{b_i}b_2 + ... + \frac{a_i}{b_i}b_n$$
$$\leq \frac{a_1}{b_1}b_1 + \frac{a_2}{b_2}b_2 + ... + \frac{a_n}{b_n}b_n = a_1+a_2+...+a_n \leq M(b_1+b_2+...+b_n).$$

1.2.31. Bất đẳng thức suy ra từ kết quả trong bài toán trước và từ tính đơn điệu của hàm $\tan x$ trên khoảng $(0, \pi/2)$.

1.2.32. Áp dụng bất đẳng thức cho trong 1.2.30 với $a_i = \ln c_i$ và $b_i = k_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

1.2.33. Chú ý rằng

$$\frac{a_1}{b_1} \leq M, \frac{a_2^2}{Mb_2^2} \leq M, ..., \frac{a_n^n}{M^{n-1}b_n^n} \leq M$$

và sử dụng bất đẳng thức được chứng minh trong 1.2.30 suy ra điều phải chứng minh.

1.2.34. Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà (xem ví dụ 1.2.3) ta được

$$\frac{n}{\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+...+\frac{1}{x-a_n}} \leq \frac{(x-a_1)+(x-a_2)+...+(x-a_n)}{n}$$
$$= \frac{nx-(a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

từ đó suy ra kết quả cần chứng minh rất dễ dàng.

1.2.35. Ta có

$$1 + c_1 + c_2 + ... + c_n = (1+1)^n = 2^n.$$

áp dụng bất đẳng thức Cauchy (xem 1.2.12) với $a_k = 1$ và $b_k = \sqrt{c_k}$, $k = 1, 2, ..., n$.

1.2.36. *Vì*

$$\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\prod_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} \quad \text{và} \quad 2^n-2=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k},$$

sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà ta suy ra điều phải chứng minh (xem 1.2.3).

1.2.37. *Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà (xem 1.2.3) ta được*

$$A_k^{p-1}A_{k-1} \le \frac{(p-1)A_k^p + A_{k-1}^p}{p}, \quad k=1,2,...,n$$

trong đó $A_0=0$. *Từ đó suy ra*

$$\begin{aligned}
&A_k^p - \frac{p}{p-1}A_k^{p-1}a_k = A_k^p - \frac{p}{p-1}A_k^{p-1}(kA_k-(k-1)A_{k-1})\\
&= A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right) + A_k^{p-1}A_{k-1}\frac{(k-1)p}{p-1} \le A_k^p\left(1-\frac{kp}{p-1}\right)\\
&+\frac{k-1}{p-1}\left((p-1)A_k^p + A_{k-1}^p\right) = \frac{1}{p-1}\left((k-1)A_{k-1}^p - kA_k^p\right).
\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức ta được điều cần chứng minh.

1.2.38. *Giả sử* $a_i=\max\{a_1,a_2,...,a_n\}$, *khi đó ta có*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{k+1} &= \sum_{k=1}^{i-1}a_ka_{k+1}+\sum_{k=i}^{n-1}a_ka_{k+1} \le a_i\sum_{k=1}^{i-1}a_k + a_i\sum_{k=i}^{n-1}a_{k+1}\\
&= a_i(a-a_i) = \frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-a_i\right)^2 \le \frac{a^2}{4}.
\end{aligned}$$

1.2.39. *Áp dụng kết quả trong 1.2.2*

1.2.40. *Bất đẳng thức vế trái suy ra từ 1.2.1*

(a) Rõ ràng

$$1+a_k=\frac{1-a_k^2}{1-a_k}<\frac{1}{1-a_k}.$$

Do đó

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) < \left(\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\right)^{-1}.$$

Vì $a_1 + a_2 + ... + a_n < 1$, áp dụng một lần nữa kết quả trong 1.2.1 ta có

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) < \left(1 - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{-1}.$$

(b) Lập luận như câu (a).

1.2.41. *Áp dụng bất đẳng thức cho trong 1.2.15 (b), thay a_k bằng $1 - a_k$.*

1.2.42. *Vì $0 < a_k \leq 1$ với $k = 1, 2, \ldots, n$ bất đẳng thức*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \tag{1}$$

đúng với $n \geq 2$. Bây giờ ta sử dụng bất đẳng thức 1.2.15 (b), trong đó ta thay a_k bởi $\frac{a_k}{1+a_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ được

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\left(n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k}\right) \geq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k}.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức này với $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ và sử dụng (1), ta được kết quả cần chứng minh.

1.2.43.

(a) Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà ta được

$$\begin{aligned}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)}{(n+1)^n} &= \frac{2a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + a_n}{n+1} \\ &\cdot \ldots \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + 2a_n}{n+1} \geq \prod_{k=1}^{n} a_k.\end{aligned}$$

(b) Chứng minh của phần này giống như trong (a).

1.2.44. *Chú ý rằng nếu $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} = n - 1$ thì $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k} = 1$. Để nhận được kết quả cần chứng minh, ta sử dụng bất đẳng thức trong 1.2.43 (b) với a_k được thay bởi $\frac{a_k}{1-a_k}$.*

1.2.45. [M. S. Klamkin, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 741-742] Ta có thể giả sử rằng $a_1, a_2, ..., a_n$ được sắp xếp sao cho $a_1 = \min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và $a_2 = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, và giả sử $A_n = 1/n$ là trung bình cộng của $a_1, ..., a_n$. Xét một dãy $\left\{a_k^{'}\right\}$ bằng cách đặt $a_1^{'} = A_n$, $a_2^{'} = a_1 + a_2 - A_n$, $a_i^{'} =$ a_i với $3 \le i \le n$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\text{(1)} \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k}{1-a_k} \ge \prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k^{'}}{1-a_k^{'}}.$$

Từ cách xác định của dãy $\left\{a_k^{'}\right\}$ ta suy ra (1) tương đương với

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)}{(1-a_1)(1-a_2)} \ge \frac{(1+A_n)(1+a_1+a_2-A_n)}{(1-A_n)(1-a_1-a_2+A_n)}$$

tức là tương đương với

$$(A_n - a_1)(A_n - a_2) \le 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một hệ quả trực tiếp của giả thiết trên. Giờ ra lặp lại các thủ tục ở trên cho dãy $\left\{a_n^{'}\right\}$ để có dãy $\left\{a_n^{''}\right\}$; Có ít nhất hai hạng tử của dãy $\left\{a_n^{''}\right\}$ bằng A_n. Hơn thế, dãy đó thoả mãn bất đẳng thức (1). Nếu ta lặp lại thủ tục này ở nhiều nhất $n-1$ lần, ta có dãy hằng mà các phần tử đều bằng A_n. Sử dụng bất đẳng thức (1) trong trường hợp này ta được

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1+a_k}{1-a_k} \ge \prod_{k=1}^{n} \frac{1+A_n}{1-A_n} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

1.2.46. Gọi $a_{k_1} = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Tồn tại một phân số ở vế trái của bất đẳng thức có tử số bằng a_{k_1}. Mẫu số của phân số này có hai hạng tử. Kí hiệu hạng tử lớn hơn là a_{k_2}. Lấy phân số có tử số là a_{k_2} và kí hiệu a_{k_3}là hạng tử lớn hơn trong hai hạng tử trong mẫu số của nó , ... Chú ý rằng

$$\text{(1)} \qquad \frac{a_{a_{k_i}}}{a_{k_i-1} + a_{k_i+2}} \ge \frac{a_{k_i}}{2a_{k_{i+1}}}, \quad i = 1, 2, ...$$

Từ cách xây dựng trên suy ra tồn tại một số l sao cho $a_{k_{l+1}} = a_{k_1}$. Tiếp theo, rõ ràng các số a_{k_i} và $a_{k_{i+1}}$ xuất hiện trong bất đẳng thức như là tử số của hoặc là hai phân số lân cận hoặc là của hai phân số cách nhau bởi một hạng tử (ta giả sử ở đây rằng hai phân số đầu và cuối là các phân số lân cận). Hơn nữa, $a_{k_{i+1}}$ xuất hiện như là tử số của phân số bên phải phân số có tử số a_{k_i}. Để *chuyển từ phân số có chỉ số a_{k_1} đến phân số có chỉ số a_{k_l+1} cần l bước, trong đó $l \geq \frac{n}{2}$. Do đó, từ (1) và bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình điều hoà ta được*

$$\frac{a_{k_1}}{2a_{k_2}} + \frac{a_{k_2}}{2a_{k_3}} + \dots + \frac{a_{k_l}}{2a_{k_1}} \geq l\sqrt[l]{\frac{1}{2^l}} \geq \frac{n}{4}.$$

1.2.47. Ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{|a_k - t|}}{2^k} \geq \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)\sqrt{|a_1 - t|} + \frac{\sqrt{|a_2 - t|}}{2^2}$$
$$+ \dots + \frac{\sqrt{|a_n - t|}}{2^n} \geq \frac{1}{2^2}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_2 - t|}\right) + \frac{1}{2^3}\Big(\sqrt{|a_1 - t|}$$
$$+ \sqrt{|a_3 - t|}\Big) + \dots + \frac{1}{2^n}\left(\sqrt{|a_1 - t|} + \sqrt{|a_n - t|}\right)$$

suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

1.2.48. Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình nhân và trung bình cộng ta được

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_n + b_n}} + \sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2 + b_2} \cdot \dots \cdot \frac{b_n}{a_n + b_n}}$$
$$\leq \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \dots \frac{a_n}{a_n + b_n} + \frac{b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{b_n}{a_n + b_n}\right) = 1$$

1.2.49. [V. Ptak, Amer. Math. Monthly 102 (1995), 820-821] Trước hết chú ý rằng khi thay mỗi a_k bằng ca_k với $c > 0$ thì cả hai vế trái và vế phải của bất đẳng thức không thay đổi, do đó ta có thể giả thiết rằng $G = 1$, suy ra $a_n = \frac{1}{a_1}$. Hơn nữa nếu $a_1 \leq x \leq \frac{1}{a_1}$ thì $x + \frac{1}{x} \leq a_1 + \frac{1}{a_1}$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} p_k a_k + \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{1}{a_k} \leq a_1 + \frac{1}{a_1} = 2A.$$

Để thu được điều phải chứng minh ta áp dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

1.2.50. Ta hãy sắp xếp các ước nguyên dương của n thành các cặp (k, l) theo cách sao cho $kl = n$. Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân[(4)] suy ra $\frac{k+l}{2} \geq \sqrt{kl}$. Cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$\frac{\sigma(n)}{2} \geq \frac{\tau(n)}{2}\sqrt{n}.$$

[(4)] *Ở đây là bất đẳng thức Cauchy đối với k và l.*

Chương 2

Dãy số thực

2.1 Dãy đơn điệu

2.1.1.

(a) Cho $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng, bị chặn trên thì

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = A < \infty,$$

suy ra với mọi $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq A$. Vì với mọi $\varepsilon > 0$, số $A - \varepsilon$ không phải là cận trên của tập $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nên tồn tại số a_{n_0} sao cho $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Do tính đơn điệu của dãy số ta có : $A \geq a_n > A - \varepsilon$ với $n > n_0$. Do vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Bây giờ ta giả sử rằng a_n không bị chặn trên, khi đó với mọi M, tồn tại a_{n_0} sao cho $a_{n_0} > M$, theo tính đơn điệu của dãy số ta có, $a_n > M$ với $n > n_0$, vì vậy, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(b) Hệ quả của (a).

2.1.2. Ta có

$$\frac{s_n}{s_{n-1}} \leq \frac{s_{n+1}}{s_n} \quad \text{với} \quad n \geq 2.$$

Thực vậy, theo1.2.19,

(1)
$$s_n^2 \leq s_{n-1}s_{n-1}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\{x_n\}$ là dãy tăng. Thật vậy, từ $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} a_k\right)^2 \leq p\sum\limits_{i=1}^{p} a_k^2$ suy ra $x_1 \leq x_2$ (hệ quả của 1.2.20). Giả sử rằng $x_{n-1} \leq x_n$ thì

$$s_{n-1} \leq s_n^{\frac{n-1}{n}},$$

do đó, theo (1) và (2),

$$x_{n-1} = \sqrt[n+1]{s_{n+1}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_{n-1}}} \geq \sqrt[n+1]{\frac{s_n^2}{s_n^{\frac{n-1}{n}}}} = x_n.$$

2.1.3. Ta có $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a_n < a_n$, $n > 1$. *Do đó* $\{a_n\}$ *là dãy giảm ngặt. Từ tính chất dãy bị chặn dưới, chẳng hạn bởi 0, do đó tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. *Ta thấy* g *thoả mãn điều kiện* $g = \frac{1}{2}g$. *Do đó,* $g = 0$.

2.1.4. Cho $b_n = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$. *Ta có* $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2^n} \geq 0$. *Do đó dãy* $\{b_n\}$ *hội tụ, kéo theo dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ.*

2.1.5.

(a) Ta phải chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ *là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới. Thực vậy,*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} < 0.$$

Ngoài ra, theo bất đẳng thức được cho trong phần hướng dẫn (chứng minh bằng quy nạp) ta có $a_n > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1) > -2$.

(b) Chứng minh tương tự câu (a).

2.1.6. Đầu tiên, theo quy nạp, chúng ta chứng minh được rằng $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$ *với* $n \in \mathbb{N}$ *và dãy* $\{a_n\}$ *là tăng ngặt, suy ra nó hội tụ. Đặt* $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Do* $a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ *ta có* $g = \sqrt{3g-2}$, *suy ra* $g = 2$.

2.1.7. Chứng minh được bằng phương pháp qui nạp rằng $a_n > 2c$. *Ta có,* $a_1 < a_2$. *Ngoài ra nếu* $a_n > a_{n-1}$, *thì*

$$a_{n+1} = (a_n - c)^2 > (a_{n-1} - c)^2 = a_n.$$

Bất đẳng thức còn lại được suy ra từ tính đơn điệu của hàm số $f(x) = x^2$ *trên* $\mathbb{R}_+$.

2.1.8. Theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta có

$$\frac{a_n + (1 - a_{n+1})}{2} \geq \sqrt{a_n(1 - a_{n+1})} > \frac{1}{2}.$$

Suy ra $a_n - a_{n+1} > 0$, *do đó dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ tới* g. *Từ điều kiện* $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ *suy ra* $g(1-g) \geq \frac{1}{4}$. *Bất đẳng thức cuối cùng tương đương với bất đẳng thức* $(2g-1)^2 \leq 0$, *từ đó suy ra* $g = \frac{1}{2}$.

2.1.9. *Hiển nhiên* $0 \le a_n < 3$ *với* $n \ge 1$. *Hơn nữa,* $a_{n+1}^2 - a_n^2 = -a_n^2 + a_n + 6 > 0$ *với* $0 \le a_n < 3$, *do đó* $\{a_n\}$ *là dãy tăng bị chặn trên nên nó hội tụ . Theo định nghĩa của dãy ta có* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

2.1.10. *Ta có* $0 \le a_n < 1$ *với* $n \ge 1$. *Để chứng minh tính đơn điệu của dãy, ta làm như sau:*

$W(n)$ *đúng với mọi số tự nhiên* n *nếu hai điều kiện sau thoả mãn:*

(i) $W(1)$ *đúng.*

(ii) Nếu $W(k)$ *đúng với*$1 \le k \le n$ *kéo theo* $W(n+1)$ *đúng.*

Giả sử rằng $a_{n-1} \ge a_{n-2}$ *và* $a_n \ge a_{n-1}$, *thì*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - a_{n-1} + a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3) \ge 0.$$

Suy ra dãy hội tụ. Ký hiệu giới hạn là g *thì ta có* $g = \frac{1}{3}(1 + g + g^3)$, *Vậy*

$$g = 1 \quad \text{hoặc} \quad g = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{hoặc} \quad g = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Chú ý rằng các phần tử của dãy là không âm và nhỏ hơn $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, *do vậy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.1.11. *Ta có* $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} a_n < a_n, \quad n \ge 1$. *Theo phần 2.1.3 ta có* $g = 0$.

2.1.12. *Từ* $a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n < a_n, \quad n \ge 1$ *là dãy đơn điệu giảm , nó bị chặn dưới bởi* 0, *do đó nó hội tụ.*

2.1.13.

(a) Rõ ràng $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Ta cần chứng minh rằng nó bị chặn trên. Thực vậy,

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2. \end{aligned}$$

(b) Hiển nhiên $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng. Hơn nữa,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Nên theo câu (a) dãy này bị chặn trên.

2.1.14. Với $n \geq 1$, ta có

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} < 0,$$

suy ra nó là dãy đơn điệu giảm bị chặn dưới, do đó nó hội tụ.

2.1.15. Từ bất đẳng thức Cauchy chúng ta có

$$a_{n+1} \geq \sqrt[p]{a_n^{p-1}\frac{a}{a_n^{p-1}}} = \sqrt[p]{a}, \quad n \geq 1.$$

Do đó

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{a_n}{p} + \frac{a}{pa_n^{p-1}} = -\frac{a_n^p - a}{pa_n^{p-1}} \leq 0, \quad n \geq 2,$$

suy ra dãy $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[p]{a}$.

2.1.16. Dễ dàng thấy rằng, $0 \leq a_n < 2$ với $n \geq 1$. Hơn nữa, nếu $a_n > a_{n-1}$ thì

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} > 0, \quad \text{khi} \quad a_n > a_{n-1}.$$

Do đó dãy hội tụ tới g nào đó thoả mãn phương trình $g = \sqrt{2 + \sqrt{g}}$.

Chú ý. Sử dụng công thức Cardano về nghiệm thực của đa thức bậc ba, có thể chỉ ra rằng

$$g = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}(79 + 3\sqrt{249})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(79 - 3\sqrt{249})} - 1\right).$$

2.1.17. Chú ý rằng $a_{n+1} = 2\left(2 - \frac{5}{a_n+3}\right)$, $n \geq 1$. *Bằng phương pháp qui nạp ta có thể chỉ ra rằng* $0 < a_n < 2$ *với* $n \geq 1$. *Hơn nữa,*

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+1)(a_n-2)}{a_n+3} \geq 0.$$

Do đó dãy hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2.1.18. Bằng qui nạp có thể chỉ ra rằng dãy $\{a_n\}$ *tăng ngặt. Nếu nó bị chặn trên thì sẽ tồn tại số* g *thoả mãn* $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *hay* $g^2 - 2g + c = 0$. *Phương trình này có nghiệm thực khi và chỉ khi* $c \leq 1$, *vì vậy nếu giả sử rằng* $0 < c \leq 1$. *Suy ra dãy* $\{a_n\}$ *bị chặn trên bởi* $1 - \sqrt{1-c}$, *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

Trường hợp $c > 1$ *thì dãy tăng ngặt, và do đó phân kỳ về* $+\infty$.

2.1.19. Từ

$$a_{n+1} = a_n\left(1 - 2\frac{a_n^2 - a}{3a_n^2 + a}\right), \quad n \geq 1,$$

ta có

$$\begin{aligned} &\textit{Nếu} \quad a_n > \sqrt{a} \quad \textit{thì} \quad a_{n-1} < a_n, \\ &\textit{Nếu} \quad a_n < \sqrt{a} \quad \textit{thì} \quad a_{n-1} > a_n, \\ &\textit{Nếu} \quad a_n = \sqrt{a} \quad \textit{thì} \quad a_{n-1} = a_n. \end{aligned}$$

Ta nhận thấy rằng

$$a_n\frac{a_n^2 + 3a}{3a_n^2 + a} > \sqrt{a} \quad \textit{khi và chỉ khi} \quad \left(a_n - \sqrt{a}\right)^3 > 0,$$

tức là $a_n > \sqrt{a}$. *Do đó ta có các kết luận*

Nếu $0 < a_1 < \sqrt{a}$ *thì* $\{a_n\}$ *là dãy tăng và bị chặn trên bởi* $\sqrt{a}$,

Nếu $a_1 > \sqrt{a}$ *thì* $\{a_n\}$ *là dãy giảm và bị chặn dưới bởi* $\sqrt{a}$,

Nếu $a_1 = \sqrt{a}$ *thì* $\{a_n\}$ *là dãy hằng.*

Trong mọi trường hợp trên dãy đều hội tụ tới $\sqrt{a}$.

2.1.20. *Theo qui nạp ta có*

$$a_n = \frac{(3^{n-1}-1)-(3^{n-1}-3)a_1}{(3^n-1)-(3^n-3)a_1} \quad \text{với} \quad n = 1, 2, 3\ldots.$$

Do đó dãy không xác định với $a_1 = \frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}-3}$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Khi* $a_1 = 1$ *thì* $a_n = 1$ *với* $n = 1, 2, 3\ldots$. *Với các giá trị khác của* a_1, *dãy hội tụ tới* $\frac{1}{3}$.

2.1.21. *Ta có* $a_{n+1} = (a_n - a)^2 + a_n \geq a_n$ *với* $n = 1, 2, 3\ldots$. *Do đó dãy là đơn điệu tăng. Hơn nữa, nếu dãy hội tụ thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *Do đó nếu* $a_1 > a$, *thì dãy đã cho phân kỳ. Trong trường hợp* $a - 1 \leq a_1 \leq a$, *ta cũng có* $a - 1 \leq a_n \leq a$ *với* $n = 1, 2, 3\ldots$, *do đó dãy hội tụ. Cuối cùng, nếu* $a_1 < a - 1$, *thì* $a_2 > a$, *suy ra dãy phân kỳ.*

2.1.22. *Rõ ràng nhận thấy rằng dãy chỉ có thể hội tụ tới* a *hoặc* b, *xét các trường hợp sau.*

1^0 $c > b$. *Khi đó* $a_2 = \frac{c^2+ab}{a+b} > c = a_1$, *sử dụng qui nạp ta có* $a_{n+1} > a_n$. *Do đó,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2^0 $c = b$. *Hiển nhiên,* $a_n = b$ *với* $n = 1, 2, 3\ldots$.

3^0 $a < c < b$. *Ta có thể chứng minh theo qui nạp rằng dãy* $\{a_n\}$ *là đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi* a, *do đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

4^0 $c = a$. *Dễ dàng thấy rằng,* $a_n = a$ *với* $n = 1, 2, 3\ldots$.

5^0 $0 < c < a$. *Sử dụng qui nạp ta có thể chỉ ra rằng* $\{a_n\}$ *là đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi* a. *Do đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2.1.23. *Chú ý rằng* $a_{n+1} = 6\left(1 - \frac{6}{a_n+7}\right)$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Do đó theo qui nạp ta có*

$$\begin{aligned} &\text{Nếu} \quad a_1 < 2 \quad \text{thì} \quad a_n < 2, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\text{Nếu} \quad a_1 > 2 \quad \text{thì} \quad a_n > 2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hơn nữa

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{(a_n+3)(a_n-2)}{a_n+7}.$$

Do đó

1^0 *Nếu* $0 < a_1 < 2$ *thì* $\{a_n\}$ *là dãy tăng và bị chặn trên bởi 2 và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2^0 *Nếu* $a_1 > 2$ *thì* $\{a_n\}$ *là dãy giảm và bị chặn dưới bởi* 2 *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

3^0 *Nếu* $a_1 = 2$ *thì* $a_n = 2$, *với* $n \in \mathbb{N}$.

2.1.24. *Từ* $0 = a_1 \le a_2$ *và* $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$, *do đó theo qui nạp ta thấy rằng* $a_{n+1} \ge a_n$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Mặt khác dãy bị chặn trên bởi* $\sqrt{1+4c}$. *Dễ dàng tính được rằng* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$.

2.1.25. *Vì* $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$ *và* $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2(a_n - a_{n-1})$, *theo qui nạp ta nhận thấy rằng* $a_{n+1} \ge a_n$ *với* $n \in \mathbb{N}$, *đồng thời dãy bị chặn trên bởi 2, do đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

2.1.26. *Với* $k = 1$ *ta có* $a_n = 5^n$ *với* $n \in \mathbb{N}$, *do đó dãy* $\{a_n\}$ *phân kỳ.*

Với $k > 1$,

$$a_2 = \sqrt[k]{5\sqrt[k]{5}} > \sqrt[k]{5} = a_1 \quad \text{và} \quad a_{n+1}^k - a_n^k = 5(a_n - a_{n-1}).$$

Theo qui nạp $\{a_n\}$ *tăng ngặt. Hơn nữa* $a_n < \sqrt[k-1]{5}, n \in \mathbb{N}$, *từ đó suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[k-1]{5}$.

2.1.27. *Theo qui nạp, ta thấy* $1 \le a_n \le 2$, $\quad n \in \mathbb{N}$. *Tính đơn điệu của dãy số suy ra từ đẳng thức* $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3(a_n - a_{n-1})$, *do đó, với* $1 < a_1 < 2$ *dãy đơn điệu tăng và giới hạn của nó bằng 2, ngoài ra, nếu* $a_1 = 1$ *hoặc* $a_1 = 2$ *thì nó là dãy hằng.*

2.1.28.

(a) *Ta có* $a_1 < a_2$ *và* $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$ *theo qui nạp ta nhận thấy rằng* $\{a_n\}$ *là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi* c. *Rõ ràng* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

(b) *Từ* $b_2 = \sqrt{c\sqrt{c}} > \sqrt{c} = b_1$ *và* $b_{n+1}^2 - b_n^2 = c(b_n - b_{n-1})$ *theo qui nạp ta nhận thấy rằng dãy là đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi* c, *suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

2.1.29. *Sử dụng qui nạp chứng minh được rằng* $0 < a_n < b$, *và là dãy tăng ngặt; Giới hạn của nó bằng* b.

2.1.30. *Dãy là tăng ngặt và bị chặn trên bởi một số hữu hạn, ví dụ 3, chứng minh được giới hạn của nó là* $\frac{3+\sqrt{15}}{3}$.

2.1.31. *Chúng ta có* $a_1 < a_2 < a_3$. *Hơn nữa, ta nhận thấy rằng với bất kỳ* $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{nếu} \quad a_n < a_{n+1} < a_{n+2} \quad \text{thì} \quad a_{n+2} < a_{n+3};$$

do đó theo phương pháp qui nạp trong cách giải bài toán 2.1.10 ta nhận thấy rằng dãy $\{a_n\}$ *tăng chặt, mặt khác nó bị chặn trên bởi 4 suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

2.1.32. *Theo cách giải của những bài toán trước, chúng ta có thể chỉ ra rằng dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 4, và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

2.1.33. *Theo bất đẳng thức Cauchy,* $a_n \geq b_n$. *Ta có*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Do đó dãy $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm. Mặt khác, dãy* $\{b_n\}$ *tăng vì*

$$b_{n+1} = \sqrt{b_n a_n} \geq \sqrt{b_n^2} = b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ngoài ra, $b_1 < a_n, b_n < a_1$, *do đó cả hai dãy đều hội tụ. Đặt* $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *và* $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Ta có* $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ *cho* $n \to \infty$ *ta được* $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, *suy ra* $\alpha = \beta$.

2.1.34. *Từ* $2(a_n^2 + b_n^2) \geq (a_n + b_n)^2$ *ta có* $a_n \geq b_n, \quad n \in \mathbb{N}$ *Do đó*

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n} \leq \frac{a_n^2 + a_n b_n}{a_n + b_n} = a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

Điều đó có nghĩa là dãy $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm*

Hoàn toàn tương tự ta có dãy $\{b_n\}$ *đơn điệu tăng. Ngoài ra,* $b_1 < a_n, b_n < a_1$. *Do đó cả hai dãy đều hội tụ.*

Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *và* $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. *Ta có* $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ *cho* $n \to \infty$ *ta được* $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}$, *suy ra* $\alpha = \beta$.

2.1.35. *Theo bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân (tức là bất đẳng thức Cauchy) ta có* $a_n \geq b_n$. *Ta có*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Do đó dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Mặt khác, dãy $\{b_n\}$ đơn điệu tăng bởi vì

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geq b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Hơn nữa, $b_1 < a_n, b_n < a_1$ do đó cả hai dãy đều hội tụ.

Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ và $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Ta có $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, cho $n \to \infty$ ta được $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, do vậy $\alpha = \beta$.

Với nhận xét rằng $a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n$ ta suy ra tất cả các phần tử của dãy $\{a_n b_n\}$ đều bằng $a_1 b_1$, do đó $\alpha = \beta = \sqrt{a_1 b_1}$.

2.1.36. *Ta có $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(a_n + 1) \quad n \in \mathbb{N}$. Suy ra*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-na_n + (n+2)}{2(n+1)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $na_n > n + 2$ với $n \geq 1$ (có thể chứng minh bằng qui nạp) ta thấy rằng dãy là đơn điệu giảm, và do đó nó hội tụ. Đặt $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, từ phương trình $a_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(a_n + 1)$ cho $n \to \infty$ ta được $\alpha = 1$.

2.1.37. *Từ bất đẳng thức $a_{n+2} \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ ta có $a_{n+2} + \frac{2}{3}a_{n+1} \leq a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$. Do đó dãy $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ là dãy giảm, bị chặn, và do đó hội tụ. Đặt b là giới hạn của nó, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\{a_n\}$ hội tụ tới $a = \frac{3}{5}b$. Với $\varepsilon > 0$ tuỳ ý, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\frac{\varepsilon}{6} > |b_n - b|$ với $n \geq n_0$. Do đó,*

$$\frac{\varepsilon}{6} > \left| a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n - \frac{5}{3}a \right| \geq |a_{n+1} - a| - \frac{2}{3}|a_n - a| \quad \text{với} \quad n \geq n_0.$$

Do vậy $|a_{n+1} - a| < \frac{2}{3}|a_n - a| + \frac{\varepsilon}{6}$. Theo qui nạp ta có

$$\begin{aligned} |a_{n_0+k} - a| &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \ldots + \frac{2}{3} + 1\right)\frac{\varepsilon}{6} \\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| + \frac{1 - \frac{2}{3}^k}{1 - \frac{2}{3}}\frac{\varepsilon}{6} < \frac{2}{3}^k |a_{n_0} - a| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Từ $\left(\frac{2}{3}\right)^k |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ với k đủ lớn suy ra $|a_n - a| < \varepsilon$ với n đủ lớn.

2.1.38.

(a) $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})a_n > a_n$.

(b) Theo bất đẳng thức Cauchy $G_{n+1} < A_{n+1}$ (xem Bài tập 1.2.3) với $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 1 + \frac{1}{n}$ ta có

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Do đó

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình nhân và trung bình điều hoà $H_{n+1} < G_{n+1}, n > 1$ (xem Bài tập 1.2.3), trong đó $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n-1}$ ta được

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n+1]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n},$$

suy ra $b_n < b_{n-1}$ $n > 1$. Nhận thấy rằng $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1, n \in \mathbb{N}$ do đó hai dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ hội tụ. Ngoài ra, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2.1.39.

(a) Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $G_{n+1} < A_{n+1}$ (xem Bài tập 1.2.3), với $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1 + \frac{x}{n}$. $n \in \mathbb{N}$ ta nhận thấy dãy tăng ngặt

Nếu $0 < x \leq 1$, thì theo bài trước,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Nếu $x > 1$ thì tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $x \leq n_0$. Do đó, theo tính đơn điệu của dãy $\left\{\left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n\right\}$ và kết quả của bài tập trướcta có

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{n_0}{n}\right)^n < \left(1+\frac{n_0}{nn_0}\right)^{n_0 n} < e^{n_0}.$$

(b) Hoàn toàn tương tự câu (a) và chú ý rằng $x \leq 0$, dãy bị chặn trên, ví dụ bởi 1.

2.1.40. Sử dụng bất đẳng thức $H_{n+l+1} < G_{n+l+1}, n > 1$ (xem Bài tập 1.2.3), với $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+l+1} = 1 + \frac{x}{n}$, ta có

$$\sqrt[n+l+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+l}} > 1 + \frac{x(n+l)}{n^2+nl+x+n} > 1 + \frac{x(n+l)}{(n+1)(n+l)}.$$

Do đó, $b_n > b_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

2.1.41. Theo bất đẳng thức được cho trong phần hướng dẫn,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} > 0,$$
$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log\frac{n+1}{n} < 0.$$

Dễ dàng thấy rằng $a_1 \le a_n < b_n \le b_1 \quad n \in \mathbb{N}$, suy ra cả hai dãy hội tụ tới cùng giới hạn.

Chú ý. Ký hiệu $\log$ trong bài chính là lôga với cơ số tự nhiên mà ta thường ký hiệu là $\ln$.

2.1.42. Dễ dàng nhận thấy tính đơn điệu và tính bị chặn của dãy $\{a_n\}$. Từ đẳng thức $a_{n+1}^2 = a_n$ ta thấy rằng giới hạn của nó bằng 1. Tiếp theo ta kiểm tra tính đơn điệu của dãy $\{c_n\}$. Đầu tiên giả sử rằng $x > 1$ thì

$$c_n = 2^n(a_n - 1) = 2^n(a_{n+1}^2 - 1) = 2^n(a_{n+1} - 1)(a_{n+1} + 1)$$

$$= 2^{n+1}(a_{n+1} - 1)\frac{a_{n-1}+1}{2} > c_{n+1}.$$

Điều đó có nghĩa là với $x > 1$ dãy $\{c - n\}$ tăng ngặt, hoàn toàn tương tự cho trường hợp $0 < x < 1$. Với $x = 1$, dãy là hằng số. Tính đơn điệu của dãy $\{d_n\}$ chứng minh hoàn toàn tương tự.

Với $x > 1$ dãy $\{c_n\}$ hội tụ (bởi vì nó đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi 0). Mặt khác, với $0 < x < 1$, dãy $\{d_n\}$ là đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 0. Từ bất đẳng thức

$$d_n = \frac{c_n}{a_n}$$

kéo theo cả hai dãy tiến tới cùng giới hạn với mọi số dương $x \ne 1$. Nếu $x = 1$, thì $c_n = d_n = 0$.

2.2 Giới hạn. Tính chất của dãy hội tụ

2.2.1.

(a) 1.

(b) 1.

(c) -1.

(d) Ta có

$$0 < \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}\right)\ldots\left(\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}\right) < (\sqrt{2} - 1)^n.$$

Do vậy giới hạn của dãy bằng 0.

(e) Đầu tiên ta cần chứng minh rằng dãy $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ *hội tụ tới* 0. *Ta có*

$$a_{n+1} = a_n \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{n^2} < a_n,$$

với $n \geq 3$, *do đó dãy là đơn điệu giảm. Rõ ràng nó bị chặn dưới bởi* 0, *nên nó hội tụ và giới hạn* g *của nó thoả mãn phương trình* $g = \frac{1}{2}g$, *suy ra* $g = 0$. *Bây giờ ta đi xác định giới hạn của dãy. Đặt* $k_n = [\sqrt{n}]$, *thế thì* $k_n \leq \sqrt{n} < k_n + 1$, *do đó*

$$0 < \frac{n}{2^{\sqrt{n}}} < 2\frac{(k_n+1)^2}{2^{k_n+1}}.$$

Do đó giới hạn của dãy đã cho bằng 0.

(f) Đặt $a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$, *suy ra* $a_{n-1} = a_n \frac{1}{2}\frac{(n+1)}{2^{2n}} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *theo cách giải của bài 2.1.3 ta được* $g = 0$.

(g) Đặt

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}\right).$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} = \frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{-2}$ *do đó* $a_n = \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}}$. *Vậy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(h) Từ bất đẳng thức

$$(1+2+\ldots+n)\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$
$$\le (1+2+\ldots+n)\frac{1}{n^2+1}$$

sử dụng nguyên lý kẹp ta thấy nó có giới hạn bằng $\frac{1}{2}$.

(i) Như phần trên giới hạn bằng $\frac{1}{2}$.

2.2.2. Đặt $a_n = \frac{n^s}{(1+p)^n}$, *ta có*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{p+1}.$$

Ngoài ra, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1}$. *Suy ra dãy* $\{a_n\}$ *là đơn điệu giảm bắt đầu từ chỉ số* n_0 *nào đấy, nó cũng bị chặn dưới ví dụ bởi* 0. *Gọi giới hạn của nó bằng* g, g *thoả mãn tính chất* $g = \frac{1}{p+1}g$. *Do đó* $g = 0$.

2.2.3. Ta có

$$0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)$$
$$< n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$

Do vậy giới hạn của dãy bằng 0.

2.2.4. Đặt $\alpha = \frac{p}{q}$, *với* $p \in \mathbb{Z}$ *và* $q \in \mathbb{N}$. *Với* $n > q$ *số* $n!\alpha\pi$ *là bội của* π, *điều đó có nghĩa là đến một lúc nào đó các phần tử của dãy đều bằng* 0

2.2.5. Giả sử giới hạn của dãy tồn tại, ta có

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\sin(n+2) - \sin n) = 2\sin 1 \lim_{n\to\infty}\cos(n+1).$$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n = 0$. *Tương tự,*

$$0 = \lim_{n\to\infty}(\cos(n+2) - \cos n) = -2\sin 1 \lim_{n\to\infty}\sin(n+1),$$

Vô lý bởi vì $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. *Do đó giới hạn của* $\{\sin n\}$ *không tồn tại.*

2.2.6. Theo cách chứng minh của bài trước.

2.2.7. *Ta có*

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}a^2+\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\right)\\&=a^2+a+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2.2.8. *Ta có*

$$a_n+a_n^2+\ldots+a_n^k-k=(a_n-1)+(a_n^2-1)+\ldots+(a_n^k-1)$$

Hơn nữa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^l-1}{a_n-1}=l \quad \text{với} \quad l=1,2,\ldots,k$$

do đó giới hạn bằng $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

2.2.9. *Sử dụng đẳng thức*

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}, \quad k\in\mathbb{N}$$

Do đo giới hạn bằng $\frac{1}{4}$.

2.2.10. *Từ*

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)((k+1)^2-(k+1)+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$

ta có

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{3}$$

.

2.2.11. $\frac{1}{6}$.

2.2.12. *Từ* $1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$, *ta nhận được*

$$\left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{3}\frac{n+3}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}.$$

2.2.13. *Ta có*

$$k^3 + 6k^2 + 11k + 5 = (k+1)(k+2)(k+3) - 1,$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+3)!}\right) = \frac{5}{3}.$$

2.2.14. *Ta nhận thấy rằng*

$$\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x^{2^{k-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^k}} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \textit{nếu} \quad |x| < 1, \\ \frac{1}{1-x} & \textit{nếu} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

2.2.15. *Với* $x \neq 1$.

$$\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2^n})}{1-x} = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

suy ra,

$$a_n = \prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \begin{cases} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} & \textit{nếu} \quad x \neq 1, \\ 2^{n+1} & \textit{nếu} \quad x = 1. \end{cases}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \textit{nếu} \quad x < -1, \\ 0 & \textit{nếu} \quad x = -1, \\ \frac{1}{1-x} & \textit{nếu} \quad |x| < 1, \\ +\infty & \textit{nếu} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

2.2.16. *Với* $x \neq 1$ *ta có*

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{2}{x^{2^k} + x^{-2^k}}\right) = \prod_{k=0}^{n}\frac{(x^{2^k}+1)^2}{x^{2^{k+1}}+1} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1)\dots(x^{2^n}+1)}{(x-1)(x^{2^{n+1}}+1)} \\ &= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^{2^{n+1}}-1}{x^{2^{n+1}}+1}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\frac{x+1}{x-1} & \text{nếu} \quad |x| < 1, \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{nếu} \quad |x| > 1, \\ 0 & \text{nếu} \quad x = -1. \\ +\infty & \text{nếu} \quad x = 1. \end{cases}$$

2.2.17. Với $x \neq 1$, thì

$$1 + x^{3^k} + x^{2.3^k} = \frac{(1 + x^{3^k} + x^{2.3^k})(x^{3^k} - 1)}{x^{3^k} - 1} = \frac{x^{3^{k+1}} - 1}{x^{3^k} - 1}$$

Do vậy

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x^{3^k} + x^{2.3^k}) = \frac{x^{3^{n+1}} - 1}{x^3 - 1}.$$

Gọi g là giới hạn của dãy, ta có

$$g = \begin{cases} \frac{1}{1-x^3} & \text{nếu} \quad |x| < 1, \\ +\infty & \text{nếu} \quad |x| > 1, \\ 1 & \text{nếu} \quad x = -1, \\ +\infty & \text{nếu} \quad x = 1. \end{cases}$$

2.2.18. Ta có $k \cdot k! = (k+1)! - k!, \quad k \in \mathbb{N}$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!} = 1.$$

2.2.19. Ta chú ý rằng bài toán chỉ có nghĩa với $x \neq 0$. Theo 2.2.3, mẫu thức $n^x - (n-1)^x$ dần đến 0 nếu $0 < x < 1$. Ngoài ra, nếu $x < 0$ thì mẫu số cũng dần đến 0. Với $x = 1$ thì mẫu số bằng 1. Do đó dãy phân kỳ đến vô cực ($+\infty$ hoặc $-\infty$) với $x \leq 1$, $\quad x \neq 0$. Với $x > 1$ nếu đặt $k = [x]$, thì $k \geq 1$ và

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

Từ bất đẳng thức trên ta nhận thấy tồn tại hai số α và β sao cho

$$\alpha < n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x\right) < \beta,$$

Do đó

$$\alpha n^{x-1} < n^x\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^x\right) < \beta n^{x-1},$$

Do vậy nếu $x-1<1999$ thì dãy phân kỳ tới $+\infty$ Nếu $x-1>1999$ thì dãy hội tụ tới 0. Tiếp theo lấy $x=2000$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1999}}{n^{2000}-(n-1)^{2000}}=\frac{1}{2000}.$$

2.2.20. Ta có

$$a_n=\begin{cases}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n-b^n} & \text{nếu} \quad a>b,\\ \frac{n+1}{n}a & \text{nếu} \quad a=b.\end{cases}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

2.2.21. Theo qui nạp ta có $a_n=(n-1)^2$. Do vậy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

2.2.22. Theo qui nạp ta có $a_n=\frac{ab}{\sqrt{a^2+nb^2}}$. Do vậy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2.2.23. Ta nhận thấy rằng $a_n=1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ Do vậy $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

2.2.24. Dễ dàng nhận thấy rằng $a_{n+1}=1+b+\ldots+b^{n-1}+b^na$. Do vậy

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{1-b}+\left(a-\frac{1}{1-b}\right)b^n & \text{với} \quad b\neq 1,\\ n+a & \text{với} \quad b=1.\end{cases}$$

Do vậy nếu$b=1$, $a\in\mathbb{R}$, dãy phân kỳ tới $+\infty$. Nếu $b\neq 1$ và $a=\frac{1}{1-b}$, dãy hội tụ tới $\frac{1}{1-b}$. Trong trường hợp $a\neq\frac{1}{1-b}$ và $|b|<1$ thì dãy cũng hội tụ tới $\frac{1}{1-b}$. Trong các trường hợp còn lại dãy là phân kỳ, có nghĩa là nếu $b\leq -1$ và $a\neq\frac{1}{1-b}$, thì dãy không có giới hạn hoặc giới hạn không hữu hạn, nếu $b>1$ và $a>\frac{1}{1-b}$, thì dãy phân kỳ tới $+\infty$. Cuối cùng nếu $b>1$ và $a<\frac{1}{1-b}$, thì dãy phân kỳ tới $-\infty$.

2.2.25. Theo qui nạp dễ dàng thấy công thức của các phần tử của dãy thoả mãn. Ta giả sử rằng $\alpha>\beta$. Thì $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ngoài ra,

$$\alpha\sqrt[n]{1-\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n}\leq\sqrt[n]{\alpha^n-\beta^n}\leq\alpha\sqrt[n]{1+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n}.$$

Từ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^n=0$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\alpha$.

2.2.26. *Đầu tiên chú ý rằng $b_{n+1} = \frac{a_n+3b_n}{4}$, suy ra $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - b_n)$ điều đó có nghĩa là dãy $\{a_n - b_n\}$ là cấp số nhân với công bội là $\frac{1}{4}$, do đó dãy hội tụ tới 0. Vì vậy ta chỉ cần chỉ ra dãy $\{a_n\}$ hội tụ . Giả sử $a \le b$, thì dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng và $a_n \le b_n \le b$.Do đó nó hội tụ, theo trên suy ra dãy $\{b_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Hoàn toàn tương tự cho trường hợp $a > b$.*

2.2.27. *Ta có*

$$
\begin{aligned}
&a + aa + \ldots + \overbrace{aa\ldots a}^{n\text{ - số}} = a(1 + 11 + \ldots + \overbrace{11\ldots 1}^{n\text{ - số}})\\
&= a(10^{n-1} + 2\cdot 10^{n-2} + \ldots + n\cdot 10^0)\\
&= a((1 + 10 + \ldots + 10^{n-1}) + (1 + 10 + \ldots + 10^{n-2})\\
&+ \ldots + (1 + 10) + 1)\\
&= a\left(\frac{10^n - 1}{9} + \frac{10^{n-1} - 1}{9} + \ldots + \frac{10^2 - 1}{9}\frac{10 - 1}{9}\right)\\
&= a\frac{10(10^n - 1) - 9n}{81}.
\end{aligned}
$$

Do đó, giới hạn bằng $\frac{10a}{81}$.

2.2.28. *Chú ý rằng dãy $\{\sqrt[n]{n}\}$ với $n > 2$ đơn điệu giảm, và giới hạn của nó bằng 1. Dễ dàng kiểm tra rằng*

$$\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

Do vậy $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0$

2.2.29. *Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nên bắt đầu từ chỉ số n_0 nào đó, $|a_n|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 0$.*

2.2.30. *Đặt $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = a_l$. Chia cả tử và mẫu cho a_l^n ta được*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + \ldots + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \ldots + p_k a_k^n} = a_l.$$

2.2.31.

(a) *Cho $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $q + \varepsilon < 1$. Thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q + \varepsilon \quad \text{với} \quad n \geq n_0.$$

Do đó

$$|a_n| < (q+\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}|, \quad n \geq n_0.$$

Suy ra, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$*, tức là,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) *Cho $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $q - \varepsilon > 1$ Do đó bắt đầu từ một chỉ số n_1 nào đó $|a_n| > (q-\varepsilon)^{n-n_1}|a_{n_1}|$,, ta lại có $\lim\limits_{n\to\infty}(q-\varepsilon)^{n-n_1} = +\infty$. Do đó, $\lim_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$.*

2.2.32.

(a) *Chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $q + \varepsilon < 1$, thế thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n| < (q+\varepsilon)^n$, $n \geq n_0$, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

(b) *Ta có $|a_n| > (q-\varepsilon)^n$ với $n > n_1$. Nếu $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ thì $q - \varepsilon > 1$ và suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}(q-\varepsilon)^n = +\infty$, do đó $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = +\infty$.*

2.2.33. *Đặt $a_n = n^\alpha x^n$, ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha x = x, \quad 0 < x < 1.$$

Suy ra dãy hội tụ về 0 theo bài 2.2.31.

2.2.34. *Xét phần tử thứ a_n của dãy , ta có*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m-n}{n+1}x\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Theo bài 2.2.31 ta kết luận rằng dãy hội tụ về 0.

2.2.35. *Giả sử $|b_n| < M$ với $n \in \mathbb{N}$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ với $n > n_0$. Từ đó suy ra*

$$|a_n b_n| < \varepsilon \quad \text{với} \quad n > n_0.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

2.2.36. *Không giảm tổng quát ta giả thiết rằng* $a \le b$. *Xét* $a < b$, *chọn* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ sao cho* $a + \varepsilon < b - \varepsilon$, *theo định nghĩa giới hạn của dãy suy ra* $a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b_n$ *với* n *đủ lớn. Do đó* $\max\{a_n, b_n\} = b_n$, *và từ đó suy ra*

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \max\{a, b\}.$$

Nếu $a = b$ *thì với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* n_0 *sao cho với mọi* $n > n_0$ *ta đều có* $|a_n - a| < \varepsilon$ *và* $|b_b - b| < \varepsilon$, *tức là*

$$|\max\{a_n, b_n\} - a| < \varepsilon.$$

Tức là ta đã chứng minh được rằng

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\}.$$

2.2.37. *Vì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *với mọi* $\varepsilon \in (0, 1)$ *nên*

$$\sqrt[p]{1-\varepsilon} < \sqrt[p]{1+a_n} < \sqrt[p]{1+\varepsilon} \quad \text{với } n \text{ đủ lớn.}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{1+a_n} = 1$.

2.2.38. *Đặt* $x_n = \sqrt[p]{1+a_n}$, *từ lời giải bài trên ta được* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. *Từ đó suy ra*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[p]{1+a_n} - 1}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{x_n^p - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 1}{(x_n - 1)(x_n^{p-1} + \ldots + 1)} = \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

2.2.39. *Theo bài 1.2.1 ta có*

$$\begin{aligned} & n\left(\sqrt[p]{1 + \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_p}{n}} - 1\right) \\ (1) \qquad & \le n\left(\sqrt[p]{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{a_2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a_p}{n}\right)} - 1\right) \\ & = \sqrt[p]{(n + a_1)(n + a_2) \cdot \ldots \cdot (n + a_p)} - n.\end{aligned}$$

Hơn nữa theo bài 1.2.4 ta có

$$\leq n\left(\sqrt[p]{\left(1+\frac{a_1}{n}\right)\left(1+\frac{a_2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_p}{n}\right)}-1\right)$$

(2)

$$= n\left(\sqrt[p]{1+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{n}+\frac{\sum\limits_{i<j}a_ia_j}{n^2}+\ldots+\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_p}{n^p}}-1\right)$$

$$\leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}+\frac{\sum\limits_{i<j}a_ia_j}{np}+\ldots+\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_p}{pn^{p-1}}.$$

Từ (1) và (2) cùng với kết quả bài tập trên ta suy ra giới hạn cần tìm là $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p}$.

2.2.40. Chú ý rằng

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leq \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Sử dụng nguyên lý kẹp ta suy ra giới hạn cần tìm là 1.

2.2.41. Ký hiệu a *là giá trị lớn nhất của các số* $a_1, a_2, \ldots, a_p$*, thế thì*

$$\frac{a}{\sqrt[n]{p}} \leq \sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_p^n}{p}} \leq a.$$

Sử dụng nguyên lý kẹp ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_p^n}{p}} = a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}.$$

2.2.42. Vì

$$1 \leq \sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1999}}{n+1}+\cos^2\frac{n^{1999}}{n+1}} \leq \sqrt[n]{2}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2\frac{n^{1999}}{n+1}+\cos^2\frac{n^{1999}}{n+1}} = 1.$$

2.2.43. Sử dụng nguyên lý kẹp đối với các dãy được

$$1 < (1+n(1+\cos n))^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}}.$$

Ta cần chỉ ra rằng

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}(1+2n)^{\frac{1}{2n+n\sin n}} = 1.$$

điều này được suy ra từ các bất đẳng thức kẹp

$$1 < (1+n(1+\cos n))^{\frac{1}{2n+n\sin n}} < (1+2n)^{\frac{1}{n}}.$$

Do đó giới hạn cần tìm là 1.

2.2.44. Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng, nhân và điều hoà (xem 1.2.3) với $x > -1$ ta được

$$1+\frac{x}{2+x} = \frac{2}{\frac{1}{1+x}+1} \le \sqrt{(1+x)1} = \sqrt{1+x} \le \frac{1+x+1}{2} = 1+\frac{x}{2}.$$

Đặt $x = \frac{k}{n^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ và thay vào bất đẳng thức rồi cộng vế với vế của các bất đẳng thức được

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} \le \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}.$$

Hơn nữa

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{4n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

và

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2+k} \ge \frac{1}{2n^2+n}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Từ đó cùng với (∗) và nguyên lý kẹp suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) = \frac{1}{4}.$$

2.2.45. Chúng ta lí luận tương tự như lời giải trong bài trước. Lấy $x > -1$. *Theo bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng, nhân và điều hoà ta có*

$$1 + \frac{x}{3+2x} = \frac{3}{\frac{1}{1+x} + 1 + 1} \leq \sqrt[3]{(1+x)1.1} \leq \frac{1+x+1+1}{3} = 1 + \frac{x}{3}.$$

Với $x = \frac{k^2}{n^3}$, *ta có*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^3}}{3 + 2\frac{k^2}{n^3}} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3}.$$

Hơn nữa

$$\sum_{k-1}^{n} \frac{k^2}{3n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18n^3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9}.$$

Và

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k^2}{n^3}}{3 + 2\frac{k^2}{n^3}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3n^3 + 2k^2} \geq \frac{1}{3n^3 + 2k^2} \sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= \frac{a(n+1)(2n+1)}{6(3n^3 + 2^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9}.$$

nên từ kết quả trên cùng với (∗) và định lí giới hạn của các dãy bị kẹp, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right) = \frac{1}{9}.$$

2.2.46. Rõ ràng, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_k} = 1$ *với* $k = 1, 2. ..., p$. *Vì vậy, ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sqrt[n]{a_k} \right)^p = 1.$$

2.2.47. Với n_0 *đủ lớn và với* $n > n_0$, *ta có* $0 < \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + \frac{1}{n_0} < 1$. *Vì vậy*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha + \frac{1}{n} \right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n}{1 - \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2.2.48. Bất đẳng thức hiển nhiên đúng với $x = 1$. *Giả sử* $x > 1$. *Để tính giới hạn, chúng ta áp dụng qui tắc kẹp các dãy.*

Chúng ta có

$$0 < (\sqrt[n]{x} - 1)^2 = \sqrt[n]{x^2} - 2\sqrt[n]{x} + 1.$$

Vì vậy

$$(*) \qquad (2\sqrt[n]{x} - 1)^n < (\sqrt[n]{x^2})^n = x^2.$$

Hơn nữa

$$(2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}}\right)^n = x^2\left(1 + \left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1\right)\right)^n.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$(**) \qquad \begin{aligned}(2\sqrt[n]{x} - 1)^n &\geq x^2\left(1 + n\left(\frac{2}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{x^2}} - 1\right)\right)\\ &= x^2\left(1 - n\frac{(\sqrt[n]{x} - 1)^2}{\sqrt[n]{x^2}}\right).\end{aligned}$$

Cũng sử dụng bất đẳng thức Berrnoulli, ta có

$$x = (\sqrt[n]{x} - 1 + 1)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{x} - 1) > n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

Hệ quả là

$$(\sqrt[n]{x} - 1)^2 < \frac{x^2}{n^2}.$$

Vì vậy, theo (**) ta có

$$(***) \qquad (2\sqrt[n]{x} - 1)^n > x^2\left(1 - \frac{x^2}{n\sqrt[n]{x^2}}\right).$$

Kết hợp (*) và (* *) với qui tắc kẹp các dãy, ta thấy*

$$\lim_{n\to\infty}(2\sqrt[n]{x} - 1)^n = x^2.$$

2.2.49. Tương tự như lời giải của các bài trước , chúng ta có thể thiết lập các bất đẳng thức sau

$$1 \geq \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2} \geq 1 - n\frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^2}{\sqrt[n]{n^2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{(\sqrt[n]{n} - 1)^2}{\sqrt[n]{n^2}} = 0.$$

Để kết thúc, chú ý rằng với $n \geq 3$,

$$n = (\sqrt[n]{n} - 1 + 1)^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\sqrt[n]{n} - 1)^3.$$

Vì vậy

$$0 \leq n(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq n\left(\frac{3!}{(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)^2 = 0.$$

2.2.50.

(a) Ta có

$$\begin{aligned}|a_{n+k} - a_n| &= \frac{\arctan(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\arctan(n+k)}{2^{n+k}} \\ &< \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}}\right) < \frac{\pi}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ lấy $n_0 = [\log_2 \frac{\pi}{\varepsilon} - 1]$. Khi đó với bất kỳ $k \in \mathbb{N}$ và $n > n_0$ ta có $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$. Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy.

(b) Có thể chỉ ra bằng qui nạp rằng $4^n > n^4$ với mọi $n \geq 5$. Vì vậy

$$|a_{n+k} - a_n| < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^2}.$$

Hệ quả là,

$$\begin{aligned}&|a_{n+k} - a_n| \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

với bất kỳ $k \in \mathbb{N}$ và $n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

(c) Ta có

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Điều này chứng tỏ a_n không là dãy Cauchy.

(d) Ta có

$$\begin{aligned}
&|a_{n+k} - a_n| \\
&= \left| \frac{(-1)^{n+k-1}}{(n+k)(n+k+1)} + \frac{(-1)^{n-k-2}}{(n+k-1)(n+k)} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \right| \\
&\le \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+k+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

với bất kỳ $k \in \mathbb{N}$ *và* $n > [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$.

(e) Ta có

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &\le M(|q|^{n+k} + |q|^{n+k-1} + \cdots + |q|^{n+1}) \\
&= M\left(\frac{|q|^{n+1}(1 - |q|^k)}{1 - |q|}\right) \le \frac{M}{1 - |q|}|q|^{n+1} < \varepsilon
\end{aligned}$$

với bất kỳ $k \in \mathbb{N}$ *và* $n > n_0 = \left[\frac{\ln \frac{(1-|q|)\varepsilon}{M}}{\ln |q|} - 1\right]$.

(f) Ta có

$$\begin{aligned}
a_{2n} - a_n &= \frac{2n}{(2n+1)^2} + \frac{2n-1}{(2n)^2} + \cdots + \frac{n+1}{(n+2)^2} \\
&\ge n\frac{2n}{(2n+1)^2} \ge \frac{2n^2}{(3n)^2} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

Do đó $\{a_n\}$ *không là dãy Cauchy.*

2.2.51. Từ điều kiện đã cho ta có

$$\begin{aligned}
&|a_{n+k} - a_n| = |a_{n+k} - a_{n+k-1} + a_{n+k-1} - a_{n+k-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\
&< \lambda(|a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + |a_{n-k-2} - a_{n+k-3}| + \cdots + |a_n - a_{n-1}|) \\
&< (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda)|a_n - a_{n-1}| \\
&\le (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda)\lambda^{n-2}|a_2 - a_1| \\
&= \frac{\lambda^{n-1}(1 - \lambda^k)}{1 - \lambda}|a_2 - a_1| < \frac{\lambda^{n-1}}{1 - \lambda}|a_2 - a_1|
\end{aligned}$$

Do đó, với bất kỳ $\varepsilon > 0$ cho trước, với $n > \left[1 + \frac{\ln(\frac{\varepsilon(1-\lambda)}{|a_2-a_1|})}{\ln\lambda}\right]$ và với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$.

2.2.52. *Vì $\{S_n\}$ hội tụ nên nó là dãy Cauchy. Chúng ta sẽ chứng minh $\{\ln\sigma_n\}$ cũng là dãy Cauchy. Từ bất đẳng thức trong 2.1.4,1 ta có*

$$\begin{aligned}&\ln\sigma_{n+k} - \ln\sigma_n = \ln\left(1 + \frac{1}{a_{n+k}}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&< \frac{1}{a_{n+k}} + \cdots + \frac{1}{a_{n+1}} < \varepsilon\end{aligned}$$

với $k \in \mathbb{N}$ và n đủ lớn.

2.2.53. *Từ kết quả trong 1.1.23, ta có*

$$\begin{aligned}&R_{n+k} - R_n\\&= (R_{n+k} - R_{n+k-1}) + (R_{n+k-1} - R_{n+k-2}) + \cdots + (R_{n+1} - R_n)\\&= (-1)^n\left(\frac{(-1)^{k-1}}{q_{n+k-1}q_{n+k}} + \frac{(-1)^{k-2}}{q_{n+k-2}q_{n+k-1}} + \cdots - \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}} + \frac{1}{q_nq_{n+1}}\right).\end{aligned}$$

Do đó, vì dãy $\{q_n\}$ đơn điệu nên $q_n \geq n$ (xem lời giải của bài 1.1.24), ta có

$$|R_{n+k} - R_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

2.2.54. *Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho . Trước hết chúng ta giả sử $d \neq 0$. Khi đó*

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\frac{1}{d}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = \frac{1}{a_1d}.$$

Với $d = 0$, cấp số cộng là một dãy hằng, vì vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = +\infty.$$

2.2.55. *Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho . Trước hết chúng ta giả sử $d \neq 0$. Vì*

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d},$$

ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Với $d=0$, cấp số cộng là một dãy hằng, vì vậy giới hạn bằng $+\infty$.

2.2.56.

(a) Theo bài 2.1.38, ta có

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Vì vậy

$$(*) \qquad 1 < n(\sqrt[n]{e}-1) < n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

Sử dụng bất đẳng thức Berrnoulli (xem 1.2.4) chúng ta có thể chứng minh

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1+\frac{1}{n^2.}$$

Do đó

$$n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}-1\right) \le 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}.$$

Vì vậy, từ (*) và qui tắc kẹp các dãy, ta có

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)=1.$$

(b) Với n bất kỳ cho trước , ta có

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}=\frac{(e-1)e^{\frac{1}{n}}}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

Do đó, áp dụng câu (a) , ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}=e-1.$$

2.2.57. Ta có $a_{n+1} - a_n = -p(a_n - a_{n-1})$. Vì vậy

$$\begin{aligned} a_n &= a + (b-a) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ & a + (b-a)(1 - p + p^2 + \cdots + (-1)^n p^{n-2}). \end{aligned}$$

Nếu $b = a$ thì $\{a_n\}$ là dãy hằng hội tụ đến a. Nếu $a \neq b$ thì dãy hội tụ với điều kiện $|p| < 1$, và giới hạn của nó là $a + \frac{b-a}{1+p}$.

2.2.58. Ta thấy

$$c_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}.$$

Vì vậy

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{\sqrt{2} - 1}{c_n + 1}|c_n - \sqrt{2}| < (\sqrt{2} - 1)|c_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|c_n - \sqrt{2}|.$$

Từ đó, qui nạp ta có

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^n}|c_1 - \sqrt{2}|,$$

Điều này suy ra giới hạn của $\{c_n\}$ là $\sqrt{2}$.

2.3 Định lý Toeplitz, định lí Stolz và ứng dụng

2.3.1. Nếu tất cả các số hạng của dãy $\{a_n\}$ bằng a thì từ (ii) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k} = a$. Vì vậy, chỉ cần xét trường hợp dãy hội tụ đến 0. Khi đó, với bất kỳ $m > 1$ và $n \geq m$ ta có

$$(*) \qquad |b_n - 0| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{n,k} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |c_{n,k}|.|a_k| + \sum_{k=m}^{n} |c_{n,k}|.|a_k|.$$

Từ sự hội tụ dến 0 của $\{a_n\}$ dẫn đến với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại n_1 thoả mãn

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ với } n \geq n_1.$$

Dĩ nhiên dãy $\{a_n\}$ bị chặn bởi $D > 0$ nào đó. Từ (i) chúng ta suy ra tồn tại n_2 sao cho với $n \geq n_2$,

$$\sum_{k=1}^{n_1 - 1} |c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2D}.$$

Tiếp theo, lấy $m = n_1$ *trong (*) ta có*

$$|b_n| \le D\sum_{k=1}^{n_1-1}|c_{n,k}| + \frac{\varepsilon}{2C}\sum_{k=n_1}^{n}|c_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

với mọi $n \ge \max\{n_1, n_2\}$. *Vì vậy* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

2.3.2. *Sử dụng định lí Toeplitz với* $c_{n,k} = \frac{1}{n}, k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3.3.

(a) Nếu $c_{n,k}$ *không âm thì (iii) được suy ra từ (ii).*

(b) Từ điều kiện (ii) trong bài 2.3.1 ta suy ra $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k} > \frac{1}{2}$ *với* n *đủ lớn,* $n > n_0$. *Từ sự phân kỳ của* $\{a_n\}$ *đến* $+\infty$ *suy ra với* $M > 0$ *cho trước, tồn tại* n_1 *sao cho* $a_n \ge 2M$ *với mọi* $n > n_1$.

Không mất tính tổng quát chúng ta có thể giả sử tất cả số hạng a_n *đều dương. Đặt* $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. *Khi đó*

$$\sum_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k}a_k + \sum_{k=n_2+1}^{n} c_{n,k}a_k \ge \sum_{k=1}^{n_2} c_{n,k}a_k + M \ge M,$$

và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

2.3.4. *Đây là trường hợp đặc biệt của 2.3.3 với* $c_{n,k} = \frac{1}{n}; k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3.5. *Sử dụng định lí Toeplitz (2.3.1) với* $c_{n,k} = \frac{2(n-k+1)}{n^2}$.

2.3.6. *Sử dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng, nhân và điều hoà (xem 1.2.3), định lí các dãy bị kẹp và kết quả trong 2.3.2.*

2.3.7. *áp dụng bài trước cho dãy* $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$.

2.3.8. *Nếu* $b \ne 0$ *thì chúng ta lấy* $c_{n,k} = \frac{b_{n-k+1}}{nb}$, *ta thấy* $c_{n,k}$ *thoả mãn điều kiện (i) trong 2.3.1. Từ 2.3.2 ta suy ra điều kiện (ii) cũng thoã mãn.Trong trường hợp này kết quả được suy ra từ định lí Toeplitz. Nếu* $b = 0$ *thì đặt* $c_{n,k} = \frac{1+b_{n-k+1}}{n}$ *thì ta thu được*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1+b_n) + a_2(1+b_{n-1}) + \cdots + a_n(1+b_1)}{n} = a.$$

Do đó, theo 2.3.2 ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = 0.$$

2.3.9. *Sử dụng định lí Toeplitz cho dãy* $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ *với* $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1+\cdots+b_n}$.

2.3.10. *Sử dụng định lí Toeplitz với* $c_{n,k} = \frac{b_k}{b_1+\cdots+b_n}$.

2.3.11. *Với* $n > 1$, *chúng ta đặt*

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \quad b_n = y_n - y_{n-1}$$

và áp dụng kết quả trong bài trước.

2.3.12.

(a) Trong 2.3.10 chúng ta đặt $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $y_n = \sqrt{n}$ *và chứng minh giới hạn bằng* 2.

(b) Đặt

$$x_n = a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}, \quad y_n = \frac{a^{n+1}}{n}.$$

Bắt đầu từ một giá trị nào đó của chỉ số n *dãy* $\{y_n\}$ *tăng thực sự. Từ 2.2.31 (b) ta thấy* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^{n+1}}\left(a + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^n}{n}\right) = \frac{1}{a-1}.$$

(c) Chúng ta có thể áp dụng định lí Stolz (xem 2.3.11) cho các dãy

$$x_n = k! + \frac{(k+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(k+n)!}{n!}, \quad y_n = n^{k-1}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{k}{n})}{n(1-(1-\frac{1}{n})^{k+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{k}{n})}{1+(1-\frac{1}{n})+\cdots+(1-\frac{1}{n})^k} \\
&= \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

(d) Đặt $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$, $y_n = \sqrt{n}$. *Khi đó*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{n}{2n-1}} - \sqrt{\frac{n}{n-1}} + \sqrt{\frac{n-1}{2n}} + \sqrt{\frac{n-1}{2n-1}} - 1 \right)\\
&= 2(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}$$

Từ đó , áp dụng định lí Stolz ta có giới hạn là $2(\sqrt{2} - 1)$.

(e) Đặt $x_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ *và* $y_n = n^{k+1}$, *ta thấy*

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k+1}.$$

Từ đây, ta có các điều kiện cần để áp dụng định lí Stolz.

(f) Sử dụng định lí Stolz, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1\cdot a + 2\cdot a^2 + \ldots + n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}} = \frac{1}{a-1}.$$

(g) Sử dụng định lí Stolz cho các dãy

$$x_n = (k+1)(1^k + 2^k + \ldots n^k) - n^{k+1} \quad \text{và} \quad y_n = (k+1)n^k.$$

Khi đó

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(k+1)n^k - n^{k+1} + (n-1)^{k+1}}{(k+1)[n^k - (n-1)^k]} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

2.3.13. Sử dụng định lí Stolz trong trường hợp

$$x_n = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \quad \text{và} \quad y_n = \sqrt{n}.$$

Ta thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right) = 2a.$$

2.3.14. Trong định lí Stolz chúng ta đặt $x_n = a_{n+1}$ và $y_n = n$.

2.3.15. Sử dụng phép biến đổi Toeplitz đối với trường hợp $\{a_n\}$ với $c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k+1}}$, ta thấy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2}\cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}}\right) = 2a.$$

2.3.16.

(a) Sử dụng phép biến đổi Toeplitz cho $\{a_n\}$ với

$$c_{n,k} = \frac{1}{(n+1-k)(n+2-k)},$$

ta có thể chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1.2} + \frac{a_{n-1}}{2.3}\cdots + \frac{a_1}{n(n+1)}\right) = a.$$

(b) Tương tự như câu (a), chúng ta áp dụng phép biến đổi Toeplitz cho $\{a_n\}$ với $c_{n,k} = \frac{3}{2}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}}$ và chứng minh rằng giới hạn là $\frac{2}{3}a$.

2.3.17. Đặt $a_n = \binom{nk}{n}$. Để áp dụng kết quả của bài 2.3.7 , chúng ta cần tính $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ta có

$$\frac{\binom{(n+1)k}{n-1}}{\binom{nk}{n}} = \frac{(nk+1)(nk+2)...(nk+k)}{(n+1)(nk-n+1)(nk-n+2)...(nk-n+k-1)}.$$

Do đó, giới hạn bằng $\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}$.

2.3.18. Lấy a_n là cấp số cộng với công sai $d > 0$. Đặt

$$c_n = \frac{n^n(a_1...a_n)}{(a_1+\cdots+a_n)^n}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(n+1)a_{n+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}\left(\frac{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}}{\frac{a_1+\ldots a_{n+1}}{n+1}}\right)^n\\ &= \frac{2a_{n+1}}{a_1+a_{n+1}}\left(\frac{2a_1+(n-1)d}{2a_1+nd}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2e^{-1}.\end{aligned}$$

Sử dụng bài 2.3.7, suy ra giới hạn bằng $2e^{-1}$. Nếu $d = 0$ thì giới hạn là 1.

2.3.19. *Từ* $b_n = 2a_n + a_{n-1}$, $a_n = \frac{b_n - a_{n-1}}{2}$ *và* $a_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-2}}{2}$, *ta có* $a_n = \frac{2b_n - b_{n-1} + a_{n-2}}{2^2}$. *Thực hiện quá trình này* $n-1$ *lần chúng ta thu được*

$$a_n = \frac{2^{n-1}b_n - 2^{n-2}b_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2}2^1 b_2 + (-1)^{n-1}a_1}{2^n}.$$

Khi đó, theo 3.3.16 (b) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}b$.

2.3.20. *Đặt* $c_n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{nx}$. *Khi đó*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = (1 + \frac{1}{n})^{nx}(n+1)^x a_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^x a.$$

Vì vậy, theo 2.3.7, $\lim\limits_{n\to\infty} n^x (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} = e^x a$.

2.3.21.

(a) Chúng ta áp dụng định lí Stolz cho dãy $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ *và* $y_n = \ln n$. *Điều này dẫn đến*

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Bởi vì $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^n = 1$, *điều này dẫn đến bất đẳng thức* $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ *(xem 2.1.41).*

(b) Giới hạn là $\frac{1}{2}$ *(xem lời giải câu a).*

2.3.22. Chúng ta áp dụng định lí Stolz cho

$$x_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \quad \text{và} \quad y_n = \ln n.$$

Hệ quả là

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{a_n}{\ln(1 + \frac{1}{n-1})^n} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

2.3.23. Sử dụng kết quả trong bài 2.3.7.

(a) 1,

(b) e^{-2},

(c) e^{-2},

(d) e^3,

(e) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = \begin{cases} e & \text{với} \quad k = 1 \\ 0 & \text{với} \quad k > 1. \end{cases}$$

2.3.24. Sử dụng định lí Stolz (xem 2.3.11),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{\ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = a.$$

2.3.25. *Dễ dàng chỉ ra rằng*

$$a_1 = A_1, \quad a_2 = 2A_2 - A_1, \quad a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Vì thế

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{3}A_2 + \ldots + \frac{1}{n}A_{n-1} + A_n}{\ln n} = A,$$

ở đây đẳng thức cuối cùng được suy từ bài trước.

2.3.26. *[O. Toeplitz, Prace Matematyczno-Fizyczne, 22(1991), 113-119] Lấy $\{a_n\}$ là dãy có các só hạng của nó đều bằng 1. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ và $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}$. Do đó $1 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_{n,k}$. Vậy (ii) được chứng minh. Lấy $\{a_n^{(k)}\}$ là dãy mà số hạng thứ k bằng 1 và các số hạng còn lại bằng 0. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} = 0$ và $0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_{n,k}$. Vậy (i) cũng được chứng minh. Giả sử (iii) không đúng, lúc đó với bất kỳ $C > 0$ tồn tại n_C sao cho $\sum\limits_{k=1}^{n_C} |c_{n_c,k}| \geq C$. Thực tế, với $C > 0$ cho trước tồn tại vô số n_c. Lấy n_1 là số dương nhỏ nhất thoã mãn $\sum\limits_{k=1}^{n_1} |c_{n_1,k}| > 10^2$. Chúng ta đặt n_1 số hạng đầu tiên của dãy $\{a_n\}$ như sau*

$$\operatorname{sgn} c_{n_1,k} = \operatorname{sgn} a_k \quad \text{và} \quad |a_k| = \frac{1}{10}.$$

Khi đó

$$b_{n_1} = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_1,k}a_k = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{10}|c_{n_1,k}| > 10.$$

Theo (i) tồn tại n_0 thoã mãn

$$\sum_{k=1}^{n} |c_{n_1,k}| < 1 \quad \text{với} \quad n \geq n_0.$$

Hệ quả là

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1} c_{n_1,k}a_k\right| < \frac{1}{10} \quad \text{với} \quad n \geq n_0.$$

Lấy số nguyên nhỏ nhất n_2 *thoã mãn* $n_2 \geq \max\{n_0, n_1\}$ *và* $\sum\limits_{k=1}^{n_2} |c_{n_2,k}| > 10^4 + 1 + 10$, *các số hạng tiếp theo của dãy* $\{a_n\}$ *được xác định bằng cách đặt*

$$\operatorname{sgn} c_{n_2,k} = \operatorname{sgn} a_k \quad \text{và} \quad |a_k| = \frac{1}{10^2} \quad \text{với} \quad n_1 + 1 \leq k \leq n_2.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} b_{n_2} &= \sum_{k=1}^{n_2} c_{n_2,k} a_k = \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_2,k} a_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} c_{n_2,k} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n_1} c_{n_2,k} a_k + \frac{1}{10^2} \sum_{k=n_1+1}^{n_2} |c_{n_2,k}|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$b_{n_2} > -\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}(10^4 + 1 + 10 - 1) = 10^2.$$

Chúng ta xây dựng qui nạp dãy $\{a_n\}$ *với các số hạng có chỉ số từ* $n_{k-1} + 1$ *tới* n_k *bằng* $\frac{1}{10^k}$ *hoặc* $\frac{1}{-10^k}$, *dãy biến đổi* b_n *thoã mãn*

$$b_{n_k} > 10^k \quad \text{với} \quad k = 1, 2, 3...$$

Khi đó, dãy a_n *hội tụ đến* 0 *trong khi dãy biến đổi* b_n *có một dãy con* b_{n_k} *phân kỳ. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy (iii) đúng.*

2.4 Điểm giới hạn. Giới hạn trên và giới hạn dưới

2.4.1.

(a) *Trước hết, chúng ta sẽ chứng minh các dãy con có cùng giá trị giới hạn. Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k+1} = b$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3k} = c$, *Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{6k} = a = c$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{6k+3} = b = c$. *Từ đó suy ra* $a = b = c$. *Với* $\varepsilon > 0$ *cho trước tồn tại các số nguyên dương* k_1 *và* k_2 *sao cho*

$$\begin{aligned} |a_{2k} - a| &< \varepsilon, \quad \text{với mọi} \quad k > k_1, \\ |a_{2k-1} - a| &< \varepsilon, \quad \text{với mọi} \quad k > k_2. \end{aligned}$$

Vì vậy $|a_n - a| < \varepsilon$ *với mọi* $n > n_0 = \max\{2k_1, 2k_2 + 1\}$.

(b) Không. Lấy $\{a_n\}$ là dãy được xác định bởi $a_n = (-1)^n$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k+1} = -1$. Nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ không tồn tại.

Bây giờ , lấy $\{a_n\}$ là dãy được xác định như sau

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2^k, k = 0, 1, 2, \ldots \\ 1 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó, $\lim_{k\to\infty} a_{3k} = 1$ và $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 1$, nhưng $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0$ không tồn tại. Hiển nhiên, dãy $\{a_n\}$ phân kỳ.

Cuối cùng, xét dãy sau:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \quad n \quad \text{là số nguyên tố,} \\ 1 & \text{nếu } \quad n \quad \text{là số hợp tố.} \end{cases}$$

Với dãy này chúng ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3k} = 1$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = 1$, nhưng $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k+1}$ không tồn tại, bởi vì dãy $\{a_{2k+1}\}$ chứa một dãy con gồm các số có chỉ số nguyên tố và một dãy con gồm các số có chỉ số là hợp số. (Chú ý rằng có vô số nguyên tố. Ngược lại, nếu $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là các số nguyên tố, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ và không tồn tại một số nguyên tố nào lớn hơn p_n thì $p_1.p_2...p_n + 1 > p_n$ cũng là số nguyên tố, bởi vì nó không có ước số nguyên tố nào ngoài nó và 1. Vậy, điều này mâu thuẫn với giả thiết.)

2.4.2. Không. Gọi $\{a_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \quad n \quad \text{là nguyên tố,} \\ 1 & \text{nếu } \quad n \quad \text{là hợp số.} \end{cases}$$

Khi đó, mọi dãy con $\{a_{s.n}\}$, $s > 1, n \geq 2$, là dãy hằng, do đó nó hội tụ. Dãy $\{a_n\}$ phân kỳ (xem lời giải của bài 2.4.1 (b)).

2.4.3. Rõ ràng, $\mathbf{S}_p \cup \mathbf{S}_q \cup \ldots \cup \mathbf{S}_s \subset \mathbf{S}$. Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, ta giả sử $x \notin \mathbf{S}_p \cup \mathbf{S}_q \cup \ldots \cup \mathbf{S}_s$. Khi đó, tồn tại các số dương $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \ldots, \varepsilon_s$ và các số nguyên dương $n_p, n_q, \ldots, n_s$ sao cho

$$\begin{aligned} &|x - a_{p_n}| > \varepsilon_p, \quad \text{với mọi} \quad n > n_p, \\ &|x - a_{q_n}| > \varepsilon_q, \quad \text{với mọi} \quad n > n_q, \\ &\ldots \\ &|x - a_{s_n}| > \varepsilon_s, \quad \text{với mọi} \quad n > n_s. \end{aligned}$$

Đặt $\varepsilon = \min\{\varepsilon_p, \varepsilon_q, ..., \varepsilon_s\}$ *và* $m = \max\{p_{n_p}, q_{n_q}, ..., s_{n_s}\}$, *ta thấy* $|x - a_n|$ *với* $n > m$, *điều này dẫn đến* x *không là điểm tụ của dãy* $\{a_n\}$. *Vậy*

$$\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_p \cup \mathbf{S}_q \cup ... \cup \mathbf{S}_s.$$

Nếu mọi dãy con $\{a_{p_n}\}, \{a_{q_n}\}, ..., \{a_{s_n}\}$ *hội tụ đến* a *thì từ* $\mathbf{S} = \mathbf{S}_p \cup \mathbf{S}_q \cup ... \cup \mathbf{S}_s$ *ta suy ra* $\{a_n\}$ *hội tụ đến* a.

2.4.4. Không. Lấy $\{a_n\}$ *là dãy được xác định bởi công thức*

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 2^k, k = 0, 1, 2..., \\ 1 & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Mọi dãy con

$$\{a_{2k-1}\}, \{a_{2(2k-1)}\}, \{a_{2^2(2k-1)}\}, ..., \{a_{2^m(2k-1)}\}, ...$$

hội tụ đến 1, *trong khi dãy* $\{a_n\}$ *phân kỳ.*

2.4.5. Giả sử dãy $\{a_n\}$ *không hội tụ đến* a. *Khi đó, tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho với mọi số nguyên dương* k *tồn tại* $n_k > k$ *thoả mãn* $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$. *Nếu chúng ta giả sử* n_k *là số nhỏ nhất của những số trên thì dãy* $\{n_k\}$ *đơn điệu tăng. Hơn nữa,* $\lim\limits_{n\to\infty} n_k = +\infty$. *Ta thấy dãy* $\{a_{n_k}\}$ *không chứa dãy con hội tụ đến* a. *điều này mâu thuẫn với giả thiết của chúng ta. Vì vậy* $\{a_n\}$ *hội tụ đến* a.

2.4.6.

(a) Rõ ràng 1 *là điểm tụ duy nhất của dãy. Vì vậy* $\mathbf{S}$ *chỉ gồm một điểm,* $S = \{1\}$.

(b) Ta có $a_{3k} = 0, a_{3k+1} = 1, a_{3k+2} = 0$. *Vì vậy, theo bài 2.4.3, tập* $\mathbf{S}$ *các điểm tụ của các dãy này có hai phần tử,* $\mathbf{S} = \{0, 1\}$.

(c) Ta có

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k} + 3} \quad \text{và} \quad a_{2k+1} = \frac{2^{2k+2} + 1}{2^{2k+1} + 3}.$$

Vì vậy $\mathbf{S} = \{0, 2\}$.

(d) Ta có

$$a_{2k} = \frac{2\ln(6k) + \ln(2k)}{\ln(4k)} \quad \text{và} \quad a_{2k+1} = \frac{\ln(2k+1)}{\ln(2(2k+1))}.$$

Vì vậy $\mathbf{S} = \{1, 3\}$.

(e)

$$a_{6k} = 1, \qquad a_{6k-1} = (0,5)^{6k+1}, \qquad a_{6k+2} = (-0,5)^{6k+2},$$
$$a_{6k+3} = -1, \quad a_{6k-4} = (-0,5)^{6k+4}, \quad a_{6k+5} = (0,5)^{6k+5}.$$

Vì vậy $\mathbf{S} = \{-1, 0, 1\}$.

(f)

$$a_{7k} = 0, \qquad a_{7k+1} = \frac{2}{7}, \quad a_{7k+2} = \frac{1}{7}, \quad a_{7k+3} = \frac{4}{7},$$
$$a_{7k+4} = \frac{4}{7}, \quad a_{7k+5} = \frac{1}{7}, \quad a_{7k+6} = \frac{2}{7}.$$

Vì vậy $\mathbf{S} = \{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$.

2.4.7.

(a) Lấy $\alpha = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, *ở đây* p, q *nguyên tố cùng nhau. Khi đó*

$$a_{kq} = 0 \quad \text{và} \quad a_{kq+l} = kq + \frac{lp}{q} - \left[kp + \left[\frac{lp}{q}\right] + r\right] = \frac{lp}{q} - \left[\frac{lp}{q}\right],$$

ở đây $l = 1, 2, .., q-1$ *và* $r = \frac{lp}{q} - \left[\frac{lp}{q}\right]$. *Do đó*

$$S = \left\{0, \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right], \frac{2p}{q} - \left[\frac{2p}{q}\right], \ldots, \frac{(q-1)p}{q} - \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right\}.$$

(b) Chúng ta sẽ chứng minh mọi giá trị thực $x \in [0, 1]$ *là điểm tụ của dãy* $\{n\alpha - [n\alpha]\}$. *Theo bài 1.1.20, tồn tại* $p_n \in \mathbb{Z}$ *và* $q_n \in \mathbb{N}$ *sao cho* $0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^2}$. *Từ* $\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$ *suy ra* $\lim_{n\to\infty}(\alpha q_n - p_n) = 0$. *Lấy* $x \in (0, 1)$ *và lấy* $\varepsilon > 0$ *là số nhỏ nhất thoã mãn* $0 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 1$. *Giả sử* n_1 *là số lớn nhất thoã mãn*

$$0 < \alpha q_{n_1} - p_{n_1} < \frac{1}{q_{n_1}} < \varepsilon.$$

Khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ *thoã mãn*

$$(*) \qquad n_o(\alpha q_{n_1} - p_{n_1}) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

(xem lời giải của bài 1.1.21). Từ (1) suy ra $[n_0\alpha q_{n_1} - n_0 p_{n_1}] = 0$, *hay tương đương với* $n_0 p_{n_1} = [n_0 \alpha q_{n_1}]$. *Như vậy* $n_0\alpha q_{n_1} - [n_0\alpha q_{n_1}]$ *là một số hạng của dãy đã cho thuộc khoảng* $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, *điều này có nghĩa* x *là một điểm tụ của dãy đã cho.*

(c) Trước hết , chúng ta giả sử α là một số hữu tỷ trong khoảng $(0, 1)$. Lấy $\alpha = \frac{p}{q}$, ở đây p, q nguyên tố cùng nhau và $p < q$. Khi đó $a_{2kq} = a_{2kq+q} = 0$, và

$$a_{2kq-l} = \sin\frac{lp\pi}{q} \quad \text{với} \quad l = 1, 2, ..., q-1, q+1, ..., 2q-1.$$

Do đó

$$S = \left\{0, \sin\frac{p\pi}{q}, \sin\frac{2p\pi}{q}, ..., \sin\frac{(q-1)p\pi}{q}\right\}.$$

Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}$ thì dãy là một dãy hằng. Khi $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, ta có thể viết

$$\alpha = [\alpha] + (\alpha - [\alpha]) \quad \text{và} \quad \alpha - [\alpha] \in (0, 1).$$

Vì vậy, $\sin n\pi\alpha = (-1)^{[\alpha]}\sin(\alpha - [\alpha])n\pi$, và trường hợp có thể rút ra từ trường hợp nói trên.

(d) Lấy $t \in [1, -1]$ là số cho trước bất kỳ. Khi đó, tồn tại $x \in \mathbb{R}_-$ sao cho $\sin x = -t$. Chúng ta chỉ cần xét trường hợp $\alpha > 0$, bởi vì $\sin c$ là hàm lẻ. Vì α là số vô tỷ nên tồn tại các dãy các số nguyên dương $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ sao cho

$$\frac{x}{2\pi} = \lim_{n\to\infty}(p_n - q_n\frac{\alpha}{2}).$$

(Xem lời giải của bài 1.1.21). Vì vậy $x = \lim_{n\to\infty}(2\pi p_n - \alpha\pi q_n)$. Do đó, từ tính liên tục và tuần hoàn của hàm $\sin c$, ta có

$$-t = \sin x = \lim_{n\to\infty}\sin(2\pi p_n - \alpha\pi q_n) = -\lim_{n\to\infty}\sin\alpha\pi q_n.$$

Từ đó suy ra mọi số thực trong đoạn $[-1, 1]$ đều là điểm tụ của dãy.

2.4.8. Chúng ta sẽ chứng minh rằng trong bất kỳ khoảng (a, b) đều tồn tại ít nhất một số hạng của dãy. Từ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = 0$ suy ra tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} < b - a, \quad n > n_0.$$

Lấy m_0 là số nguyên dương thoã mãn $\sqrt[3]{m_0} > \sqrt[3]{n_0} - a$ và lấy $\mathbf{A} = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m_0} \le a\}$. Tập hợp $\mathbf{A}$ không trống (chẳng hạn $n_0 \in \mathbf{A}$) và bị chặn trên. Đặt $n_1 = \max\mathbf{A}$ và $n_2 = n_1 + 1$, ta có $\sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{m_0} > a$ và $\sqrt[3]{n_2} > a + \sqrt[3]{m_0} > \sqrt[3]{n_0}$. Vì vậy $n_2 > n_0$. Do đó $\sqrt[3]{n_2} < \sqrt[3]{n_1} + b - a \le \sqrt[3]{m_0} + a + b - a$, hay tương đương với $a < \sqrt[3]{n_2} - \sqrt[3]{m_0} < b$.

2.4.9. *Sự bị chặn của tập tất cả các điểm tụ của dãy là hiển nhiên. Gọi* $\mathbf{S}$ *là tập các điểm tụ của dãy* $\{a_n\}$. *Nếu* $\mathbf{S}$ *hữu hạn thì nó đóng. Giả sử* $\mathbf{S}$ *là tập vô hạn và lấy* s *là một phần tử của nó. Gọi* $\{s_k\}$ *là dãy gồm các thành phần của* S *được xác định như sau: với* s_1 *là một số của* $\mathbf{S}$ *khác* s. *Chọn* s_2 *thuộc* $\mathbf{S}$ *khác* s *và thoả mãn điều kiện sau* $|s_2 - s| < \frac{1}{2}|s_1 - s|$, *và qui nạp theo* k, *ta có* $|s_{k+1} - s| < \frac{1}{2}|s_k - s|$, $s_{k+1} \neq s$.

Dãy $\{a_k\}$ *như thế thoả mãn điều kiện sau*

$$|s_k - s| < \frac{1}{2^{k-1}}|s_1 - s|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Từ s_k *là điểm tụ của dãy* $\{a_n\}$ *suy ra tồn tại* $a_{n,k}$ *sao cho* $|a_{n_k} - s_k| < \frac{1}{2^{k-1}}|s_1 - s|$. *Do đó*

$$|a_{n_k} - s| \leq |a_{n_k} - s_k| + |s_k - s| < \frac{1}{2^{k-2}}|s_1 - s|,$$

điều này dẫn đến s *là một điểm tụ của dãy con* $\{a_{n_k}\}$. *Vì vậy* $s \in \mathbf{S}$.

2.4.10. *Gọi* $\mathbf{S}$ *là tập tất cả các điểm tụ của dãy* $\{a_n\}$.

(a) Dãy $\{a_n\}$ *bị chặn. Theo 2. 4. 6,* $S = \{0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\}$. *Vì vậy* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{7}$.

(b) Ta có $\mathbf{S} = \{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$, *cùng với tính bị chặn của dãy ta suy ra* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(c) Dãy không bị chặn và tập các điểm tụ là rỗng . Vì vậy

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{và} \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(d) Dãy không bị chặn trên bởi vì dãy con $a_{2k} = (2k)^{2k}$ *tiến đến vô cùng. Dãy con với các chỉ số lẻ tiến đến* 0. *Điều này chứng tỏ*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{và} \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

(e) Dãy không bị chặn bởi vì $a_{4k+1} = 4k + 2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *và* $a_{4k+3} = -4k - 2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. *Hệ quả là* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(f) Rõ ràng dãy bị chặn. Hơn nữa,

$$\mathbf{S} = \left\{-e - \frac{\sqrt{2}}{2}, -e + \frac{\sqrt{2}}{2}, e - 1, e, e + 1\right\}.$$

Suy ra

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = -e - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{và} \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = e + 1.$$

(g) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 2.$

(h) Dãy không bị chặn trên vì $a_{3k} = 2^{3k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. *Hơn nữa,* $\mathbf{S} = \{-1, 1\}$.
Vì vậy $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

(i) Trước hết, chúng ta sẽ chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$. *Thật vậy, áp dụng định lí Stolz (xem 2.3.11), ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n - n + 1} = \lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n-1}) = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$\lim_{n\to\infty} a_{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2k) - 4k}{\ln 2 + \ln(2k)} = -\infty.$$

Do đó, dãy $\{a_n\}$ *không bị chặn dưới. Hơn nữa,*

$$\lim_{n\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2k+1)}{\ln 2 + \ln(2k+1)} = 1.$$

Vậy $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$

2.4.11. Áp dụng bài 2.4.7

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min \mathbf{S} = 0$ *và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max \mathbf{S}$, *ở đây*

$$\mathbf{S} = \left\{0, \frac{p}{q} - \left[\frac{p}{q}\right], \frac{2p}{q} - \left[\frac{2p}{q}\right], \ldots, \frac{(q-1)p}{q} - \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right\}.$$

(b) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*và* $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1.$

(c) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \min \mathbf{S}$ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \max \mathbf{S}$, ở đây $\mathbf{S}$ là tập tất cả điểm tụ của dãy được mô tả trong bài 2.4.7 (c).

(d) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$.

2.4.12.

(a) Nếu tập hợp $\mathbf{S}$ các điểm tụ của $\{a_n\}$ rỗng thì $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty \le A$. Giả sử $\mathbf{S}$ không rỗng. Do $\mathbf{S}$ đóng (xem bài 2.4.9) ta có $\sup \mathbf{S} = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbf{S}$. Điều này được suy ra từ định nghĩa của điểm tụ, tức là tồn tại dãy con $\{a_{n_k}\}$ hội tụ đến L. Vì vậy, với bất kỳ $\varepsilon > 0$ tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$L - \varepsilon < a_{n_k} \le A \quad \text{với} \quad k > k_0.$$

Do ε được lấy bất kỳ nên ta suy ra $L \le A$.

(b) Nếu dãy $\{a_n\}$ không bị chặn dưới thì $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty \le A$. Do đó, giả sử dãy $\{a_n\}$ bị chặn dưới , tức là, tồn tại $B \in \mathbb{R}$ thoã mãn $a_n \ge B$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Hơn nữa, theo giả sử, tồn tại một dãy $n_k, n_k > k$, sao cho $a_{n_k} \le A$. Vì vậy, theo định lí Bolzano-Weierstrass (xem 2.4.30), dãy $\{a_{n_k}\}$ chứa một dãy con hội tụ. Gọi g là giới hạn của nó. Khi đó $B \le g \le A$. Vì vậy, tập $\mathbf{S}$ bao gồm tất cả các điểm tụ của dãy $\{a_n\}$ không rỗng và $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf \mathbf{S} \le g \le A$.

(c) Sử dụng các lí luận trong chứng minh của câu (a).

(d) Phân tích tương tự như trong chứng minh câu (b).

2.4.13.

(a) Lấy $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Giả sử rằng (i) không thoã mãn, ngược lại ta có điều phải chứng minh. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với bất kỳ $k \in \mathbb{N}$ thì có $n > k$ thoã mãn $a_n \ge L + \varepsilon$. Do đó, theo bài 2. 4.12 (d), $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ge L + \varepsilon$, điều này trái với giả thiết. Giả sử (ii) không thoã mãn . Khi đó, tồn tại nhiều $\varepsilon > 0$ và $k \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \le L - \varepsilon$ với mọi $n > k$. Theo 2.3.12 (a), ta có $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le L - \varepsilon$, điều này trái với giả thiết. Vì vậy, ta có $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, Suy ra (i) và (ii).

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh điều kiện (i) và (ii) suy ra $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Từ (i) suy ra dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên. Mặt khác, từ (ii) suy ra tồn tại dãy *con bị chặn dưới. Theo định lí Bolzano-Weierstrass (xem 2. 4. 30), dãy chứa ít nhất một dãy con hội tụ. Vì vậy, tập S gồm tất cả các điểm tụ của $\{a_n\}$ không rỗng. Chúng ta sẽ chứng minh $L = \sup \mathbf{S}$. Thật vậy, nếu s là một phần tử của S, theo (i), $s \leq L + \varepsilon$. Từ tính bất kỳ của ε ta có $s \leq L$. Hơn nữa, từ điều kiện (ii), ta thấy rằng với $\varepsilon > 0$ bất kỳ tồn tại một dãy con của dãy đã cho hội tụ đến s thoả mãn bất đẳng thức $L - \varepsilon \leq \bar{s}$. Dĩ nhiên $\bar{s} \in S$. Trong trường hợp này sự kéo theo thứ hai cũng được chứng minh.*

(b) Điều này được suy ra tương tự như câu (a).

Bây giờ chúng ta khảo sát điều kiện cần và đủ cho giới hạn trên và giới hạn dưới vô hạn. Giới hạn trên của $\{a_n\}$ là $+\infty$ nếu và chỉ nếu dãy không bị chặn trên. Vì vậy,

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty$ *nếu và chỉ nếu với mọi* $M \in \mathbb{R}$ *và*
với mọi $k \in \mathbb{N}$ *tồn tại* $n_k > k$ *sao cho* $a_{n_k} > M$.

Giới hạn trên của $\{a_n\}$ là $-\infty$ nếu và chỉ nếu dãy bị chặn trên , bởi L, và tập các điểm tụ của nó là rỗng . Vì vậy, có một số hữu hạn số hạng của $\{a_n\}$ trong mọi khoảng bị chặn $[M, L]$. Cho nên $a_n < M$ với tất cả n đủ lớn. Điều này suy ra

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\infty$ *nếu và chỉ nếu với mọi* $M \in \mathbb{R}$ *tồn tại*
$k \in \mathbb{N}$ *sao cho với mọi* $n > k, a_n < M$.

Tương tự ta có

(3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\infty$ *nếu và chỉ nếu với mọi* $M \in \mathbb{R}$ *và*
với mọi $k \in \mathbb{N}$ *tồn tại* $n_k > k$ *sao cho* $a_{n_k} < M$,

(4) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = +\infty$ *nếu và chỉ nếu với mọi* $M \in \mathbb{R}$ *tồn tại*
$k \in \mathbb{N}$ *sao cho với mọi* $n_k > k\, a_n > M$.

2.4.14. Ta chỉ chứng minh cho bất đẳng thức (a), vì (b) chứng minh tương tự. (a) hiển nhiên trong trường hợp $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = +\infty$ hoặc $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = -\infty$. Nếu

$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *thì, từ việc kết hợp điều kiện (4) trong lời giải của bài toán 2.4.13 với bất đẳng thức* $a_n \le b_n$, *ta thu được* $\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Một cách tương tự, nếu* $\varliminf\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *thì từ việc kết hợp điều kiện (3) trong lời giải của bài toán 2.4.13 với bất đẳng thức* $a_n \le b_n$, *ta thu được* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
Bây giờ ta giả sử cả hai giới hạn đều hữu hạn và đặt

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = l_1 \text{ và } \varliminf_{n\to\infty} b_n = l_2.$$

Chúng ta muốn chứng minh $l_1 \le l_2$. *Giả sử phản chứng,* $l_2 < l_1$. *Chọn* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ để* $l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon$. *Khi đó sẽ tồn tại* c *sao cho* $l_2 + \varepsilon < c < l_1 - \varepsilon$. *Từ (ii) của bài toán 2.4.13(b), ta có* $b_{n_k} < l_2 + \varepsilon < c$. *Mặt khác từ (i) ta có* $c < l_1 - \varepsilon < a_n$. *Do vậy, trong trường hợp riêng, ta có* $c < a_{n_k}$, *và từ đó bất đẳng thức* $b_{n_k} < a_{n_k}$ *đúng với mọi* n_k *vô hạn, điều này trái với giả thiết của đầu bài.*

2.4.15. *Đặt*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = l_1, \quad \varliminf_{n\to\infty} b_n = l_2, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = L_1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} b_n = L_2.$$

Đầu tiên ta sẽ chứng minh

$$\text{(1)} \qquad \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \ge \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n.$$

Giả sử l_1 *và* l_2 *hữu hạn. Khi đó, theo bài 2.4.13 (b), với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* k_1 *sao cho* $a_n > l_1 - \varepsilon$ *với* $n > k_1$, *và tồn tại* k_2 *sao cho*$b_n > l_2 - \varepsilon$ *với* $n > k_2$. *Do đó ta có,*

$$a_n + b_n > l_1 + l_2 - 2\varepsilon \text{ với } \ n > \max\{k_1, k_2\}.$$

Kết hợp với bài toán 2.4.12 (c), dẫn đến $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \ge l_1 + l_2 - 2\varepsilon$. *Cho* $\varepsilon \to 0^+$, *ta thu được (1).*

Nếu l_1 *hoặc* l_2 *bằng* $-\infty$, *thì bất đẳng thức (1) là hiển nhiên. Giờ ta sẽ chứng minh một trong các giới hạn* l_1 *hoặc* l_2 *bằng* $+\infty$, *khi đó sẽ có* $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Giả sử $l_1 = +\infty$, *điều này tương đương với điều kiện (4) trong lời giải của bài toán 2.4.13, tức là*

$(*)$ *với mọi* $m \in \mathbb{R}$ *tồn tại* $k \in \mathbb{N}$ *sao cho* $a_n > M$ *nếu* $n > k$

Do $l_2 \neq -\infty$ nên dãy $\{b_n\}$ bị chặn dưới. Do đó, điều kiện (∗) được thoả mãn bởi $\{a_n + b_n\}$. Nói cách khác, ta có $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$. Do đó bất đẳng thức (1) được chứng minh.
Chứng minh của các bất đẳng thức còn lại tương tự và ta sẽ chỉ đưa ra chứng minh trong trường hợp giới hạn hữu hạn. Theo bài 2.4.13, với mọi $\varepsilon > 0$ sẽ tồn tại một dãy $\{a_n\}$ sao cho $a_{n_k} < l_1 + \varepsilon$ và tồn tại n_0 thoả mãn $b_n < L_2 + \varepsilon$ khi $n > n_0$. Điều đó có nghĩa là $a_{n_k} + b_{n_k} < l_1 + L_2 + 2\varepsilon$ với k đủ lớn. Do vậy, theo kết quả 2.4.12(b), ta thu được $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) < l_1 + L_2 + 2\varepsilon$. Do $\varepsilon > 0$ bất kỳ, nên ta có

(2)
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Tương tự, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một dãy $\{b_{n_k}\}$ sao cho $b_{n_k} > L_2 - \varepsilon$ và tồn tại n_0 thoả mãn $a_n > l_1 - \varepsilon$, khi $n > n_0$. Do đó $a_{n_k} + b_{n_k} > l_1 + L_2 - 2\varepsilon$ với k đủ lớn. Do vậy, theo kết quả 2.4.12(c), thu được $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \ge l_1 + L_2 - 2\varepsilon$. Do ε có thể nhỏ tuỳ ý nen ta rút ra kết luận

(3)
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \ge \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Hơn nữa, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại k_1 thoả mãn $a_n < L_1 + \varepsilon$ khi $n > k_1$, và tồn tại k_2 thoả mãn $b_n < L_2 + \varepsilon$, khi $n > k_2$. Do vậy

$$a_n + b_n < L_1 + L_2 + 2\varepsilon \text{ với } \quad n > \max\{k_1, k_2\}.$$

Kết hợp với kết quả 2.4.12(a), ta có $\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le L_1 + L_2 + 2\varepsilon$. Do ε có thể nhỏ tuỳ ý nên thu được

(4)
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ví dụ về các dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ sao cho các bất đẳng thức (1)-(4) thoả mãn. Xét

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n = 4k, \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+1, \\ 2 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+3, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 2 & \text{nếu } n = 4k, \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+1, \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ 0 & \text{nếu } n = 4k+3, \end{cases}$$

Trong trường hợp này, bất đẳng thức trong bài toán có dạng $0 < 1 < 2 < 3 < 4$.

2.4.16. Không. Chỉ cần xét dãy $\{a_n^m\}, m = 1, 2, 3, \ldots$, *bởi*

$$a_n^m = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = m, \\ 0 & \text{nếu } n \neq m. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n^1 + a_n^2 + \ldots) = 1 > 0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n^1 + \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n^2 + \ldots$$

Đặt

$$a_n^m = \begin{cases} -1 & \text{nếu } n = m, \\ 0 & \text{nếu } n \neq m. \end{cases}$$

Trong trường hợp này thì

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n^1 + a_n^2 + \ldots) = -1 < 0 = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n^1 + \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n^2 + \ldots$$

2.4.17. Đặt

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = l_1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n = l_2, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = L_1, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = L_2.$$

Chúng ta sẽ chỉ chứng minh bất đẳng thức

$$(1) \qquad l_1 l_2 \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n b_n) \le l_1 L_2.$$

Cách làm tương tự có thể áp dụng cho các trường hợp khác.

Giả sử l_1 *và* l_2 *dương. Khi đó, từ kết quả 2.4.13(b), với mọi* $\varepsilon > 0$, *sẽ tồn tại* n_0 *sao cho*

$$a_n > l_1 - \varepsilon, \quad b_n > l_2 - \varepsilon \text{ với } \quad n > n_0.$$

Tiếp theo, $a_n b_n > l_1 l_2 - \varepsilon(l_1 + l_2) + \varepsilon^2$ *với* ε *đủ nhỏ để* $l_1 - \varepsilon > 0$ *và* $l_2 - \varepsilon > 0$. *Do đó, theo kết quả bài 2.4.12(c),* $\underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n b_n) \ge l_1 l_2 - \varepsilon(l_1 + l_2) + \varepsilon^2$. *Cho* $\varepsilon \to 0^+$, *thu được*

$$(i) \qquad l_1 l_2 \le \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n b_n).$$

Nếu $l_1 = 0$ *hoặc* $l_2 = 0$ *thì bất đẳng thức (i) là hiển nhiên. Nếu* $l_1 = +\infty$ *và* $l_2 = +\infty$ *thì (theo điều kiện (4) của lời giải bài toán 2.4.13), với mọi số dương* M *ấn định trước, ta có thể tìm được* n_0 *sao cho*

$$a_n > \sqrt{M}, \quad b_n > \sqrt{M}, \text{ với } \quad n > n_0.$$

Do đó $a_nb_n > M$*, có nghĩa là* $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = +\infty$.
Giả sử một trong hai giới hạn l_1 *và* l_2 *hữu hạn, giới hạn kia hữu hạn và dương. Khi đó với mọi* $0 < \varepsilon < l_2$ *và với mọi* $M > 0$*, luôn tồn tại số nguyên dương* n_0 *thoả mãn với* $n > n_0$ *ta có*

$$b_n > l_2 - \varepsilon, \quad a_n > \frac{M}{l_2 - \varepsilon}.$$

Do vậy $a_nb_n > M$ *với* $n > n_0$*. Cuối cùng thu được* $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = +\infty$*, và bất đẳng thức (i) được chứng minh.*
Bây giờ ta cần chứng minh

$$\text{(ii)} \qquad \varliminf_{n\to\infty}(a_nb_n) \leq l_1L_2.$$

Nếu l_1 *và* L_2 *hữu hạn, thì theo kết quả bài 2.4.13, ta có thể tìm được dãy* $\{n_k\}$ *thoả mãn* $a_{n_k} < l_1 + \varepsilon$ *và* $b_{n_k} < L_2 + \varepsilon$*. Do đó*

$$a_{n_k}b_{n_k} < l_1L_2 + \varepsilon(l_1 + L_2) + \varepsilon^2$$

Do vậy $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) \leq l_1L_2 + \varepsilon(l_1 + L_2) + \varepsilon^2$*. Cho* $\varepsilon \to +\infty$ *ta thu được (ii).*
Nếu $l_1 = +\infty$ *hoặc* $L_2 = +\infty$*, thì bất đẳng thức (ii) hiển nhiên.*

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ví dụ về các dãy $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *sao cho các bất đẳng thức đều thoả mãn. Xét*

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k, \\ 2 & \text{nếu } n = 4k+1, \\ 3 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ 2 & \text{nếu } n = 4k+3, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 3 & \text{nếu } n = 4k, \\ 2 & \text{nếu } n = 4k+1, \\ 2 & \text{nếu } n = 4k+2, \\ 1 & \text{nếu } n = 4k+3. \end{cases}$$

Trong trường hợp này, bất đẳng thức trong bài toán có dạng $1 < 2 < 3 < 6 < 9$.

2.4.18. *giả sử* $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = g$*. Khi đó theo 2.4.13,*

(i) Với mọi $\varepsilon > 0$ *tồn tại* $k \in \mathbb{N}$ *thoả mãn* $a_n < g + \varepsilon$ *nếu* $n > k$*; và*

(i) Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $k \in \mathbb{N}$ thoả mãn $g - \varepsilon < a_n$ nếu $n > k$.

Do đó g chính là giới hạn của dãy $\{a_n\}$.

Mặt khác, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, thì (i) và (ii) trong bài toán 2.4.13(a) và (b) được thoả mãn với $L = g$ và $l = g$. Do vậy $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = g$.
Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, Khi đó khẳng định (1) và (4) trong lời giải bài toán 2.4.13 là hiển nhiên. Nếu $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$ thì điều kiện (4) tương đương với $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Lý luận tương tự được áp dụng cho trường hợp $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

2.4.19. Do 2.4.15, ta có

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Mặt khác, theo kết quả trước, $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Do vậy $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$. Chứng minh cho bất đẳng thứ hai hoàn toàn tương tự như trên.

2.4.20. Sử dụng bất đẳng thức trong bài 2.4.17, chúng ta có thể áp dụng phương pháp tương tự như trong lời giải của bài toán trước.

2.4.21. Chúng ta sẽ sử dụng kết quả trong 2.4.13. Đặt $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$. Khi đó các điều kiện (i) và (ii) trong 2.4.13 được thoả mãn. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (i) và (ii) với -1, ta thu được:

(i) Với $\varepsilon > 0$ bất kì luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n > k$ ta có $-L - \varepsilon < -a_n$; và

(ii) Với $\varepsilon > 0$ bất kì và với mọi $k \in \mathbb{N}$ luôn tồn tại $n_k > k$ sao cho $-a_{n_k} < -L + \varepsilon$.

Từ 2.4.13(b) ta có

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (-a_n) = -L = -\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Chứng minh của bất đẳng thức thứ hai giống như trên. Trong trường hợp giới hạn vô hạn, cần phải áp dụng các khẳng định (1)-(4) nêu trong lời giải bài toán 2.4.13.

2.4.22. Ta sẽ áp dụng bài toán 2.4.13. Đặt $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$. do đó theo điều kiện (i) và (ii) trong 2.4.13(a), ta có *(i) Với $\varepsilon > 0$ bất kì luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n > k$ ta có $a_n < L + \varepsilon L^2$; và*

(ii) Với $\varepsilon > 0$ bất kì và với mọi $k \in \mathbb{N}$luôn tồn tại $n_k > k$ sao cho $L - \varepsilon\frac{L^2}{2} < a_{n_k}$.

Giả sử $L \neq 0$. Khi đó theo (i),

$$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{L + \varepsilon L^2} = \frac{1}{L} - \frac{\varepsilon L^2}{L(L + \varepsilon L^2)} > \frac{1}{L} - \varepsilon.$$

Giả sử $0 < \varepsilon < \frac{1}{L}$. Khi đó theo (ii)

$$\frac{1}{a_{n_k}} > \frac{1}{L - \frac{\varepsilon L^2}{2}} = \frac{1}{L} + \frac{\varepsilon\frac{L^2}{2}}{L(L - \varepsilon\frac{L^2}{2})} > \frac{1}{L} + \varepsilon.$$

Các điều kiện trên dẫn đến (do 2.4.13(b))

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}.$$

Giờ giả sử $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$. Cho $M > 0$, Theo (i) trong 2.4.13(a), tồn tại một số tự nhiên k sao cho $a_n < \frac{1}{M}$ với $n > k$. Do đó $\frac{1}{a_n} > M$ với $n > k$, mà theo khẳng định (4) của lời giải 2.4.13, thì có nghĩa là $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$. Cuối cùng giả sử $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Do đó với mọi $\varepsilon > 0$ và với mọi $k \in \mathbb{N}$, luôn tồn tại $n_k > k$ sao cho $a_{n_k} > \frac{1}{\varepsilon}$ (xem khẳng định trong lời giải 2.4.13(a)). Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{1}{a_{n_k}} < \varepsilon$. Dĩ nhiên suy ra $-\varepsilon < \frac{1}{a_n}$. Do vậy cả hai điều kiện trong 2.4.13(b) đều được thoả mãn đối với dãy $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ với $l = 0$, có nghĩa là $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Chứng minh cho bất đẳng thức thứ nhất đã hoàn thành, bất đẳng thức thứ hai chứng minh tương tự.

2.4.23. Từ giả thiết ta rút ra $0 < \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n < +\infty$. Kết hợp đẳng thức

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 1,$$

với các kết quả trước đây ta suy ra

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}} = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Do vậy, theo 2.4.18, dãy $\{a_n\}$ hội tụ.

2.4.24. Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy sao cho với mọi dãy $\{b_n\}$ thì đẳng thức đầu tiên đúng. Xét $b_n = -a_n$. Từ 2.4.21 ta suy ra được

$$0 = \varliminf_{n\to\infty} (a_n + (-a_n)) = \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} (-a_n) = \varliminf_{n\to\infty} a_n - \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

Từ đó, theo kết quả trong 2.4.18, ta kết luận được dãy $\{a_n\}$ hội tụ.

2.4.25. Giả sử $\{a_n\}$ là dãy nhận gía trị dương sao cho với mọi dãy dương $\{b_n\}$ thì đẳng thức thứ nhất được nghiệm đúng. Lấy $b_n = \frac{1}{a_n}$. Do đó, theo 2.4.22, ta có

$$1 = \varliminf_{n\to\infty} \left(a_n.\frac{1}{a_n}\right) = \varliminf_{n\to\infty} a_n.\varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \varliminf_{n\to\infty} a_n.\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

Từ đó suy ra cả hai giới hạnn trên và dưới của dãy $\{a_n\}$ đều dương và $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Do đó dãy $\{a_n\}$ hội tụ (theo 2.4.18).

2.4.26. Hiển nhiên ta có $\sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Ta sẽ chứng minh $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Nếu $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = +\infty$, thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do vậy, ta gỉa sử $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < +\infty$. Từ đó với mọi $\varepsilon > 0$, luôn tồn tại số k thoả mãn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \text{ với } \quad n \ge k.$$

Do vậy

$$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n}{a_{n-1}}.\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{k+1}}{a_k} < (L+\varepsilon)^{n-k}.$$

Từ đó dẫn đến ,

$$\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_k}(L+\varepsilon)^{\frac{-k}{n}}(L+\varepsilon).$$

Do $\sqrt[n]{a_k}(L+\varepsilon)^{-\frac{k}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, nên

$$\sqrt[n]{a_k}(L+\varepsilon)^{-\frac{k}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

với n đủ lớn. Từ những kết quả đã biết ta rút ra

$$\sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)(L+\varepsilon) = L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$$

với n đủ lớn. Kết hợp với 2.4.12(a), ta có $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L + (L+1)\varepsilon + \varepsilon^2$. Do ε có thể nhỏ tuỳ ý nên $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Để chứng minh $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \varliminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ chỉ cần áp dụng 2.4.22 và bất đẳng thức vừa chứng minh trên cho dãy $\{\frac{1}{a_n}\}$.

2.4.27. *Đầu tiên ta chứng minh* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. *Giả sử* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = L < +\infty$ *(nếu* $L = +\infty$ *thì bất đẳng thức là hiển nhiên). Khi đó với* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $k \in \mathbb{N}$ *sao cho* $a_n < L + \varepsilon$ *với* $n > k$. *Do vậy*

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n}{n} \\ <& \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{n} - \frac{k(L + varepsilon)}{n} + L + \varepsilon. \end{aligned}$$

Do $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{n} - \frac{k(L+\varepsilon)}{n} < \varepsilon$ *Từ đó rút ra* $b_n < \varepsilon + L + \varepsilon$ *với* n *đủ lớn. Theo kết quả 2.4.12(a), da* ε *có thể nhỏ tuỳ ý, ta thu được* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n \le L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. *Chứng minh cho bất đẳng thức* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$ *hoàn toàn tương tự.*

2.4.28.

(a), (b) Chỉ cần áp dụng kết quả 2.4.13.

(c) Đẳng thức không đúng. Để chứng tỏ điều đó, chỉ cần xét các dãy sau:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \textit{nếu } n = 2k, \\ 1 & \textit{nếu } n = 2k+1, \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } n = 2k, \\ 0 & \textit{nếu } n = 2k+1. \end{cases}$$

Khi đó

$$0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \min\{a_n, b_n\} \ne \min\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n\right\} = 1.$$

(d) Đẳng thức này cũng không đúng, ta chứng tỏ điều này bằng cách xét hai dãy như trong câu (c).

2.4.29. *Giả sử dãy* $\{a_n\}$ *thoả mãn có vô hạn số* n *sao cho*

(1) *với mọi* $k \ge n$, $a_k \le a_n$.

Cho n_1 *là hạng tử đầu tiên của các* n *thoả mãn trên,* n_2 *thứ hai, v.v. Khi đó* $\{a_{n_k}\}$ *là một dãy con đơn điệu tăng của* $\{a_n\}$. *Mặt khác, nếu dãy* $\{a_n\}$ *không có tính chất trên, nghĩa là chỉ tồn tại hữu hạn* n *thoả mãn (1), ta chọn số tự nhiên* m_1 *sao cho dãy* $\{a_{m_1+n}\}$ *không thoả mãn (1), Lấy* m_2 *là số tự nhiên đầu tiên lớn hơn* m_1 *sao cho* $a_{m_2} > a_{m_1}$. *Tiếp tục quá trình này, ta thu được dãy con*$\{a_{m_n}\}$ *của* $\{a_n\}$ *là đơn điệu tăng.*

2.4.30. Sử dụng kết quả trên: một dãy có chứa một dãy con đơn điệu tăng và bị chặn thì hội tụ.

2.4.31. Giả sử $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$. *Khi đó theo 2.4.14(b),*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Xét

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha < +\infty.$$

Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, *tồn tại* k *sao cho*

$$(1) \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha + \varepsilon \text{ với } \quad n \geq k.$$

Nói cách khác,

$$(2) \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{1}{\alpha + \varepsilon} \text{ với } \quad n \geq k.$$

Do vậy, với k *đủ lớn ta có*

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{a_k + \cdots + a_n + a_{n+1}}{a_n} \\
&= \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} . \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \cdots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} . \frac{a_{n-1}}{a_n} \\
&+ \cdots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} . \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&\geq \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-k} + \left(\frac{1}{\alpha + \varepsilon}\right)^{n-k-1} + \cdots + \frac{1}{\alpha + \varepsilon} + 1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}.
\end{aligned}$$

Nếu $0 < \alpha < 1$, *thì từ bất đẳng thức trên và 2.4.14(b) dẫn đến* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = +\infty$. *Mặt khác, nếu* $\alpha \geq 1$, *thì theo 2.4.14 (b) và 2.4.19 ta rút ra*

$$(3) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \geq \alpha + \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha+\varepsilon}\right)^{n-k+1}}{1 - \frac{1}{\alpha+\varepsilon}} = \alpha + \frac{\alpha + \varepsilon}{\alpha + \varepsilon - 1}.$$

Trong trường hợp $\alpha = 1$ ($\varepsilon > 0$ *có thể tùy ý) ta thu được* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n = +\infty$. *Nếu* $\alpha > 1$ *thì từ (3) suy ra*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \geq 1 + \alpha + \frac{1}{\alpha - 1} = 2 + (\alpha - 1) + \frac{1}{\alpha - 1} \geq 4.$$

4 là ước lượng tối ưu bởi vì kết quả này đạt được đối với dãy $a_n = 2^n, n \in \mathbb{N}$.

2.5 Các bài toán hỗn hợp

2.5.1. *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Đặt* $b_n = [a_n]$. *Khi đó* $b_n \le a_n < b_n + 1$. *Do vậy*

$$\left(1+\frac{1}{b_n+1}\right)^{b_n} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n-1}.$$

Do đó theo kết quả trong 2.1.38 và định luật kẹp giữa dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Hơn nữa

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e^{-1}$$

bởi vì

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a_n-1}\right)^{a_n}} = e^{-1}.$$

Từ đó dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e, \quad \text{nếu } \{a_n\} \text{ phân kỳ tới } -\infty.$$

2.5.2. *Ta có thể áp dụng các kết quả đã biết đối với dãy* $a_n = \frac{n}{x}, x \neq 0$.

2.5.3. *Do 2.1.39, 2.1.40 và 2.5.2, ta có* $(1+\frac{x}{n})^n < e^x < (1+\frac{x}{n})^{l+n}$ *với* $l > x > 0, l \in \mathbb{N}$. *Do đó với mọi số dương* x *và với mọi số nguyên dương* n *thì* $\frac{x}{n+l} < \ln(1+\frac{x}{n}) < \frac{x}{n}$ *nếu* $l > x$. *Lấy* $n = 1$ *ta có* $\ln(1+x) < x$ *với* $x > 0$. *Bây giờ đặt* $l = [x] + 1$. *Khi đó ta có*

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) > \frac{\frac{x}{n}}{2+\frac{x}{n}}.$$

Do đó $\ln(1+x) > \frac{x}{2+x}$ *với* $x > 0$.
Xét $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, $x > 0$. *Ta có*

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0 \quad \text{với} \quad x > 0.$$

Do vậy

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} > f(0) = 0 \quad \text{với} \quad x > 0.$$

2.5.4.

(a) Giả sử $a > 1$. Đặt $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Theo bất đẳng thức 2.5.3, ta có

$$\frac{2a_n}{a_n + 2} < \frac{1}{n}\ln a = \ln(a_n + 1) < a_n,$$

Do vậy từ định lý kẹp dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$ với $a > 1$ Chúng ta thấy ngay khẳng định đúng với $a = 1$. Để chứng minh cho $0 < a < 1$, chỉ cần áp dụng lýluận trên cho $\frac{1}{a} > 1$.

(b) Đặt $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Khi đó $(a_n + 1)^n = n$. Do vậy theo 2.5.3 $\ln n = n\ln(a_n + 1) < na_n$. Điều này dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = +\infty$.

2.5.5. Sử dụng đạo hàm ta chứng minh được với $x > -1$, $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$. Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $a_n > 0$ bắt đầu từ chỉ số n nào đó. Điều đó dẫn đến $\frac{a_n-1}{1+a_n-1} \le \ln a_n = \ln(1 + (a_n - 1)) \le a_n - 1$. Chia hai vế bất đẳng thức cho $a_n - 1$ và áp dụng định lý kẹp ta thu được điều phải chứng minh.

2.5.6. Theo định nghĩa (xem 2.1.38), ta có $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Do đó

(i) $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a_n.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &+ \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

Cho n tiến ra vô cùng ta thu được

(ii) $$e \geq a_k.$$

Từ (i) và (ii) dẫn đến giới hạn của dãy $\{a_n\}$ bằng e. Hơn nữa

$$\begin{aligned}
a_{n+m} - a_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\} \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.
\end{aligned}$$

Giữ n cố định và cho $m \longrightarrow \infty$, ta thu được

$$e - a_n \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.$$

Điều này kết hợp với (ii) dẫn đến $0 < e - a_n < \frac{1}{nn!}$.

2.5.7. Ta biết rằng (xem 2.5.2) $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$, $x \in \mathbb{R}$. Với $x \in \mathbb{R}$ cố định, đặt $a_n = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})$. Ta có

$$\begin{aligned}
\left|a_n - (1+\frac{x}{n})^n\right| &= \left|\sum_{k=2}^{n}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{x^k}{k!}\right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{n}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{|x|^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Do 1.2.1,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \text{ với } \quad 2 \leq k \leq n.$$

Do vậy

$$\left|a_n - (1+\frac{x}{n})^n\right| \leq \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2n}\frac{|x|^k}{k!} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!}.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{|x|^k}{(k-2)!} = 0$ (dễ dàng đạt được khi áp dụng định lý Stolz, xem 2.3.11), ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.

2.5.8.

(a) Từ 2.1.38, $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$. *Với* $n > 1$ *ta có*

$$\ln\frac{2n+1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{n-1}.$$

Do vậy kết quả cần chứng minh thu được từ tính liên tục của hàm lôga và áp dụng định lý kẹp.

(b) Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} &< \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

Do đó ta thu được kết quả từ (a).

2.5.9. Phân tích tương tự như trong chứng minh bài toán 2.5.3, ta thu được

$$(*) \qquad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \text{ với } x > 0.$$

Đặt $b_n \ln a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. *Từ* $(*)$ *suy ra,*

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}.$$

Kết hợp với các đẳng thức

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. *Cuối cùng từ tính liên tục của hàm lôga suy ra được* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}$.

2.5.10. Ta có thể chứng minh bằng qui nạp rằng

$$\begin{aligned}a_n &= n + n(n-1) + \cdots + n(n-1)\cdots 2 + n(n-1)\cdots 2.1 \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} + \cdots + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{0!}.\end{aligned}$$

Do vậy

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+1}{a_1}\cdots\frac{a_n+1}{a_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e,$$

với đẳng thức cuối suy ra từ 2.5.6.

2.5.11. *Từ 2.5.6,*

$$e=1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{nn!},\ \text{với}\quad 0<\theta_n<1.$$

Do vậy $0<n!e-[n!e]=\frac{\theta_n}{n}<\frac{1}{n}$, *dẫn đến điều phải chứng minh.*

2.5.12. *Sử dụng bất đẳng thức trung bình liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, tính đơn điệu của hàm lôga và bất đẳng thức chứng minh trong 2.5.3, ta thu được*

$$\frac{1}{n}\ln\sqrt{ab}\le\ln\frac{1}{2}(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})=\ln\left(\frac{1}{2}(\sqrt[n]{a}-1)+\frac{1}{2}(\sqrt[n]{b}-1)+1\right)$$
$$<\frac{1}{2}\left((\sqrt[n]{a}-1)+(\sqrt[n]{b}-1)\right).$$

Để thu được kết quả cần chứng minh, ta chỉ cần nhân các bất đẳng thức với n *rồi sử dụng kết quả trong 2.5.4(a).*

2.5.13. *Lưu ý rằng nếu* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=a>0$, *thì* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.
Giả sử $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *là các dãy sao cho các số hạng đều khác* 1. *Từ kết quả 2.5.5,*

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln a_n}{n(a_n-1)}=1.$$

Từ giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=a>0$ *và từ tính liên tục của hàm lôga dẫn đến* $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln a_n=\ln a$. *Do đó, từ* $(*)$,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\lim_{n\to\infty}n\ln a_n=\ln a.$$

Lưu ý rằng các đẳng thức trên vẫn đúng nếu $a_n=1$. *Cuối cùng,*

$$\lim_{n\to\infty}n\ln(pa_n+qb_n)=\lim_{n\to\infty}n(p(a_n-1)+q(b_n-1))=\ln a^pb^q.$$

2.5.14. *Ta có* $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n}(a_n - a_{n-1})$. *Tiếp theo ta có*

$$\begin{aligned} a_n &= a + (b-a) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a + (b-a)\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)!}\right). \end{aligned}$$

Cuối cùng từ 2.5.7, $\lim_{n\to\infty} a_n = b - (b-a)e^{-1}$.

2.5.15. *Xét dãy* $\{b_n\}$, *với* $b_n = \frac{a_n}{n!}$, *và áp dụng phương pháp giống như lời giải của bài toán trên, ta đi đến kết luận* $a_n = n!$.

2.5.16. *Theo như lời giải bài 2.5.14,* $a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2n}(a_n - a_{n-1})$. *Do vậy* $\lim_{n\to\infty} a_n = 2b - a - 2(b-a)e^{\frac{-1}{2}}$.

2.5.17.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} a_n &= 3 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{(k+1)!} \\ &= 3 - \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-k}{k(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+1)!} \\ &= 3 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kk!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}. \end{aligned}$$

Do vậy, theo 2.5.6, ta rút ra $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

(b) Từ (a) và 2.5.6,

$$0 < a_n - e < \frac{1}{(n+1)(n+1)!}.$$

Chú ý. *Một điều rất thú vị là dãy này tiến tới* e *nhanh hơn dãy xét trong bài toán 2.5.6.*

2.5.18. *Từ bài 2.5.6 suy ra* $e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n$, *với* $\lim_{n\to\infty} n!r_n = 0$. *Hơn nữa,*

$$(*) \qquad \frac{1}{n+1} < n!r_n < \frac{1}{n}.$$

Do vậy,

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!e) = \lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!r_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} n2\pi n!r_n \frac{\sin(2\pi n!r_n)}{2\pi n!r_n} = \lim_{n\to\infty} n2\pi n!r_n = 2\pi.\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng được suy ra từ $(*)$.

2.5.19. *Ta sẽ chứng minh* $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{a_n}{n})^n = 0$. *Theo giả thiết, với* $M > 0$ *bất kỳ, ta luôn có* $a_n > M$ *với* n *đủ lớn. Do vậy*

$$0 < 1 - \frac{a_n}{n} < 1 - \frac{M}{n}.$$

Tiếp theo,

$$0 < \left(1 - \frac{a_n}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{M}{n}\right)^n.$$

Do vậy, theo 2.4.12, 2.4.14 và 2.5.2, ta có

$$0 < \varliminf_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le \varlimsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le e^{-M}.$$

Cho $M \to \infty$, *ta thu được*

$$0 < \varliminf_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le \varlimsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^n \le 0.$$

Do vậy $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{a_n}{n})^n = 0$, *ta được điều phải chứng minh.*

2.5.20. *Ta sẽ chứng minh* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{b_n}{n})^n = +\infty$. *Cho* $M > 0$, *ta có* $b_n > M$ *với* n *đủ lớn. Do vậy, cách làm tương tự như bài toán trước, ta thu được*

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n \ge \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{M}{n}\right)^n = e^M.$$

Do M *có thể lớn tuỳ ý nên suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{b_n}{n})^n = +\infty$.

2.5.21. *Dễ dàng chứng minh được* $\{a_n\}$ *là dãy đơn điệu giảm về* 0.
(a) *Ta có* $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1-a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. *Do vậy, theo 2.3.14,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{na_n} = 1$;
(b) *Do (a),*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(\frac{1}{na_n}-1)na_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}.$$

Sử dụng định lý Stolz (2.3.11), ta thu được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-na_n)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}-1)}{n\ln(1+\frac{1}{n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\frac{1}{1-a_n}-1)}{\ln(1+\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{1-a_n}=1.$$

2.5.22. *Dễ dàng thấy rằng dãy $\{a_n\}$ là đơn điệu giảm dần về 0. Hơn nữa, áp dụng qui tắc lHôpital, ta thu được*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\frac{1}{3}.$$

Do vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Theo kết quả bài 2.3.14, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2=3$.

2.5.23. *Rõ ràng dãy đơn điệu tăng. Ta sẽ chứng minh nó hội tụ tới $+\infty$. Ta có*

$$a_{n+1}^2=\left(a_n+\frac{1}{a_1+\cdots+a_n}\right)^2>\left(a_n+\frac{1}{na_n}\right)^2>a_n^2+\frac{2}{n}$$

và

$$a_{2n}^2-a_n^2>\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-2}+\cdots+\frac{2}{n}>\frac{2n}{2n-1}>1.$$

Do vậy $\{a_n^2\}$ không phải là dãy Cauchy. Do dãy tăng, nên nó phải tiến tới $+\infty$. Hơn nữa,

$$(*)\qquad 1\le\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1+\frac{1}{na_n}.$$

Theo định lý Stolz

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(a_{n+1}^2-a_n^2)}{2\ln(1+\frac{1}{n})^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}+\frac{1}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}\right)=1,$$

bởi vì

$$0<\frac{n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}<\frac{1}{n};$$

và lại áp dụng định lý Stolz,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=1.\end{aligned}$$

Đẳng thức cuối có được từ $(*)$. *Cụ thể ta có*

$$1\le n+1-n\frac{a_n}{a_{n+1}}\le\frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}=1.$$

2.5.24. *Từ bất đẳng thức* $\arctan x<x$ *với* $x>0$, *nên dãy đơn điệu giảm. Hơn nữa nó bị chặn dưới bởi* 0. *Do vậy dãy hội tụ, giả sử tới* g, *sao cho thoả mãn* $g=\arctan g$. *Do vậy* $g=0$.

2.5.25. *Lưu ý rằng mọi số hạng của dãy* $\{a_n\}$ *đều thuộc vào khoảng* $(0,1)$. *Ký hiệu* x_0 *là nghiệm duy nhất của phương trình* $\cos x=x$. *Nếu* $x>x_0$ *thì* $\cos(\cos x)<x$. *Hàm* $f(x)=\cos(\cos x)-x$ *là đơn điệu giảm, bởi vì* $f'(x)=\sin x\sin(\cos x)-1<0$ *với* $x\in\mathbb{R}$. *Do vậy, với* $x>x_0$ *thì* $\cos(\cos x)-x<f(x_0)=0$. *Tương tự nếu* $x<x_0$ *thì* $\cos(\cos x)>x$.
Giả sử $a_1>x_0$. *Theo phần trên ta có* $a_3=\cos(\cos a_1)<a_1$. *Do hàm số* $y=\cos(\cos x)$ *là đơn điệu tăng trong khoảng* $(0,\frac{\pi}{2})$, *ta thu được* $a_5<a_3$. *Có thể chứng minh bằng qui nạp rằng dãy* $\{a_{2n-1}\}$ *là đơn điệu giảm. Mặt khác* $a_2=\cos a_1<\cos x_0=x_0$, *dẫn đến* $a_4=\cos(\cos a_2)>a_2$, *và do đó* , $\{a_{2n}\}$ *là dãy đơn điệu tăng.*
Lý luận tương tự có thể áp dụng cho trường hợp $0<a_1<x_0$. *Nếu* $a_1=x_0$, *thì tất cả các số hạng của dãy* $\{a_n\}$ *bằng với* x_0. *Trong tất cả các trường hợp thì cả hai dãy* $\{a_{2n-1}\}$ *và* $\{a_{2n}\}$ *đều tiến tới nghiệm duy nhất của phương trình* $\cos(\cos x)=x$. *Dễ dàng thấy rằng* x_0 *chính là nghiệm của phương trình trên.*

2.5.26. *Bằng qui nạp , ta có*

$$a_n=1-(-1)^{n-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(n-1)\ \text{lần}}\quad n>1.$$

Do vậy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n-1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(k-1)\ \text{lần}}}{n}.$$

Chúng ta sẽ chứng minh

$$(*)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{k-1\ \text{lần}}}{n} = 0.$$

Nếu $n-1$ chẵn, thì

$$\frac{-\sin 1+\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(n-1)\ \text{lần}}}{n} < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin 1)\ldots)}_{(k-1)\ \text{lần}}}{n} < 0.$$

Hiển nhiên với $n-1$ lẻ, $(*)$ cũng đúng. Cuối cùng ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$.

2.5.27. Rõ ràng là $a_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$, $n = 1, 2, \ldots$, và do vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Hơn nữa,

$$\lim_{n\to\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0.$$

Do sự liên tục của hàm arctan ta có $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n) = 0$. Do vậy

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n-\pi)\\ &=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-a_n-(\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi-a_{n+1})\right) = 0\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \pi$.

2.5.28. Chú ý rằng không mất tổng quát ta có thể giả sử $|a_1| \le \frac{\pi}{2}$. Cụ thể là, nếu không ta có thể thay $|a_2| \le \frac{\pi}{2}$. Đầu tiên ta xét $0 < a \le 1$ và $0 < a_1 \le \frac{\pi}{2}$. Do vậy $a_{n+1} = a\sin a_n < a_n$. Điều đó có nghĩa là $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu giảm, mặt khác nó bị chặn dưới nên suy ra hội tụ. Giới hạn của dãy *trùng với điểm 0 là nghiệm của phương trình $x = a\sin n, 0 < a \le 1$. Giả sử $0 < a \le \frac{\pi}{2}$ và $0 < a_1 \le \frac{\pi}{2}$. Khi đó phương trình $x = a\sin n, 0 < a \le 1$. sẽ có hai nghiệm không âm là 0 và $x_0 > 0$. Nếu $a_1 < x_0$ thì dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi x_0. Cụ thể, $a_2 = a\sin a_1 > a_1$. Tuy nhiên, $a_2 = a\sin a_1 < a\sin x_0 = x_0$ và, bằng qui nạp, $a_n < a_{n+1} < x_0$. Tương tự, $x_0 < a_1 \le \frac{\pi}{2}$ dẫn đến $a_n > a_{n+1} > x_0$. Do vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ với $1 < a \le \frac{\pi}{2}$. Nếu $-\frac{\pi}{2} \le a < 0, a_1 > 0$, thì ta xét dãy $\{b_n\}$ như sau: $b_1 = a_1 . b_{n+1} = -a\sin b_n$. Hiển nhiên, $b_n = (-1)^{n-1}a_n$.*

Theo phần trên thì trong trường hợp $0 < a_1 \le \frac{\pi}{2}$ ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a_n = 0 && \text{nếu} \quad |a| \le 1,\\
&\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 && \text{nếu} \quad 1 < a \le \frac{\pi}{2},\\
&\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ không tồn tại} && \text{nếu} \quad -\frac{\pi}{2} \le a < -1.
\end{aligned}$$

Nếu $-\frac{\pi}{2} \le a_1 < 0$, thì ta xét dãy cho bởi $b_1 = -a_1, b_{n+1} = a\sin b_n$, và lại áp dụng giống như trên. Nếu $a_1 = 0$, thì tất cả số hạng của dãy đều tiến tới 0.

2.5.29. (a) Ta thấy $a_n > 0$ và $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) < a_n$. Do vậy dãy sẽ hội tụ tới giới hạn g thoả mãn $g = \ln(1 + g)$, nghĩa là $g = 0$. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$. Sử dụng đạo hàm, ta thu được(xem 2.5.3)

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ với } \quad x > 0.$$

Từ đó dẫn đến

$$(*) \quad \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n(1 - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}a_n^2)} < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}.$$

Đặt

$$b_n = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n(1 - \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}a_n^2)} < \frac{1}{a_{n+1}}$$

ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$. Cộng cả hai vế của $(*)$ thu được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + b_1 + b_2 + \cdots + b_n &< \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\\
&< \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

Do vậy,

$$\frac{1}{(n+1)a_1}+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n+1}<\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}$$
$$<\frac{1}{(n+1)a_1}+\frac{n}{2(n+1)}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}=\frac{1}{2}$.

(b) Ta có

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}(na_n-2)\frac{n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}na_n\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}$$

Để chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}$ *tồn tại ta sử dụng định lý Stolz (2.3.11). Ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{a_{n+1}}+\frac{2}{a_n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}.$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})=1$, *ta suy ra*

$$(2)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{2}{a_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1})}{a_n^2}.$$

Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1})}{a_n^3}$ *tồn tại. Để chứng minh ta sử dụng bất đẳng thức (có thể chứng minh dễ dàng bằng đạo hàm) như sau:*

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\quad x>0.$$

Do vậy

$$\frac{1}{6}a_n^3-\frac{1}{6}a_n^4-\frac{1}{4}a_n^5<2a_{n+1}-2a_n+a_na_{n+1}<\frac{1}{6}a_n^3+\frac{1}{3}a_n^4.$$

Dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_{n+1}-a_n+a_na_{n+1}}{a_n^3}=\frac{1}{6}.$$

Kết hợp với (1) và (2) ta thu được $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(na_n-2)}{\ln n}=\frac{2}{3}$.

2.5.30. Đặt $f(x)=(\frac{1}{4})^x$ *và* $F(x)=f(f(x))-x$. *Đầu tiên ta chứng minh* $F'(x)<0$ *với mọi* x *dương. Ta có*

$$F'(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x+x}\ln^2 4-1.$$

Do vậy

$$F'(x) < 0 \text{ nếu và chỉ nếu } \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^x + x} < \frac{1}{\ln^2 4}.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng hàm phía bên trái của bất đẳng thức cuối đạt được giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{e\ln 4}$ tại $x = \frac{\ln\ln 4}{\ln 4}$. Điều này dẫn đến $F'(x) < 0$, nghĩa là F giảm ngặt trong khoảng $(0, +\infty)$. Hơn nữa, $F(\frac{1}{2}) = 0$. Do đó $F(x) > 0$ với $0 < x < \frac{1}{2}$ và $F(x) < 0$ với $x > \frac{1}{2}$. Tiếp theo ta có

$$f(f(x)) < x \text{ với } \quad x > \frac{1}{2}.$$

Do $a_2 = 1 > \frac{1}{2}$, dẫn đến $a_4 = f(f(a_2)) < a_2$, và bằng cách qui nạp ta thu được $\{a_{2n}\}$ là dãy giảm ngặt. Do đó nó tiến tới g_1 thoả mãn $f(f(g_1)) = g_1$. Sự hội tụ của $\{a_{2n-1}\}$ tới g_2 thoả mãn $f(f(g_2)) = g_2$ có thể được thiết lập một cách tương tự. Cụ thể $g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$.

2.5.31. Chú ý là $0 < a_n < 2$ với $n \geq 2$. Nếu $a_n > 1$, thì $a_{n+1} < 1$. Đặt $f(x) = 2^{1-x}$ và $F(x) = f(f(x)) - x$. Ta chứng minh được $F'(x) < 0$ với $0 < x < 2$. Do vậy

$$\begin{aligned} &F(x) < F(1) = 0 \text{ với } \quad 1 < x < 2, \\ &F(x) > F(1) = 0 \text{ với } \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Theo chứng minh của phần trên, ta có nếu $a_1 < 1$, thì dãy $\{a_{2n}\}$ đơn điệu giảm và dãy $\{a_{2n-1}\}$ đơn điệu tăng, và cả hai dãy cùng tiến tới 1.

2.5.32. Chú ý rằng tất cả các số hạng của dãy đều nằm trong khoảng $(1, 2)$. Do hàm $F(x) = 2^{\frac{x}{2}} - x$ giảm ngặt trong khoảng này nên $F(x) > F(2) = 0$ với $x \in (1, 2)$. Do vậy dãy đơn điệu tăng và giới hạn g của nó thoả mãn $g = 2^{\frac{g}{2}}$, hay $g = 2$.

2.5.33. Ta sử dụng 2.3.14 cho dãy $\{a_n + a_{n-1}\}$ và nhận được $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$. Tiếp theo ta xét dãy $b_n = (-1)^n a_n$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - b_{n-2}) = 0$, ta có

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n + b_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n}.$$

2.5.34. Theo định lí Stolz (xem 2.3.11),

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_{n+1}} - \ln\frac{1}{a_n}}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}{\ln(1+\frac{1}{n})^n} \\ &= -\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\frac{a_{n-1}}{a_n}) = g$ *là hữu hạn, thì* $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)=0)$. *Kết quả cần chứng minh được suy ra từ bất đẳng thức sau đây*

$$n\frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}-1} \le n\ln(1+(\frac{a_{n-1}}{a_n}-1)) \le n(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1).$$

Nếu $g=+\infty$, *thì bất đẳng thức bên phải chỉ ra rằng* $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\infty$, *và do đó,* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = +\infty$. *Cuối cùng, nếu* $g=-\infty$, *thì với mọi* $M>0$ *tồn tại* n_0 *thoả mãn* $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{M}{n}+1$ *với* $n>n_0$. *Từ đó*

$$n\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ln(1+\frac{M}{n})^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} M.$$

Vì M có thể lớn tuỳ ý, nên ta có $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = -\infty$.

2.5.35. Theo định nghĩa của dãy,

$$a_{n+1}+b_{n+1} = (a_1+b_1)(1-(a_n+b_n)) + (a_n+b_n).$$

Đặt$d_n = a_n+b_n$. *Khi đó* $d_{n+1} = d_1(1-d_n)+d_n$ *và bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được* $d_n = 1-(1-d_1)^n$. *Do đó,*

$$a_n = \frac{a_1}{d_1}(1-(1-d_1)^n) \quad v \quad b_n = \frac{b_1}{d_1}(1-(1-d_1)^n).$$

Vì $|1-d_1|<1$, *nên*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1}{a_1+b_1} \quad v \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1}{a_1+b_1}.$$

2.5.36. Đặt $b_n = aa_n$. *Khi đó* $b_{n+1} = b_n(2-b_n) = -(b_n-1)^2+1$. *Từ đó suy ra* $b_{n+1}-1 = -(b_n-1)^2$. *Hiển nhiên, dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ nếu và chỉ nếu* $\{b_n-1\}$ *hội tụ, nói cách khác, khi* $|b_1-1| = |aa_1-1| \le 1$. *Hơn nữa, nếu* $a_1 = \frac{2}{a}$, *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *và nếu* $0<aa_1<2$, *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{a}$.

2.5.37. Đây là trường hợp đặc biệt của bài 2.5.38.

2.5.38. Ta có thể chỉ ra rằng hàm f *liên tục tại* $(a,a,\dots,a)$ *và* $f(a,a,\dots,a) = a$. *Xây dựng dãy* $\{b_n\}$ *bằng cách*

$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = \min\{a_1,a_2,\dots,a_k\},$$
$$b_n = f(b_{n-1},b_{n-2},\dots,b_{n-k}) \quad \text{với} \quad n>k.$$

Chú ý rằng nếu $\min\{a_1, a_2, ..., a_k\} < a$, *thì* $\{b_n\}$ *tăng thực sự và bị chặn trên bởi* a. *Mặt khác, nếu* $\min\{a_1, a_2, ..., a_k\} > a$, *thì* $\{b_n\}$ *giảm thực sự và bị chặn dưới bởi* a. *Từ đó, trong cả hai trường hợp, dãy* $\{b_n\}$ *hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. *Hơn nữa, do tính đơn điệu của* f *theo mọi biến nên* $a_n \le b_n$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Bây giờ ta xây dựng dãy* $\{c_n\}$ *như sau*

$$c_1 = c_2 = ... = c_k = \max\{a_1, a_2, ..., a_k\},$$
$$c_n = f(c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_{n-k}) \quad \text{với} \quad n > k.$$

Cũng như trên, ta chỉ ra rằng $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ *và* $c_n \le a_n$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Cuối cùng, theo nguyên lí kẹp,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2.5.39. Ta có $a_3 = a_2 e^{a_2 - a_1}, a_4 = a_3 e^{a_3 - a_2} = a_2 e^{a_3 - a_1}$ *và, bằng cách quy nạp,* $a_{n-1} = a_2 e^{a_n - a_1}$ *với* $n \ge 2$. *Giả sử* g *là giới hạn của dãy. Ta có*

$$\text{(star)} \qquad \frac{e^{a_1}}{a_2} g = e^g.$$

Chú ý rằng nếu $\frac{e^{a_1}}{a_2} = e$,*thì phương trình* $(\star)$ *có nghiệm duy nhất* $g = 1$. *Nếu* $\frac{e^{a_1}}{a_2} > e$ *thì phương trình này có hai nghiệm, và nếu* $0 < \frac{e^{a_1}}{a_2} < e$ *thì nó không có nghiệm. Trước hết xét trường hợp* $0 < \frac{e^{a_1}}{e^{a_2}} < e$. *Khi đó dãy* $\{a_n\}$ *phân kì vì* $(\star)$ *không có nghiệm. Hơn nữa, ta có thể chứng minh rằng dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng và do đó phân kì ra* $+\infty$.

Bây giờ ta xét trường hợp $\frac{e^{a_1}}{a_2} = e$. *Khi đó* $a_2 = e^{a_1 - 1} \ge a_1$ *và bằng quy nạp,* $a_{n+1} \ge a_n$. *Hơn nữa, nếu* $a_1 \le 1$, *thì cũng bằng quy nạp ta có* $a_n \le 1$. *Từ đó,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. *Nếu* $a_1 > 1$, *thì* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng và phân kì ra* $+\infty$. *Tiếp theo, ta xét trường hợp* $\frac{e^{a_1}}{a_2} > e$. *Khi đó* $(\star)$ *có hai nghiệm là* g_1, g_2, *trong đó ta giả sử* $g_1 < g_2$. *Giả sử rằng* $a_1 < g_1$. *Thì*

$$e^{a_1} - \frac{e^{a_1}}{a_2} a_1 > 0$$

hay, nói cách khác, $a_2 > a_1$. *Dùng quy nạp ta có* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi* g_1 *là giới hạn của nó. Nếu* $g_1 < a_1 < g_2$, *thì* $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi* g_1 *là giới hạn của nó. Nếu* $a_1 = g_1$ *hoặc* $a_1 = g_2$, *thì dãy là hằng số. Cuối cùng, nếu* $a_1 > g_2$, *thì dãy tăng tới* $+\infty$.

2.5.40. (Bài toán này và lời giải của nó dựa theo Euler trong trường hợp tổng quát. Xem [13]). Sử dụng đạo hàm, ta chứng minh được $\ln x \le \frac{x}{e}$ *với* $x > 0$.

Từ đó $\frac{a_n}{e} \geq \ln a_n = a_{n-1}\ln a$, $n > 1$, *và do đó*, $a_n \geq a_{n-1}\ln a^e$. *Vậy nếu* $a > e^{\frac{1}{e}}$, *dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp này,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Ta có* $a_{n+1} - a_n = a^{a_n} - a_n$. *Do đó khi* $a > e^{\frac{1}{e}}$, *xét hàm* $g(x) = a^x - x$. *Hàm này đạt giá trị nhỏ nhất tại* $x_0 = -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a} < e$. *Điều này suy ra* $a^x - x > \frac{1+\ln(\ln a)}{\ln a} > 0$, *và hệ quả là* $a_{n+1} - a_n > \frac{1-\ln(\ln a)}{\ln a} > 0$. *Vì khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp lớn hơn một số dương nên dãy phân kì ra* $+\infty$.

Bây giờ ta xét trường hợp $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. *Trước hết ta chứng minh trong trường hợp này phương trình* $a^x - x = 0$ *có hai nghiệm dương. Đạo hàm của hàm* $g(x) = a^x - x$ *triệt tiêu tại điểm* $x_0 > 0$ *thoả mãn* $a^{x_0} = \frac{1}{\ln a}$. *Hàm* g *đạt giá trị nhỏ nhất tại* x_0, *và* $g(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\ln a} - x_0 = \frac{1-x_0\ln a}{\ln a} < 0$, *vì nếu* $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ *thì* $\frac{1}{\ln a} > e$. *Vì* g *là hàm liên tục trên* R, *nó có tính chất điểm trung bình. Do đó phương trình* $a^x = x$ *có một nghiệm trong khoảng* $(0, x_0)$ *và một nghiệm khác trong khoảng* $(x_0, +\infty)$. *Kí hiệu các nghiệm này là* α *và* β, *tương ứng. Chú ý* $g(e) = a^e - e < (e^{\frac{1}{e}})^e - e = 0$, *e nằm giữa* α *và* β.

Nếu $x > \beta$, *thì* $a^x > a^\beta = \beta$ *và* $g(x) > 0$. *Điều này có nghĩa là dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng và bị chặn dưới bởi* β. *Từ đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Nếu $\alpha < x < \beta$ *thì* $\alpha < a^x < \beta$ *và* $g(x) < 0$. *Hệ quả là, dãy* $\{a_n\}$ *bị chặn và đơn điệu giảm. Do đó dãy hội tụ tới* α.

Khi $x = \alpha$ *hoặc* $x = \beta$, *ta thu được dãy hằng số.*

Bây giờ nếu $0 < x < \alpha$, *thì* $1 < a^x < \alpha$ *và* $g(x) > 0$. *Do đó dãy* $\{a_n\}$ *tăng tới* α.

Cuối cùng, nếu $a = e^{\frac{1}{e}}$, *thì* e *là nghiệm duy nhấtcủa phương trình* $a^x = x$, *khi đó hàm* g *đạt giá trị nhỏ nhất là 0 tại* e. *Do đó với* $0 < x \leq e$, *ta có* $0 < a^x \leq e$ *và* $g(x) \geq g(e) = 0$. *Điều này dẫn tới dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng và giới hạn của nó bằng* e. *Mặt khác, nếu* $x > e$, *dãy tăng tới vô cùng.*

Ta có thể tổng kết lại kết quả như sau:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > e^{\frac{1}{e}} \text{ và } x > 0, \\ +\infty & \text{nếu } 1 < a < e^{\frac{1}{e}} \text{ và } x > \beta, \\ \beta & \text{nếu } 1 < a < e^{\frac{1}{e}} \text{ và } x = \beta, \\ \alpha & \text{nếu } 1 < a < e^{\frac{1}{e}} \text{ và } 0 < x < \beta, \\ +\infty & \text{nếu } a = e^{\frac{1}{e}} \text{ và } x > e, \\ 6 & \text{nếu } a = e^{\frac{1}{e}} \text{ và } 0 < x \leq e. \end{cases}$$

2.5.41. Bất đẳng thức có thể được chứng minh bằng quy nạp. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

2 *(so sánh với lời giải của 2.1.16).*

2.5.42. *[20] Chú ý rằng*

$$a_n \leq \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ - căn}} < 2.$$

Nhận thấy rằng nếu $\varepsilon_1 = 0$, thì tất cả các số hạng của dãy $\{a_n\}$ bằng 0. Giả sử rằng $\varepsilon_1 \neq 0$. Ta sẽ chứng minhbằng quy nạp rằng bất đẳng thức đã cho đúng. Với $n = 1$, hiển nhiên. Giả sử rằng

$$a_n = \varepsilon_1\sqrt{2+\varepsilon_2\sqrt{2+\ldots+\varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

Từ đó

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 2 &= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-2}}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) \\ &= -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right) - 2, \end{aligned}$$

dẫn tới đẳng thức cần chứng minh. Bây giờ, do tính liên tục của hàm $\sin x$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k}{2^{k-1}}\right).$$

2.5.43. *Dùng quy nạp chứng minh rằng*

$$\arctan\frac{1}{2}+\ldots+\arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{n}{n+1}.$$

Vì vậy $\lim\limits_{n\to\infty}(\arctan\frac{1}{2}+\ldots+\arctan\frac{1}{2n^2}) = \frac{\pi}{4}$.

2.5.44. *Ta có*

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n) = \sin^2\frac{\pi}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2.5.45. *Ta chứng minh bằng quy nạp rằng dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên. Do đó nó hội tụ tới g thoả mãn $g = \sqrt{2+\sqrt{3+g}}$ và $g \in (2,3)$.*

2.5.46. [13] Ta có

$$3 = \sqrt{1+2.4} = \sqrt{1+2\sqrt{16}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}$$
$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}},$$

và, bằng quy nạp,

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} = 3.$$

Từ đó

$$\text{(2)} \qquad 3 \geq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)}}}}}.$$

Bây giờ ta sử dụng bất đẳng thức sau:

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{1+x\alpha} \leq \sqrt{\alpha}\sqrt{x+1}, x \geq 0, \alpha > 1.$$

Từ (3) với $x = n$ và $\alpha = n+2$,

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}} < \sqrt{(n+2)}\sqrt{(n+1)}.$$

Từ đó

$$\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}} < \sqrt{1+\sqrt{n+2}(n-1)\sqrt{1+n}}$$
$$(n+2)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+1}},$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy từ (3) với $\alpha = \sqrt{n+2}$. Từ (1), lặp lại cách làm n lần cho ta

$$\text{(4)} \qquad 3 \leq (n+2)^{2^{-n}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)}}}}}.$$

Từ (2) và (4) cho ta

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)}}}}} = 3.$$

2.5.47. Phương trình $x^2 + x - a = 0$, $a > 0$, có hai nghiệm α và β thoả mãn $\alpha > 0 > \beta$. Hơn nữa, ta có

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - \alpha &= \frac{a}{a_n} - 1 - \alpha = \frac{a - a_n - \alpha a_n}{a_n} \\
&= \frac{a - (1+\alpha)(a_n - \alpha) - \alpha(1+\alpha)}{a_n} = \frac{-(1+\alpha)(a_n - \alpha)}{a_n}.
\end{aligned}
$$

Vì $\alpha + \beta = -1$, ta nhận thấy $a_{n+1} - \alpha = \beta\frac{a_n-\alpha}{a_n}$. Cũng như thế, $a_{n+1} - \beta = \alpha\frac{a_n-\beta}{a_n}$. Do đó

$$\frac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha};$$

và bằng quy nạp

$$\frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\frac{a_1 - \beta}{a_1 - \alpha}.$$

Vì $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{1+\alpha} < 1$, ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\alpha}{\beta})^{n-1} = 0$, và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$.

2.5.48. Giả sử α và β là các nghiệm của $x^2 + x - a = 0$, $a > 0$. Khi đó $\alpha > 0 > \beta$. Bằng cách làm tương tự như bài trên ta được

$$\frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\frac{a_1 - \alpha}{a_1 - \beta}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

2.5.49. Với số nguyên dương k bất kì, ta có

$$
\begin{aligned}
|a_{n-1+k} - a_{n+1}| &= \left|\frac{1}{1+a_{n+k}} - \frac{1}{1+a_n}\right| = \frac{|a_{n+k} - a_n|}{(1+a_{n+k})(1+a_n)} \\
&\le \frac{1}{4}|a_{n-k} - a_n|.
\end{aligned}
$$

Bây giờ, bằng quy nạp ta có

$$|a_{n+1+k} - a_{n+1} leq (\frac{1}{4})^n |a_{k+1} - a_1|.$$

Hơn nữa,

$$
\begin{aligned}
|a_{k+1} - a_1| &\le |a_{k+1} - a_k| + |a_k - a_{k-1}| + \ldots + |a_2 - a_1| \\
&\le \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}|a_2 - a_1| = \frac{4}{3}|a_2 - a_1|.
\end{aligned}
$$

Do đó $\{a_n\}$ là dãy Cauchy. Giới hạn của nó là $\sqrt{2}$.

2.5.50. Với cách làm tương tự như bài toán trên, hãy chỉ ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{2}$.

2.5.51. Đặt $f(x) = \frac{a}{2+x}$, $x > 0$, *và* $F(x) = f(f(x))$. *Khi đó* $F'(x) > 0$ *với* $x > 0$. *Dễ dàng thử rằng* $a_1 < a_3$ *và* $a_4 < a_2$. *Hơn nữa, vì* F *tăng thực sự, ta suy ra dãy* $\{a_{2n}\}$ *giảm thực sự và dãy* $\{a_{2n-1}\}$ *tăng thực sự. Dãy* $\{a_n\}$ *bị chặn. Do đó hai dãy con của nó* $\{a_{2n}\}$ *và* $\{a_{2n-1}\}$ *hội tụ. Ta có thể kiểm tra chúng có cùng một giới hạn là* $\sqrt{1+a}-1$.

2.5.52. Nếu $a_1 \le 0$, *thì* $a_2 = 1 - a_1 > 1$ *và* $a_3 = a_2 - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. *Bằng quy nạp,* $a_{n-1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$ *với* $n \ge 2$. *Suy ra*

$$a_{n+1} = -(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2}) + a_2,$$

và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -a_1$ *nếu* $a_1 \le 0$. *Bây giờ nếu* $a_1 \in (0, 2)$, *thì* $a_2 \in [0, 1)$ *và bằng quy nạp, ta nhận thấy* $a_{n+1} \in [0, \frac{1}{2^{n-1}}]$, *điều này dẫn đến* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Cuối cùng, nếu* $a_1 \ge 2$, *thì* $a_2 = a_1 - 1 \ge 1$. *Bằng quy nạp, ta có* $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2^{n-1}}$, *và hệ quả là, cũng như trường hợp đầu, ta chứng minh* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 - 2$.

2.5.53.

Ta có

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{ja^j}{n-j} = \frac{a}{n-1} + \frac{2a^2}{n-2} + \frac{3a^3}{n-3} + \dots + \frac{(n-1)a^{n-1}}{1}$$
$$\frac{1}{n-1}(\frac{a}{1} + \frac{2(n-1)a^2}{n-2} + \frac{3(n-1)a^3}{n-3} + \dots + \frac{(n-1)^2a^{n-1}}{1}).$$

Từ đó

$$j\frac{n-1}{n-j} = j(\frac{n-j}{n-j} + \frac{j-1}{n-j}) \le j(1+j-1) = j^2,$$

ta thu được

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{ja^j}{n-j} \le \frac{a + 2^2a^2 + 3^2a^3 + \dots + (n-1)^2a^{n-1}}{n-1}.$$

Theo kết quả của bài 2.3.2, ta thu được

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a + 2^2a^2 + 3^2a^3 + \dots + (n-1)^2a^{n-1}}{n-1} = 0.$$

Nhận thấy rằng

$$na^n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{ja^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j} a^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{ka^k}{n-k}$$

và sử dụng (a)

Sử dụng (b) với $a = \frac{1}{b}$.

2.5.54. *Vì x dương,* $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, *ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} < \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{\pi}{n+k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k}.$$

Dễ dàng thử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi^3}{6(n+k)^3} = 0$. *Hơn nữa, theo 2.5.8 (a),* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n+k} = \pi \ln 2$. *Vậy giới hạn là* $\pi \ln 2$.

2.5.55.

Đặt $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + \frac{k^2}{cn^3})$. *Dựa vào bất đẳng thức (xem 2.5.3)* $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ *với* $x > 0$, *ta được*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{cn^3 + k^2} < \ln a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{cn^3}.$$

Do đó, từ công thức $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(cn^3 + n^2)} < \ln a_n < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6cn^3}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{3c}}$.

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ *với* $x > 0$ *cũng đúng với* $-1 < x < 0$. *Do đó, như chứng minh trong phần (a), ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{k^2}{cn^3}) = e^{-\frac{1}{3c}}.$$

2.5.56. *Vì x dương, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$, ta nhận thấy*

$$(1) \qquad \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\frac{n!}{(n\sqrt{n})^n}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k^2}{6n^3}\right) < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}}$$

và

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\frac{n!}{(n\sqrt{n})^n}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k^2}{6n^2} + \frac{k^4}{5!n^6}\right).$$

Từ (1) và kết quả đã biết trước ta suy ra giới hạn này lớn hơn hoặc bằng $e^{-\frac{1}{18}}$. Bây giờ ta chứng minh

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6}\right) \le e^{-\frac{1}{18}}.$$

Thật vậy,

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6}\right) < \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k^2}{6n^3} + \frac{k^4}{5!n^6}\right)$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{36n^3} + \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30.5!n^6}.$$

Cuối cùng, từ (2) và định lý kẹp ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^{3n}}}{n!}\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{1}{18}}.$$

2.5.57. *Trước hết ta chứng minh $a_n = \frac{n+1}{2n}a_{n-1} + 1, \quad n \ge 2$. Ta có*

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!(n-1-k)!(n-k)}{(n-1)!n} + 1 \\ (1) \qquad &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{k}} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{(n-1-k)!k!}{(n-1)!n} + 1 \\ &= a_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}} + 1. \end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n-1-k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}=\frac{n-1}{n}a_{n-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}$$

Vì vậy

$$\frac{n-1}{2n}a_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\frac{1}{\binom{n-1}{k}}.$$

Từ (1), ta được $a_n=a_{n-1}-\frac{n-1}{2n}a_{n-1}+1=\frac{n+1}{2n}a_{n-1}+1$. *Cho nên* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

2.5.58. Nếu $\alpha=0$, *hiển nhiên* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. *Nếu* $\alpha>0$, *thì* $0<a_n<1-\frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}$ *nên* $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. *Bây giờ ta giải trong trường hợp* $\alpha<0$. *Lúc đó*

$$a_n=(-1)^{n-1}(n^{-\alpha}-1)\left(\frac{n}{2})^{-\alpha}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-\alpha}-1\right).$$

Vì vậy, nếu ta chọn $\alpha=-1$, *ta được dãy phân kì* $a_n=(-1)^{n-1}$. *Nếu* $\alpha<-1$, *ta được*

$$((\frac{n}{p})^{-\alpha}-1)((\frac{n}{n-p})^{-\alpha}-1)>(\frac{n}{p}-1)(\frac{n}{n-p}-1)=1$$

với $1\le p<n$. *Hơn nữa,* $(\frac{n}{\frac{n}{2}})^{-\alpha}-1>2-1=1$. *Vì vậy*

$$|a_n|\ge(n^{-\alpha}-1)(\frac{n}{n-1})^{-\alpha}-1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Cũng như vậy, ta có nếu $-1<\alpha<0$, *thì*

$$|a_n|\le(n^{-\alpha}-1)(\frac{n}{n-1})^{-\alpha}-1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

2.5.59. Ta có $(2+\sqrt{3})^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k2^{n-k}$. *Nếu nhóm các số hạng lẻ và chẵn với nhau tương ứng, ta có thể viết*

$$(2+\sqrt{3})^n=A_n+\sqrt{3}B_n \quad \text{và} \quad (2-\sqrt{3})^n=A_n-\sqrt{3}B_n.$$

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n+\sqrt{3}B_n)=+\infty$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n-\sqrt{3}B_n)=+\infty$. *Vì thế*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}B_n}{A_n}=1.$$

Vì A_n là các số nguyên và $\frac{\sqrt{3}B_n}{A_n} < 1$, nên $[\sqrt{3}B_n] = A_n - 1$ với n đủ lớn. Từ đó suy ra

$$\{\sqrt{3}B_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{hoặc} \quad \{A_n + \sqrt{3}B_n\} = \{\sqrt{3}B_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2.5.60. Dãy $\{S_n\}$ đơn điệu tăng. Nếu chúng bị chặn trên thì sẽ hội tụ, và do đó

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. Từ giả thiết, $S_{n+1}a_{n+1} + a_n \le S_n a_n + a_{n-1}$ suy ra $S_n a_n + a_{n-1} \le S_2 a_2 + a_1$. Từ đó

$$a_n \le a_n + \frac{a_{n-1}}{S_n} \le \frac{S_2 a_2 + a_1}{S_n}.$$

Cuối cùng, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.5.61. Theo giả thiết, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số nguyên dương n_0 thoả mãn $a_n < \varepsilon n$ với $n > n_0$. Do đó

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n^2} &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n_0}^2}{n^2} + \frac{a_{n_0+1}^2 + \dots + a_n^2}{n^2} \\ &\le \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n_0}^2}{n^2} + \frac{n\varepsilon(a_{n_0+1} + \dots + a_n)}{n^2}.\end{aligned}$$

Từ 2.4.14 và 2.4.19,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n^2} \le \varepsilon \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Điều này hiển nhiên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n^2} = 0$.

2.5.62. Ta sẽ dùng Định lí Toeplitz (xem 2.3.1). Đặt

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n, C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

và

$$d_{n,k} = \frac{a_{n-k+1}B_k}{a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng các số dương $d_{n,k}$ thoả mãn các điều kiện (i) và (ii) trong 2.3.1 (cũng xem 2.3.3 (a)). Với k cố định,

$$d_{n,k} \le \frac{a_{n-k+1}}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-k+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rõ ràng $\sum_{k=1}^{n} d_{n,k} = 1$ *và nhận thấy*

$$\frac{c_n}{C_n} = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \dots + a_n B_1} = d_{n,1}\frac{b_1}{B_1} + d_{n,2}\frac{b_2}{B_2} + \dots + d_{n,n}\frac{b_n}{B_n}.$$

Cuối cùng, theo Định lí Toeplitz, $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{B_n} = 0$.

2.5.63. *Ta biết rằng* $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ *với* $x > 0$. *Đặt* $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2} e^{-n}$. *Do đó* $-\frac{1}{2} < \ln a_n < -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}$, *dẫn đến* $\lim_{n\to\infty} \ln a_n = -\frac{1}{2}$. *Vậy giới hạn là* $e^{-\frac{1}{2}}$.

2.5.64. *Ta có* $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2} > -\frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$ *với* $n > 1$. *Đặt* $b_n = a_n - \frac{1}{n-1}$. *Khi đó dãy* $\{b_n\}$ *đơn điệu tăng và bị chặn trên; nó hội tụ. Từ đó* $\{a_n\}$ *cũng hội tụ.*

2.5.65. *Theo giả thiết* $a_{n+1}\sqrt[2^n]{2} \geq a_n$, *ta có*

$$a_{n+1} 2^{-\frac{1}{2^n}} \geq a_n 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Từ đó dãy $b_n = a_n 2^{-\frac{1}{2^{n-1}}}$ *đơn điệu tăng và bị chặn. Do đó, nó hội tụ. Hiển nhiên,* $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

2.5.66. *Xét* $a \in (l, L)$. *Giả sử phản chứng rằng* a *không phải là một điểm giới hạn của* $\{a_n\}$. *Khi đó sẽ có một lân cận của* a *chỉ chứa hữu hạn các phần tử của dãy. Giả sử* $\varepsilon > 0$ *là số đủ nhỏ mà*

$$(\star) \quad l < a - \varepsilon < a < a + \varepsilon < L \quad \text{và} \quad a_n \notin [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \quad \text{với} \quad n > n_1.$$

Theo giả thiết, $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ *với* $n > n_2$. *Theo 2.4.13 (b), ta biết rằng tồn tại* a_{n_k} *thoả mãn* $a_{n_k} < l + \varepsilon < a$ *với* $n_k > \max\{n_1, n_2\}$. *Từ đó* $a_{n_k+1} \leq a_{n_k} + |a_{n_k+1} - a_{n_k}| < a + \varepsilon$. *Do đó từ* $(\star)$, $a_{n_k+1} < a - \varepsilon$. *Vì vậy, theo 2.4.12 (a),* $L \leq a - \varepsilon < L$, *mâu thuẫn.*

2.5.67. *Xét* $a \in (l, L)$. *Giả sử phản chứng rằng* a *không phải là một điểm giới hạn của* $\{a_n\}$. *Khi đó sẽ có một lân cận của* a *chỉ chứa hữu hạn các phần tử của dãy. Giả sử* $\varepsilon > 0$ *là số đủ nhỏ mà*

$$(\star) \quad l < a - \varepsilon < a < a + \varepsilon < L \quad \text{và} \quad a_n \notin [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \quad \text{với} \quad n > n_1.$$

Theo giả thiết,

$$(\star\star) \qquad a_n - a_{n-1} < \alpha_n < \varepsilon \quad \text{với} \quad n > n_2.$$

Theo 2.4.13 (a), có a_{n_k} *thoả mãn* $a_{n_k} > L - \varepsilon > a$. *Bây giờ, từ* $\star$, $a_{n_k+1} > a + \varepsilon$ *với* $n_k > \max\{n_1, n_2\}$. *Do đó từ 2.4.12 (c),* $l \geq a + \varepsilon > a > l$, *mâu thuẫn.*

2.5.68. Ta sẽ sử dụng kết quả được chứng minh ở bài toán trên. Từ tính đơn điệu của $\{a_n\}$,

$$\frac{a_{n+1}}{n+1+a_{n+1}} - \frac{a_n}{n+a_n} \geq \frac{-a_n}{(n+1+a_{n+1})(n+a_n)} \geq \frac{-1}{n}.$$

Do đó, theo kết quả của bài toán trên, tập hợp các điểm giới hạn của dãy đã cho là đoạn $[l, L]$, *trong đó*

$$l = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n}{n+a_n} \text{và} L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{n+a_n}.$$

2.5.69. Chú ý rằng

$$\left|a_{2n+1} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|a_{2n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1+a_{2n-1}}{2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{4}\left|a_{2n-1} - \frac{1}{3}\right|.$$

Kéo theo dãy có hai điểm giới hạn là: $\frac{1}{3}$ *và* $\frac{2}{3}$.

2.5.70. Ta biết rằng, theo 1.1.14, với bất kì số nguyên dương n *tồn tại một số nguyên dương* q_n *và một số nguyên* p_n *thoả mãn*

$$\left|2\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Do đó $|p_n| < (2\pi+1)q_n$, *và vì thế,*

$$|\sqrt{|p_n|}\sin p_n| = |\sqrt{|p_n|}\sin(2\pi q_n - p_n)| \leq \left|\sqrt{|p_n|}\sin\frac{1}{q_n}\right| \leq \frac{\sqrt{2\pi+1}}{\sqrt{q_n}}.$$

Vì dãy $\{q_n\}$ *không bị chặn, nó chứa một dãy con phân kì ra vô cùng. Do đó 0 là một điểm giới hạn của* $\{a_n\}$.

2.5.71. Ta sẽ chứng minh có một dãy con $\{a_{n_k}\}$ *thoả mãn*

$$\left(\frac{n_k(a_1 + a_{n_k+1})}{(n_k+1)a_{n_k}}\right)^{n_k} \geq 1.$$

Giả sử rằng điều kiện trên không đúng. Khi đó tồn tại n_0 *thoả mãn*

$$\frac{n(a_1+a_{n-1})}{(n+1)a_n} < 1 \qquad n \geq n_0.$$

Từ đó $\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n}$ *với* $n \geq n_0$. *Do đó*

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} &< -\frac{a_1}{n}. \\ \frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n-2} &< -\frac{a_1}{n-2}. \\ &\vdots \\ \frac{a_{n_0+1}}{n_0+1} - \frac{a_{n_0}}{n_0} &< -\frac{a_1}{n_0+1}. \end{aligned}$$

Lấy tổng tất cả các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{a_n}{n} < \frac{a_{n_0}}{n_0} - a_1\left(\frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Do đó, theo 2.2.50 (c), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$, *vô lí vì* $a_n > 0$.

2.5.72. Bằng cách làm tương tự như bài toán trên, ta chứng minh tồn tại một dãy con $\{a_{n_k}\}$ *thoả mãn*

$$\left(\frac{n_k(a_1 + a_{n_k+p})}{(n_k+p)a_{n_k}}\right)^{n_k} \geq 1.$$

2.5.73. Giả sử phản chứng kết luận trong bài toán không đúng. Khi đó tồn tại một số n_0 *thoả mãn với* $n \geq n_0$, $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n} - 1\right) < 1$. *Bất đẳng thức cuối cùng có thể viết lại dưới dạng* $\frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1}$. *Điều này dẫn tới (xem lời giải của 2.5.71)*

$$\frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{a_{n_0}}{n_0} - \frac{a_n}{n}.$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty$. *mâu thuẫn với tính chất* $\{a_n\}$ *là dãy dương.*

Để chứng minh 1 là hằng số có thể tốt nhất, lấy $a_n = n\ln n$. *Khi đó*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1+(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} - n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{\ln n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln(n+1)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n} = 1. \end{aligned}$$

2.5.74. *Chú ý rằng* $a_n^2 = 1 + a_{n-1}$ *và* $a_1 = 1$. *Rõ ràng, dãy tăng thực sự. Ta sẽ chứng minh dãy bị chặn trên bởi* $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ *bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, nếu* $a_{n-1} < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, *thì* $a_n^2 = 1 + a_{n-1} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. *Vì vậy* $a_n < \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, *và* $\{a_n\}$ *hội tụ tới* $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

2.5.75. *[20] Hiển nhiên dãy* $\{b_n\}$ *tăng thực sự. Trước hết giả sử rằng* $\alpha < \ln 2$. *Khi đó, theo giả thiết, có* $n_0 \in \mathbb{N}$ *thoả mãn* $\ln(\ln a_n) < n \ln 2$ *nếu* $n \geq n_0$; *hoặc, tương tương,* $a_n < e^{2^n}$ *nếu* $n \geq n_0$. *Ta có*

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0} + \ldots + \sqrt{a_n}}} \\ &\leq \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + \sqrt{e^{2^{n_0}} + \ldots + \sqrt{e^{2^n}}}}} \\ &\leq \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1}}}}. \end{aligned}$$

Theo bài trước,

$$b_n \leq \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{2^{n_0}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}.$$

Điều này có nghĩa là $\{b_n\}$ *bị chặn trên và hội tụ. Giả sử* $\alpha > \ln 2$. *Theo giả thiết, với* $\varepsilon > 0$ *cho trước, tồn tại* n_0 *thoả mãn* $\ln(\ln a_n) > n(\alpha + \varepsilon)$ *với* $n \geq n_0$. *Đặt* $\alpha + \varepsilon = \ln \beta$, *ta có* $a_n > e^{\beta^n}$ *với* $n \geq n_0$, *trong đó* $\beta > 2$. *Do đó*

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_{n_0} + \ldots + \sqrt{a_n}}}} \\ &> \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n_0-1} + e^{\frac{\beta^n}{2^{n-n_0+1}}}}} > e^{(\frac{\beta}{2})^n}. \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, dãy $\{b_n\}$ *phân kì ra vô cùng. Chú ý rằng, nếu* $0 < a_n \leq 1$, *thì mặc dù* $\ln \ln a_n$ *không xác định, dãy* $\{b_n\}$ *đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, *nên nó hội tụ.*

2.5.76. *[20] Theo giả thiết* $0 \leq a_n \leq na_1$ *nên dãy* $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *bị chặn. Kí hiệu* L *là giới hạn trên của nó. Khi đó có một dãy* $\{m_k\}$ *của các số nguyên dương thoả* *mãn* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{m_k}}{m_k} = L$. *Với* $n \in \mathbb{N}$ *cố định tuỳ ý, ta có thể viết* $m_k = nl_k + r_k$, *trong đó* $r_k \in \{0, 1, ..., n-1\}$. *Do đó, theo giả thiết,* $a_{m_k} \leq l_k a_n + a_{r_k}$. *Từ đó*

$$\frac{a_{m_k}}{m_k} \leq \frac{l_k}{nl_k + r_k} a_n + \frac{a_{r_k}}{m_k}.$$

Cho $k \to \infty$, *ta được*

$$(\star) \qquad L \leq \frac{a_n}{n},$$

dẫn tới

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n}.$$

Vậy $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *hội tụ.*

2.5.77. *Cách làm tương tự như bài toán trên.*

2.5.78. *[20] Dãy* $\{a_n + 1\}$ *và* $\{1 - a_n\}$ *thoả mãn giả thiết của Bài toán 2.5.76. Từ đó* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{n}$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-a_n}{n}$ *tồn tại và hữu hạn.*

(a) Theo trên, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{n} = g$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

(b) Các bất đẳng thức là hệ quả trực tiếp từ $(\star)$ *trong lời giải bài 2.5.76.*

2.5.79. *Ta sẽ chứng minh dãy* $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *hội tụ tới* $A = \sup\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. *Giả sử* p *là một số nguyên dương cố định tuỳ ý. Khi đó*

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_{pl_n + r_n}}{pl_n + r_n} \geq \frac{a_{pl_n}}{pl_n + r_n},$$

trong đó $r_n \in \{0, 1, ..., p-1\}$. *Do vậy, theo giả thiết,* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \geq \frac{a_p}{p}$. *Điều này dẫn đến* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \geq \overline{\lim\limits_{p\to\infty}} \frac{a_p}{p}$. *Vậy dãy* $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ *hội tụ. Hơn nữa,* $\frac{a_{m.n}}{mn} \geq \frac{a_n}{n}$ *nên*

$$A \geq \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{n} \geq \overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{a_p}{p} = \inf_p \sup_{l\geq p} \frac{a_l}{l}$$

$$\inf_p \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{a_{p.m}}{pm} \geq \inf_p \sup_m \frac{a_m}{m} = A.$$

2.5.80. *Trước hết ta chứng minh tính bị chặn của dãy đã cho. Thật vậy, nếu* $\frac{1}{a} \leq a_n, a_{n+1} \leq a$, *thì* $\frac{1}{a} \leq a_{n+2} = \frac{2}{a_n + a_{n+1}} \leq a$. *Do đó, theo nguyên lí được phát biểu mở đầu trong lời giải của Bài toán 2.1.10. dãy* $\{a_n\}$ *bị chặn. Đặt*

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \quad L = \overline{\lim_{p\to\infty}} a_n.$$

Với một số $\varepsilon > 0$ cố định tuỳ ý tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ thoả mãn

(i) $$a_n < L + \varepsilon \qquad n > n_1,$$

(ii) $$a_n > l - \varepsilon \qquad n > n_2.$$

Từ (i), $a_{n+2} = \frac{2}{a_n + a_{n-1}} > \frac{1}{L+\varepsilon}$. $n > n_1$, vì ε dương có thể nhỏ tuỳ ý, ta thu được $l \geq \frac{1}{L}$. Bằng cách tương tự ta có $L \leq \frac{1}{l}$. Do đó $l = \frac{1}{L}$. Giả sử $\{n_k\}$ là dãy các số nguyên dương thoả mãn $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k+2} = L$. Ta có thể giả sử rằng các dãy a_{n_k+1}, a_{n_k} và a_{n_k-1} hội tụ tới l_1, l_2 và l_3, tương ứng. Thực ra, nếu khác, ta có thể chọn dãy con thoả mãn. Theo định nghĩa của $\{a_n\}$,

$$l_1 + l_2 = \frac{2}{L} = 2l \quad \text{và} \quad l_2 + l_3 = \frac{2}{l_1},$$

và từ $l \leq l_1, l_2, l_3 \leq L$, ta được $l_1 = l_2 = l$ và $l_2 = l_3 = L$. Từ đó $l = L$. Điều này và đẳng thức $l = \frac{1}{L}$ dẫn đến dãy $\{a_n\}$ hội tụ tới 1.

2.5.81. Vì $0 < a_1 \leq b_1$, tồn tại $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ thoả mãn $a_1 = b_1 \cos\varphi$. Bây giờ ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng, với $\varphi \neq 0$,

$$a_{n+1} = \frac{b_1 \sin\varphi}{2^n \tan\frac{\varphi}{2^n}} \quad \text{và} \quad b_{n+1} = \frac{b_1 \sin\varphi}{2^n \sin\frac{\varphi}{2^n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vì vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{b_1 \sin\varphi}{\varphi}$. Nếu $\varphi = 0$, tức là $a_1 = b_1$, thì các dãy đã cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hằng số.

2.5.82. [18] Theo giả thiết, $\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} = 1 + \varepsilon_{k,n}$, trong đó $\varepsilon_{k,n}$ dần tới 0, đều đối với k. Do đó

(⋆) $$\sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}.$$

Từ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,n}$ tồn tại, có một số $M > 0$ thoả mãn

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}\right| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hơn nữa, với bất kì $\varepsilon > 0$, $|\varepsilon_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{M}$ với $k = 1, 2, \ldots, n$, n đủ lớn. Do đó, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}\right| \leq \varepsilon$. Nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n} = 0$. Vậy, từ $(\star)$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

2.5.83. Ta có

$$\frac{\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}}{\frac{(2k-1)a}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{đều đối với} \quad k.$$

Do đó, theo bài trước,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)a}{n^2} = a.$$

2.5.84. Từ bài 2.5.5, nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ tới 0, thì $\frac{a^{x_n}-1}{x_n\ln a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Điều này dẫn tới

$$\frac{a^{-\frac{k}{n^2}}-1}{\frac{k}{n^2}\ln a} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

đều đối với k. Bây giờ, dùng Bài toán 2.5.82 ta được

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a^{\frac{k}{n^2}}-1) = \lim_{n\to\infty}\ln a\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}\ln a.$$

2.5.85. Nếu $\{x_n\}$là một dãy dương hội tụ tới 0, thì, theo Bài toán 2.5.3, $\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Theo 2.5.82, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Vì vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$.

2.5.86. Ta có thể chứng tỏ rằng nếu $\{x_n\}$ là dãy dương hội tụ tới 0 thì

$$(*) \qquad \frac{(1+x_n)^{\frac{1}{p}}-1}{\frac{1}{p}x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Đặt

$$c_{k,n} = \frac{k^{q-1}}{n^p}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Khi đó $c_{k,n} \le \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n^q}\}$, và vì vậy $\{c_{k,n}\}$ hội tụ tới 0 đều đối với k. Khi đặt $a_{k,n} = (1+c_{k,n})^{\frac{1}{p}} - 1$ và $b_{k,n} = \frac{1}{p}c_{k,n}$, rồi sử dụng 2.5.82 ta nhận được

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{k^{q-1}}{n^q}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right) = \frac{1}{p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{q-1}}{n^q}.$$

Theo định lý Stolz (xem 2.3.11)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{q-1}}{n^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{q-1}}{n^q-(n-1)^q}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{q-1}}{n^q-n^q\left(1-\frac{1}{n}\right)^q}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{q-1}}{n^q-n^q\left(1-q\frac{1}{n}+\frac{q(q-1)}{2}\frac{1}{n^2}-\cdots\right)}=\frac{1}{q}.$$

2.5.87. Đặt $a_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}$. *Khi đó*

$$a_n=\frac{a}{b}\frac{\left(1+\frac{d}{a}\right)\cdots\left(1+n\frac{d}{a}\right)}{\left(1+\frac{d}{a}+\left(\frac{b}{a}-1\right)\right)\left(1+2\frac{d}{a}+\left(\frac{b}{a}-1\right)\right)\cdots\left(1+n\frac{d}{a}+\left(\frac{b}{a}-1\right)\right).}$$

Bây giờ đặt $x=\frac{b}{a}-1$, *khi đó với* $x>0$ *và*

$$a_n=\frac{a}{b}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1+\frac{d}{a}}\right)\left(1+\frac{x}{1+2\frac{d}{a}}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}\right)}.$$

Vì

$$\frac{x}{1+\frac{d}{a}}+\cdots+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}<\left(1+\frac{x}{1+\frac{d}{a}}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{1+n\frac{d}{a}}\right),$$

ta có

$$a_n<\frac{a}{bx\left(\frac{1}{1+\frac{d}{a}}+\frac{1}{1+2\frac{d}{a}}+\cdots+\frac{1}{1+n\frac{d}{a}}\right)}.$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ *vì*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{d}{a}}+\frac{1}{1+2\frac{d}{a}}+\cdots+\frac{1}{1+n\frac{d}{a}}\right)=+\infty.$$

Chương 3

Chuỗi số thực

3.1 Tổng của chuỗi

3.1.1.

(a) *Ta có* $a_1 = S_1 = 2$, $a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}$, $n > 1$. *Do đó, chuỗi cần tìm là* $2 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ *và tổng của nó là* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

(b) $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1$.

(c) *Vì* $a_n = \arctan n - \arctan(n-1)$ *nên* $\tan a_n = \frac{1}{n^2-n+1}$. *Do đó* $a_n = \arctan \frac{1}{n^2-n+1}$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2-n+1} = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a_1 = -1$, $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)}$ *với* $n > 1$. *Tổng của chuỗi là*

$$-1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)} = 0.$$

3.1.2.

(a) *Ta có* $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. *Do đó* $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ *và* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

(b) *Tương tự,* $a_n = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$. *Suy ra* $S_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$ *và* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{8}$.

(c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$. Do đó $S_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ và $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

(d) $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$. Do đó $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

(e) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

3.1.3.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \ln 1 - \ln 4 + \ln 2 + \ln 4 - \ln 1 - \ln 7 + \ln 3 + \ln 7 - \ln 2 \\ &\quad - \ln 10 + ... + \ln n + \ln(3n-2) - \ln(n-1) - \ln(3n+1) \\ &\quad + \ln(n+1) + \ln(3n+1) - \ln n - \ln(3n+4) = \ln\frac{n+1}{3n+4}. \end{aligned}$$

Do đó $S = \ln\frac{1}{3}$.

(b) $S = \ln 2$.

3.1.4.

(a) Ta có

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)...(n+m)} \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)...(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+m)}\right). \end{aligned}$$

Do đó $S_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1.2....m} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+m)}\right)$ và $S = \frac{1}{mm!}$.

(b) $a_n = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right)$, $S = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{m}\right)$.

(c) Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+3)(n+4)} \\ &- \frac{11}{2}\left(\frac{1}{(n+1)(n+3)} - \frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) \\ &+ \frac{11}{4}\left(\frac{1}{(n+1)(n+4)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng câu (b) thu được $S = \frac{5}{36}$.

3.1.5.

(a) Với $n \geq 5$*, ta có*

$$S_n = \sin\frac{\pi}{720} + \sin\frac{\pi}{360} + \sin\frac{\pi}{120} + \sin\frac{\pi}{60} + \sin\frac{\pi}{30} + \sin\frac{\pi}{6}.$$

(b) Chú ý rằng $0 \leq \frac{\ln n}{n-\ln n} < 1$, $n \in \mathbb{N}$*. Do đó* $S = 0$*.*

3.1.6. Từ $a_n = \sin\frac{1}{2^{n+1}}\cos\frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}(\sin\frac{1}{2^{n-1}} - \sin\frac{1}{2^n})$*, suy ra* $S = \frac{1}{2}\sin 1$*.*

3.1.7. Chú ý rằng

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!(n^4+n^2+1)}\\&= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(n+1)!((n+1)n+1)} - \frac{n-1}{n!(n(n-1)+1)} + \frac{1}{(n+1)!}\right).\end{aligned}$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{(n+1)!((n+1)n+1)} + 1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)!}\right).$$

Áp dụng bài 2.5.6 thu được $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}e$*.*

3.1.8. Với $n > 1$ *ta có* $a_1 = \frac{1}{3}$ *và*

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2}\,\frac{(2n+1)-1}{3.5...(2n+1)}\\&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3.5...(2n-1)} - \frac{1}{3.5...(2n+1)}\right).\end{aligned}$$

Do đó

$$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.5...(2n+1)}\right)$$

và $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$*.*

3.1.9. Làm tương tự như bài trên, ta có với $n > 1$ *thì*

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)} &= \frac{a_n+1-1}{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}\\&= \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)...(a_{n-1}+1)} - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}\end{aligned}$$

Do đó $S_n = 1 - \frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)}$*.*

3.1.10.

(a) *Trong bài trên nếu chọn $a_n = n - 1$ thì suy ra $g = +\infty$. Do đó tổng cần tính bằng 1.*

(b) *Tương tự, $a_n = 2n - 1$, $g = +\infty$, tổng cần tính bằng 1.*

(c) *Đặt $a_n = -\frac{1}{n^2}$. Khi đó*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}((a_2+1)(a_3+1)\ldots(a_n+1)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\ldots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Từ bài 3.1.9 suy ra tổng cần tính bằng 1.

3.1.11. *Từ định nghĩa suy ra $\{a_n\}$ là dãy đơn điệu tăng tới vô cùng. Hơn nữa, ta có thể chứng minh rằng $a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \ldots a_{n-1}^2(a_1^2 - 4)$ bằng quy nạp. Do đó*

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} = \sqrt{a_1^2 - 4}.$$

Mặt khác, với $n > 1$ thì

$$\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{a_1a_2\ldots a_{n-1}} - \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\ldots a_n}\right).$$

Từ đó và từ (1) suy ra tổng của chuỗi là

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{2}\frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}.$$

3.1.12. *Ta có*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b} &= \frac{1!}{b-2} - \frac{2!}{(b-2)b}, \\
\frac{2!}{b(b+1)} &= \frac{2!}{(b-2)b} - \frac{3!}{(b-2)b(b+1)}, \\
&\ \vdots \\
\frac{n!}{b(b+1)\ldots(b+n-1)} &= \frac{n!}{(b-2)b(b+1)\ldots(b+n-2)} \\
&\quad - \frac{(n+1)!}{(b-2)b(b+1)\ldots(b+n-1)}.
\end{aligned}$$

Lấy tổng theo vế các đẳng thức trên thu được

$$S_n = \frac{1}{b-2} - \frac{(n+1)!}{(b-2)b(b+1)...(b+n-1)}.$$

Từ bài 2.5.87 suy ra $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{b-2}$.

3.1.13. *Với* $n = 0, 1, ...,$ *đặt* $a_n = \frac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}$. $A_n = a_n(a+n+1)$. *Khi đó* $A_{n-1} - A_n = a_n(b-a-1)$, $n = 0, 1, ...,$ *trong đó* $A_{-1} = a$ *và* $a_{-1} = 1$. *Lấy tổng theo vế các đẳng thức trên từ* $n = 0$ *đến* $n = N$ *thu được*

$$a - A_N = A_{-1} - A_N = (b-a-1)\sum_{n=0}^{N} a_n = (b-a-1)S_{N+1},$$

Do đó

$$(b-a-1)S_{N+1} = a\left(1 - \frac{(a+1)...(a+N+1)}{b(b+1)...(b+N)}\right).$$

Sử dụng kết quả bài 2.5.87, suy ra $\lim\limits_{N\to\infty} S_{N+1} = \frac{a}{b-a-1}$.

3.1.14. *Từ bài trên ta có*

$$(*) \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)} = 1 + \frac{a}{b-a-1} = \frac{b-1}{b-a-1}.$$

Trong (*), *thay* a *bởi* $a+1$ *thu được*

$$(**) \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n-1)} = \frac{b-1}{b-a-2}.$$

Lấy (**) *trừ đi* (*) *được*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(a+1)...(a+n-1)}{b(b+1)...(b+n-1)}\\ &= \frac{b-1}{b-a-2} - \frac{b-1}{b-a-1} = \frac{b-1}{(b-a-1)(b-a-2)}.\end{aligned}$$

3.1.15. *Đặt* $A_n = \frac{a_1a_2...a_n}{(a_2+b)(a_3+b)...(a_{n+1}+b)}$ *và* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$. *Khi đó* $\frac{A_k}{A_{k-1}} = \frac{a_k}{a_{k+1}+b}$, *hay tương đương với* $A_k a_{k+1} + A_k b = A_{k-1}a_k$. *Lấy tổng theo vế các đẳng thức trên từ* $k = 2$ *đến* $k = n$ *thu được*

$$(*) \qquad A_n a_{n+1} + S_n b - A_1 b = A_1 a_2.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}0 < A_n a_{n+1} &= a_1 \frac{a_2 a_3 \ldots a_{n+1}}{(a_2+b)(a_3+b)\ldots(a_{n+1}+b)}\\ &= a_1 \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a_2}\right)\left(1+\frac{b}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{a_{n+1}}\right)}.\end{aligned}$$

Từ bài 1.2.1, suy ra

$$0 < A_n a_{n+1} < \frac{a_1}{b\sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k}}.$$

Chứng tỏ $\lim\limits_{n\to\infty} A_n a_{n+1} = 0$ *và từ (*) ta có*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{A_1(b+a_2)}{b} = \frac{a_1}{b}.$$

3.1.16. *Từ công thức lượng giác* $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$, *ta có*

$$\begin{aligned}4\cos^3 x &= \cos 3x + 3\cos x,\\ 4\cos^3 3x &= \cos 3^2 x + 3\cos 3x,\\ 4\cos^3 3^2 x &= \cos 3^3 x + 3\cos 3^2 x,\\ &\vdots\\ 4\cos^3 3^n x &= \cos 3^{n-1} x + 3\cos 3^n x.\end{aligned}$$

Nhân lần lượt các đẳng thức trên với $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{3^n}$ *sau đó cộng lại sẽ được*

$$4S_n = 3\cos x + (-1)^n \frac{1}{3^n} \cos 3^{n-1} x.$$

Do đó $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}\cos x$.

3.1.17.

(a) Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned}f(x) &= af(bx) + cg(x),\\ af(bx) &= a^2 f(b^2 x) + acg(bx),\\ a^2 f(b^2 x) &= a^3 f(b^3 x) + ca^2 g(b^2 x),\\ &\vdots\\ a^{n-1} f(b^{n-1} x) &= a^n f(b^n x) + a^{n-1} cg(b^{n-1} x).\end{aligned}$$

Do đó $f(x) = a^n f(b^n x) + c\left(g(x) + ag(bx) + \ldots + a^{n-1}g(b^{n-1}x)\right)$. *Từ giả thiết* $\lim\limits_{n\to\infty} a^n f(b^n x) = L(x)$ *suy ra* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n g(b^n x) = \frac{f(x)-L(x)}{c}$.

(b) Tương tự câu (a), ta có

$$\begin{aligned}
f(x) &= af(bx) + cg(x),\\
a^{-1}f(b^{-1}x) &= f(x) + a^{-1}cg(b^{-1}x),\\
a^{-2}f(b^{-2}x) &= a^{-1}f(b^{-1}x) + ca^{-2}g(b^{-2}x),\\
&\vdots\\
a^{-n}f(b^{-n}x) &= a^{1-n}f(b^{1-n}x) + a^{-n}cg(b^{-n}x).
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$af(bx) = a^{-n}f(b^{-n}x) - c\left(g(x) + a^{-1}g(b^{-1}x) + \ldots + a^{-n}g(b^{-n}x)\right).$$

Do đó

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} g\left(\frac{x}{b^n}\right) = \frac{M(x) - af(bx)}{c}.$$

3.1.18. *Áp dụng bài trên với* $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin^3 \frac{x}{3}$, $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -4$. *Dễ thấy* $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 3^n \sin\frac{x}{3^n} = x$, $M(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n}\sin 3^n x = 0$.

3.1.19. *Áp dụng bài 3.1.17 với* $f(x) = \cot x$, $g(x) = \tan x$, $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ *và*

$$M(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} = \frac{1}{x}.$$

3.1.20. *Áp dụng bài 3.1.17 với*

$$f(x) = \arctan x, \quad g(x) = \arctan\frac{(1-b)x}{1+bx^2}, \quad a = c = 1,$$

và sử dụng công thức

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(b^n x) = \begin{cases} 0 & \textit{với} \quad 0 < b < 1,\\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x & \textit{với} \quad b > 1.\end{cases}$$

3.1.21. *Từ* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ *ta có* $a_{n+1}a_n = a_n^2 + a_{n-1}a_n$ *với* $n \geq 1$. *Lấy tổng theo vế các đẳng thức đó thu được*

$$(*) \qquad S_n = a_n a_{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Có thể chứng minh bằng quy nạp các đẳng thức sau:

(i) $$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right), \quad n \geq 0,$$

(ii) $$a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Kết hợp $(*)$ *với (ii) được*

$$\begin{aligned}\widetilde{S_n} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{S_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k a_{k+1}} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2}{a_k a_{k+1}} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{k-1}}{a_k} - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right) = \frac{a_n}{a_{n+1}}.\end{aligned}$$

Từ (i) ta có

(iii) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Do đó $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{S_n} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

3.1.22. Dễ dàng kiểm tra rằng

(∗) $$(-1)^{n+1} = a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3}, \quad n \geq 0.$$

Do đó

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a_k a_{k+2}} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}a_{k+2} - a_k a_{k+3}}{a_k a_{k+2}} \\ &= -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}}\right) = -3 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}.\end{aligned}$$

Từ (iii) trong bài trên suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sqrt{5} - 2$.

3.1.23. *Sử dụng đẳng thức (*) trong bài trên, ta có*

$$\begin{aligned}\arctan\frac{1}{a_{2n+1}}-\arctan\frac{1}{a_{2n+2}}&=\arctan\frac{a_{2n+2}-a_{2n+1}}{a_{2n+1}a_{2n+2}+1}\\&=\arctan\frac{a_{2n}}{a_{2n}a_{2n+3}}=\arctan\frac{1}{a_{2n+3}}.\end{aligned}$$

Lấy tổng theo vế các đẳng thức trên thu được

$$\arctan\frac{1}{a_1}=\sum_{k=1}^{n+1}\arctan\frac{1}{a_{2k}}+\arctan\frac{1}{a_{2n+3}}.$$

Do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{a_{2n}}=\frac{\pi}{4}$.

3.1.24.

(a) *Với nhận xét rằng* $\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1}$, $n>1$, *ta có kết luận* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan 2+\arctan 1+\arctan\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$.

(b) *Với* $n\in\mathbb{N}$, $\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$. *Từ đó suy ra rằng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan 1=\frac{1}{4}\pi$.

(c) *Với* $n>1$, $\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\arctan\frac{2}{(n-1)^2}-\arctan\frac{2}{(n+1)^2}$, *do đó*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}&=\arctan 2+\arctan 2+\arctan\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\pi+\arctan 2.\end{aligned}$$

3.1.25. *Sử dụng công thức lượng giác*

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$$

dễ dàng chứng minh bài toán. Chú ý rằng các kết quả trong bài 3.1.24 chỉ là trường hợp riêng của bài toán này.

3.1.26. *Giả sử chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là một hoán vị của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Đặt* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ *và* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. *Rõ ràng* $S'_n \le S$. *Do đó dãy* $\{S'_n\}$ *hội tụ tới giới hạn* $S' \le S$. *Tương tự ta cũng có* $S \le S'$. *Chứng tỏ chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ và có cùng tổng với chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1.27. *Vì*

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

và $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$ *nên suy ra*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3.1.28. *[A. M. Yaglom và I. M. Yaglom, Uspehi Mathem. Nauk (NS.) 8(1953) số 5(57), trang 181-187 (tiếng Nga)]*

(a) *Nếu* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *thì* $\sin x < x < \tan x$ *nên khi đó* $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x$. *Chọn* $x = \frac{k\pi}{2m+1}$ *với* $k = 1, 2, \ldots, m$, *sau đó lấy tổng từ* $k = 1$ *đến* $k = m$ *thu được*

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Với $0 < t < \frac{\pi}{2}$, *theo công thức De Moivre ta có*

$$\begin{aligned} \cos nt + i \sin nt &= (\cos t + i \sin t)^n = \sin^n t(\cot t + i)^n \\ &= \sin^n t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cot^{n-k} t. \end{aligned}$$

Chọn $n = 2m + 1$, *đồng nhất phần ảo của đẳng thức trên thu được*

$$\text{(iii)} \qquad \sin(2m+1)t = \sin^{2m+1} t P_m(\cot^2 t),$$

trong đó

(iv) $$P_m(x) = \binom{2m+1}{1}x^m - \binom{2m+1}{3}x^{m-1} + \ldots \pm 1.$$

Trong (iii) thay $t = \frac{k\pi}{2m+1}$ *suy ra* $P_m(\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}) = 0$*. Do đó* $x_k = \cot^2\frac{k\pi}{2m+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m$ *là các nghiệm của đa thức* P_m *và tổng của chúng là*

(v) $$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m-1}{3}}{\binom{2m-1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Từ (i) và (ii) suy ra

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} < m + \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Nhân bất đẳng thức trên với $\frac{\pi^2}{(2m+1)^2}$ *và cho* $m \to \infty$ *thu được (a).*

(b) Chú ý rằng

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m} x_i x_j = 2\frac{\binom{2m+1}{5}}{\binom{2m+1}{1}},$$

trong đó x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ *là các nghiệm của đa thức (iv). Từ đó và từ (v) suy ra*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m}\cot^4\frac{k\pi}{2m+1}\\
&= \left(\frac{m(2m-1)}{3}\right)^2 - 2\frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{5!}\\
&= \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức $\cot^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \cot^2 x$ *(xem (a)) ta có* $\cot^4 x < \frac{1}{x^4} < 1 + 2\cot^2 x + \cot^4 x$ *với* $0 < x < \frac{\pi}{2}$*. Do đó*

$$\begin{aligned}
\frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45} &< \frac{(2m+1)^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^4}\\
&< m + 2m\frac{2m-1}{3} + \frac{m(2m-1)(4m^2+10m-9)}{45}.
\end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được (b).

Chú ý. *Ta có thể áp dụng phương pháp trên để tính tổng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$.

(c) *Từ công thức De Moivre có thể chứng minh rằng với* $m = 4n$, $n \in \mathbb{N}$ *thì*

$$\cos mt = \cos^m t - \binom{m}{2}\cos^{m-2} t \sin^2 t + \ldots + \sin^m t,$$
$$\sin mt = \binom{m}{1}\cos^{m-1} t \sin t + \ldots - \binom{m}{m-1}\cos t \sin^{m-1} t,$$

và do đó

$$\cot mt = \frac{\cot^m t - \binom{m}{2}\cot^{m-2} t + \ldots - \binom{m}{m-2}\cot^2 t + 1}{\binom{m}{1}\cot^{m-1} t - \binom{m}{3}\cot^{m-3} t + \ldots - \binom{m}{m-1}\cot t}.$$

Từ đẳng thức cuối suy ra

$$x_k = \cot\frac{4k\pi + \pi}{4m}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

là các nghiệm của phương trình

$$x^m - \binom{m}{1}x^{m-1} - \binom{m}{2}x^{m-2} + \ldots + \binom{m}{m-1}x + 1 = 0.$$

Chứng tỏ

$$\text{(1)} \qquad \sum_{k=0}^{m-1}\cot\frac{4k\pi + \pi}{4m} = m.$$

Vì $m = 4n$ *nên*

$$\sum_{k=0}^{m-1}\cot\frac{4k\pi+\pi}{4m} = \sum_{k=0}^{2n-1}\cot\frac{4k\pi+\pi}{4m} + \sum_{k=2n}^{m-1}\cot\frac{4k\pi+\pi}{4m}$$
$$= \sum_{k=0}^{2n-1}\cot\frac{4k\pi+\pi}{4m} - \sum_{k=1}^{2n}\cot\frac{4k\pi-\pi}{4m}.$$

Từ đó và từ (1) suy ra

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned}&\cot\frac{\pi}{4m} - \cot\frac{3\pi}{4m} + \cot\frac{5\pi}{4m} - \cot\frac{7\pi}{4m}\\ &+ \ldots + \cot\frac{(2m-3)\pi}{4m} - \cot\frac{(2m-1)\pi}{4m} = m.\end{aligned}$$

Áp dụng công thức lượng giác

$$\cot\alpha - \cot\beta = \tan(\beta-\alpha)\left(1+\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}\right)$$

vào (2) thu được

$$m = \tan\frac{\pi}{2m}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4m}\tan\frac{3\pi}{4m}}+\ldots+\frac{1}{\tan\frac{(2m-3)\pi}{4m}\tan\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Do đó từ bất đẳng thức $\frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x}$ *với* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *suy ra*

$$\text{(3)}\qquad m < \tan\frac{\pi}{2m}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{\frac{\pi}{4m}\frac{3\pi}{4m}}+\ldots+\frac{1}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right).$$

Tương tự, áp dụng công thức lượng giác

$$\cot\alpha - \cot\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

và bất đẳng thức $\frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ *vào (2) thu được*

$$\begin{aligned} m &= \sin\frac{\pi}{2m}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4m}\sin\frac{3\pi}{4m}}+\ldots+\frac{1}{\sin\frac{(2m-3)\pi}{4m}\sin\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right)\\ &> \sin\frac{\pi}{2m}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{4m}\frac{3\pi}{4m}}+\ldots+\frac{1}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\right). \end{aligned}$$

Kết hợp với (3) ta được

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{\tan\frac{\pi}{2m}}-\frac{m}{2}\right)\frac{\pi^2}{16m^2} &< \frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{(2m-3)(2m-1)}\\ &< \frac{\pi^2}{16m\sin\frac{\pi}{2m}}. \end{aligned}$$

Cho $m\to\infty$ *suy ra*

$$\frac{1}{2.3}+\frac{1}{5.7}+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}=\frac{\pi}{8}.$$

3.1.29. *Ta có* $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$. *Do đó* $\frac{1}{a_{n-1}-1} = -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1}$. *Lấy tổng theo vế các đẳng thức đó từ* $n = 1$ *đến* $n = N$ *thu được*

$$(*) \qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_N} = 1 - \frac{1}{a_{N+1} - 1}.$$

Dễ kiểm tra rằng dãy $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng đến vô cùng. Do đó từ (*) suy ra* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 1$.

3.1.30. *Từ định nghĩa dãy* $\{a_n\}$, *ta có*

$$\begin{aligned} e^{a_1} - 1 &= a_1 e^{a_2}, \\ e^{a_2} - 1 &= a_2 e^{a_3}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} e^{a_1} - 1 &= a_1 + a_1 a_2 e^{a_3} = \ldots \\ &= a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_1 a_2 \ldots a_n + a_1 a_2 \ldots a_{n+1} e^{a_{n+2}}. \end{aligned}$$

Mặt khác $\{a_n\}$ *là dãy đơn điệu giảm hội tụ về 0 nên*

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 \ldots a_{n+1} e^{a_{n+2}}) = 0.$$

Từ đó suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = e^{a_1} - 1$.

3.1.31. *Ta có* $S_{n+1} = S_n + a_{n-1} = S_n + \frac{1}{S_n} - \sqrt{2}$. *Xét hàm* $f(x) = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}$, $x > 0$. *Nếu dãy* $\{S_n\}$ *hội tụ tới* S *thì* $f(S) = S$. *Nghiệm duy nhất của phương trình đó là* $\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Vì hàm* $x \to f(f(x)) - x$ *đơn điệu giảm trên khoảng* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ *nên nếu* $x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ *thì*

$$f(f(x)) - x < f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$$

Mặt khác hàm f *đơn điệu giảm trên khoảng* $(0, 1)$ *nên* $f(f(x)) > \frac{1}{\sqrt{2}}$ *với* $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. *Do đó*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < f(f(x)) < x \quad \text{với} \quad x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Chứng tỏ $\{S_{2n-1}\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới nên nó hội tụ và có giới hạn là $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} f(S_{2n-1}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ và có tổng là $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.1.32.

(a) *Chú ý rằng*

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Do đó từ bài 2.5.8 (a), ta có $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$. Rõ ràng

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) = \ln 2.$$

(b) *Ta có $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$. Do đó từ (a) suy ra*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1} \\ &= \ln 2 - (\ln 2 - 1) = 1. \end{aligned}$$

(c) *Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi được cho. Khi đó*

$$S_{2n} = \frac{1}{x+2n+1} + \frac{1}{x+2n+2} + \ldots + \frac{1}{x+4n-1} + \frac{1}{x+4n}.$$

Làm tương tự như bài 2.5.8 có thể chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2$. Rõ ràng $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \ln 2$.

3.1.33. *Ta có*

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln\frac{2}{1} - \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} - \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{2n}{2n-1} - \ln\frac{2n+1}{2n} \\ &= \ln\frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)} - \ln\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots 2n} \\ &= \ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Từ công thức Wallis, $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$ *suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ln\frac{\pi}{2}$.

3.1.34. Ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\
&=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Từ bài trên suy ra tổng của chuỗi là $\ln 2 - 2\ln\frac{\pi}{2}$.

3.1.35. Tổng riêng thứ n *của chuỗi có thể viết dưới dạng*

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-(\ln 2-\ln 1+\ln 3-\ln 2\\
&+\ldots+\ln(n+1)-\ln n) = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1).
\end{aligned}$$

Do đó từ bài 2.1.41 suy ra tổng của chuỗi chính là hằng số Euler γ.

3.1.36. [20] Đặt $F(x) = \int_1^x f(t)dt$. *Từ định lý Taylor suy ra tồn tại* x_k, y_k *sao cho* $k < x_k < k+\frac{1}{2}$, $k+\frac{1}{2} < y_k < k+1$ *thoả mãn*

$$F\left(k+\frac{1}{2}\right) - F(k) = \frac{1}{2}f(k) + \frac{1}{8}f'(x_k),$$

$$-F\left(k+\frac{1}{2}\right) + F(k+1) = \frac{1}{2}f(k+1) - \frac{1}{8}f'(y_k).$$

Lấy tổng theo vế các đẳng thức đó từ $k=1$ *đến* $k=n-1$ *thu được*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-F(n)\\
=&\frac{1}{8}\left(f'(y_1)-f'(x_1)+f'(y_2)-f'(x_2)+\ldots+f'(y_{n-1})-f'(x_{n-1})\right).
\end{aligned}$$

Giới hạn ở vế phải đẳng thức trên tồn tại vì $f'(y_1)-f'(x_1)+f'(y_2)-f'(x_2)+\ldots$ *là chuỗi đan dấu và các số hạng có trị tuyệt đối đơn điệu giảm về 0.*

Nếu lấy hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ *thì có thể chứng minh được sự tồn tại của giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

(So sánh với 2.1.41 (a)). Lấy $f(x) = \ln x$, ta chứng minh được dãy

$$\left\{\ln n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n\right\}$$

hội tụ. (Theo công thức Stirling giới hạn của dãy đó là $\ln\sqrt{2\pi}$.)

3.1.37. *Áp dụng bài trên với hàm $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, suy ra sự tồn tại của giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2}\right) = s.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_{2n} &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} - \dots + \frac{\ln 2n}{2n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln 2n}{2n} - \frac{(\ln 2n)^2}{2}\right)\right.\\
&\left. + 2\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{4} + \dots + \frac{\ln 2n}{2n}\right) - \frac{(\ln 2n)^2}{2}\right)\\
&= -s + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2}\right)\\
&\quad + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 2}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \dots + \frac{\ln 2}{n} - \ln 2\ln n\right) - \frac{(\ln 2)^2}{2}\\
&= \ln 2\left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right),
\end{aligned}$$

trong đó γ là hằng số Euler.

3.1.38. *Từ công thức Stirling $n! = \alpha_n\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, trong đó $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 1$, ta có*

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}}{((2n-1)!!)^2 e^{2n}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}2^{2n}(n!)^2}{((2n)!)^2 e^{2n}}\\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{(2n+1)^{2n}2^{2n}\alpha_n^2 2\pi n(\frac{n}{e})^{2n}}{\alpha_{2n}^2 4\pi n(\frac{2n}{e})^{4n}e^{2n}} = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n}\frac{\alpha_n^2}{2\alpha_{2n}^2}\right).
\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$.

3.1.39. Giả sử có hai giá trị x và y để chuỗi đã cho hội tụ. Đặt

$$S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)k+1}+\frac{1}{(n-1)k+2}+\ldots+\frac{1}{nk-1}-\frac{x}{nk}\right).$$

Khi đó $S_N(x)-S_N(y)=\frac{y-x}{k}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. *Từ sự hội tụ của hai chuỗi đó suy ra* $x=y$. *Bây giờ, ta sẽ tìm giá trị của x sao cho chuỗi đã cho hội tụ. Theo 2.1.41 thì dãy* $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{nk}-\ln(nk)$ *hội tụ tới hằng số Euler γ. Do đó*

$$\begin{aligned}S_N(k-1)&=a_N+\ln(Nk)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{nk}-\sum_{n=1}^{N}\frac{k-1}{nk}\\&=a_N+\ln k+\left(\ln N-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng $\lim\limits_{N\to\infty}S_N(k-1)=\gamma+\ln k-\gamma=\ln k$. *Chứng tỏ* $x=k-1$ *và tổng của chuỗi bằng* $\ln k$.

3.1.40. Dễ dàng chứng minh rằng

$$\begin{aligned}&a_{2n}=3n+2\quad \text{với}\quad n=0,1,2,\ldots,\\&a_{2n-1}=3n+1\quad \text{với}\quad n=1,2,\ldots\end{aligned}$$

bằng quy nạp. Do đó

$$(*)\quad\begin{aligned}S_{2N}&=\sum_{n=0}^{2N}(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\frac{1}{a_n^2-1}=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{a_{2n}^2-1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{a_{2n-1}^2-1}\\&=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{1}{(3n+1)(3n+3)}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{3n(3n+2)}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+3}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n}-\frac{1}{3n+3}\right)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{3n}+\frac{(-1)^{N+1}}{6(N+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right).\end{aligned}$$

Mặt khác, theo 3.1.32 (a) ta có

$$\begin{aligned}
-\ln 2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{3N}(-1)^n\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{3n}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{3}\ln 2 - \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N-1}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right) = \frac{2}{3}\ln 2$. *Kết hợp với (*) thu được* $\lim\limits_{N\to\infty} S_{2N} = \frac{1}{6}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. *Hơn nữa* $\lim\limits_{N\to\infty} S_{2N+1} = \lim\limits_{N\to\infty} S_{2N} + \lim\limits_{N\to\infty}\frac{(-1)^{N+1}}{(3N+4)^2-1} = \lim\limits_{N\to\infty} S_{2N}$, *chứng tỏ tổng của chuỗi đã cho bằng* $\frac{1}{4}$.

3.1.41.

(a) *Giả sử phản chứng rằng tổng S của chuỗi đã cho là một số hữu tỷ, tức là $S = \frac{p}{q}$. Khi đó* $(q-1)!p = q!S = \sum\limits_{n=1}^{q}\frac{q!}{n!} + \sum\limits_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}$. *Điều đó chứng tỏ* $\sum\limits_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!}$ *là một số nguyên. Mặt khác*

$$\begin{aligned}
0 < \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} &\le \frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)^2}+\dots\\
&= \frac{q+2}{(q+1)^2} \le \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

suy ra mâu thuẫn. Vậy S là một số vô tỷ.

(b) *Làm tương tự như câu (a).*

3.1.42. Giả sử phản chứng rằng tổng S của chuỗi đã cho là một số hữu tỷ, tức là $S = \frac{p}{q}$. Khi đó

$$(q-1)!p = q!S = \sum_{n=1}^{q}\frac{q!\varepsilon_n}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!\varepsilon_n}{n!}.$$

Điều đó chứng tỏ $\sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$ *là một số nguyên. Mặt khác*

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| \le \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} < 1.$$

Do đó để suy ra mâu thuẫn, ta chỉ cần chứng minh rằng $\sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}$ *khác 0. Thật vậy*

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| \ge \left|\frac{1}{q+1} - \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!}{n!}\right| > \frac{1}{q+1} - \frac{1}{q(q+1)} \ge 0.$$

Chứng tỏ S là một số vô tỷ.

3.1.43. Làm tương tự như bài trên.

3.1.44. Giả sử phản chứng rằng $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. *Theo giả thiết có tồn tại một số nguyên dương k sao cho nếu $i \ge k$ thì* $\frac{n_i}{n_1 n_2 \dots n_{i-1}} > 3q$. *Do đó*

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i} + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i} = p n_1 n_2 \dots n_{k-1}.$$

Mặt khác

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{n_1 n_2 \dots n_{k-1} q}{n_i} < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k n_{k+1}} + \dots\right) < 1,$$

suy ra mâu thuẫn.

3.1.45. Nếu tổng của chuỗi là số hữu tỷ $\frac{p}{q}$ *thì với mọi số nguyên dương k_1 ta có* $\sum\limits_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{p}{q} - \sum\limits_{k=1}^{k_1-1} \frac{1}{n_k}$. *Do đó tổng* $\sum\limits_{k=k_1}^{\infty} \frac{q n_1 n_2 \dots n_{k_1-1}}{n_k}$ *là một số nguyên dương. Suy ra*

$$(*) \qquad \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \ge \frac{1}{q n_1 n_2 \dots n_{k_1-1}}.$$

Đặt $\varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{n_{k-1}} = l > 1$ *và chọn $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $\alpha = l - \varepsilon > 1$. Khi đó sẽ tồn tại một chỉ số k_0 sao cho nếu $k > k_0$ thì*

$$(**) \qquad \frac{n_k}{n_{k-1}} \ge \alpha > 1.$$

Vì $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{n_k}{n_1\dots n_{k-1}} = +\infty$ *nên tồn tại một số* $k_1 > k_0$ *sao cho* $\frac{n_{k_1}}{n_1\dots n_{k-1}} > \frac{\alpha q}{\alpha-1}$*. Từ (**) suy ra*

$$\sum_{k=k_1}^{\infty}\frac{1}{n_k} \le \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^j n_{k_1}} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)n_{k_1}} < \frac{1}{qn_1n_2\dots n_{k_1-1}}.$$

Điều này mâu thuẫn với (*).

3.1.46. *Giả sử rằng* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k} = \frac{p}{q}$*, trong đó* p *và* q *là các số nguyên dương. Khi đó*

$$n_1n_2\dots n_{k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n_{k+1}} \ge \frac{1}{q}$$

với mọi $k \ge 2$*. (Xem bài trên.) Đặt* $a_k = \sqrt[2^k]{n_k}$*. Theo giả thiết* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$*. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại số nguyên dương* r_1 *sao cho* $a_j \le a_{r_1}$ *với* $j = 1, 2, \dots, r_1 - 1$*. Thực vậy, nếu* $a_1 \le a_2$ *thì* $r_1 = 2$*. Nếu* $a_1 > a_2$ *thì chọn* r_1 *là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn 2 sao cho* $a_1 \le a_{r_1}$*. Làm tương tự ta có thể tìm được dãy số nguyên* r_k *có tính chất* $a_j \le a_{r_k}$ *với* $j = 1, 2, \dots, r_k - 1$*. Gọi* r *là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho* $a_{r+j} > q + 1$ *với* $j = 0, 1, 2, \dots$ *và* $a_j \le a_r$ *với* $j = 1, 2, \dots, r - 1$*. Chú ý rằng* $n_r \le n_{r+j}$ *nên* $a_r \le a_{r+j}^{2^j}$ *với* $j = 0, 1, 2, \dots$*. Do đó*

$$\frac{n_1n_2\dots n_{r-1}}{n_{r+j}} \le \frac{a_r^{2+2^2+\dots+2^{r-1}}}{n_{r+j}} \le \frac{a_{r+j}^{2^j(2^r-2)}}{a_{r+j}^{2^{r+j}}} = a_{r+j}^{-2^{j+1}} < (q+1)^{-(j+1)}.$$

Chứng tỏ

$$n_1n_2\dots n_{r-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n_{r-j}} < \sum_{j=0}^{\infty}(q+1)^{-(j+1)} = \frac{1}{q},$$

suy ra mâu thuẫn.

3.1.47. *Vì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ *hội tụ nên* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n-1} = 0$*. Do đó từ bất đẳng thức đã cho suy ra* $\frac{p_m}{q_m-1} \ge \sum\limits_{n=m}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$*. Giả sử tập* A *hữu hạn. Khi đó sẽ tồn tại một chỉ số* m *sao cho*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n} = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{p_n}{q_n} + \frac{p_m}{q_m-1}.$$

Chứng tỏ S là số hữu tỷ. Giả sử rằng

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Khi đó

$$r_n = \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{q_k} \leq \frac{p_{n+1}}{q_{n+1} - 1}.$$

Nhân hai vế bất đẳng thức trên với $b_n = qq_1 ... q_n$ thu được

$$\begin{aligned} b_{n+1} r_{n+1} &= b_n r_n q_{n+1} - qq_1 ... q_{n+1} \frac{p_{n-1}}{q_{n+1}} \\ &\leq b_n r_n q_{n+1} - b_n r_n (q_{n+1} - 1) = b_n r_n. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\{b_n r_n\}$ là một dãy số nguyên dương đơn điệu giảm. Do đó bắt đầu từ một chỉ số nào đó, các số hạng của dãy đều bằng nhau. Điều đó mâu thuẫn với giả thiết A hữu hạn.

3.1.48. Rõ ràng, ta có thể viết $n! = 2^{\alpha(n)}\beta(n)$, trong đó $\beta(n)$ là một số lẻ, còn $\alpha(n)$ được tính bởi công thức $\alpha(n) = n - \nu(n)$, trong đó $\nu(n)$ là tổng các chữ số của số n viết trong hệ cơ số 2 (định lý Legendre). Hơn nữa, ta có $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n_k}}{n_k!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}$, trong đó $\delta_n = 1$ nếu $n = n_k$ và $\delta(n) = 0$ nếu ngược lại. Giả sử phản chứng rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!} = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{N}$. Viết $q = 2^s t$, trong đó t lẻ. Chọn $N = 2^r > \max\{t, 2^{s+2}\}$, khi đó $\frac{\beta(N)}{t} \in \mathbb{N}$, do đó $2^s\beta(N)\frac{p}{q} = \frac{\beta(N)}{t}p \in \mathbb{N}$. Theo định lý Legendre ta có $N! = 2^{N-1}\beta(N)$. Nhân hai vế của đẳng thức

$$\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}$$

với $2^s\beta(N)$ thu được

$$(*) \qquad 2^s\beta(N)\frac{p}{q} = 2^s\beta(N) \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} + 2^s\beta(N) \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \frac{2^n}{n!}.$$

Chú ý rằng

$$2^s\beta(N) \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{2^n}{n!} = 2^s \sum_{n=1}^{N} \delta_n \frac{\beta(N) 2^n}{2^{\alpha(n)}\beta(n)}.$$

Chứng tỏ số hạng đầu ở vế phải của (∗) là một số nguyên. Do đó để suy ra mâu thuẫn ta sẽ chứng minh rằng $0 < 2^s\beta(N)\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\delta_n\frac{2^n}{n!} < 1$. *Thực vậy*

$$\begin{aligned}
&2^s\beta(N)\sum_{n=N+1}^{\infty}\delta_n\frac{2^n}{n!} = 2^{s-N+1}N!\sum_{n=N+1}^{\infty}\delta_n\frac{2^n}{n!}\\
&= 2^{s+2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\delta_n 2^{n-N-1}\frac{N!}{n!} < \frac{2^{s+2}}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{2}{N+2}\right)^{n-N-1}\\
&= \frac{2^{s+2}}{N+1}\frac{N+2}{N} < \frac{2^{s+3}}{N+1} < 1.
\end{aligned}$$

3.2 Chuỗi dương

3.2.1.

(a) *Ta có*

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3+1}}\\
&\times \frac{3n^4-2n^3+3n^2}{(n^2+1)^2+(n^2+1)\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+(n^3+1)\sqrt[3]{n^3+1}}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Theo dấu hiệu so sánh chuỗi đã cho phân kỳ.

(b) *Vì* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{n}{n^2-n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$ *nên chuỗi hội tụ.*

(c) *Có thể chứng minh bằng quy nạp rằng*

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1} \quad \text{với} \quad n > 2.$$

Do đó chuỗi phân kỳ theo dấu hiệu so sánh.

(d) *Chuỗi hội tụ vì* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e}$.

(e) $1-\cos\frac{1}{n}=2\sin^2\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n^2}$, *suy ra chuỗi hội tụ.*

(f) *Vì* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$ *nên chuỗi hội tụ.*

(g) *Theo bài 2.5.4 (a), ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a.$$

Do đó chuỗi phân kỳ.

3.2.2.

(a) *Chuỗi hội tụ vì* $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$.

(b) *Sự hội tụ của dãy được suy từ bất đẳng thức*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}<\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)},\quad \text{với}\quad n>1.$$

(c) *Sử dụng bất đẳng thức* $\ln n<n$ *ta nhận được* $\frac{1}{n^2-\ln n}<\frac{1}{n(n-1)}$. *Do đó chuỗi đang xét là hội tụ.*

(d) *Ta có*

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}.$$

Suy ra chuỗi phân kỳ.

(e) *Sử dụng phương pháp phép tính vi phân, ta có thể chứng minh rằng với* x *đủ lớn bất đẳng thức* $(\ln\ln x)^2<\ln x$ *đúng. Khi đó ta có*

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}>\frac{1}{n}$$

với n *đủ lớn, từ đó suy ra chuỗi phân kỳ.*

3.2.3. *Đặt* $c_n=\frac{a_n}{b_n}$, *từ giả thiết ta được*

$$c_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leq\frac{a_n}{b_n}=c_n,\quad n\geq n_0,$$

tức là dãy $\{c_n\}$ *tăng đơn điệu với* $n\geq n_0$. *Điều này chứng tỏ rằng dãy bị chặn, tức là tồn tại* $C>0$ *sao cho* $0<c_n<C$, $n\in\mathbb{N}$. *Từ đó suy ra* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nb_n<C\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, *và ta suy ra điều phải chứng minh.*

3.2.4.

(a) *Từ bài toán 2.1.38 ta có*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}.$$

Ta có kết luận rằng chuỗi hội tụ nhờ sử dụng dấu hiệu hội tụ của bài toán trên.

(b) *Tương tự, sử dụng 2.1.38 ta có*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{(n+1)}}{\frac{1}{n}}.$$

Nếu chuỗi đã cho hội tụ thì sử dụng bài 3.2.3 ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *cũng hội tụ, điều này là vô lý, ta suy ra chuỗi đang xét phân kỳ.*

3.2.5.

(a) *Từ bài toán 2.5.4 (a), ta có chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)^{\alpha}$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *cùng hội tụ hoặc phân kỳ, suy ra chuỗi đang xét sẽ hội tụ với* $\alpha > 1$ *và phân kỳ với* $\alpha \le 1$.

(b) *Từ lời giải bài 2.5.4 (b) ta có* $\ln n < n(\sqrt[n]{n}-1)$*, do đó với* $n > 3$ *và* $\alpha > 0$ *ta được*

$$\frac{1}{n^{\alpha}} < \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha} < (\sqrt[n]{n}-1)^{\alpha}.$$

Điều này cho thấy rằng chuỗi phân kỳ với $0 < \alpha \le 1$*, trong trường hợp* $\alpha \le 0$ *các số hạng trong chuỗi không thoả mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ. Đối với trường hợp* $\alpha > 1$ *sử dụng bài tập 2.5.5 ta kết luận rằng chuỗi hội tụ khi và chỉ khi chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$ *hội tụ. Sự hội tụ của chuỗi sau được suy ra từ bài toán 3.2.3 vì với* n *đủ lớn ta có*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}\right)^{\alpha} \le 2^{\alpha}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}.$$

(c) Từ bài 2.5.5 ta có chuỗi hội tụ khi và chỉ khi chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right)^{\alpha}$$

hội tụ. Sử dụng bất đẳng thức $\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < x$ *với* $x > 0$ *trong bài 2.5.3 ta suy ra*

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} - 1\right)^{\alpha} < \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \textit{với} \quad \alpha > 1$$

và

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right)^{\alpha} > \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}}, \quad \textit{với} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Từ đó suy ra chuỗi hội tụ khi $\alpha > 1$ *và phân kỳ với* $0 < \alpha \leq 1$. *Hơn nữa chú ý rằng với* $\alpha \leq 0$ *chuỗi không thoả mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ, suy ra nó cũng phân kỳ.*

(d) Dễ dàng kiểm tra đẳng thức

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6}.$$

Do đó chuỗi hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ *hội tụ, và vì vậy chuỗi sẽ phân kỳ với* $\alpha \leq \frac{1}{2}$ *và hội tụ với* $\alpha > \frac{1}{2}$.

3.2.6. *Từ 2.5.5 ta được* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n \ln a}{a^{a_n}-1} = 1$ *và do đó chuỗi đang xét hội tụ khi và chỉ khi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

3.2.7.

(a) Sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n-1}^{\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ *được suy từ đẳng thức*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{2n^2}} = 1.$$

(b) Nếu $c \neq 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} c^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} = c^{\frac{a}{c}} \neq 0.$$

Từ đó suy ra chuỗi đang xét hội tụ.

Nếu $c = 0$ và $\frac{a}{d} \geq 0$ thì điều kiện cần của chuỗi hội tụ không thoả mãn. Còn nếu $c = 0$ và $\frac{a}{d} < 0$ thì

$$e^{\frac{a\ln n-b}{d}} = e^{\frac{b}{d}} e^{\frac{a}{d}\ln n} = e^{\frac{b}{d}} n^{\frac{a}{d}}.$$

Do đó trong trường hợp này chuỗi hội tụ với $\frac{a}{d} < -1$ và phân kỳ với $\frac{a}{d} \geq -1$.

(c) Ta có

$$\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} = \frac{1}{(n+a)^b\left(1+\frac{a}{n}\right)^n (n+b)^a\left(1+\frac{b}{n}\right)^n}.$$

Tức là chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}}$ hội tụ.

3.2.8. *Sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức $\sqrt{a_n a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$, hơn nữa nếu dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm thì $\sqrt{a_n a_{n+1}} \geq a_{n+1}$, từ đó suy ra sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ được suy ra trực tiếp từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$. Bây giờ xét dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa*

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ}, \\ \frac{1}{n^4} & \text{nếu } n \text{ chẵn}. \end{cases}$$

Thế thì

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{a_k a_{k+1}} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ hội tụ trong khi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3.2.9.

(a) *Trước tiên chú ý rằng nếu dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên bởi một số $M > 0$ nào đó thì*

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+M}.$$

Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ phân kỳ. Mặt khác nếu dãy $\{a_n\}$ không bị chặn trên thì sẽ tồn tại một dãy con $\{a_{n_k}\}$ tiến tới vô cùng. Khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n_k}}{1+a_{n_k}} = 1,$$

và vì vậy điều kiện cần của chuỗi hội tụ không được thoả mãn.

(b) *Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ. Ta sẽ chỉ ra các ví dụ để chứng tỏ điều này, xét dãy*

$$a_m = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = m^2,\ m = 1, 2, ..., \\ \frac{1}{n^2} & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Thế thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, nhưng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+ka_k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+k^2} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2}.$$

Trong trường hợp này chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ hội tụ. Nếu chọn $a_n = \frac{1}{n}$ thì cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ phân kỳ.

(c) *Sự hội tụ của chuỗi được suy ra từ bất đẳng thức*

$$\frac{a_n}{1+n^2a_n} \leq \frac{a_n}{n^2a_n} = \frac{1}{n^2}.$$

(d) *Nếu dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên bởi M thì*

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} \geq \frac{a_n}{1+M^2}.$$

Do đó trong trường hợp này chuỗi là phân kỳ, nhưng nếu với $a_n = n^2$ thì ta lại được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ hội tụ.

3.2.10. *Với mọi số nguyên dương n và p ta có*

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k}{S_{n+p}} = \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}}.$$

Vì $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}} = 1$ nên dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ không phải là dãy Cauchy, suy ra chuỗi phân kỳ.

Mặt khác

$$\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{a_n}{S_n S_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n};$$

và do đó

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k}\right) = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+p}} < \frac{1}{S_n}.$$

Ta có kết luận chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

3.2.11. *Ta có*

$$\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}^{\beta}}.$$

Xét p là một số nguyên dương sao cho $\frac{1}{p} < \beta$. Thế thì với n đủ lớn ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}.$$

Điều đó có nghĩa là để có điều phải chứng minh ta chỉ cần xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n S_n^{\frac{1}{p}}}$. Ta có bất đẳng thức

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} \leq p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right),$$

tương đương

$$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leq p\left(1 - \frac{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Sự tương đương được suy ra từ việc áp dụng bất đẳng thức $1 - x^p \leq p(1-x)$ *với* $0 < x \leq 1$ *bằng cách đặt* $x = \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{p}}$. *Từ đó sử dụng bài tập trên ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ với* $\beta > 0$.

3.2.12. *Giả sử rằng* $\alpha > 1$. *Thế thì với* $n \geq 2$,

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{a_n}{S_n S_{n-1}^{\alpha-1}}.$$

Ta có thể suy ra sự hội tụ của chuỗi từ bài tập 3.2.11. Xét $\alpha \leq 1$, *với* n *đủ lớn ta có* $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$. *Từ kết quả này và sử dụng bài 3.2.10 ta suy ra chuỗi phân kỳ với* $\alpha \leq 1$.

3.2.13.

(a) *Từ giả thiết suy ra dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm về 0, hơn nữa*

$$\frac{a_n}{r_{n-1}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}}.$$

Do đó với mọi số n *và* p *nguyên dương ta có*

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p-1}} &= \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} + \ldots + \frac{r_{n+p-1} - r_{n-p}}{r_{n+p-1}} \\ &> \frac{r_n - r_{n+p}}{r_n} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}.\end{aligned}$$

Cố định n *ta có giới hạn* $\lim\limits_{p\to\infty}\left(1 - \frac{r_{n+p}}{r_n}\right) = 1$, *sử dụng tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra chuỗi phân kỳ.*

(b) *Ta có*

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{\sqrt{r_{n-1}}} &= \frac{(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})(\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n})}{\sqrt{r_{n-1}}} \\ &< 2(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}).\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức này ta suy ra rằng dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_{n-1}}}$ *là Cauchy, từ đó suy ra chuỗi hội tụ.*

3.2.14. *Đầu tiên xét trường hợp $\alpha \geq 1$, thế thì với n đủ lớn ta có*

$$\frac{1}{r_{n-1}^{\alpha}} \geq \frac{1}{r_{n-1}}.$$

Sử dụng phần (a) của bài tập trước ta suy ra chuỗi đang xét phân kỳ.

Với $\alpha < 1$, tồn tại số p nguyên dương sao cho $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$, khi đó ta có

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} < \frac{a_n}{(r_{n-1})^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1}} r_{n-1}^{\frac{1}{p}}.$$

Khi cho $x = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$ trong bất đẳng thức $1 - x^p \leq p(1-x)$ với $0 < x \leq 1$, ta được

$$\frac{a_n}{r_{n-1}^{\alpha}} \leq p\left(r_{n-1}^{\frac{1}{p}} - r_n^{\frac{1}{p}}\right).$$

Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy suy ra chuỗi trong đề bài hội tụ.

3.2.15. *Với $0 < \alpha < 1$ có*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\ln^2 r_n}{\frac{a_{n+1}}{r_n^{\alpha}}} = 0,$$

sử dụng bài tập trên ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1}\ln^2 r_n$ hội tụ.

3.2.16. *Ta biết rằng (xem bài tập 2.1.38)*

$$(*) \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Giả thiết rằng $g > 1$ và lấy $\varepsilon >$ đủ bé sao cho $g - \varepsilon > 1$, thế thì tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > g - \varepsilon$ với $n \geq n_0$. Theo (*) ta có

$$n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > g - \varepsilon > n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

từ đó suy ra

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{g-\varepsilon}}}{n^{\frac{1}{g-\varepsilon}}}.$$

Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ theo dấu hiệu đã được chứng minh ở bài tập 3.2.3. Trường hợp* $g = +\infty$ *ta cũng lập luận tương tự. Chứng minh tương tự cách trên ta suy ra chuỗi phân kỳ trong trường hợp* $g < 1$.

Ví dụ sau chứng tỏ dấu hiệu được nêu ở trên không sử dụng được khi $g = 1$. *Chọn* $a_n = \frac{1}{n}$, *thấy rằng* $g = 1$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *phân kỳ. Mặt khác khi đặt* $a_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$ *ta được chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ (bài 3.2.29), trong trường hợp này* g *cũng bằng 1, thật vậy, chú ý rằng*

$$n \ln \frac{\frac{1}{n\ln^2 n}}{\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + 2n\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}.$$

Rõ ràng số hạng đầu của tổng ở vế phải tiến về 1, ta còn phải chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 0$. *Thật vậy, điều phải chứng minh là đúng do*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^n = e^0 = 1.$$

3.2.17.

(a) *Ta có*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln 2 = +\infty.$$

Sử dụng bài tập trên ta suy ra sự hội tụ của chuỗi được cho.

(b) *Tương tự câu trên ta có*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \ln 2 = \ln 2 < 1.$$

Do đó chuỗi phân kỳ theo dấu hiệu Raabe.

(c) *Tương tự, từ*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln 3 > 1,$$

suy ra chuỗi hội tụ.

(d) *Ta có*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n-1}} = \ln a.$$

Do đó chuỗi hội tụ với $a > e$ và phân kỳ với $a < e$. Khi $a = e$ chuỗi được cho sẽ là một chuỗi điều hoà phân kỳ.

(e) *Ta có (xem 3.2.16)*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\cdot\ln a = 0.$$

Do đó sử dụng dấu hiệu hội tụ đã được xét ở bài trước ta suy ra chuỗi hội tụ với mọi $a > 0$.

3.2.18. *Vì*

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n\ln a^{-\frac{1}{n+1}} = \ln\frac{1}{a},$$

nên chuỗi hội tụ khi $0 < a < \frac{1}{e}$, và phân kỳ với $a > \frac{1}{e}$ (tương tự bài 3.2.16). Nếu $a = \frac{1}{e}$ thì (xem 2.1.41) ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = e^{-\gamma},$$

trong đó γ là hằng số Euler. Sử dụng dấu hiệu so sánh và sự phân kỳ của chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ suy ra chuỗi phân kỳ khi $a = \frac{1}{e}$.

3.2.19. *Sử dụng bất đẳng thức $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$ với $x > -1$ ta có*

$$\frac{n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)}{1 + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)} \le n\ln\left(1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \le n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Từ bất đẳng thức trên ta thấy rằng với những r hữu hạn thì hai dấu hiệu Raabe và dấu hiệu được nêu trong bài 3.2.16 là tương đương, đồng thời ta cũng suy ra rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = +\infty$. Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng phép kéo theo còn lại cũng đúng. Thật vậy, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = +\infty$ thì với mọi $A > 0$ tồn tại n_0 sao cho bất đẳng thức $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \frac{A}{n}$ đúng với mọi $n > n_0$. Do đó

$$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \ln\left(1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)^n > \ln\left(1 + \frac{A}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} A.$$

Do A lớn tuỳ ý nên ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = +\infty$. *Lập luận hoàn toàn tương tự cho trường hợp* $r = -\infty$.

3.2.20. Vì dãy $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng nên*

$$0 < n\left(\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n+1}}} - 1\right) = \frac{1}{n}\frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{1}{n}.$$

Sử dụng dấu hiệu Raabe ta suy ra chuỗi đã cho phân kỳ.

3.2.21. Từ định nghĩa của dãy ta suy ra

$$a_n = a_1 e^{-\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k^\alpha} \quad \text{với} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Trước tiên ta sẽ chứng tỏ rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha$ *phân kỳ. Thật vậy nếu chuỗi hội tụ về* S *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 e^{-S} > 0$ *và do đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^\alpha > 0$, *điều này mâu thuẫn với điều kiện cần của chuỗi hội tụ, suy ra chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha$ *phân kỳ, và ta có* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bây giờ giả thiết rằng $\beta > \alpha$, *ta sẽ chứng minh rằng trong trường hợp này chuỗi đang xét sẽ hội tụ, tức là sẽ phải chứng minh rằng*

$$(*) \qquad a_n^{-\alpha} > \alpha(n-1) \quad \text{với} \quad n \geq 1.$$

Bất đẳng thức là hiển nhiên khi $n = 1$. *Giả thiết rằng nó đúng đến* n, *thế thì từ định nghĩa của dãy ta có*

$$a_{n+1}^{-\alpha} = a_n^{-\alpha} e^{\alpha a_n^\alpha} > a_n^{-\alpha}(1 + \alpha a_n^\alpha) = a_n^{-\alpha} + \alpha > \alpha n.$$

Do đó (*) đúng với mọi n *nguyên dương. Với* $n \neq 1$, *bất đẳng thức trên tương đương với*

$$a_n^\beta < (\alpha(n-1))^{-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Do đó sử dụng dấu hiệu so sánh ta có chuỗi sẽ hội tụ khi $\beta > \alpha$. *Xét* $\beta \leq \alpha$, *ta đã có* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *nên với* n *đủ lớn,* $0 < a_n < 1$, *do đó* $a_n^\alpha \leq a_n^\beta$, *đồng thời chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha$ *hội tụ suy ra chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^\beta$ *hội tụ.*

3.2.22. Chú ý rằng

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} a = a.$$

Sử dụng dấu hiệu Raabe ta suy ra chuỗi hội tụ khi $a > 1$ và phân kỳ khi $0 < a < 1$.

Trường hợp $a = 1$ chuỗi sẽ trở thành chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

3.2.23. *Từ đẳng thức*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nb_{n+1}}{(n+1)a} = \frac{b}{a}$$

và dấu hiệu Raabe suy ra chuỗi hội tụ khi $b > a$ và phân kỳ với $b < a$. Trường hợp $b = a$ sự hội tụ của chuỗi phụ thuộc vào dãy $\{b_n\}$. Thật vậy, nếu $\{b_n\}$ là dãy hằng số thì chuỗi của chúng ta sẽ là một chuỗi điều hoà $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Ta sẽ chỉ ra rằng với $b_n = a + \frac{2a}{\ln(n+1)}$ thì chuỗi sẽ hội tụ. Thật vậy, ta có

$$a_n = \frac{n!}{\left(2 + \frac{2}{\ln 2}\right)\left(3 + \frac{2}{\ln 3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(n + 1 + \frac{2}{\ln(n+1)}\right)}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} &a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1} n \ln n \\ &= a_n \left((n-1)\ln(n-1) - \frac{(n+1)n\ln n}{n + 2 + \frac{2}{\ln(n+2)}}\right). \end{aligned}$$

Tính toán ta được

$$\lim_{n\to\infty}\left((n-1)\ln(n-1) - \frac{(n+1)n\ln n}{n + 2 + \frac{2}{\ln(n+2)}}\right) = 1.$$

Do đó với n đủ lớn thì

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1} n \ln n \geq (1-\varepsilon)a_n > 0.$$

Vậy dãy dương $\{a_n(n-1)\ln(n-1)\}$ đơn điệu giảm và do đó hội tụ. Từ đây ta suy ra được sự hội tụ của chuỗi có số hạng tổng quát $a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1} n \ln n$. Sử dụng bất đẳng thức cuối cùng và dấu hiệu so sánh suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

3.2.24. Từ giả thiết ta có

$$a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1} n \ln n = (\gamma_n - 1)a_n.$$

Nếu $\gamma_n \geq \Gamma > 1$ *thì*

(*) $$a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1} n \ln n \geq (\Gamma - 1)a_n.$$

Kết hợp (*) với bất đẳng thức $(n-1)\ln(n-1) > (n-1)\ln n - 1$ *ta được*

(**) $$a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1} n \ln n \geq (\Gamma - 1)a_n > 0.$$

Điều này có nghĩa là dãy $\{a_n(n-1)\ln(n-1)\}$ *giảm đơn điệu, và vì thế nó hội tụ. Do đó chuỗi có số hạng tổng quát là* $a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n-1} n \ln n$ *hội tụ. Từ (**) suy ra chuỗi* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

Nếu $\gamma_n \leq \Gamma < 1$ *thì* $a_n((n-1)\ln n - 1) - a_{n+1} n \ln n \leq (\Gamma - 1)a_n$. *Do đó*

$$a_n(n-1)\ln(n-1) - a_{n+1} n \ln n \leq \left(\Gamma + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) a_n.$$

Vì

$$\lim_{n\to\infty} \left(\Gamma + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) = \Gamma - 1 < 0,$$

thấy rằng dãy $\{a_{n+1} n \ln n\}$ *tăng đơn điệu trừ một số* n *hữu hạn số hạng, do đó tồn tại số thực dương* M *sao cho* $a_{n+1} n \ln n > M$. *Từ đó suy ra* $a_{n+1} > \frac{M}{n \ln n}$, *và ta rút ra kết luận rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

3.2.25. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{\vartheta_n}{n^{\lambda-1}}}{1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^\lambda}} = \alpha.$$

Do đó theo dấu hiệu Raabe ta suy ra sự hội tụ của chuỗi được xét với $\alpha > 1$ *và phân kỳ với* $\alpha < 1$. *Trong trường hợp* $\alpha = 1$ *ta suy ra sự phân kỳ của chuỗi từ dấu hiệu được nêu ở bài trên, vì*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^\lambda} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\gamma_n}{n \ln n},$$

trong đó $\gamma_n = \frac{\vartheta_n \ln n}{n^{\lambda-1}} \leq \Gamma < 1$ *với* Γ *nào đó.*

3.2.26. Ta sẽ sử dụng dấu hiệu Gauss trong bài tập trên. Có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + (\alpha + \beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (1+\gamma)n + \gamma} = 1 - \frac{1 + \gamma - \alpha - \beta}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^2}.$$

Từ đó suy ra chuỗi được nêu trong bài tập sẽ hội tụ khi $\alpha + \beta < \gamma$ và phân kỳ với $\alpha + \beta \geq \gamma$.

3.2.27. Tương tự chứng minh trên ta cũng sẽ sử dụng dấu hiệu Gauss. Ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\frac{p}{2}}{n} - \frac{\vartheta_n}{n^2}.$$

Do đó chuỗi phân kỳ nếu $p \leq 2$ và hội tụ nếu $p > 2$.

3.2.28. Xét S_n, $\widetilde{S_n}$ là tổng riêng thứ n của các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Do đó với $n \leq 2^k$, ta có

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \widetilde{S_k}. \end{aligned}$$

Với $n > 2^k$,

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}-1} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geq a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}\widetilde{S_k}. \end{aligned}$$

Do đó các dãy $\{S_n\}$ và $\{\widetilde{S_n}\}$ đồng thời bị chặn hoặc không bị chặn.

3.2.29.

(a) *Ta sẽ sử dụng tiêu chuẩn nén của Cauchy (xem 3.2.28). Khi ta xét chuỗi sau*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^\alpha},$$

thấy rằng nó hội tụ với $\alpha > 1$ và phân kỳ với $0 < \alpha \leq 1$. Nếu $\alpha \leq 0$ thì sự phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)^\alpha}$ được suy ra trực tiếp từ dấu hiệu so sánh.

(b) Từ đẳng thức

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln\ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2 \ln(n \ln 2)}$$

và từ (a) suy ra chuỗi hội tụ.

3.2.30. Lập luận tương tự như chứng minh cho tiêu chuẩn nén của Cauchy (3.2.28). Với $n \le g_k$,

$$\begin{aligned} S_n \le S_{g_k} &\le (a_1 + \dots a_{g_1-1}) + (a_{g_1} + \dots + a_{g_2-1}) + \dots + (a_{g_k} + \dots + a_{g_{k+1}-1}) \\ &\le (a_1 + \dots a_{g_1-1}) + (g_2 - g_1)a_{g_1} + \dots + (g_{k+1} - g_k)a_{g_k}. \end{aligned}$$

Với $n > g_k$,

$$\begin{aligned} cS_n \ge cS_{g_k} &\ge c(a_{g_1+1} + \dots + a_{g_2}) + \dots + c(a_{g_{k-1}+1} + \dots + a_{g_k}) \\ &\ge c(g_2 - g_1)a_{g_2} + \dots + c(g_k - g_{k-1})a_{g_k} \\ &\ge (g_3 - g_2)a_{g_2} + \dots + (g_{k+1} - g_k)a_{g_k}. \end{aligned}$$

Các bất đẳng thức trên đã chứng minh bài toán.

3.2.31.

(a) Ta áp dụng định lý Schlömilch (3.2.30) với $g_n = 3^n$.

(b) Sử dụng định lý Schlömilch với $g_n = n^2$ ta được hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)a_{n^2}$ hội tụ đồng bậc. Vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_{n^2}}{na_{n^2}} = 2,$$

suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_{n^2}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)a_{n^2}$ cũng hội tụ đồng bậc.

(c) Rút ra từ câu (b).

(d) Từ câu (b) suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ hội tụ đồng bậc. Ta chứng minh được chuỗi sau hội tụ (ví dụ theo dấu hiệu luỹ thừa). Để chứng minh sự hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$, ta sử dụng *định lý nhóm các số hạng của Cauchy hoặc dấu hiệu nêu trong phần (a). Bây giờ ta nghiên cứu dáng điệu của chuỗi với số hạng tổng quát* $\frac{1}{a^{\ln\ln n}}$. *Nếu* $a > 1$ *thì sự hội tụ của chuỗi đang xét sẽ tương đương với sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{a^{\ln n}}$. *Ta có thể dễ dàng kiểm tra rằng chuỗi đó phân kỳ, bằng dấu hiệu so sánh số mũ chẳng hạn. Điều này chứng tỏ cho ta rằng chuỗi* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}}$ *phân kỳ với* $a > 1$. *Chú ý rằng nếu* $0 < a \leq 1$ *thì chuỗi đang xét sẽ không thoả mãn điều kiện cần của chuỗi hội tụ.*

3.2.32. *Từ bài tập 2.4.13 (a), tồn tại một số* $\varepsilon > 0$ *sao cho*

$$(a_n)^{\frac{1}{\ln n}} < e^{-1-\varepsilon}, \quad n > k.$$

Do đó $\frac{1}{\ln n}\ln a_n < -1-\varepsilon$, *và do đó* $a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$. *Sử dụng dấu hiệu so sánh ta suy ra chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

3.2.33. *Tương tự bài trên ta có*

$$a_n \leq \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}, \quad \text{với} \quad n > k \quad \text{và với} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{nào đó.}$$

Do đó theo bài tập 3.2.29 (a) suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*

3.2.34.

$$\begin{aligned}
S_{2^{n_0+k}-1} - S_{2^{n_0}-1} &= \left(a_{2^{n_0}} + a_{2^{n_0}+1} + \ldots + a_{2^{n_0+1}-1}\right) \\
&+ \left(a_{2^{n_0+1}+1} + \ldots + a_{2^{n_0+2}-1}\right) + \ldots \\
&+ \left(a_{2^{n_0+k-1}} + \ldots + a_{2^{n_0+k}-1}\right) \\
&\leq 2^{n_0} a_{2^{n_0}} + 2^{n_0+1} a_{2^{n_0+1}} + \ldots + 2^{n_0+k-1} a_{2^{n_0+k-1}} \\
&\leq g\left(a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+k-1}\right).
\end{aligned}$$

Do đó với k *đủ lớn*

$$(1-g)\sum_{n=2^{n_0}}^{2^{n_0+k}-1} a_n \leq g\left(\sum_{n=n_0}^{2^{n_0}-1} a_n - \sum_{n=n_0+k}^{2^{n_0+k}-1} a_n\right) \leq g\sum_{n=n_0}^{2^{n_0}-1} a_n.$$

Vì vậy dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *bị chặn, do đó chuỗi hội tụ.*

3.2.35. *Giả sử chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ, thế thì*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k = 0.$$

Do đó vì tính đơn điệu của dãy $\{a_n\}$ *ta có*

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} = na_{2n} = \frac{1}{2}(2na_{2n})$$

và

$$\sum_{k=n-1}^{2n+1} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}(2n+1)a_{2n+1}.$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

Đặt $a_n = \frac{1}{n\ln(n-1)}$. *Thế thì chuỗi có số hạng tổng quát* a_n *sẽ phân kỳ và*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

3.2.36. *Đặt*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{với} \quad n = k^2,\ k = 1, 2, \ldots, \\ \frac{1}{n^2} & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Thế thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sẽ hội tụ nhưng giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *không tồn tại.*

3.2.37. *Vấn đề ta cần tìm là sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$. *Thật vậy, nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ *hội tụ, ta có thể đặt* $b_n = \sqrt{a_n}$.

Bây giờ giả sử tồn tại dãy $\{b_n\}$ *sao cho cả hai chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *hội tụ. Ta suy ra rằng*

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{b_n \cdot \frac{a_n}{b_n}} \leq \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{a_n}{b_n}\right),$$

và do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ *hội tụ.*

3.2.38. *Giả sử rằng tồn tại dãy $\{a_n\}$ sao cho cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$ cùng hội tụ, đặt*

$$\mathbf{A} = \left\{ n_s \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_s} \leq \frac{1}{n_s^2 a_{n_s}} \right\} \quad \text{và} \quad \mathbf{A}' = \mathbb{N} \setminus \mathbf{A}.$$

Do đó $\sum\limits_{n_s \in \mathbf{A}} \frac{1}{n_s} < +\infty$ và do đó $\sum\limits_{n_s \in \mathbf{A}'} \frac{1}{n_s} = +\infty$ (tất nhiên $\mathbf{A}$ có thể là tập rỗng).

Bây giờ chú ý rằng $a_{n_s} > \frac{1}{n_s}$ với $n_s \in \mathbf{A}'$, ta suy ra rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, tức là trái với giả thiết.

3.2.39. *Ta có*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + a_{n+1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n a_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n a_n}.$$

Ta sẽ chỉ ra rằng sự hội tụ của chuỗi sẽ kéo theo sự phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n a_n}$. Theo dấu hiệu đánh giá Cauchy, tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi n nguyên dương, $\sum\limits_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{i a_i} < \frac{1}{4}$. Dođó $\frac{n}{n+k} \sum\limits_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{n a_i} < \frac{1}{4}$. Với $n > k$ ta có

$$\sum_{i=k+1}^{k+n} \frac{a_{i+1}}{n a_i} < \frac{1}{4} \cdot \frac{k+n}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

Từ mối liên hệ giữa trung bình cộng và nhân, ta có

$$\sqrt[n]{\frac{a_{k+n+1}}{a_{k+1}}} < \frac{1}{2}, \quad \text{và do đó} \quad a_{k+n+1} < \frac{a_{k+1}}{2^n},$$

suy ra

$$\frac{1}{(k+n+1)a_{k+n+1}} > \frac{2^n}{(k+n+1)a_{k+1}}.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n a_n}$ phân kỳ.

3.2.40. *Tất nhiên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ có thể phân kỳ (ví dụ như nếu $a_n \leq b_n$ với $n \in \mathbb{N}$). Tuy vậy nó hội tụ. Thật vậy, xét chuỗi có các số hạng có dạng*

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{9^2}, \ldots$$

và

$$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{5^2},\ \frac{1}{6^2},\ \frac{1}{7^2},\ \underbrace{\frac{1}{8^2},\ \frac{1}{8^2},\ \ldots,\ \frac{1}{8^2}}_{8^2+1 \text{ lần}},\ \ldots$$

Mỗi chuỗi trên chứa vô hạn đoạn số hạng có tổng lớn hơn 1, do đó chúng phân kỳ, trong trường hợp $c_n = \frac{1}{n^2}$ *và do đó* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *hội tụ.*

3.2.41. Ta sử dụng tiêu chuẩn nén của Cauchy (3.2.28). Sự phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ *tương đương với sự phân kỳ của chuỗi có số hạng tổng quát*

$$b_{2^n} = \min\left\{a_{2^n},\ \frac{1}{n \ln 2}\right\}.$$

Thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{2^n}$ *phân kỳ khi và chỉ khi chuỗi cô đọng của nó với số hạng tổng quát*

$$2^n b_{2^{2^n}} = \min\left\{2^n a_{2^{2^n}},\ \frac{1}{\ln 2}\right\}$$

phân kỳ. Ta sẽ chỉ ra rằng chuỗi này phân kỳ. Thật vậy, nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ *phân kỳ thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{d_n, c\}$ *với* $c > 0$ *sẽ cũng phân kỳ, nếu* $\min\{d_n, c\} = c$ *đối với một số vô hạn số hạng* d_n *thì sự phân kỳ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min\{d_n, \}$ *được suy ra từ sự phân kỳ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$.

3.2.42. Ta có

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n+1}} \le \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}.$$

Từ khẳng định trên và sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ *ta suy ra sự hội tụ của chuỗi đã cho.*

3.2.43. Ta có

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}.$$

Đặt $b_n = a_{n+1} - a_n$ *và* $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, *ta được* $\frac{b_n}{S_n + a_1} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}}$. *Do đó ta suy ra chuỗi phân kỳ dựa vào bài tập 3.2.10.*

3.2.44. *Nếu dãy $\{a_n\}$ không bị chặn thì sự hội tụ của chuỗi được suy ra từ bài 3.2.11, để thấy được điều này ta có thể lập luận tương tự như lập luận trong bài tập trên. Xét trường hợp $\{a_n\}$ bị chặn, ta có*

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^\alpha} \leq \frac{1}{a_2 a_1^\alpha}(a_{n+1}-a_n).$$

Do đó sự hội tụ của chuỗi đang xét được suy ra từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$.

3.2.45. *Ta chỉ cần lấy $c_n = \frac{1}{S_n}$ với S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ như trong bài 3.2.10.*

3.2.46. *Ta có thể đặt $c_n = \frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}$, với $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$, và từ đó sử dụng kết quả của bài 3.2.13 (b).*

3.2.47. *Dãy $\{r_n\}$ là đơn điệu giảm, theo bài 3.2.35 ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, do đó*

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n(r_{n-1} - r_n) = \lim_{n\to\infty}((n-1)r_{n-1} - nr_n + r_{n-1}) = 0.$$

3.2.48.

(a) Vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\quad a_n > 2$ với n đủ lớn. Sự hội tụ của chuỗi được suy ra từ bất đẳng thức $\frac{1}{a_n^n} < \frac{1}{2^n}$ với n đủ lớn.

(b) Như trong (a), n có thể được chọn đủ lớn sao cho $\frac{1}{a_n^{\ln n}} < \frac{1}{3^{\ln n}}$. Vậy, theo 3.2.17(c),chuỗi hội tụ.

(c) Chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ, phụ thuộc vào dãy $\{a_n\}$. Nếu $a_n = \ln n$, $n \geq 2$, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}$ phân kỳ(xem 3.2.2(e)). Mặt khác, nếu $a_n = n$, thì $n > e^{e}$,

$$\frac{1}{a_n^{\ln\ln n}} = \frac{1}{e_n^{\ln\ln n\cdot\ln n}} < \frac{1}{n^\alpha} \text{ với } \alpha > 1.$$

Trong trường hợp này, chuỗi đang xét hội tụ.

3.2.49. *Chuỗi phân kỳ vì điều kiện cần $a_n \to 0$ cho sự hội tụ không được thoả mãn(xem 2.5.25).*

3.2.50. Trước hết, giả sử $p = 0$. Khi đó, theo 2.5.22, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{na_n} = \sqrt{3}$, và vì thế chuỗi phân kỳ. Bây giờ, giả sử $p > 0$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Từ đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{n_p} = 0.$$

Chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn tỉ số.

3.2.51. Quan sát rằng $a_n \in (n\pi, n\pi + \pi/2)$. Từ đó $\frac{1}{a_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2}$ và vì vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$ hội tụ.

3.2.52. Đặt $b_n = \sqrt{a}_n$; khi đó $b_n \in (n\pi, n\pi + \pi/2)$. Từ đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^2}$ hội tụ (xem lời giải của bài toán trước).

3.2.53. Chuỗiphân kỳ do $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 2$ (xem 2.5.29).

3.2.54. Để đơn giản, ta đưa ra kí hiệu sau:

$$L_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} \text{ và } M_n = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$$

Do tính đơn điệu của $\{a_n\}$,

$$(*) \qquad L_n \geq M_n \quad \text{và} \quad L_n - a_1 \leq M_n.$$

Từ đó $2M_n = M_n + M_n \geq M_n + L_n - a_1 = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$. Vậy

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Kết hợp (∗) và (∗∗), ta có

$$\frac{L_n}{M_n} - 1 = \frac{L_n - M_n}{M_n} \geq \frac{a_1}{M_n} \longrightarrow 0 (n \to \infty)$$

3.2.55. Từ định nghĩa của k_n ta có $0 \leq S_{k_n} - n < \frac{1}{k_n}$. Biết rằng $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{k_n} - \ln k_n) = \gamma$, ở đây γ là hằng số Euler (xem 2.1.41), nên

$$\lim_{n\to\infty}(n - \ln k_n) = \lim_{n\to\infty}(n + 1 - \ln k_{n+1}) = \gamma,$$

từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \ln\frac{k_{n+1}}{k_n}\right) = 0,$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$

3.2.56.

(a) *[A. J. Kempner, Amer. Math. Monthly 23(1914), 48-50] Một số có k chữ số số hạng A có thể được viết dưới dạng*

$$10^{k-1}a_1 + 10^{k-2}a_2 + ... + a_k \quad \text{ở đây} \quad 0 < a_i \leq 9, i = 1, 2, ..., k.$$

Với k cho trước, tồn tại 9^k số có k chữ số trong A, và mỗi số lớn hơn 10^{k-1}. Vì vậy

$$\sum_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{k-1}} = 90.$$

(b) *Như trong (a), ta có*

$$\sum_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n^\alpha} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{\alpha(k-1)}}.$$

Vì vậy nếu $\alpha > \log_{10} 9$, thì chuỗi $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ. Ngoài ra, từ

$$\sum_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n^\alpha} > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{(10^k-1)^\alpha} > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^{k\alpha}}$$

chuỗi $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ nếu $\alpha \leq \log_{10} 9$.

Nhận xét. Gọi $\mathbb{A}_k$ là tập con của các số nguyên dương không chứa chữ số k trong khai triển thập phân của chúng. Theo cùng cách này, ta có thể chỉ ra chuỗi $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n^\alpha}$ hội tụ nếu $\alpha > \log_{10} 9$.

3.2.57. *Giả sử rằng* $-\infty < g < 1$ *và lấy* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ để* $g + \varepsilon < 1$. *Khi đó, với* n *đủ lớn,* $\ln \frac{1}{a_n} < (g + \varepsilon) \ln n$ *và* $a_n > \frac{1}{n^{g+\varepsilon}}$. *Vì vậy chuỗi phân kỳ. Nếu* $g = -\infty$ *thì với* n *đủ lớn,* $\ln \frac{1}{a_n} < -1 \cdot \ln n$. *Vậy* $a_n > n$ *và chuỗi phân kỳ. Chứng minh tương tự cho* $g > 1$. *Chúng ta xét hai chuỗi:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *và* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. *Chuỗi đầu tiên phân kỳ và chuỗi thứ hai hội tụ mặc dù* $g = 1$.

3.2.58. *Sự tương đương của các tiêu chuẩn này đã được cho trong lời giải của bài tập 3.2.19. Do 2.5.34, nếu tiêu chuẩn Raabe kết luận được thì tiêu chuẩn của bài toán trước cũng vậy. Để chỉ ra điều ngược lại không đúng chúng ta xét chuỗi với số hạng* a_n *xác định bởi* $a_{2n-1} = \frac{1}{n^2}, a_{2n} = \frac{1}{4n^2}$.

3.2.59. *Cho* $b_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n\text{ - căn}}$, *có* $b_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$ *(so sánh với 2.5.41). Do định nghĩa của* $\{a_n\}$, *ta có* $a_n^2 = 2 - b_{n-1}$, *và do vậy* $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{2^n}$. *Vì thế chuỗi trong bài ra hội tụ.*

3.2.60. *Giả sử* K *là một số dương sao cho*

$$(a_1 - a_n) + (a_2 - a_n) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \leq K \quad \text{với} \quad n \in \mathbb{N}$$

Từ đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$ *ta có* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - na_n \leq K$. *Chọn* $m \in \mathbb{N}$ *bất kỳ. Vì dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu và hội tụ về 0 nên tồn tại* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho :*

$$(*) \qquad a_n \leq \frac{1}{2} a_m \quad \text{với} \quad \forall n \geq n_0.$$

Ta có :

$$a_1 + \ldots + a_m - ma_n + a_{m+1} + \ldots + a_n - (n-m)a_n \leq K.$$

Lại do sự đơn điệu của $\{a_n\}$,

$$a_{m+1} + \ldots + a_n \geq (n-m)a_n \quad \text{và} \quad a_1 + \ldots + a_m \geq ma_m.$$

Vì thế $m(a_m - a_n) = ma_m - ma_n =\leq a_1 + a_2 + \ldots + a_m - ma_n \leq K$. *Từ đây và từ (*) suy ra* $\frac{1}{2} ma_m \leq m(a_m - a_n) \leq K$. *Cuối cùng,*

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = S_m - ma_m + ma_m \leq K + ma_m \leq 3K.$$

3.2.61. *Từ quan hệ*

$$a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n-3} + \ldots, \quad a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$$

suy ra $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$. *Sử dụng phương pháp quy nạp ta có* $a_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$.

3.2.62. [20] *Cho* $r_{n,k} = a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}, n = 1, 2, ..., k = 0, 1, 2, ...,$ *và cho* $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n,k} = r_n, n = 1, 2, ...$ *Giả thiết rằng* $s \in (0, S)$ *và* a_{n_1} *là số hạng đầu tiên của dãy* $\{a_n\}$ *thoả mãn* $a_{n_1} < s$. *Ngược lại tồn tại* k_1 *sao cho* $r_{n_1,k_1} < s \le r_{n_1,k_1+1}$, *hoặc* $r_{n_1} \le s$. *Trong trường hợp thứ hai, ta có* $s \le a_{n_1-1} \le r_{n_1} \le s$ *và do vậy* $r_{n_1} = s$. *Trong trường hợp đầu ta tìm* a_{n_2} *là số hạng đầu thoả mãn* $n_2 > n_1 + k_1$, $r_{n_1,k_1} + a_{n_2} < s$. *Ngược lại tồn tại* k_2 *sao cho* $r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2} < s \le r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2+1}$, *hoặc* $r_{n_1,k_1} + r_{n_2} = s$. *Ta lặp lại quá trình này đến khi trường hợp đầu xuất hiện tại mọi bước thì kết luận rằng* $s = r_{n_1,k_1} + r_{n_2,k_2} + ...$

3.2.63. [20] *Giả sử ngược lại, sẽ có* $k \in \mathbb{N}$ *sao cho* $a_k = 2p + \sum\limits_{n=k-1}^{\infty} a_n$, *ở đây* $p > 0$. *Lúc đó* $a_k - p = p + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n-1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$, *ở đây* ε_n *nhận giá trị 0 hoặc 1. Bởi tính đơn điệu của* $\{a_n\}$, $\varepsilon_n = 0$ *với* $n \le k$. *Do đó* $a_k - p = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n \le \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_k - 2p$, *mâu thuẫn!*

3.2.64. *Theo định lý Stolz (xem 2.3.11), ta có*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 S_1^{-1} + a_2 S_2^{-1} + ... + a_n S_n^{-1}}{\ln S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n S_n^{-1}}{-\ln(1 - a_n S_n^{-1})} = 1.$$

Đẳng thức cuối suy ra từ ,chẳng hạn 2.5.5.

3.2.65. *Đặt* $a_n = 1,\ n \in \mathbb{N}$.

3.2.66. *Vì* $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} > \frac{a_1}{n}$ *nên chuỗi* $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ *hội tụ với mọi dãy dương* $\{a_n\}$. *Sự hội tụ này độc lập với sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_n$.

3.2.67. *Với giả thiết,*

$$a_2 \le a_1, \quad \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} a_k \le \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_k.$$

Vì vậy

$$\sum_{k=1}^{2^n} a_k \le 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + ... + \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) a_1.$$

Hơn nữa,

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}\leq e^{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}}<e.$$

3.2.68. **Đặt** $c_n=\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}=n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$. *Thì*

$$(*)\qquad c_1 \ldots c_n=(n+1)^n \quad \text{và} \quad c_n<ne$$

Dùng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta được

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}=\frac{1}{n+1}\sqrt[n]{a_1c_1\ldots a_nc_n}\leq\frac{a_1c_1+\ldots+a_nc_n}{n(n+1)}.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\leq\sum_{i=1}^{N}\frac{a_1c_1+\ldots+a_nc_n}{n(n+1)}\\
&=a_1c_1\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{N\cdot(N+1)}\right)+\\
&a_2c_2\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{N\cdot(N+1)}\right)+\ldots+a_Nc_N\frac{1}{N(N+1)}\\
&<a_1c_1+a_2c_2\frac{1}{2}+a_3c_3\frac{1}{3}+\ldots+a_Nc_N\frac{1}{N}\leq 2a_1+ea_2+\ldots+ea_N.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng có được do (*). Cho $N\to\infty$, ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

3.2.69. Viết c_n dưới dạng

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{(n+1)^n\cdot\ldots\cdot(n+k-1)^n(n+k)^n}{n^{n-1}\cdot\ldots\cdot(n+k-2)^{n-1}(n+k-1)^{n-1}}\\
&=\left(\frac{n+k}{n}\right)^n n(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+k-1),
\end{aligned}$$

ta được $c_1\cdot\ldots\cdot c_n=(n+1)^n\cdot\ldots\cdot(n+k)^n$. Vì vậy, như trong lời giải của bài *toán trước, ta được*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a_1c_1 + \ldots + a_nc_n}{n(n+1)\cdot \ldots \cdot (n+k)} \\
&= a_1c_1\Big(\frac{1}{1\cdot 2 \ldots \cdot (1+k)} + \ldots + \frac{1}{N\cdot (N+1)\ldots \cdot (N+k)}\Big) \\
&+ a_2c_2\Big(\frac{1}{2\cdot 3 \ldots \cdot (2+k)} + \ldots + \frac{1}{N\cdot (N+1)\ldots \cdot (N+k)}\Big) \\
&+ \ldots + a_Nc_N\frac{1}{N(N+1)\ldots(N+k)} \\
&< \frac{1}{k}\Bigg(\frac{1}{k!}a_1c_1 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (1+k)}a_2c_2 \\
&+ \ldots + \frac{1}{N(N+1)\cdot \ldots \cdot (N+k-1)}a_Nc_N\Bigg).
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ bài tập 3.1.4 (a). Vì

$$\frac{1}{l(l+1)\cdot \ldots \cdot (l+k-1)}c_l = \left(\frac{l+k}{l}\right)^l,$$

cho $N \to \infty$, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

3.2.70. Đặt $T_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ và S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi cần tìm. Khi đó

$$\begin{aligned}
S_N &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(T_n - T_{n-1})}{T_n^2} \leq \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(T_n - T_{n-1})}{T_nT_{n-1}} \\
&= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_{n-1}} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(n+1)^2}{T_n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2}{T_n} \\
&\leq \frac{5}{a_1} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{T_n} \leq \frac{5}{a_1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{T_n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{T_n}.
\end{aligned}$$

Hơn nữa theo bất đẳng thức Cauchy (xem 1.2.12),

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2a_n}{T_n^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} \leq S_N \cdot M$$

với $M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$. *Vì vậy*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{T_n} \le \sqrt{S_N} \cdot \sqrt{M}.$$

Nên, $S_N \le \frac{5}{a_1} + 2\sqrt{S_N}\sqrt{M} + M$, *và*

$$S_N \le \left(\sqrt{M} + \sqrt{2M + \frac{5}{a_1}}\right)^2.$$

3.2.71. *Theo bất đẳng thức trung bình điều hoà (xem 1.2.3)*

$$\frac{\sum\limits_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}}}{2^{k-1}} \ge \frac{2^{k-1}}{\sum\limits_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} [na_n - (n-1)a_{n-1}]}$$
$$= \frac{2^{k-1}}{2^k a_{2^k} - 2^{k-1} a_{2^{k-1}}} \ge \frac{1}{2a_{2^k}}.$$

Vì vậy

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{na_n - (n-1)a_{n-1}} \ge \frac{2^k}{4a_{2^k}}.$$

Nên

$$S_{2^k} \ge \sum_{l=1}^{k} \frac{2^l}{4a_{2^l}}.$$

Sự phân kỳ của chuỗi suy được từ định lý nén của Cauchy (xem 3.2.28).

3.2.72. *Ta sẽ chỉ ra rằng chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ *phân kỳ. Nếu hội tụ thì tồn tại* n *sao cho* $\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}$. *Đặt* $a = p_1 \cdot p_2 \ldots \cdot p_n$. *Khi đó số* $1 + ka$ *với* $k \in \mathbb{N}$ *có thể viết thành tích các số nguyên tố. Sự phân tích này không chứa số nào trong các số* $p_1, \ldots, p_n$. *Vì vậy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+ka} < \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{p_m}\right)^l < \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = 1,$$

mâu thuẫn.

3.2.73. *Suy ra từ bài 3.2.71 và 3.2.72.*

3.2.74. *Ta có*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}}{\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}}+\ldots\right)}{\frac{1}{2^{n}}\left(1+\frac{2^{n}}{3^{n}}+\frac{2^{n}}{4^{n}}+\ldots\right)}=\frac{1}{2},$$

vì tổng trong ngoặc hội tụ về 1 *khi* n *dần tới vô cùng. Do*

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{2^{n+1}}{4^{n+1}}+\ldots=2^{n+1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}.$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}&=\frac{1}{3^{n+1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{n-1}}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n+1}}\\&\le\frac{1}{3^{n+1}}+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{n+1}}=\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{2n+1}}+\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}.\end{aligned}$$

Nên

$$2^{n+1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\le\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{1}{2^{n}}}{\left(1-\frac{1}{2^{n}}\right)},$$

và vì vậy

$$2^{n+1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

3.2.75. *Trước hết giả thiết rằng chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *hội tụ. Khi đó sự hội tụ của chuỗi đã cho được suy ra từ bất đẳng thức* $\frac{1}{T_n^{\alpha}}\le\frac{1}{a_1^{\alpha}}$. *Nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *phân kỳ thì tồn tại dãy tăng chặt* n_m *các số nguyên dương sao cho* $S_{n_m-1}\le m<S_{n_m}$. *Khi đó*

$$T_{n_m}=S_1+\ldots+S_{n_m}\ge S_{n_1}+\ldots+S_{n_m}>\frac{m(m+1)}{2}.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_2}^{\infty}\frac{a_n}{T_n^{\alpha}}&=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=n_m}^{n_{m+1}-1}\frac{a_k}{T_k^{\alpha}}\le\sum_{m=2}^{\infty}\frac{S_{n_{m+1}-1}-S_{n_m-1}}{T_{n_m}^{\alpha}}\\&<\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{T_{n_m}^{\alpha}}<\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{m^2+m}{2}\right)^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ nếu $\alpha > \frac{1}{2}$. *Chuỗi này có thể phân kỳ nếu* $\alpha \le \frac{1}{2}$. *Ví dụ chọn* $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2.76. Theo bài 3.2.35, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} = 0$. *Lấy* $0 < K < 1$. *Khi đó tồn tại* n_0 *sao cho* $n \le K a_n$ *với mọi* $n \ge n_0$. *Vì vậy*

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} \ge \ln^k\left(\frac{1}{K}\right)\frac{\ln^k n}{a_n}.$$

Vì vậy sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$ *suy ra sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{a_n}$. *Để chứng minh ta đặt*

$$\mathbf{I_1} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{N} : \ a_n \le n^{k+2}\} \quad \text{và} \quad \mathbf{I_2} = \mathbb{N}\setminus\mathbf{I_1}.$$

Khi đó với $\mathbf{n} \in \mathbf{I_1}$ *ta có* $\ln a_n \le (k+2)\ln n$ *và vì vậy từ sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n\in\mathbf{I_1}} \frac{\ln^k n}{a_n}$ *suy ra sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n\in\mathbf{I_1}} \frac{\ln^k a_n}{a_n}$. *Hơn nữa, khi* n *đủ lớn thuộc* $\mathbf{I_2}$,

$$\frac{\ln^k a_n}{a_n} < \frac{a_n^{\frac{k}{k+1}}}{a_n} < \frac{1}{n^{\frac{k+2}{k+1}}}.$$

Vì vậy, $\sum\limits_{n\in\mathbf{I_2}} \frac{\ln^k a_n}{a_n} < \infty$ *vì* $\frac{k+2}{k-1} > 1$.

3.2.77. Trước hết giả thiết rằng

$$\frac{f(\varphi(n))(\varphi(n+1)-\varphi(n))}{f(n)} \le q < 1.$$

Khi đó theo (1) trong bài trước,

$$S_{\varphi(n)-1} < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k) + qS_{n-1}.$$

Vì vậy $\varphi(n) > n$, $(1-q)S_{n-1} < \sum\limits_{k=1}^{\varphi(1)-1} f(k)$. *Suy ra chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *hội tụ. Sử dụng bất đẳng thức (2) trong bài trước và chứng minh tương tự ta được phần thứ hai của mệnh đề.*

3.2.78. Sử dụng kết quả của bài trước với $\varphi(n) = 2n$.

3.2.79. Sử dụng kết quả bài 3.2.78 với $\varphi(n) = 2^n$.

3.2.80. *Sử dụng kết quả bài 3.2.77 tương ứng với*

$$\varphi(n) = 3^n,\ \varphi(n) = n^2,\ \text{ và } \varphi(n) = n^3.$$

3.2.81.

(1) Ta có $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq c a_{n+1}$. *Vì vậy* $\{a_n b_n\}$ *là dãy số dương giảm vì vậy hội tụ. Vì vậy chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ *hội tụ. Sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *suy ra từ tiêu chuẩn so sánh.*

(2) Ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{b_{n+1}}}{\frac{1}{b_n}}$$

Vì vậy sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *suy được từ tiêu chuẩn đã chỉ ra trong bài 3.2.3.*

3.2.82. *Để có tiêu chuẩn DAlembert (tiêu chuẩn tỷ số) ta chọn* $b_n = 1$ *với mọi* $n = 1, 2, \ldots$. *Nếu chọn* $b_n = n$ *với* $n = 1, 2, \ldots$ *ta có tiêu chuẩn Raabe. Chọn* $b_n = n \ln n$ *với* $n = 2, 3, \ldots$ *ta có tiêu chuẩn Bertrand.*

3.2.83. *[J. Tong, Amer. Math. Monthly, 101(1994), 450-452]*

(1) Đặt $S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và đặt*

$$b_n = \frac{S - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{a_n} = \frac{r_n}{a_n}.$$

Tất nhiên $b_n > 0$ *với* $n \in \mathbb{N}$. *Hơn nữa*

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{r_n}{a_{n+1}} - \frac{r_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

(2) Trong trường hợp này đặt

$$b_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{a_n} = \frac{S_n}{a_n}.$$

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ *phân kỳ (xem bài 3.2.10). Hơn nữa*

$$b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} - \frac{S_{n-1}}{a_{n+1}} = -\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = -1.$$

3.2.84.

(a) Sử dụng tiêu chuẩn tỷ số cho mỗi chuỗi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_{1+kn}, \ \ldots, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_{(k-1)+kn}.$$

(b) Chỉ cần áp dụng tiêu chuẩn Raabe (xem 3.2.19) cho mỗi chuỗi trên.

3.2.85. Theo giả thiết tồn tại hằng số dương K sao cho

$$\varphi_n \le K \frac{1}{\ln n}, \ n \ge 2.$$

Ta định nghĩa 2 tập các số nguyên dương $\mathbb{N}_1$ và $\mathbb{N}_2$ như sau:

$$\mathbb{N}_1 = \left\{ n : \ a_n \le \frac{1}{n^2} \right\} \text{ và } \mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_1.$$

Với $n \in \mathbb{N}_1$ đủ lớn ta có,

$$(1) \qquad a_n^{1-\varphi_n} \le a_n^{1-\frac{K}{\ln n}} = a_n^{\frac{\ln \frac{n}{e^K}}{\ln n}} = \left(\frac{e^K}{n}\right)^{\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}} \le \frac{e^{2K}}{n^2}.$$

Hơn nữa với $n \in \mathbb{N}_2$ đủ lớn ta có,

$$(2) \qquad \frac{a_n^{1-\varphi_n}}{a_n} \le a_n^{-\frac{K}{\ln n}} = \left(\frac{1}{a_n}\right)^{\frac{K}{\ln n}} \le n^{\frac{2K}{\ln n}} = e^{2K}.$$

Kết hợp (1), (2) cùng với sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$*, ta được*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_1} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty \quad \text{và} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}_2} a_n^{1-\varphi_n} < +\infty.$$

3.3 Dấu hiệu tích phân

3.3.1. Với $k-1 \le x \le k$, $k \ge 2$ ta có $f(x) \ge f(k)$. Mặt khác với $k \le x \le k+1$ thì $f(x) \le f(k)$. Vì vậy

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx,\ k = 2, 3, ...$$

Cộng theo vế của các bất đẳng thức trên từ $k = 2$ tới $k = n$ ta được

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \le f(2) + f(3) + ... + f(n) \le \int_1^n f(x)dx.$$

Tiêu chuẩn tích phân đã được chứng minh.

3.3.2. Chú ý rằng $\frac{f'}{f}$ dương và đơn điệu tăng vì vậy theo tiêu chuẩn tích phân sự hội tụ của chuỗi đã cho tương đương với tính bị chặn của dãy $\left\{\int_1^n f'(x)dx\right\}$ và $\left\{\int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}dx\right\}$. Vì

$$\int_1^n f'(x)dx = f(n) - f(1) \text{ và } \int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(n) - \ln f(1),$$

nên hai dãy cùng bị chặn hoặc cùng không bị chặn.

3.3.3. Ta có $S_N - I_N - (S_{N+1} - I_{N+1}) = \int_N^{N-1} f(x)dx - f(N+1) \ge 0$. Hơn nữa, $f(n) \le \int_{n-1}^n f(x)dx \le f(n-1)$ với $n = 2, 3, ..., N$. Cộng các bất đẳng thức trên từ $n = 2$ đến $n = N$ ta được $S_N - f(1) \le I_N \le S_N - f(N)$. Vì vậy $0 < f(N) \le S_N - I_N \le f(1)$, đó là điều phải chứng minh.

3.3.4. Sự hội tụ của dãy đã cho được suy từ bài toán trước. Bây giờ ta cần chỉ ra rằng giới hạn của dãy thuộc $(0, 1)$.

(a) Vì $f(x) = \frac{1}{x}$ là hàm tăng chặt trên khoảng $(0, +\infty)$, $S_N - I_N < S_2 - I_2 < f(1) = 1$ với $N > 2$ và

$$\begin{aligned} & f(2) + f(3) + ... + f(N-1) + f(N) \\ & > f(2) + f(3) + ... + f(N-1) > \int_2^N f(x)dx, \end{aligned}$$

hoặc tương đương, $S_N - f(1) > I_N - I_2$. Cuối cùng,

$$0 < 1 - I_2 \le \lim_{N\to\infty} (S_N - I_N) \le S_2 - I_2 < 1.$$

(Xem 2.1.41 và 3.1.36).

(b) Chứng minh tương tự như (a).

3.3.5.

(a) Sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ *tương đương với tính bị chặn của dãy* $\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx$. *Với* $\alpha \neq 1$,

$$\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \frac{(\ln n)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

Vì vậy chuỗi hội tụ nếu $\alpha > 1$ *và phân kỳ nếu* $0 < \alpha < 1$. *Rõ ràng nếu* $\alpha \leq 0$ *thì chuỗi phân kỳ. Cuối cùng, nếu* $\alpha = 1$ *thì* $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$. *Vì vậy, dãy* $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx$ *không bị chặn và do đó chuỗi phân kỳ.*

(b) Trong trường hợp này ta có

$$\int_3^n \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \ln(\ln(\ln n)) - \ln(\ln(\ln 3)).$$

Vì vậy theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi phân kỳ.

3.3.6.

(a) Ta có

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n \ln S_n} \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{S_n}^{S_{n+1}} \frac{1}{x \ln x} dx$$
$$= \ln\ln S_{N+1} - \ln\ln S_1 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

(b) Tương tự câu (a) ta có

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \ln^2 S_n} \leq \sum_{n=2}^{N} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$
$$= -\frac{1}{\ln S_N} + \frac{1}{\ln S_1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

3.3.7. Nếu

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \leq q < 1, \quad \forall x > x_0,$$

thì

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)f(\varphi(t))dt \le q\int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}(1-q)\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt &\le q\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)\\ &= q\left(\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt - \int_{x}^{\varphi(x)} f(t)dt\right) \le q\int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt.\end{aligned}$$

Vì vậy bằng tiêu chuẩn tích phân chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *hội tụ. Bây giờ nếu*

$$\frac{\varphi'(x)f(\varphi(x))}{f(x)} \ge 1 \text{ với mọi } x > x_0,$$

thì $\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. *Cho nên*

$$\int_{x}^{\varphi(x)} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt.$$

Hơn nữa, vì với n *bất kỳ tồn tại*$k_n \in \mathbb{N}$ *sao cho* $n < \varphi(n) < n + k_n$, *ta có*

$$I_n + k_n - I_n = \int_{n}^{n+k_n} f(t)dt \ge \int_{n}^{\varphi(n)} f(t)dt \ge \int_{x_0}^{\varphi(x_0)} f(t)dt.$$

Cho nên dãy $\{I_n\}$ *không phải là dãy Cauchy nên nó không bị chặn. Theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi phân kỳ.*

3.3.8.

(a) Nếu $\varliminf\limits_{x\to\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0$ *thì tồn tại* x_0 *và* $\delta > 0$ *sao cho*

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \ge \delta \text{ với mọi } x \ge x_0.$$

Vì vậy $-(g(x)f(x))' \ge \delta f(x),\ x \ge x_0$. *Cho nên với* n *đủ lớn ta có*

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{n} f(x)dx &\le \frac{1}{\delta}\int_{x_0}^{n} -(f(x)g(x)'dx\\ &= \frac{1}{\delta}(g(x_0)f(x_0) - g(n)f(n)) \le \frac{1}{\delta}g(x_0)f(x_0).\end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn tích phân chuỗi hội tụ.

(b) Giống như (a) ta có $-(g(x)f(x))' \leq 0$ với mọi $x \geq x_0$ vì vậy gf là hàm tăng trên $[x_0, \infty)$ nên $g(x)f(x) \geq g(x_0)f(x_0)$ nếu $x \geq x_0$. Điều này có nghĩa là $f(x) \geq \frac{f(x_0)g(x_0)}{g(x)}$ với mọi $x > x_0$. Do đó dãy $\int_1^n f(x)dx$ không bị chặn vì theo giả thiết dãy $\int_1^n \frac{1}{g(x)}dx$ không bị chặn.

3.3.9. Sử dụng kết quả của bài trước với $g(x) = x$.

3.3.10. Trong bài 3.3.8 lấy $g(x) = x \ln x$.

3.3.11. (a) Đặt

$$g(x) = \frac{\int_x^\infty f(t)dt}{f(x)}.$$

Khi đó $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = 1 > 0$.
(b) Đặt

$$g(x) = \frac{\int_{1/2}^x f(t)dt}{f(x)}.$$

thì $\int_1^n \frac{1}{g(x)}dx = \ln \int_{1/2}^n f(t)dt - \ln \int_{1/2}^1 f(t)dt$, điều đó có nghĩa là dãy $\int_1^n \frac{1}{g(x)}dx$ bị chặn. Hơn nữa,

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = -1 < 0.$$

3.3.12. Ta sẽ dùng tiêu chuẩn đã được chứng minh trong bài 3.3.9. Lấy $f(x) = (\ln x)^{-(\ln x)^\gamma}$, $x > 1$, ta được

$$-x\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma \ln\ln x + 1).$$

Nếu $\gamma \geq 1$ thì $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma \ln\ln x + 1) = +\infty$ và vì vậy chuỗi hội tụ. Mặt khác nếu $0 \leq \gamma < 1$, thì ta có $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{\gamma-1}(\gamma \ln\ln x + 1) = 0$, điều đó có nghĩa là chuỗi phân kỳ.

3.3.13. Đặt

$$f(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{\ln\ln x}} \ln x}, \ x > e.$$

Ta có thể chứng minh được $\underline{\lim}_{x\to\infty}\left(-x\frac{f'(x)}{f(x)}\right) = 1$. Vì vậy không thể áp dụng tiêu chuẩn trong bài 3.3.9. Ta sẽ áp dụng tiêu chuẩn trong bài 3.3.10. Với x đủ lớn thì

$$\left(-\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{1}{x}\right) x \ln x = \frac{\ln x}{\ln\ln x} - \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2} + 1 > 2$$

vì $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln\ln x} - \frac{\ln x}{(\ln\ln x)^2}\right) = +\infty$.

3.3.14. *Ta có* $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\frac{1}{\lambda_{n+1}f(\lambda_{n+1})} \le \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{1}{tf(f)}dt$*. Vì vậy*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})} \le \int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{1}{tf(t)}dt < \infty.$$

Ta đã chứng minh được rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\frac{1}{f(\lambda_{n+1})}$ *hội tụ. Ký hiệu* $\{S_n\}$ *và* $\{S'_n\}$ *tương ứng là dãy tổng riêng của chuỗi đã cho trong bài toán và chuỗi ở trên. Thì*

$$\begin{aligned} S_N - S'_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{f(\lambda_n)} - \frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) \\ &\le \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{f(\lambda_n)} - \frac{1}{f(\lambda_{n+1})}\right) < \frac{1}{f(\lambda_1)}. \end{aligned}$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ.

3.3.15. *Với hàm đơn điệu* f*,*

$$(*) \qquad f(\lambda_{n-1})(\lambda_{n+1} - \lambda_n) \le \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} f(t)dt \le f(\lambda_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_n).$$

(a) Với bất đẳng thức bên trái và giả thiết ta có,

$$M\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_{n+1}) \le \int_{\lambda_1}^{\infty} f(t)dt < \infty.$$

(b) Từ bất đẳng thức bên phải trong (∗) suy ra chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)$ *hội tụ.*

3.3.16. *Trước hết ta giả thiết rằng chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ *hội tụ. Khi đó, bằng tiêu chuẩn tích phân, tích phân suy rộng* $\int_1^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt$ *hội tụ. Tích phân từng phần và đổi biến ta được*

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt &= \lim_{t\to\infty}\frac{t}{f(t)} - \frac{1}{f(t)} + \int_1^{\infty}\frac{tf'(t)}{f^2(t)}dt \\ (*) \qquad &= \lim_{t\to\infty}\frac{t}{f(t)} - \frac{1}{f(t)} + \int_{f(1)}^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt. \end{aligned}$$

Ta sẽ chỉ ra rằng

$$(**)\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{f(t)}=0$$

Sự hội tụ của tích phân suy rộng suy ra $\lim\limits_{t\to\infty}\int_t^{2t}\frac{1}{f(x)}dx=0$. *Vì* $\frac{1}{2}\frac{2t}{f(2t)}=\frac{1}{f(2t)}\int_t^{2t}dx<\int_t^{2t}\frac{1}{f(x)}dx\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$, *đẳng thức (**) đúng. Vì vậy tích phân* $\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$ *hội tụ.*

Hơn nữa, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt=\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt<\infty.$$

từ đó suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{(n+1)^2}$ *hội tụ. Hiển nhiên là chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ *cũng hội tụ.*

Để chứng minh điều ngược lại, giả thiết là chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ *hội tụ. Bằng cách tương tự ta có thể chỉ ra rằng tích phân* $\int_{f(1)}^{\infty}\frac{f^{-1}(t)}{t^2}dt$ *hội tụ, và vì vậy tích phân* $\int_1^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt$ *cũng hội tụ. Bằng tiêu chuẩn tích phân chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$ *hội tụ.*

3.3.17. Trước hết ta thấy rằng hàm φ *định nghĩa được trên toàn khoảng* $[e,\infty)$. *Khi đó* $\varphi(x)=1$ *với mọi* $x\in[e,e^e)$, $\varphi(x)=2$ *với mọi* $x\in[e^e,e^{e^e})$. *Để đơn giản ta đặt* $\widehat{e}^1=e$ *và* $\widehat{e}^k=e^{\widehat{e}^{k-1}}$ *với* $k>1$. *Vì vậy ta có*

$$\varphi(x)=k \text{ với } x\in\left[\widehat{e}^k,\widehat{e}^{k+1}\right).$$

Đặt

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln_1 x)(\ln_2 x)\cdot\ldots\cdot(ln_{\varphi(x)}x)};$$

thì

$$f(x)=\frac{1}{x(\ln_1 x)(\ln_2 x)\ldots(\ln_k x)} \text{ với } x\in\left[\widehat{e}^k,\widehat{e}^{k-1}\right).$$

Bây giờ bằng tiêu chuẩn tích phân chuỗi đã cho hội tụ vì với $n>\widehat{e}^k$,

$$I_n=\int_e^n f(x)dx\ge\int_e^{\widehat{e}^k}f(x)dx=\int_e^{\widehat{e}^2}\frac{1}{x\ln x}dx+\int_{\widehat{e}^2}^{\widehat{e}^3}\frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)}dx$$
$$+\ldots+\int_{\widehat{e}^{k-1}}^{\widehat{e}^k}\frac{1}{x(\ln x)(\ln_2 x)\cdot\ldots\cdot(\ln_{k-1}x)}dx=k-1.$$

3.4 Hội tụ tuyệt đối. Định lý Leibniz

3.4.1.

(a) Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{an}{n+1}\right|^n} = |a|.$$

Vì vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|a| < 1$ và phân kỳ nếu $|a| > 1$. Nếu $|a| = 1$ thì chuỗi phân kỳ vì

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{an}{n+1}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

(b) Đặt $f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x}$ với $x > 0$. Khi đó $f'(x) = \frac{(\ln x)^{a-1}(a-\ln x)}{x^2} < 0$ với $x > \max\{1, e^a\}$. Vì vậy theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi hội tụ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Bây giờ ta kiểm tra xem liệu chuỗi có hội tụ tuyệt đối hay không tức là chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^a}{n}$ hội tụ? Dùng tiêu chuẩn Cauchy (xem 3.2.28), sự hội tụ của chuỗi tương đương với sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^a(\ln 2)^a$. Vì vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối nếu $a < -1$.

(c) Nếu $a > 0$ thì chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz. Nếu $a < 0$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{a}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \sin\frac{|a|}{n}.$$

Lại áp dụng tiêu chuẩn Leibniz ta thấy rằng chuỗi hội tụ với mọi $a \in \mathbb{R}$. Chuỗi không hội tụ tuyệt đối nếu $a \neq 0$ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{|a|}{n}}{\frac{1}{n}} = |a|.$$

(d) Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi $-1 \le \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 1$, tức là nếu $a \in \left[-4, \frac{4}{5}\right) \cup [3, \infty)$. Rõ ràng chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $a \in \left(-4, \frac{4}{5}\right) \cup (3, \infty)$.

(e) Vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|} = 0 \quad \text{nếu} \quad |a| > 1,$$

nên chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $|a| > 1$. Nếu $|a| \leq 1$ thì điều kiện cần để chuỗi hội tụ không thoả mãn vì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{|a|^{n^2}} = +\infty$.

(f) Thấy rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a} = \lim_{n\to\infty} n^{\ln\ln n - a} = +\infty.$$

Vì vậy điều kiện cần để chuỗi hội tụ không được thoả mãn.

3.4.2. Nếu $|a| < 1$ thì với n đủ lớn,

$$\left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n}\right| < |a|^{n-1}.$$

Vì vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối. Nếu $|a| \geq 1$ thì

$$\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln n}{na^{n-1}}}\right).$$

Vì vậy với n đủ lớn các số hạng của chuỗi dương và bằng tiêu chuẩn so sánh sự hội tụ của chuỗi suy được từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3.4.3. Trước hết giả thiết rằng $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dùng đạo hàm ta có thể chỉ ra rằng $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ với $x > 0$. Vì vậy $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} < \frac{1}{6}a_n^2$. Vì $a_n^2 < a_n$ với n đủ lớn chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ tức là chuỗi đã cho hội tụ. Nếu bỏ qua giả thiết $a_n > 0$ thì chuỗi có thể hội tụ hay phân kỳ. Thực ra ta lấy $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ với $\alpha > 0$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ phân kỳ nếu $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ và hội tụ nếu $\alpha > \frac{1}{2}$.

3.4.4. Không, ta chỉ ra phản thí dụ sau:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n}, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{n}, \; n \geq 2.$$

3.4.5. Ta có $a_n = p_n - q_n$ và $|a_n| = p_n + q_n$. Chú ý rằng p_n và q_n không âm. Vì vậy hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ phân kỳ, vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ.

3.4.6. Đặt $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. Theo bài trước ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{S_n}{Q_n}\right) = 1.$$

3.4.7. Chuỗi không hội tụ tuyệt đối. Ta sẽ chỉ ra rằng nó hội tụ (hội tụ có điều kiện). Ta nhóm các số hạng cùng dấu và được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\frac{n}{3}]}}{n} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right).$$

Vì vậy theo định lý Leibniz chuỗi hội tụ.

3.4.8. Rõ ràng chuỗi hội tụ tuyệt đối nếu $a > 1$ và phân kỳ nếu $a \leq 0$. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $0 < a \leq 1$ thì chuỗi hội tụ có điều kiện. Thấy rằng số hạng đầu tiên của chuỗi là âm, năm số hạng tiếp theo dương, v.v. Bây giờ nhóm các số hạng cùng dấu ta được chuỗi đan dấu sau $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$, trong đó $A_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^a}$. Hơn nữa với $a \neq 1$,

$$A_n < \frac{1}{n^{2a}} + \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^a} dt = \frac{1}{n^{2a}} + \frac{1}{1-a}((n+1)^{2-2a} - n^{2-2a}).$$

Vì vậy (xem 2.2.3), $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ nếu $\frac{1}{2} < a < 1$. Với $a = 1$ ta có $\frac{2}{n+1} < A_n < \frac{2n+1}{n^2}$, và vì vậy, $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ với $\frac{1}{2} < a \leq 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng với a như trên thì dãy $\{A_n\}$ đơn điệu giảm. Thực vậy,

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n+1} &= \sum_{k=n^2}^{(n-1)^2-1} \frac{1}{k^a} - \sum_{k=(n+1)^2}^{(n+2)^2-1} \frac{1}{k^a} \\
&= \sum_{k=n^2}^{(n-1)^2-1} \frac{1}{k^a} - \sum_{k'=n^2}^{(n+1)^2+1} \frac{1}{(k'+2n+1)^a} \\
&= \sum_{k=n^2}^{(n-1)^2-1} \left(\frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k'+2n+1)^a} \right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^a} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^a} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{(n^2+k)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+k)^a} \right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^a} \\
&- \frac{1}{((n+2)^2-1)^a} > (2n+1) \left(\frac{1}{(n^2+2n)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+2n)^a} \right) \\
&- \frac{1}{((n+2)^2-1)^a} > \frac{1}{((n+2)^2-1)^a},
\end{aligned}$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy ra từ tính đơn điệu của hàm

$$g(x) = \frac{1}{(n^2+x)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+x)^a}$$

trên đoạn $[0, 2n]$. *Vì vậy, với* n *đủ lớn,*

$$\begin{aligned} A_n - A_{n+1} &> (2n+1)\left(\frac{1}{(n^2+2n)^a} - \frac{1}{((n+1)^2+2n)^a}\right) - \frac{2}{(n+1)^{2a}} \\ &= \frac{2}{n^{2a}}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-a} - \left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-a}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2a}\right\} \\ &\geq n^{-2a}(2a-1) > 0, \end{aligned}$$

vì $(1+x)^{-a} > 1 - ax$ *và* $(1+x)^{-a} < 1 - ax + \frac{a(a+1)}{2}x^2$ *với* $a, x > 0$ *(hai bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng đạo hàm). Vì vậy dùng định lý Leibniz, chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$ *hội tụ nếu* $\frac{1}{2} < a \leq 1$.

Nếu $0 < a \leq \frac{1}{2}$, *thì vì* $A_n > (2n+1)\frac{1}{(n^2+2n)^a}$, *điều kiện cần để chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n$ *hội tụ không thoả mãn.*

3.4.9. Giống như lời giải của bài 3.4.7 và 3.4.8, ta nhóm các số hạng cùng dấu và viết lại chuỗi dưới dạng sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{[e^{n-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^n]}\right).$$

Ta cũng thấy rằng

$$\frac{1}{[e^{n-1}]+1} + \ldots + \frac{1}{[e^n]} > \frac{[e^n]-[e^{n-1}]}{[e^n]} = 1 - \frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}.$$

Hơn nữa vì

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{[e^{n-1}]}{[e^n]}\right) = 1 - \frac{1}{e},$$

nên điều kiện cần để chuỗi hội tụ không được thoả mãn và do đó chuỗi phân kỳ.

3.4.10.

(a) Có thể viết chuỗi dưới dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n, \text{ trong đó } A_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}.$$

Vì $A_n > 2^n\frac{1}{2^{n+1}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$, *nên chuỗi phân kỳ.*

(b) Cũng giống (a), ta viết chuỗi dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n A_n, \quad \textit{trong đó} \quad A_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k\ln k}.$$

Hơn nữa,

$$0 < A_n < 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n}.$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$*. Ta sẽ chỉ ra rằng* $\{A_n\}$ *đơn điệu giảm. Thực vậy,*

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k\ln k} = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{(2^{n+1}+l)\ln(2^{n+1}+l)} \\
&= \sum_{l=0}^{2^n-1}\left(\frac{1}{(2^{n+1}+2l)\ln(2^{n+1}+2l)} + \frac{1}{(2^{n+1}+2l+1)\ln(2^{n+1}+2l+1)}\right) \\
&< \sum_{l=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^{n+1}+2l)\ln(2^{n+1}+2l)} < \sum_{l=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^n+l)\ln(2^n+l)} = A_n.
\end{aligned}$$

3.4.11.

$$\begin{aligned}
(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} &= (-1)^n\left(1 - \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Theo tiêu chuẩn Leibniz cả hai chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{và} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

hội tụ. Nhưng chuỗi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

phân kỳ và vì vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

3.4.12.

(a) Chuỗi hội tụ tuyệt đối (xem 3.2.1 (f)).

(b) Từ tiêu chuẩn Leibniz chuỗi hội tụ. Chuỗi hội tụ có điều kiện (xem 3.2.1 (g)).

(c) Rõ ràng dãy $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$, $n \geq 3$ đơn điệu giảm vì vậy chuỗi hội tụ. Hơn nữa nó không hội tụ tuyệt đối (xem 3.2.5 (b)).

(d) Sự hội tụ của chuỗi suy ra từ tính đơn điệu của dãy $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ và dãy có giới hạn là e (xem 2.1.38). Để chứng minh chuỗi không hội tụ tuyệt đối ta dùng bất đẳng thức

$$\ln(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3, \; x > 0,$$

với $x = \frac{1}{n}$, và ta có $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^{1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}}$. Vì vậy

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}\right) > e\left(1 - e^{-\frac{1}{4n}}\right) \quad \text{với } n > 1.$$

Từ 2.5.4 (a) suy ra với n đủ lớn

$$4n\left(1 - e^{-\frac{1}{4n}}\right) > \frac{1}{2}.$$

Vì vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$phân kỳ.

(e) Sự hội tụ của chuỗi suy ra từ tính đơn điệu của chuỗi $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ và từ giới hạn e của chuỗi (xem 2.1.38). Theo bài 3.2.5 (c), chuỗi không hội tụ tuyệt đối.

3.4.13.

(a) Hàm

$$f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x^b}, \; x \in (e^{\frac{a}{b}}, +\infty).$$

đơn điệu giảm tới 0 khi $x \to \infty$. Vì vậy theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi hội tụ. Ta chứng minh rằng với $b > 1$ chuỗi hội tụ tuyệt đối. Dùng định lý Cauchy (xem 3.2.28) ta chỉ cần chứng minh sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{n^a}{2^{nb}}.$$

Bây giờ dùng tiêu chuẩn căn chuỗi hội tụ nếu $b > 1$ và phân kỳ nếu $0 < b < 1$. Rõ ràng nếu $b = 1$ chuỗi phân kỳ.

(b) Chú ý rằng

$$\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^b} = \frac{e^{(\ln n)(\ln \ln n)}}{n^b} = \frac{n^{\ln \ln n}}{n^b}.$$

Vì vậy điều kiện cần của hội tụ không được thoả mãn.

3.4.14. *Do tính đơn điệu của dãy $\{a_n\}$ ta có*

$$r_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \ldots > 0,$$
$$r_{2n+1} = (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + (-a_{2n+4} + a_{2n+5}) + \ldots < 0$$

và

$$r_{2n} = a_{2n+1} + (-a_{2n+2} + a_{2n+3}) + \ldots < a_{2n+1},$$
$$-r_{2n+1} = a_{2n-2} + (-a_{2n+3} + a_{2n+4}) + \ldots < a_{2n+2}$$

3.4.15. *Chú ý rằng*

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{k+1}) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = a_{n+1} - a_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -a_1.$$

3.4.16. *Chú ý rằng*

$$\sum_{k=1}^{n}(aa_k + ba_{k+1} + ca_{k+2}) - (a+b+c)\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$= b(a_{n+1} - a_1) + c(a_{n+1} + a_{n+2} - a_1 - a_2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -ba_1 - c(a_1 + a_2).$$

3.4.17. *Theo giả thiết tồn tại các hằng số dương c và C sao cho với n đủ lớn, $c < |a_n| \le C$. Vì vậy,*

$$\left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| \le \frac{1}{c^2}|a_{n+1} - a_n|,$$

$$|a_{n+1} - a_n| \le C^2 \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right|.$$

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh ta suy ra điều phải chứng minh.

3.4.18. *Ký hiệu S_n và $\tilde{S}_n$ tương ứng là các tổng riêng thứ n của các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$. Thì,*

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n}(k+1)a_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$$
$$= -(n+1)a_{n+1} + S_{n+1},$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3.4.19. *Sử dụng tiêu chuẩn Leibniz để suy ra chuỗi hội tụ.*

3.4.20. *Nếu $|a| < 1$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối. Thực vậy, vì $|\sin x| \le |x|$,*

$$\left|n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right| \le |a|^n.$$

Xét trường hợp $|a| \ge 1$. Trong trường hợp này chuỗi phân kỳ vì điều kiện cần không thoả mãn. Thật vậy, với a cố định tồn tại n_0 sao cho $\frac{|a|}{n_0} \le 1$. Khi đó, đặt $C = (n_0 - 1)! \left|\sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{1}{n_0 - 1}\right|$ và dùng bất đẳng thức $\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}$, $x > 0$, ta được

$$\begin{aligned}
&\left|n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right| = C n_0 \cdot \ldots \cdot n \sin \frac{|a|}{n_0} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{|a|}{n} \\
&\ge C n_0 \cdot \ldots \cdot n \sin \frac{1}{n_0} \cdot \ldots \cdot n \sin \frac{1}{n} = C \prod_{k=n_0}^{n} \left(1 - \frac{1}{6k^2}\right) \\
&\ge C \prod_{k=n_0}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = C \frac{(n_0 - 1)(n+1)}{n_0 n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C \frac{n_0 - 1}{n_0} > 0.
\end{aligned}$$

3.4.21. *Theo 2.5.4 (a),*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} - \frac{\sqrt[n]{b} - 1 + \sqrt[n]{c} - 1}{2\frac{1}{n}}\right) \\
&= \ln a - \frac{1}{2}(\ln b + \ln c) = \ln \frac{a}{\sqrt{bc}}.
\end{aligned}$$

Vì vậy nếu $a > \sqrt{bc}$, thì bắt đầu từ chỉ số n nào đó các số hạng của chuỗi dương và theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi phân kỳ. Nếu $a < \sqrt{bc}$ thì các số hạng của chuỗi âm và nó cũng phân kỳ. Với $a = \sqrt{bc}$ ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[2n]{b} - \sqrt[2n]{c}\right)^2.$$

Vì

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[2n]{b} - 1 - \sqrt[2n]{c} + 1}{\frac{1}{2n}}\right)^2 = (\ln b - \ln c)^2.$$

nên sự hội tụ của chuỗi suy ra từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

3.4.22.

(a) *Theo 1.1.14, tồn tại dãy số nguyên $\{p_n\}$ và dãy số nguyên dương $\{q_n\}$ sao cho*

$$\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Vì vậy $|\cos p_n| = |\cos(\pi q_n - p_n)| > \cos\frac{1}{q_n} = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2q_n} > 1 - \frac{1}{2q_n^2}$. *Do đó*

$$(|\cos p_n|)^{p_n} > \left(1 - \frac{1}{2q_n^2}\right)^{p_n} > 1 - \frac{p_n}{q_n}\frac{1}{2q_n}.$$

Điều này chứng tỏ rằng dãy con $\{(\cos p_n)^{p_n}\}$ *của dãy* $\{\cos^n n\}$ *không hội tụ về* 0 *nên điều kiện cần không được thoả mãn.*

(b) *Theo bài 1.1.22 ta biết rằng dãy $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ trong (a) có thể chọn sao cho mọi số hạng của $\{q_n\}$ lẻ. Khi đó dùng bất đẳng thức*

$$\left|\frac{\pi}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

ta được $|\sin p_n| = |\cos(\frac{\pi}{2}q_n - p_n)| > \cos\frac{1}{q_n} > 1 - \frac{1}{2q_n^2}$. *Vì vậy giống như (a) chuỗi* $(\sin p_n)^{p_n}$ *không hội tụ về* 0 *và do đó chuỗi phân kỳ.*

3.4.23.

(a) *Theo giả thiết (xem 2.4.13 (b)), tồn tại n_0 và α sao cho*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \alpha > 0 \text{ với } n \geq n_0.$$

Vì vậy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n-\alpha} < 1$, *điều đó chứng tỏ rằng bắt đầu từ chỉ số* n_0 *dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm. Ta sẽ chỉ ra rằng* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. *Theo trên ta có*

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0} < \frac{n(n-1)\ldots n_0}{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n_0)} a_{n_0}.$$

Bây giờ chỉ cần chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots n_0}{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n_0)} = 0$. *Thực vậy,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots n_0}{(\alpha+n)\ldots(\alpha+n_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{\alpha}{n_0}\right)} = 0,$$

vì (xem 1.2.1)

$$\left(1+\frac{\alpha}{n_0}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) > 1+\frac{\alpha}{n_0}+\ldots+\frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Vì vậy theo tiêu chuẩn Leibniz chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *hội tụ.*

(b) Theo giả thiết $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 0$, *dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu tăng và vì vậy chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *phân kỳ, vì điều kiện cần của hội tụ không được thoả mãn.*

3.4.24. Theo giả thiết, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$. *Với* $\alpha\neq 0$ *ta có thể áp dụng tiêu chuẩn đã chứng minh trong bài trước. Với* $\alpha=0$ *điều kiện cần để hội tụ không được thoả mãn. Thật vậy, ta có*

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1}\cdot\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\ldots\frac{a_{n-1}}{a_n}\\ &= \frac{1}{a_1}\left(1+\frac{\beta_1}{1^{1+\epsilon}}\right)\left(1+\frac{\beta_2}{2^{1+\epsilon}}\right)\ldots\left(1+\frac{\beta_{n-1}}{(n-1)^{1+\epsilon}}\right).\end{aligned}$$

Hơn nữa tồn tại β *sao cho* $|\beta_n|\le\beta$. *Vì vậy*

$$a_n \ge \frac{a_1}{\left(1+\frac{\beta}{1^{1+\epsilon}}\right)\left(1+\frac{\beta}{2^{1+\epsilon}}\right)\ldots\left(1+\frac{\beta}{(n-1)^{1+\epsilon}}\right)} \ge \frac{a_1}{e^{\beta A}},$$

trong đó $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\epsilon}}$.

3.4.25. Theo bài 2.5.34, sự tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *tương đương với sự tồn tại giới hạn* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ *và hai giới hạn này bằng nhau. Đặt* $a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$. *Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=p-\frac{1}{2}$. *Vì vậy theo 3.4.23 chuỗi hội tụ nếu* $p>\frac{1}{2}$ *và phân kỳ nếu* $p<\frac{1}{2}$. *Trong trường hợp* $p=\frac{1}{2}$ *điều kiện cần để chuỗi hội tụ không được thoả mãn vì theo công thức Stirling* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2\pi}$.

3.4.26. Đặt $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. *Dùng phép biến đổi Abel ta được*

$$a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(p_k-p_{k+1})+S_np_n,$$

và ta có

$$\frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n}{p_n} = S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k \frac{p_{k+1} - p_k}{p_n}.$$

Bây giờ chỉ cần áp dụng định lý Toeplitz (xem 2.3.1).

3.4.27. *Dùng kết quả trong bài trên với chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ *và chọn* $p_n = \frac{1}{a_n}$.

3.4.28. *Đây là một trường hợp đặc biệt của bài trước.*

3.4.29. *Nếu chuỗi không hội tụ tuyệt đối, thì chuỗi con tất cả các số hạng dương và chuỗi con tất cả các số hạng âm phân kỳ (xem 3.4.5).*

3.4.30. *[20] Không, ta sẽ chỉ ra ví dụ để chứng tỏ điều này:*

Xét chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *đặt*

$$\begin{aligned} &a_1 = b_1,\ a_2 = a_3 = \frac{b_2}{2!},\ a_4 = a_5 = \ldots = a_9 = \frac{b_3}{3!}, \ldots, \\ &a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+1} = a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+2} \\ &= \ldots = a_{1!+2!+\ldots+(n-1)!+n!} = \frac{b_n}{n!}, \ldots \end{aligned}$$

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ có điều kiện. Nhưng với mỗi* $k \geq 1$ *và* $l \geq 2$ *thì chuỗi con*

$$a_k + a_{k+l} + a_{k+2l} + \ldots$$

hội tụ. Thực vậy, với $n \geq l$ *có* $\frac{n!}{l}$ *số hạng dạng* $\frac{b_n}{n!}$. *Nhóm những số hạng này lại, ta được chuỗi hội tụ*

$$C_0 + \frac{1}{l}\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n, \quad C_0 \text{ là một hằng số nào đó.}$$

3.4.31. *Xét chuỗi*

$$1 + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}}_{n \text{ lần}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

3.4.32. *Có. Xét chuỗi*

$$1+\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n\ln n}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}}_{n \text{ lần}}-\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\frac{N^2+3N-2}{2}} a_n^k=\begin{cases}1+\sum\limits_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}+\frac{1}{\ln^k n}\right) & \text{nếu } k \text{ chẵn.}\\ 1+\sum\limits_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}-\frac{1}{\ln^k n}\right) & \text{nếu } k \text{ lẻ.}\end{cases}$$

Theo định lý Cauchy (xem 3.2.28) chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^k n}$ *phân kỳ với mọi* $k\in\mathbb{N}$. *Mặt khác, chuỗi* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k-1}\ln^k n}$ *hội tụ với* $k\geq 2$.

3.4.33. *[20] Giả thiết ngược lại* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}=2\alpha>0$. *Khi đó, theo 2.4.13 (b), tồn tại* n_0 *sao cho với* $n>n_0$,

$$(*)\qquad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n>\alpha n$$

Đặt $E_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$. *Tính tổng từng phần ta nhận được*

$$\varepsilon_1a_1+\varepsilon_1a_2+\ldots+\varepsilon_na_n=\sum_{k=1}^{n-1}E_k(a_k-a_{k+1})E_na_n.$$

Vì vậy theo (*) ta có,

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\ldots+\varepsilon_na_n\\ &>\sum_{k=1}^{n_0}E_k(a_k-a_{k+1})+\alpha\sum_{k=n_0+1}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})+\alpha n a_n\\ &=\text{hằng số}+\alpha\sum_{k=n_0+2}^{n}a_k.\end{aligned}$$

Điều này là vô lý.

3.4.34. *[20] Đặt* $E_n=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{N}$. *Dãy* $\{E_n\}$ *có tính chất là giữa hai phần tử trái dấu có một phần tử triệt tiêu. Xét hai trường hợp:*

(1) Số phần tử triệt tiêu của $\{E_n\}$ *là hữu hạn,*

(2) Số phần tử triệt tiêu của $\{E_n\}$ là vô hạn.
(1) chính là một trường hợp đặc biệt của 3.2.35. Trong trường hợp (2), theo tiêu chuẩn Cauchy, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một n_0 sao cho nếu $n > m > n_0$, thì

$$(*)\quad \begin{aligned} \varepsilon > \left|\sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k a_k\right| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} ((E_k - E_m) - (E_{k-1} - E_m))a_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} (E_k - E_m)(a_k - a_{k+1}) + (E_n - E_m)a_{n+1}\right|. \end{aligned}$$

Giả sử $E_m = 0$ và các phần tử $E_{m+1}, E_{m+2}, ...E_n$ cùng dấu, khi đó từ (*) và sự đơn điệu của dãy $\{a_n\}$ ta có

$$| E_n a_n |< \varepsilon, \quad n \geq m + 1$$

3.4.35. Việc chứng minh tương tự như 3.4.33. Đặt $E_n = p_1 b_1 + ... + p_n b_n$ và giả sử rằng $\varliminf_{n\to\infty} \frac{p_1 b_1 + ... + p_n b_n}{n} = 2\alpha > 0$. Khi đó với $n > n_0$ ta có $p_1 b_1 + ... + p_n b_n > \alpha n$, và do đó

$$\begin{aligned} b_1 + ... + b_n &= \frac{1}{p_1}(p_1 b_1) + ... + \frac{1}{p_1}(p_n b_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} E_k \left(\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_{k+1}}\right) + E_n \frac{1}{p_n} > \text{hằng số} - \alpha \sum_{k=n_0-2}^{n} \frac{1}{p_k}. \end{aligned}$$

Điều này là vô lý.

3.4.36. Trước hết chúng ta chứng minh nếu $p = q$ thì chuỗi đã cho hội tụ. Ta có

$$\begin{aligned} S_{lp} = &\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{p+1} + ... + \frac{1}{2p}\right) \\ &+ ... + (-1)^{l+1}\left(\frac{1}{(l-1)p+1} + ... + \frac{1}{lp}\right). \end{aligned}$$

Vì S_{lp} là tổng riêng của một chuỗi đan dấu. Theo tiêu chuẩn Leibniz tồn tại giới hạn $\lim_{l\to\infty} S_{lp}$. Rõ ràng, mỗi tổng riêng có dạng S_{lp+k}, $k = 1, 2, ..., p-1$, tiến tới cùng một giới hạn khi $l \to \infty$.

Giả sử chuỗi (của chúng ta) (ban đầu) hội tụ. Khi đó theo 3.4.34,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{np - nq}{np + nq} = \frac{p - q}{p + q} = 0,$$

điều này chứng tỏ $p = q$.

3.4.37. Ta nhận thấy nếu điều kiện (i)-(iii) thoả mãn thì với mọi dãy hội tụ $\{a_n\}$, dãy chuyển vị $\{b_n\}$ được xác định. Việc chứng minh có nhiều cách như trong lời giải bài toán 2.3.1 và 2.3.26.

3.5 Tiêu chuẩn Dirichlet và tiêu chuẩn Abel

3.5.1.

(a) Vì $\frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2n}(1-\cos(2n))$, ta xét các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n} \quad \text{và} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cos(2n).$$

Theo tiêu chuẩn Leibniz, chuỗi thứ nhất hội tụ. Chuỗi thứ hai cũng hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet (xem [12], trang 105). Thật vậy, từ công thức có thể được chứng minh bằng qui nạp sau:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n}\cos ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \quad \text{với} \quad a \neq 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

ta nhận được

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(2k)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\cos((\pi-2)k)\right| \\ &= \left|\frac{\sin\frac{(\pi-2)n}{2}\cos\frac{(n+1)(\pi-2)}{2}}{\cos 1}\right| \le \frac{1}{\cos 1}.\end{aligned}$$

Vì dãy các tổng riêng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(2n)$ là bị chặn. Hơn nữa dãy $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ đơn điệu tiến tới 0. Như vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cos(2n)$ hội tụ.

(b) Dãy

$$a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$$

các giá trị trung bình của $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ hội tụ tới 0 (xem 2.3.2). Dễ dàng kiểm tra rằng dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Theo công thức có thể chứng minh bằng *qui nạp sau:*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} \quad \text{với} \quad a \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z},$$

ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right| = \left|\frac{\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{1}{2}}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Như vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet.

(c) Ta thấy rằng

$$\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}\right) = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{n+1}\right) = (-1)^n\cos\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

như vậy chuỗi đã cho có thể viết dưới dạng

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}.$$

Các chuỗi trên hội tụ theo tiêu chuẩn Abel (xem [12], trang 106), vì chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln^2 n}$ *hội tụ (theo tiêu chuẩn Leibnitz) và dãy* $\left\{\cos\frac{\pi}{1-n}\right\}$ *đơn điệu và bị chặn.*

(d) Ta có

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a + \sin\frac{n\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}\left(1 - \frac{\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}{1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}\right).$$

Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}, \quad a > 0,$$

hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet. Xét chuỗi với các phần tử dương

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^2a}}{1 + \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^a}}.$$

Tồn tại các hằng số c_a và C_a sao cho

$$c_a \frac{1}{n^{2a}} < \frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2a}}}{1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^a}} < C_a \frac{1}{n^2 a}, \quad n \neq 4k, k \in \mathbb{N}.$$

Như vậy, chuỗi hội tụ với $a > \frac{1}{2}$ và phân kỳ với $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

3.5.2. Ta có

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\ln \ln n} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n} + \sum_{n=2}^{N} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$$

Theo công thức (2) trong bài giải 3.5.1(b) và theo tiêu chuẩn Dirichlet ta thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln \ln n}$ hội tụ. Vì dãy $\left\{\cos \frac{1}{n}\right\}$ đơn điệu và bị chặn nên chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Abel. Như vậy từ công thức (1) trong lời giải 3.5.1(a) và tiêu chuẩn Dirichlet suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{N} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ hội tụ.

3.5.3. (a) Ta có

$$\begin{aligned} 2\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k^2 a) \sin(ka)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} [\cos(k(k-1)a) - \cos(k(k+1)a)]\right| \\ &= \mid 1 - \cos(n(n+1)a) \mid \leq 2 \end{aligned}$$

Như vậy chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet.

(b) Tương tự (a), áp dụng tiêu chuẩn Dirichlet.

3.5.4. Từ công thức

$$\frac{\cos n \sin(na)}{n} = \frac{1}{2} \frac{\sin(n(a+1))}{n} + \frac{1}{2} \frac{\sin(n(a-1))}{n}$$

các chuỗi đều hội tụ theo tiêu chuẩn Dirichlet (sử dụng công thức (2) trong bài giải 3.5.1(b)).

3.5.5. Nếu $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, thì mọi số hạng của chuỗi đều bằng 0. Nếu $a \neq k\pi$ thì theo bất đẳng thức $\mid \sin x \mid \geq \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, ta có

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\mid \sin(na) \mid}{n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2na)}{n}.$$

Do vậy trong trường hợp này chuỗi hội tụ không tuyệt đối.

3.5.6. Trước hết giả sử rằng $0 < a < \pi$, và đặt $m = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right]$. Khi đó, với n đủ lớn,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin(ak)}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right|.$$

Vì $|\sin t| < |t|$ với $t \neq 0$,

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin(ak)}{k}\right| < \sum_{k=1}^{m}\frac{ka}{k} = ma \le \sqrt{\pi}.$$

Hơn nữa, từ (2) trong bài giải 3.5.1(b) và từ bất đẳng thức $\sin t > \frac{2}{\pi}t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ta có

$$(**) \qquad \left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\sin(ak)}{k}\right| < \frac{1}{(m+1)|\sin\frac{a}{2}|} < \frac{1}{\frac{a}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{a}} = \sqrt{\pi}.$$

Kết hợp (∗) và (∗∗) chúng ta thấy rằng bất đẳng thức thoả mãn với $a \in (0, \pi)$. Do hàm sin là hàm lẻ nên nó cũng thoả mãn với $a \in (-\pi, 0)$. Hơn nữa $\sin k\pi = 0$ và hàm sin là tuần hoàn nên bất đẳng thức thoả mãn với mọi $a \in \mathbb{R}$.

3.5.7. Chuỗi đã cho hội tụ theo tiêu chuẩn Abel vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ hội tụ và $\{\text{arctg } n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn.

3.5.8. Theo tiêu chuẩn Abel chuỗi đã cho hội tụ. Thật vậy, chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ hội tụ và dãy $\{\sqrt[n]{\ln x}\}$ bị chặn, giảm chặt với $x > e$ và tăng chặt với $1 < x < e$.

3.5.9.

(a) Trước hết ta thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Abel. Hơn nữa vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ nên dãy $\{r_n\}$, với $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$, dần tới 0. Vì vậy, với $p \ge n$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{p}\frac{a_k}{b_k}\right| &= \left|\sum_{k=n}^{p}\frac{r_k - r_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{p}\frac{r_k}{b_k} - \sum_{k=n}^{p}\frac{r_{k-1}}{b_k}\right| \\ &= \left|\frac{r_n}{b_n} + \sum_{k=n+1}^{p}r_k\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k-1}}\right) - \frac{r_{p+1}}{b_p}\right| \\ &\le \varepsilon\left(\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_p} + \frac{1}{b_p}\right) = \frac{2\varepsilon}{b_n},\end{aligned}$$

trong đó $\varepsilon_n = \sup_{k\ge n} |r_k|$. *Vì vậy,*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}\right| \le 2\varepsilon_n \frac{1}{b_n} = o\left(\frac{1}{b_n}\right).$$

(b) Xem 3.4.26.

3.5.10. Nhận xét rằng

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n+k-1}(n+k-1)c_{n+k-1}.$$

Theo tiêu chuẩn Abel chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k}$ *hội tụ với mỗi* $n \in \mathbb{N}$. *Đặt* $r_n = nc_n + (n+1)c_{n+1} + \ldots$, *ta có*

$$\begin{aligned}
t_n &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{n+k} = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1)c_k \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} kc_k - (n-1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}kc_k = r_n - (n-1)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k}(r_k - r_{k+1}) \\
&= \frac{1}{n}r_n + (n-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) r_k.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
|t_n| &\le \frac{1}{n}|r_n| + \sup_{k\ge n+1}|r_k|(n-1)\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&\le \frac{1}{n}|r_n| + \sup_{k\ge n+1}|r_k|\frac{n-1}{n}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ *ta có* $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

3.5.11. Tính tổng từng phần,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^k = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i^k - b_{i+1}^k) + A_n b_n^k.$$

với A_n là tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại n_0 sao cho $|b_i| < \varepsilon$ với $i \geq n_0$. Như vậy, nếu $m > n \geq n_0$ và $|A_n| \leq L$, thì

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{i=n}^{m-1} A_i(b_i^k - b_{i+1}^k) - A_n b_n^k + A_m b_m^k\right|$$

$$\leq \sum_{i=n}^{m-1} |A_i||b_i^k - b_{i+1}^k| + |A_n b_n^k| + |A_m b_m^k|$$

$$\leq L\left(\sum_{i=n}^{m-1} |b_i - b_{i+1}||b_i^{k-1} + b_i^{k-2} b_{i+1} + \ldots + b_{i+1}^{k-1}| + |b_n^k| + |b_m^k|\right)$$

$$= L\left(k\varepsilon^{k-1}\sum_{i=n}^{m-1} |b_i - b_{i-1}| + 2\varepsilon^k\right).$$

Vì vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

3.5.12. Tính tổng từng phần

$$(*) \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n,$$

Trong đó A_n là tổng riêng thứ n của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ hội tụ tuyệt đối và dãy $\{A_n\}$ bị chặn nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ hội tụ tuyệt đối. Sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ tồn tại vì $(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) = b_1 - b_n$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} A_n b_n$ cũng tồn tại và theo (*) ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ.

3.5.13. Với $0 \leq x < 1$ dãy $\{x^n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn vì vậy có thể áp dụng tiêu chuẩn Abel. Với $-1 < x < 0$ cả hai dãy $\{x^{2n}\}$ và $\{x^{2n-1}\}$ là đơn điệu và bị chặn. Vì vậy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$ hội tụ. Sự hội tụ của hai chuỗi này xuất phát từ đẳng thức

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}x^{2n-1}$$

3.5.14. *Ta thấy nếu $x > x_0$ thì*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} . \frac{1}{n^{x-x_0}}.$$

Như vậy ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Abel.

3.5.15. *Ta có*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a_n}{x(x+1)...(x+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \cdot \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$$

Chú ý rằng với n đủ lớn tất cả các số $\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$ cùng dấu. Ta sẽ chỉ ra rằng chúng tạo nên một dãy đơn điệu. Nhận xét rằng tỉ lệ của các phần tử thứ $n+1$ và n là

$$\frac{(n+1)(\frac{n+1}{n})^x}{x+n+1} = \frac{e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{n})}}{1+\frac{x+1}{n}}.$$

Đặt $R_n = e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{n})} - 1 - \frac{x+1}{n}$. Từ kết quả trong 2.5.7 ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
R_n &= (x+1)\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2!}(x+1)^2 \ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(x+1)^3 \ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right) + ... \\
&= \frac{1}{n^2}\left(-\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2}(x+1)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{3!}(x+1)^3 \ln^3\left(1+\frac{1}{n}\right) + ...
\end{aligned}$$

Trong đó $O(a_n)$, biểu thị biểu thức phần dư chia cho a_n, bị chặn khi $n \to \infty$. Điều này cho thấy rằng với n đủ lớn, R_n dương nếu $x(x+1) > 0$ và âm nếu $x(x+1) < 0$. Do đó, với mọi n đủ lớn tỉ lệ của hai phần tử liên tiếp cuả dãy $\left\{\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}\right\}$ cùng lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 1. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng dãy này hội tụ với $x \neq 0, -1, -2, ...$. Muốn vậy ta viết

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)} = \frac{1}{x}\frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

Trước hết giả sử $x > 1$. Với mỗi x chúng ta có $(1+\frac{1}{k})^x > 1 + \frac{x}{k}$. Do đó,

$$\ln\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right),$$

trong đó mọi số hạng của tổng đều dương. Hơn nữa,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)}{\frac{1}{k^2}} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Dẫn đến kết quả là tồn tại giới hạn

$$\lim_{k\to\infty} \ln \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

do chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ *hội tụ. Như vậy dãy đang xét hội tụ với* $x > 1$.

Bây giờ giả sử rằng $x \in (0,1)$. *Khi đó với mỗi* x *ta có* $\left(1+\frac{1}{k}\right)^x < 1 + \frac{x}{k}$ *nên ta có thể áp dụng các lập luận như trên với dãy có các phần tử*

$$-\ln \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}.$$

Cuối cùng, xét trường hợp $x < 0$, $x \neq -1, -2, -3, \ldots$. *Chọn* k_0 *là một số dương sao cho* $1 + \frac{x}{k} > 0$ *với* $k \geq k_0$. *Để chỉ ra rằng dãy sau hội tụ*

$$\prod_{k=k_0}^{n-1} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}$$

ta chú ý rằng

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^x < 1 + \frac{x}{k} \quad \text{với} \quad k \geq k_0$$

và xử lí như trong trường hợp $x > 1$.

3.5.16. *Theo tiêu chuẩn Abel với* $|x| < 1$ *sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *chỉ ra rằng* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ *hội tụ (xem 3.5.13). Vì* $\left\{\frac{1}{1-x^{2n}}\right\}$ *là đơn điệu và bị chặn, từ đẳng thức*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n x^n \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^{2n} \frac{1}{1-x^{2n}}\right)$$

và tiêu chuẩn Abel ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ *hội tụ.*

3.5.17. [20]. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *là một chuỗi hội tụ có điều kiện. Đặt* $F(x) = 2^{x^2}$ *và định nghĩa chuỗi mới* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *bằng cách đặt*

$$a_1 = a_2 = \frac{b_1}{2}, \ a_k = \frac{b_m}{F(m) - F(m-1)} \quad \text{với} \quad F(m-1) < k \leq F(m).$$

Chuỗi này cũng hội tụ có điều kiện. Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng mọi chuỗi con có dạng

$$(*) \qquad a_k + a_{kl} + a_{kl^2} + \ldots$$

hội tụ. Trước hết chú ý rằng với một số nguyên dương n *bất kỳ tồn tại duy nhất một* t_m, $t_m = \left[\log_l \frac{F(m)}{k}\right]$, *sao cho*

$$kl^{t_m} \leq F(m) < kl^{t_m+1}.$$

Theo định nghĩa của t_m, *bắt đầu từ chỉ số* m *nào đó chuỗi con (*) có* $t_m - t_{m-1}$ *số hạng có dạng* $\frac{b_m}{F(m)-F(m-1)}$. *Nhóm các số hạng này lại ta chuyển (*) thành chuỗi*

$$c_0 + \sum_{m=n_1}^{\infty} \frac{t_m - t_{m-1}}{F(m) - F(m-1)} b_m.$$

trong đó c_0 *là một hằng số nào đó. Chuỗi này hội tụ theo tiêu chuẩn Abel vì dãy với các phần tử*

$$c_m = \frac{t_m - t_{m-1}}{F(m) - F(m-1)}$$

là đơn điệu giảm. Thật vậy

$$c_m > \frac{(2m-1)\log_l 2 - 1}{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}} \quad \text{và} \quad c_{m+1} < \frac{(2m+1)\log_l 2 + 1}{2^{(m+1)^2} - 2^{m^2}}.$$

Do đó với m *đủ lớn ta có* $c_{m+1} < c_m$ *vì*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(2m+1)\log_l 2 + 1}{(2m-1)\log_l 2 - 1} \cdot \frac{2^{m^2} - 2^{(m-1)^2}}{2^{(m+1)^2} - 2^{m^2}} = 0$$

3.6 Tích Cauchy của các chuỗi vô hạn

3.6.1. *Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối. Kí hiệu A_n, B_n và C_n là các tổng riêng thứ n tương ứng của $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. Khi đó*

$$\begin{aligned} C_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) \\ &= a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0. \end{aligned}$$

Nếu viết

$$B = B_n + r_n, \quad \textit{với} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Thì

$$C_n = BA_n - (a_0r_n + a_1r_{n-1} + \ldots + a_nr_0).$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}(a_0r_n + a_1r_{n-1} + \ldots + a_nr_0) = 0.$$

Muốn vậy, chọn một giá trị $\varepsilon > 0$ tuỳ ý và m, M như sau

$$|r_n| \le m \quad \textit{với } n \ge 0, \quad M = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Khi đó tồn tại $k \in \mathbb{N}$ và $l \in \mathbb{N}$ sao cho nếu $n \ge k$ thì $|r_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ và nếu $n \ge l+1$ thì $|a_{l+1}| + \ldots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Như vậy với $n \ge l+k$ chúng ta có

$$\begin{aligned} &|a_0r_n + a_1r_{n-1} + \ldots + a_nr_0| \\ &\le (|a_0||r_n| + \ldots + |a_l||r_{n-l}|) + (|a_{l+1}||r_{n-l-1}| + \ldots + |a_n||r_0|) \\ &< (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_l|)\frac{\varepsilon}{2M} + (|a_{l-1}| + \ldots + |a_n|)m \\ &< M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2m}m = \varepsilon \end{aligned}$$

Từ đây (∗) đã được chứng minh.

Theo những suy luận trên ta thấy rằng nếu hai chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối thì tích Cauchy của chúng cũng hội tụ tuyệt đối.

3.6.2.

(a) Theo định lí Mertens nếu $|x| < 1$ thì tích Cauchy của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ với chính nó sẽ hội tụ. Hơn nữa,

$$c_n = x^n + xx^{n-1} + \ldots + x^n = (n+1)x^n.$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2.$$

(b) $\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$.

(c) Chuỗi đã cho là tích Cauchy của hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Tổng của chuỗi thứ nhất là 1 (xem 3.1.4(b)) và tổng của chuỗi thứ hai là $e-1$ (xem 2.5.6). Do đó tổng của chuỗi đã cho là $e-1$ theo định lí Mertens.

3.6.3.

(a) Ta có

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \cdot \frac{1}{2^{n-k}(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{1}{n!}\left(2+\frac{1}{2}\right)^n.$$

Theo 2.5.7 tổng của tích Cauchy là $e^{\frac{5}{2}}$.

(b) Tích Cauchy là chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{n=1}^{n} \frac{(-3)^k}{k}.$$

Theo 3.1.32(a) tổng của nó là $-\frac{1}{2}\ln 2$.

(c) Ta có

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= x^{2n+1}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(k+1)(2n+1-k+1)\\
&= x^{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)(2n+1-k+1)\right.\\
&\left.+\sum_{k=n+1}^{2n+1}(-1)^k(k+1)(2n+1-k+1)\right)\\
&= x^{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)(2n+1-k+1)\right.\\
&\left.-\sum_{k'=0}^{n}(-1)^{k'}(k'+1)(2n+1-k'+1)\right)=0
\end{aligned}$$

Hơn nữa, vì $c_{2n+1}=0$ ta có

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= x^{2n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{2n-k}(k+1)(2n-k+1)\\
&= x^{2n}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(k+1)(2n-1-k+1)\right.\\
&\left.+\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(k+1)+(2n+1)\right)\\
&= x^{2n}(0+(-n)+(2n+1))=(n+1)x^{2n}.
\end{aligned}$$

Cuối cùng theo 3.6.2(a),

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}=\frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

3.6.4. Ta có thể thấy rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ là tích Cauchy của $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, do đó nó hội tụ với $|x|<1$ với tổng là $\frac{1}{1-x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

3.6.5. Để chứng minh đẳng thức đã cho ta cân bằng các hệ số của x^n trong công thức $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$. Như vậy,

$$c_n=(-1)^nx^{2n}\frac{1}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=(-1)^nx^{2n}\frac{1}{(n!)^2}\binom{2n}{n}$$

3.6.6. *Từ quan hệ*

$$c_n = \left(\frac{1}{a}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} + \frac{1}{2}\frac{1}{a+2}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}\right.$$
$$\left. +\ldots + \frac{1}{a+2n}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)x^n,$$

ta chứng minh được đẳng thức

$$\frac{1}{a}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} + \frac{1}{2}\frac{1}{a+2}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}$$
$$+\ldots + \frac{1}{a+2n}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} = \frac{(a+1)(a+3)\ldots(a+(2n-1))}{a(a+2)(a+4)\ldots(a+2n)}.$$

Để dẫn đến điều đó chúng ta phân tích vế phải của biểu diễn trên thành

$$\frac{(a+1)(a+3)\ldots(a+(2n-1))}{a(a+2)(a+4)\ldots(a+2n)} = \frac{\alpha_0}{a} + \frac{\alpha_1}{a+2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a+2n}.$$

Nhân cả hai vế với $a(a+2)(a+4)\ldots(a+2n)$ *và thay thế* $a=0$, $a=-2$, ... , $a=-2k$, ... , $a=-2n$, *ta có*

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\\
\alpha_1 &= \frac{-1(2n-3)!!}{-2(2n-2)!!},\ldots,\\
\alpha_k &= \frac{(-2k+1)(-2k+3)\ldots(-1)1\cdot 3\ldots(2(n-k)-1)}{-2k((-2k+2)\ldots(-2)\cdot 2\cdot 4\ldots(2(n-k))}\\
&= \frac{(2k-1)!!(2(n-k)-1)!!}{(2k)!!(2(n-k))!!},\ldots,\\
\alpha_n &= \frac{(2n-1)!!}{2n!!},
\end{aligned}$$

và đẳng thức được chứng minh.

3.6.7. *Kí hiệu* A_n, B_n, C_n *là tổng riêng thứ* n *tương ứng của* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. *Dễ dàng kiểm tra được rằng*

$$C_n = a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0.$$

Do vậy

$$C_0 + C_1 + ... + C_n = A_0B_n + A_1B_{n-1} + ... + A_nB_0.$$

Chia hai vế của đẳng thức cuối cùng cho $n+1$, sử dụng 2.3.2 và 2.3.8 ta nhận được $C = AB$.

3.6.8. *Gọi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ là tích Cauchy của $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ với chính nó. Khi đó*

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + ... + \frac{1}{k(n-k+1)} + ... + \frac{1}{n\cdot 1}\right).$$

Vì

$$\frac{1}{k(n-k+1)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \quad \text{với} \quad k = 1, 2, ..., n$$

ta có thể viết

$$c_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right).$$

Ta biết rằng $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \ln 2$ (xem 3.1.32(a)) và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})$ hội tụ (xem 3.4.19). Như vậy theo kết quả của bài toán trước,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) = (\ln 2)^2.$$

3.6.9. *Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ là tích Cauchy của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ với chính nó, khi đó*

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right).$$

Vì mỗi số hạng trong dấu ngoặc lớn hơn $\frac{1}{n}$, ta thấy rằng $|c_n| > 1$ với $n > 1$. Do vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ phân kỳ.

3.6.10. *Ta có*

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_nb_0 > a_0b_n,$$

do vậy nếu chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì chuỗi tích Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ cũng phân kỳ.

3.6.11. *Không. Xét hai chuỗi phân kỳ sau*

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \quad và \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

khi đó

$$c_n = a_o b_n + b_0 a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k},$$

trong đó $a_0 = b_0 = 1$, $a_n = -(\frac{3}{2})^n$, $b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}})$. *Do đó*

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n} \\ &- \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(2^{n-k}+\frac{1}{2^{n-k+1}}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{n} \end{aligned}$$

3.6.12. *Gọi* A_n, B_n, C_n *là tổng tiêng thứ* n *của các chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *và* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *tương ứng. Khi đó,*

$$C_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0.$$

suy ra,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} a_k(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_{n-k+1}) \\ &= a_1(B_n - B_{n-1}) + a_2(B_n - B_{n-2}) + \ldots + a_n(B_n - B_0) \\ &= B_n(A_n - a_0) - a_1 B_{n-1} - a_2 B_{n-2} - \ldots - a_n B_0 = B_n A_n - C_n. \end{aligned}$$

3.6.13. *Gọi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *là tích Cauchy của chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ *với* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$. *Khi đó*

$$c_n = (-1)^n(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0).$$

Trước hết giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *hội tụ. Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. *Vì các dãy* $\{a_n\}$ *và* $\{b_n\}$ *đơn điệu ta có*

$$|c_n| \geq b_n(a_0 + \ldots + a_n) \quad và \quad |c_n| \geq a_n(b_0 + \ldots + b_n)$$

Như vậy

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_0+b_1+\ldots+b_n)=0 \quad \textit{và} \quad \lim_{n\to\infty} b_n(a_0+a_1+\ldots+a_n)=0.$$

Giả sử hai đẳng thức trên thoả mãn. Khi đó dựa vào các bài toán trước ta có thể chỉ ra rằng

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k((-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1})=0.$$

Chú ý rằng

$$|(-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1}|\le b_{n-k+1}.$$

Do vậy

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k((-1)^n b_n+(-1)^{n-1}b_{n-1}+\ldots+(-1)^{n-k+1}b_{n-k+1})\right|$$
$$\le\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1}.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1}=0$. *Thật vậy,*

$$0<\sum_{k=1}^{2n}a_k b_{2n-k+1}\le(a_1+\ldots+a_n)b_n+(b_1+\ldots+b_n)a_n,$$

điều này chứng tỏ rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}a_k b_{2n-k+1}=0$. *Tương tự ta cũng có thể chỉ ra rằng* $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n-1}a_k b_{2n-k}=0$, *từ đó dẫn tới điều phải chứng minh.*

3.6.14. *Trước hết ta nhận thấy rằng chỉ cần xét trường hợp α và β không vượt quá 1. Ta sẽ chỉ ra rằng*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)=0$$

nếu và chỉ nếu $\alpha+\beta>1$. Theo định lí Stolz (xem 2.3.11)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{2^\beta}+\ldots+\frac{1}{n^\beta}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\beta(n^\alpha-(n-1)^\alpha)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}(1-(1-\frac{1}{n})^\alpha)}.\end{aligned}$$

Theo qui tắc LHôpital

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\alpha+\beta}(1-(1-\frac{1}{x})^{\alpha})} = \lim_{t\to0^+}\frac{t^{\alpha+\beta}}{1-(1-t)^{\alpha}}$$
$$= \lim_{t\to0^+}\frac{(\alpha+\beta)t^{\alpha+\beta-1}}{\alpha(1-t)^{\alpha-1}}$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\beta}(1-(1-\frac{1}{n})^{\alpha})} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \alpha+\beta>1,\\ \frac{1}{\alpha} & \text{nếu } \alpha+\beta=1,\\ +\infty & \text{nếu } \alpha+\beta<1.\end{cases}$$

Từ bài toán trên ta suy ra điều phải chứng minh.

3.6.15. Giả sử chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *hội tụ. Theo kết quả bài 3.6.13 có thể chỉ ra rằng*

$$\lim_{n\to\infty} a_n(b_0+b_1+..+b_n)=0 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} b_n(a_0+a_1+..+a_n)=0.$$

Với một giá trị $\varepsilon>0$ *tuỳ ý cho trước tồn tại một giá trị* $k_0\in\mathbb{N}$ *sao cho* $a_{k_0+1}b_{k_0+1}+a_{k_0+2}b_{k_0+2}+\ldots<\frac{\varepsilon}{2}$*. Như vậy với* $n>k_0$*,*

$$a_n(b_1+\ldots+b_n)<a_n(b_1+\ldots+b_{k_0})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Mặt khác, vì $\lim_{n\to\infty} a_n=0$*, tồn tại một giá trị* $n_1>k_0$ *sao cho*

$$a_n<\frac{\varepsilon}{2(b_0+\ldots+b_{k_0})} \quad \text{nếu} \quad n>n_1.$$

điều đó chỉ ra rằng $a_n(b_0+\ldots+b_n)<\varepsilon$ *với* $n>n_1$*. Từ đó chúng ta chứng minh được* $\lim_{n\to\infty} a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$*.*

Bây giờ giả sử tích Cauchy hội tụ. Theo 3.6.13 $\lim_{n\to\infty} a_n(b_0+\ldots+b_n)=0$ *Từ đó suy ra với* n *đủ lớn,*

$$(n+1)a_nb_n<a_n(b_0+\ldots+b_n)<1$$

và do đó

$$(a_nb_n)^{1+\alpha}<\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1+\alpha}.$$

3.7 Sắp xếp lại chuỗi. Chuỗi kép

3.7.1. *Gọi $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ là tổng riêng thứ n của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Khi đó*

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = S_{m_n} \quad \text{với} \quad n \geq 1$$

Vì mỗi dãy con của dãy đều hội tụ tới cùng một giới hạn, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{m_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3.7.2. *Kí hiệu $\{T_n\}$ là dãy của các tổng riêng của chuỗi được sắp lại. Khi đó*

$$\begin{aligned}
T_{3n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \ldots \\
&+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).
\end{aligned}$$

Do đó theo 3.1.32(a), ta có $\lim\limits_{n\to\infty} T_{3n} = \frac{1}{2}\ln 2$. Hiển nhiên rằng $\lim\limits_{n\to\infty} T_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} T_{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} T_{3n+2}$, suy ra

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots = \frac{1}{2}\ln 2$$

3.7.3. *Gọi $\{T_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi được sắp lại. Đặt $f(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$. Khi đó*

$$\begin{aligned}
T_{\alpha+\beta} &= 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\alpha - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2\beta} \\
&= f(2\alpha - 1) - \frac{1}{2}f(\alpha - 1) - \frac{1}{2}f(\beta) = f(2\alpha) - \frac{1}{2}f(\alpha) - \frac{1}{2}f(\beta).
\end{aligned}$$

Chứng minh bằng qui nạp

$$T_{n(\alpha+\beta)} = f(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta).$$

Như đã chỉ ra, đẳng thức đúng với $n = 1$*. Nếu nó đúng với* $n \in \mathbb{N}$*, thì*

$$\begin{aligned}
T_{(n+1)(\alpha+\beta)} &= f(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta) + \frac{1}{2n\alpha+1} + \frac{1}{2n\alpha+3} \\
&+ \ldots + \frac{1}{2(n+1)\alpha-1} - \frac{1}{2n\beta+2} - \frac{1}{2n\beta+4} - \ldots - \frac{1}{2(n+1)\beta} \\
&= f(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta) + f(2(n+1)\alpha - 1) \\
&- \frac{1}{2}f((n+1)\alpha - 1) - f(2n\alpha) + \frac{1}{2}f(n\alpha) - \frac{1}{2}f(((n+1))\beta) + \frac{1}{2}f(n\beta) \\
&= f(2(n+1)\alpha) - \frac{1}{2}f((n+1)\alpha) - \frac{1}{2}f((n+1)\beta)
\end{aligned}$$

Do đó, theo 2.1.41

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)} &= \lim_{n\to\infty}\left(f(2n\alpha) - \ln(2n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\alpha)\right. \\
&\left.+\frac{1}{2}\ln(n\alpha) - \frac{1}{2}f(n\beta) + \frac{1}{2}f(n\beta)\right) \\
&+ \lim_{n\to\infty}\left(\ln(2n\alpha) - \frac{1}{2}(\ln(n\alpha) + \ln(n\beta))\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\frac{2n\alpha}{\sqrt{n^2\alpha\beta}} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}.
\end{aligned}$$

Rõ ràng, với $k = 1, 2, 3, \ldots, (\alpha+\beta) - 1$ *ta có* $\lim\limits_{n\to\infty} T_{n(\alpha-\beta)+k} = \lim\limits_{n\to\infty} T_{n(\alpha+\beta)}$*. Như vậy tổng của chuỗi là* $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}$*.*

3.7.4. Kết quả nhận được chính là một trường hợp đặc biệt ($\alpha = 1$ *và* $\beta = 4$*) của bài toán trên.*

3.7.5. Có thể áp dụng kết quả bài toán 3.7.3 với $\alpha = 4$ *và* $\beta = 1$*.*

3.7.6. Xét chuỗi

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

nhận được bằng cách sắp xếp lại các số hạng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *theo* n*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$*, các số hạng dương theo sau một số hạng âm. Nhóm các số hạng của chuỗi (1) theo cách sau:*

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots.$$

ta có

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2-n+1}+\frac{1}{n^2-n+3}+\ldots+\frac{1}{n^2+n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Gọi S_n và T_n là tổng riêng thứ n của chuỗi (1) và (2) tương ứng. Khi đó

$$T_n = S_{\frac{(n+1)n}{2}+n} > \sum_{n=1}^{n}\left(\frac{k}{k^2+k-1}-\frac{1}{2k}\right) > \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

3.7.7. Nhóm các số hạng cuả chuỗi ta viết lại dưới dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\\
&=\frac{\sqrt{(4n-1)2n}+\sqrt{(4n-3)2n}-\sqrt{(4n-3)(4n-1)}}{\sqrt{4n-3}\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}}\\
&>\frac{2\sqrt{2n}-\sqrt{4n-1}}{\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}} > \frac{2\sqrt{2n}-\sqrt{4n}}{\sqrt{4n-1}\sqrt{2n}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4n-1}}.
\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n} = +\infty$, với $\{S_n\}$ là dãy tổng riêng của chuỗi đã sắp lại. Như vậy chuỗi phân kỳ.

3.7.8. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi đó và đặt $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Kí hiệu $\{T_n\}$ là dãy các tổng riêng của chuỗi đã sắp lại. Từ sự hội tụ tuyệt đối của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\text{(1)} \qquad |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots < \varepsilon.$$

Gọi m là số đủ lớn để mọi số hạng a_1, a_2,...,a_n xuất hiện trong T_m. Khi đó, theo (1)

$$|S - T_m| \le |S - S_n| + |S_n - T_m| < 2\varepsilon.$$

3.7.9. [4] Trước hết giả sử rằng $l > 0$ và đặt $n = d + u$, $d > u$, sau đó sắp lại chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(n)$. Tổng riêng thứ n của chuỗi mới là

$$\begin{aligned} T_n = T_{d+u} &= (f(1) - f(2) + f(3) - ... - f(2u)) \\ &\quad + (f(2u+1) + f(2u+3) + ... + f(2d-1)). \end{aligned}$$

Tổng này có các số hạng âm chứa u và mọi số hạng còn lại chứa d trong đối số là dương. Tổng của nhóm thứ hai chứa $d - u$ số hạng, và như vậy tổng này sẽ nằm trong khoảng $(d-u)f(2u)$ và $(d-u)f(2d)$. Vì tổng trong ngoặc thứ nhất hội tụ tới S khi $u \to \infty$, sự thay đổi trong tổng bằng với giới hạn của tổng trong ngoặc thứ hai. Đặt $\nu(u) = d - u$. Khi đó

(1) $\nu(u)f(2d) < f(2u+1) + f(2u+3) + ... + f(2d-1) < \nu(u)f(2u)$,

và sự đơn điệu của dãy $\{nf(n)\}$ chỉ ra rằng

$$\frac{u}{u+\nu(u)} < \frac{f(2u+2\nu(u))}{f(2u)} < 1. \tag{2}$$

Chọn $\nu(u)$ sao cho

$$\lim_{u\to\infty} \nu(u)f(2u) = l. \tag{3}$$

(ví dụ có thể chọn $\nu(u) = l\left[\frac{1}{f(2u)}\right]$) khi đó $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\nu(u)}{u} = 0$ vì

$$l = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\nu(u)}{u}2uf(2u) \quad \text{và} \quad \lim_{u\to\infty}2uf(2u) = +\infty.$$

Như vậy (2) chỉ ra rằng $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(2u-2\nu(u))}{f(2u)} = 1$. Từ (1) và sử dụng nguyên lý kẹp ta suy ra

$$\lim_{u\to\infty}(f(2u+1) + f(2u+3) + ... + f(2d-1)) = l.$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng $\lim\limits_{u\to\infty} T_{2u+\nu(u)} = S + l$.

Bây giờ chú ý rằng nếu $2u + \nu(u) < k < 2(u+1) + \nu(u+1)$ thì

$$0 \le T_k - T_{2u+\nu(u)} + f(2u+2) \le T_{2u+2+\nu(u+1)} - T_{2u+\nu(u)} + f(2u+2).$$

Vì $f(2u+2) \to 0$ khi $u \to \infty$ ta thấy rằng $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = S + l$.

Trong trường hợp $l < 0$ ta có thể đổi vai trò của d và u và thực hiện tương tự.

3.7.10. *Cho $\varepsilon > 0$, từ một chỉ số n_0 nào đó ta có*

$$\text{(1)} \qquad \frac{g-\varepsilon}{n} < f(n) < \frac{g+\varepsilon}{n}.$$

Xét chuỗi nhận được sau khi thay đổi thành phần thứ n có dạng (xem lời giải bài 3.7.9)

$$T_n = T_{d+u} = (f(1) - f(2) + f(3) - \ldots - f(2u)) + \\ + (f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)).$$

Hơn nữa giả sử rằng số d các số hạng dương thoả mãn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d}{u} = k$. Khi đó trong trường hợp $d > u$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2u+3} + \ldots + \frac{1}{2d-1} = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2u+1} + \ldots + \frac{1}{2d-1} - \ln(2d-1)\right) \\
&- \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2u-1} - \ln(2u-1)\right) \\
&- \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{2u+2} + \ldots + \frac{1}{2d-2}\right) - \ln\frac{2u-1}{2d-1}.
\end{aligned}$$

Theo bài 2.1.41, hai biểu thức trong ngoặc đơn tiến đến hằng số Euler γ. Ta đã chỉ ra rằng (bài 2.5.8 (a)) thành phần thứ ba tiến đến $\frac{1}{2}\ln k$. Vì vậy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2u+1} + \frac{1}{2u+3} + \ldots + \frac{1}{2d-1}\right) = \frac{1}{2}\ln k.$$

Từ đó suy ra (1) cho ta

$$\lim_{n\to\infty}(f(2u+1) + f(2u+3) + \ldots + f(2d-1)) = \frac{1}{2}g\ln k.$$

Vì vậy tổng S sẽ sai khác một lượng $\frac{1}{2}g\ln k$ so với chuỗi đã cho. Lập luận tương tự cho trường hợp $d < u$.

3.7.11. *Sử dụng kết quả của bài 3.7.9 với $\nu(u) = l[(2u)^p]$.*

3.7.12. *Sử dụng kết quả của bài 3.7.10 với $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d}{u} = \alpha$.*

3.7.13. Không. Thật vậy, xét chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *là một chuỗi nhận được từ việc đổi chỗ chuỗi phân kỳ* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$*. Tính đơn điệu của dãy* $\{a_n\}$ *chứng tỏ rằng*

$$a_{n_1} + a_{n_2} + ... + a_{n_m} \le a_1 + a_2 + ... + a_m.$$

Vì vậy không thể tăng độ phân kỳ của chuỗi.

3.7.14. [20] Chọn một dãy con $\{a_{r_n}\}$ *của dãy* $\{a_n\}$ *sao cho*

$$a_{r_n} < \min\left(2^{-n}, Q_n - Q_{n-1}\right), n = 1, 2, ..., \quad \text{với } Q_0 = 0.$$

Khi đó

$$a_{r_1} + a_{r_2} + ... + a_{r_n} \le Q_n \quad \text{và} \quad a_{r_1} + a_{r_2} + ... + a_{r_n} < 1.$$

Do đó vì $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = +\infty$ *nên dãy* $\{Q_n - (a_{r_1} + a_{r_2} + ... + a_{r_n})\}$ *cũng phân kỳ về vô hạn. Bây giờ ta cộng các số hạng không xuất hiện trong dãy con* $\{a_{r_n}\}$ *của chuỗi* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *vào tổng* $a_{r_1} + a_{r_2} + ... + a_{r_n}$ *theo cách dưới đây sao cho*

$$a_1 + a_2 + ... + a_{r_1-1} + a_{r_1} + a_{r_1+1} + ... + a_i + a_{r_k} + ... + a_{r_n} \le Q_n,$$

trong đó a_i *là số hạng thích hợp cuối cùng. Điều đó có nghĩa là nếu ta thêm một số hạng không xuất hiện trong dãy con* $\{a_{r_n}\}$ *có chỉ số lớn hơn* i *thì bất đẳng thức trên sẽ không còn đúng nữa.*

3.7.15. [W.Sierpiński, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, 1911, 149-158] Hai chuỗi $\sum\limits_{n-1}^{\infty} p_n$ *và* $\sum\limits_{n-1}^{\infty} q_n$ *là hai chuỗi con bù của chuỗi hội tụ có điều kiện* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *chứa mọi số hạng không âm và âm liên tiếp tương ứng.* σ *là số thực cho trước. Vì chuỗi* $\sum\limits_{n\to\infty} p_n$ *phân kỳ tới* $+\infty$ *nên tồn tại một chỉ số* k_1 *sao cho*

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} > \sigma.$$

Ta chọn được một chỉ số n_1 *nhỏ nhất sao cho*

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} + q_1 + q_2 + ... + q_{n_1} < \sigma.$$

Xét một chỉ số k_2 *sao cho*

$$p_1 + p_2 + ... + p_{k_1} + q_1 + q_2 + ... + q_{n_1} + p_{k_1+1} + p_{k_1-2} + ... + p_{k_2} > \sigma.$$

và một chỉ số n_2 nhỏ nhất sao cho

$$p_1+p_2+...+p_{k_1}+q_1+q_2+...+q_{n_1}+p_{k_1+1}+...+p_{k_2}+q_{n_1+1}+...+q_{n_2}<\sigma.$$

Tiếp tục quá trình trên ta tìm được hai dãy $k_1, k_2, ...$ và $n_1, n_2, ...$ và phép đổi chỗ tương ứng đối với chuỗi đang xét. Đặt S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi. Khi đó

$$S_n \le \sigma \quad \text{với} \quad n < k_1 \text{ nhưng } \quad S_n \ge \sigma \text{ với } k_1 \le n < k_1 + n_1.$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} S_n \le \sigma \quad &\text{với} \quad k_m + n_m \le n < k_{m+1} + n_m, \\ S_n \ge \sigma \quad &\text{với} \quad k_{m+1} + n_m \le n < k_{m+1} + n_{m+1}, \end{aligned}$$

với $m = 1, 2, ...$. Từ cách xác định dãy $\{k_m\}$ và $\{n_m\}$ ta có

$$\begin{aligned} &|S_{k_{m+1}-1+n_m} - \sigma| < p_{k_{m+1}}, \\ &|S_{k_{m+1}+n_m} - \sigma| < p_{k_{m+1}}, \\ &|S_{k_{m+1}+n_m+l} - \sigma| < p_{k_{m+1}}, \quad \text{với} \quad l = 1, 2, ..., n_{m+1} - n_m - 1, \\ &|S_{k_{m+1}+n_{m+1}} - \sigma| < |q_{n_{m+1}}|, \\ &|S_{k_{m+1}+n_{m+1}-l} - \sigma| < |q_{n_{m+1}}|, \quad \text{với} \quad l = 1, 2, ... k_{m+2} - k_{m+1} - 1, \end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sigma$.

3.7.16. *Ký hiệu $\{S_m\}$, $\{T_m\}$ là các dãy tổng riêng của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ tương ứng. Vì $\{n_k - k\}$ là dãy bị chặn nên tồn tại $l \in \mathbb{N}$ sao cho $k - l \le n_k \le k + l$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Nếu $m > l$ và $n_k \le m - l$ thì $k - l \le n_k \le m - l$. Vì vậy $k \le m$, và từ đó suy ra*

$$\text{(1)} \qquad \{1, 2, ..., m - l\} \subset \{n_1, n_2, ..., n_m\}.$$

Thật vậy, nếu s là một số nguyên dương không lớn hơn $m - l$ thì tồn tại duy nhất một số nguyên dương $k \in \mathbb{N}$ sao cho $s = n_k$. Điều đó cho ta khẳng định $k \le m$ hay nói cách khác $s \in \{n_1, n_2, ..., n_m\}$. Theo (1) ta thấy rằng các phần tử a_n, $n = 1, 2, ..., m - l$ đều xuất hiện trong T_m. Mặt khác, nếu $k \le m$ thì $n_k \le k + l \le m + l$, và ta có thể suy ra rằng mọi số hạng $a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_m}$ đều xuất hiện trong S_{m+l}. Vì vậy

$$|S_m - T_m| \le |a_{m-l+1}| + ... + |a_{m+l}|, \quad \text{với} \quad m > l.$$

Suy ra $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} T_m$.

Nếu dãy $\{n_k - k\}$ *không bị chặn thì các bài tập 3.7.2 - 3.7.6 cho ta các ví dụ về việc khi đổi chỗ một chuỗi có thể làm cho nó phân kỳ hoặc thay đổi tổng của nó. Ta đưa ra một ví dụ không làm thay đổi tổng của một chuỗi khi đổi chỗ các phần tử của chúng. Ta xây dựng dãy* $\{n_k\}$ *bằng cách đổi chỗ các vị trí ứng với các chỉ số nguyên dương* $\frac{n(n+1)}{2}$ *và* $\frac{n(n+3)}{2}$, *còn lại giữ nguyên. Vì* $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n$ *ta có dãy* $\{n_k - k\}$ *không bị chặn. Hơn nữa*

$$T_m - S_m = \begin{cases} 0, & \text{nếu} \quad m = \frac{n(n+3)}{2}, \\ a_{n(n+3)/2} - a_{n(n-1)/2}, & \text{nếu} \quad \frac{n(n+1)}{2} \le m < \frac{n(n+3)}{2}. \end{cases}$$

3.7.17. [R. P. Agnew, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1995), 563-564] Ta sử dụng định Toeplitz (xem 3.4.37). Đặt $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ *và* $T_m = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{n_k}$. *Giả thiết rằng* m *đủ lớn sao cho* $1 \in \{n_1, n_2, ..., n_m\}$, *và sắp xếp các phần tử của tập* $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$ *để tạo thành một dãy tăng*

$$1,\ 2,\ 3,\ ...,\ \beta_{0,m},\ \alpha_{1,m}+1,\ \alpha_{1,m}+2,\ ...,\ \beta_{1,m},$$
$$\alpha_{2,m}+1,\ \alpha_{2,m}+2,\ ...,\ \beta_{2,m},\ ...,\ \alpha_{j_m,m}+1,\ \alpha_{j_m,m}+2,\ ...,\ \beta_{j_m,m},$$

trong đó

$$0 < \beta_{0,m} < \alpha_{1,m} < \beta_{1,m}, < \alpha_{2,m} < \ ...,< \beta_{j_m,m}.$$

Do đó tổng riêng T_m *của dãy vừa nhận được sẽ được viết là*

$$T_m = S_{\beta_0,m} + (S_{\beta_1,m} - S_{\alpha_1,m}) + ... + (S_{\beta_{j_m},m} - S_{\alpha_{j_m},m}).$$

Suy ra $T_m = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{m,k} S_k$, *trong đó*

$$c_{m,k} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad k = \beta_{l,m},\ l = 0, 1, ..., j_m, \\ -1 & \text{nếu} \quad k = \alpha_{l,m},\ l = 0, 1, ..., j_m, \\ 0 & \text{trái lại}. \end{cases}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{0,m} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_{m,k} = 0$ *với mọi* $\in \mathbb{N}$. *Hơn nữa* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{m,k} = 1$ *với* $m = 1, 2, ...,$ *và* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_{m,k}| = 2B_m - 1$, *trong đó* B_m *là số cac khối số nguyên dương không giao nhau trong tập* $\{n_1, n_2, ..., n_m\}$. *Cuối cùng sử dụng định lý Toeplitz ta có* $\lim\limits_{n\to\infty} T_m = \lim\limits_{n\to\infty} S_m$ *khi và chỉ khi tồn tại số* N *sao cho* $B_m \le N$ *với mọi* $m \in \mathbb{N}$.

3.7.18. *Giả sử rằng chuỗi* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n$ *là hội tụ tuyệt đối và có tổng là* S*. Khi đó với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* k_0 *sao cho*

$$|c_1 + c_2 + ... + c_{k_0} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{và} \quad \sum_{l=k_0+1}^{\infty} |c_l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Với m, n *đủ lớn sao cho với mọi* $l \in \{1, 2, ..., k_0\}$ *tồn tại* $i, k,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, *sao cho* $c_l = a_{i,k}$*. Thế thì*

$$|S_{m,n} - S| < |c_1 + c_2 + ... + c_{k_0} - S| + \sum_{l=k_0+1}^{\infty} |c_l| < \varepsilon.$$

Vì vậy chuỗi kép S *hội tụ. Tương tự như vậy ta chứng minh được tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi kép.*

3.7.19. *Đặt*

$$S^* = \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{i,k}|, \qquad T^* = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|,$$

$$S^*_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|, \quad T^*_n = \sum_{k=1}^{n} |c_n|,$$

Cho trước các số thực dương ε *và số nguyên dương* $l \in \mathbb{N}$ *bất kỳ. Xét các chỉ số* m, n *đủ lớn sao cho mọi số hạng của* T^*_l *đều thuộc* $S^*_{m,n}$ *và* $|S^* - S^*_{m,n}| < \varepsilon$*. Thế thì* $T^*_l \le S^*_{m,n} < S^* + \varepsilon$*, có nghĩa là chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *hội tụ tuyệt đối. Đặt tổng riêng thứ* n *và tổng của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *lần lượt là* T_n *và* T*. Để chứng minh đẳng thức*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

ta cố định $\varepsilon > 0$ *và xét* l *đủ lớn sao cho*

$$|T^*_l - T^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{và} \quad |T_l - T| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nếu $S_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}$ *và nếu* n, m *đủ lớn sao cho moi số hạng của* T_l *đều nằm trong* $S_{m,n}$ *thì ta có*

$$|S_{m,n} - T| < |T - T_l| + |T^* - T^*_l| < \varepsilon.$$

3.7.20. Đây là hệ quả của hai bài tập trên.

3.7.21. Không mất tổng quát ta có thể giả sử rằng chuỗi lặp $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|\right)$ *hội tụ. Đặt* $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}| = \sigma_i$ *và* $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i = \sigma$, *thế thì mỗi chuỗi* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$, $i = 1, 2, \ldots$ *đều hội tụ và* $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right| = |S_i| \le \sigma_i$. *Từ kết quả này và sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i$ *ta suy ra sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi* $\sum_{i=1}^{\infty} S_i$, *và suy ra* $\sum_{i=1}^{\infty} S_i = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\right)$.

3.7.22. Đặt $\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{i,k} = S$, $\sum_{i,k=1}^{\infty}|a_{i,k}| = S^*$ *và đặt* $S_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}$ *và* $S^*_{m,n} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|$. *Ta sẽ chỉ ra rằng chuỗi lặp*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|\right)$$

hội tụ về S^*. *Thật vậy, với mọi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại số* n_0 *sao cho* $S^* - \varepsilon < S^*_{m,N} < S^*$ *với* $m, n > n_0$. *Cố định* m, *dãy* $\{S^*_{m,n}\}$ *sẽ tăng đơn điệu và bị chặn, vì vậy nó hội tụ và* $\lim_{n\to\infty} S^*_{m,n} = S^*_m$. *Từ bài tập trên ta có một chuỗi lặp hội tụ tuyệt đối thì hội tụ, vì vậy chuỗi* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$ *hội tụ với mọi* i *tới* S_i, *tức là với mọi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* m_1 *sao cho*

$$|(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S| < \varepsilon \quad \text{với} \quad m > m_1.$$

Từ giả thiết rằng chuỗi kép hội tụ tuyệt đối ta có

$$|S_{m,n} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{và} \quad |S^*_{m,n} - S^*| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với} \quad m, n > m_1.$$

Suy ra với $m > m_1$ *ta có*

$$|(S_1 + S_2 + \ldots + S_m) - S| = \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} - S\right|$$
$$\le |S_{m,n} - S| + \left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{i,k}\right| \le |S_{m,n} - S| + |S^*_{m,n} - S^*| < \varepsilon.$$

Chứng minh tương tự đối với các trường hợp còn lại.

3.7.23. Chú ý rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n,1}+a_{n-1,2}+a_{n-2,3}+\ldots+a_{1,n})$ *là một chuỗi kép được sắp. Nếu một trong các chuỗi*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty}|a_{i,k}|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_{n,1}|+|a_{n-1,2}|+|a_{n-2,3}|+\ldots+|a_{1,n}|)$$

hội tụ thì ta nhận được điều phải chứng minh từ bài tập 3.7.18, 3.7.19 và 3.7.22. Vì thế ta chỉ cần chứng minh rằng từ tính hội tụ tuyệt đối của một trong các chuỗi lặp ta sẽ suy ra tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi kép được sắp. Ta giả thiết rằng chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{i,k}|$ *hội tụ tới* S^*. *Xét dãy* $\{c_n\}$ *gồm các phần tử của ma trận vô hạn* $(a_{i,k})_{i,k=1,2,\ldots}$. *Thế thì với* $l\in\mathbb{N}$ *tồn tại hai số* m,n *đủ lớn sao cho*

$$|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_l|\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\le S^*.$$

Vì vậy chuỗi $\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_n$ *hội tụ tuyệt đối, tức là chuỗi kép hội tụ tuyệt đối (xem bài tập 3.7.18).*

3.7.24. Vì $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m$ *ta có* $\sum\limits_{\substack{n,k=0\\k+n=m}}^{m}\frac{1}{n!k!}=\frac{2^m}{m!}$. *Vì vậy*

$$\sum_{\substack{n,k=0\\k+n=m}}^{m}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}=\frac{2^m}{(m+1)!}.$$

Sử dụng kết quả bài 3.7.23 ta suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{n,k=0\\n+k=m}}^{m}\frac{1}{n!k!(n+k+1)}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{(m+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{m+1}}{(m+1)!}=\frac{1}{2}(e^2-1),\end{aligned}$$

đẳng thức cuối cùng suy ra từ bài 2.5.7.

3.7.25. Từ bài tập 3.7.23 ta có

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{nk(n+k+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k+2}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{n-1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+2)}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots\right\} = \frac{7}{4}.$$

3.7.26. Từ bài 3.7.23 ta có

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{(n+k+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+k+2)!}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k+1} \frac{0!}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Từ bài 3.1.28 ta suy ra điều phải chứng minh.

3.7.27. Chú ý rằng tổng của mỗi hàng trong ma trận là hữu hạn. Thật vậy tổng của hàng đầu tiên là x, hàng thứ hai là $x(1-x)$, hàng thứ ba là $x(1-x)^2$, v.v. Hơn nữa

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots = 1.$$

Mặt khác tổng các cột chỉ có thể bằng 1 hoặc -1 liên tiếp, vì thế chuỗi lặp sẽ hội tụ. Theo bài 3.7.23 ta suy ra chuỗi lặp không thể hội tụ tuyệt đối.

3.7.28.

(a) Từ sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i$ và $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y^k$ ta suy ra được sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi lặp $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^i y^k\right)$, bởi vì $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x^i y^k|\right) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} |x^i| \left(\frac{1}{1-|y|}\right) = \frac{1}{(1-|x|)(1-|y|)}$. Từ đó suy ra sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi kép đã cho.

(b) *Từ chuỗi lặp ta có thể suy ra chuỗi của ta hội tụ khi và chỉ khi* $\alpha > 1$, $\beta > 1$.

(c) *Xét các số hạng sao cho* $i + k = n$ *ta có*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^p} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{1}{n^p}.$$

Vì vậy chuỗi kép hội tụ khi và chỉ khi $p > 2$ *và phân kỳ trong trường hợp* $p \le 2$.

3.7.29.

(a) *Ta chỉ cần tính tổng của chuỗi lặp. Ta có*

$$\sum_{i=2}^{\infty}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(p+i)^k}\right) = \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{p+i}\cdot\frac{1}{p+i-1}\right) = \frac{1}{p+1}.$$

(b) *Tương tự (a) ta đi tính tổng của chuỗi lặp*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)^i}\right) &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)(2k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \ln 2.\end{aligned}$$

Đẳng thức còn lại được suy ra từ 3.1.32(a).

(c) *Tương tự (b) ta có*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4i-1)^{2k}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(4i)(4i-2)} = \frac{1}{4}\ln 2.$$

3.7.30. *Vì* $S_{m,n} = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k} = b_{m,n}$ *ta thấy rằng*

$$\begin{aligned}&a_{1,1} = S_{1,1} = b_{1,1},\\ &a_{1,n} = S_{1,n} - S_{1,n-1} = b_{1,n} - b_{1,n-1}, \quad n > 1,\\ &a_{m,1} = S_{m,1} - S_{m-1,1} = b_{m-1,1} - b_{m,1}, \quad m > 1.\end{aligned}$$

Tương tự với $m, n > 1$ *ta có*

$$\begin{aligned}a_{m,n} &= S_{m,n} - S_{m-1,n} - (S_{m,n-1} - S_{m-1,n-1})\\ &= b_{m,n} - b_{m-1,n} - (b_{m,n-1} - b_{m-1,n-1}), \quad n, m > 1.\end{aligned}$$

3.7.31. Ta có $S_{m,n} = (-1)^{m+n}(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n})$. *Vì vậy với* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* n_0 *sao cho với* $m, n > n_0$ *ta có* $|S_{m,n}| < \varepsilon$, *tức là chuỗi kép sẽ hội tụ về 0. Tuy nhiên cả hai chuỗi lặp đều phân kỳ. Thật vậy, ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} ai, k = S_{i,n} - S_{i-1,n} = (-1)^{i+n}\frac{3}{2^i} + (-1)^{i+n}\frac{1}{2^{n-1}},$$

cho ta thấy rằng mọi chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i,k}$, $i \in \mathbb{N}$ *đều phân kỳ.*

3.7.32. Ta có

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x|^{i}k\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x|^i}{1-|x|^i}.$$

Ta có thể thử rằng vế phải của đẳng thức trên là hội tụ, điều này có nghĩa chuỗi lặp sẽ hội tụ tuyệt đối, do đó theo 3.7.23 thì

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^{ik} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k}.$$

Chọn các cặp (i, k) *có cùng tích* ik *ta có*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} x^{ik} = \sum_{n=1}^{\infty}\theta(n)x^n,$$

do số các bội của n *bằng số các cặp* (i, k) *với* $ik = n$. *Hơn nữa với* $n = 2, 3, \ldots$ *ta có*

$$\begin{aligned}
&S_{n,n} - S_{n-1,n-1} = \\
&= x^n + x^{2n} + \ldots + x^{(n-1)n} + x^{n^2} + x^{n(n-1)} + \ldots + x^{n\cdot 2} + x^n \\
&= 2\frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + x^{n^2}.
\end{aligned}$$

Hiển nhiên ta có $S_{1,1} = x = 2\frac{x-x}{1-x} + x$. *Do đó ta tính được*

$$S_{n,n} = (S_{n,n} - S_{n-1,n-1}) + (S_{n-1,n-1} - S_{n-2,n-2}) + \ldots + S_{1,1},$$

ta thấy rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{1-x^k} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}.$$

3.7.33. Từ bài tập trên ta chỉ ra được rằng chuỗi lặp hội tụ tuyệt đối, do đó đẳng thức đầu tiên được suy ra trực tiếp từ 3.7.23. Để chứng minh đẳng thức còn lại ta xét một sự sắp xếp lại của chuỗi kép được trình bày trong bài 3.7.32.

3.7.34.

(a) Từ 3.7.23 ta có

$$\sum_{p=2}^{\infty} S_p = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1.$$

(b) Cũng như câu (a) ta có

$$\sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p S_p = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}.$$

3.7.35. Đặt $\mathbf{B}$ là tập các số tự nhiên không phải là luỹ thừa của một số nào đó thế thì

$$\mathbf{A} = \{k^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ k \in \mathbf{B}\}.$$

Vì $\frac{1}{n-1} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^j}$, $n \geq 2$, sử dụng kết quả của bài 3.7.23 và 3.7.34 ta có

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbf{A}} \frac{1}{n-1} &= \sum_{n\in\mathbf{A}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n^j} = \sum_{k\in\mathbf{B}} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^{nj}} \\ &= \sum_{k\in\mathbf{B}} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^{nj}} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = 1.\end{aligned}$$

3.7.36. [G. T. Williams, Amer. Math. Monthly, 60 (1953), 19-25] Vế trái của đẳng thức bằng

$$(*) \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k^2} \frac{1}{j^{2n-2}} + \frac{1}{k^4} \frac{1}{j^{2n-4}} + \dots + \frac{1}{k^{2n-2}} \frac{1}{j^2} \right).$$

Tính toán ta được

$$(**) \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \frac{j^{2-2n} - k^{2-2n}}{k^2 - j^2} + (n-1)\frac{1}{j^{2n}} \right).$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2} &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{j^{2-2n}}{k^2-j^2}-\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{k^{2-2n}}{k^2-j^2}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\frac{1}{k^2-j^2}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k^{2n-2}}\frac{1}{j^2-k^2}\\
&= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}.
\end{aligned}$$

Do đó

$$(***)\qquad \begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right)\\
&=\lim_{N\to\infty}\left(2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k^2-j^2}+(n-1)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}\right).
\end{aligned}$$

Bây giờ nhận xét rằng

$$\begin{aligned}
2j\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k^2-j^2} &= \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k-j}-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{1}{k+j}\\
&= \sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k-j}+\sum_{k=j+1}^{N}\frac{1}{k-j}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+j}+\frac{1}{2j}\\
&= -\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{N-j}\frac{1}{k}-\sum_{k=j+1}^{N-j}\frac{1}{k}+\frac{1}{2j}\\
&= -\sum_{k=1}^{N+j}\frac{1}{k}+\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{N-j}\frac{1}{k}+\frac{1}{2j}\\
&= \frac{3}{2j}-\left(\frac{1}{N-j+1}+\frac{1}{N-j+2}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right).
\end{aligned}$$

Từ đó sử dụng $(***)$ *ta nhận được*

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{j^{2-2n}-k^{2-2n}}{k^2-j^2}+(n-1)\frac{1}{j^{2n}}\right)$$
$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-1}}\left(\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right).$$

Hơn nữa vì $0<\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}<\frac{2j}{N-j+1}$ *ta thấy rằng*

$$0<\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-1}}\left(\frac{1}{N-j+1}+\ldots+\frac{1}{N+j}\right)$$
$$<2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n-2}}\frac{1}{N-j+1}\leq 2\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\frac{1}{N-j+1}$$
$$=\frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{N-j+1}\right)$$
$$=\frac{4}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\leq\frac{4}{N+1}(\gamma+\ln(N+1)),$$

trong đó γ *là hằng số Euler (xem 2.1.41). Cuối cùng theo* $(*)$ *ta có*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}\frac{1}{j^{2n-2}}+\frac{1}{k^4}\frac{1}{j^{2n-4}}+\ldots+\frac{1}{k^{2n-2}}\frac{1}{j^2}\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^{2n}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\zeta(2n).$$

3.7.37. *Thay giá trị* $n=2$ *trong bài toán trên ta được*

$$\zeta(2)\zeta(2)=\left(2+\frac{1}{2}\right)\zeta(4).$$

Vì $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ *(xem 3.1.28(a)), ta được (xem 3.1.28(b))*

$$\zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Tương tự khi cho $n = 3$ ta được

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Và tương tự có

$$\zeta(8) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

3.8 Tích vô hạn

3.8.1.

(a) *Ta có*

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1}{(k+1)(k^2-k+1} =$$
$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)^2-(k+1)+1}{(k+1)(k^2-k+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}.$$

(c) *Với $x = 0$ giá trị của tích là 1. Nếu $x \neq 2^m(\frac{\pi}{2} + k\pi)$, thì $\cos\frac{\pi}{2^m} \neq 0$ và $\sin\frac{\pi}{2^n} \neq 0$ do đó*

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2^{k-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin x}{x}.$$

(d) *Sử dụng các công thức*

$$\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = 1,$$

tương tự câu trên ta có

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cosh\frac{x}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{nếu} \quad x = 0, \end{cases}$$

(e) *Ta có*

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\prod_{k=0}^{n}\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1-x}.$$

(f)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2.$$

(g) *Vì*

$$\prod_{k=1}^{n}a^{\frac{(-1)^k}{k}}=a^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}},$$

sử dụng tính liên tục của hàm luỹ thừa và 3.1.32(a) ta suy ra rằng $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\ln 2}$.

(h)

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{1}{k}}}{1+\frac{1}{k}}=\frac{e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}{n+1}=e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Do đó sử dụng bài 2.1.41, ta có

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}=e^{\gamma},$$

trong đó γ *là hằng số Euler.*

(i) *Ta có*

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{(3k)^2}{(3k-1)(3k+1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{(3k)^3}{(3k-1)3k(3k+1)}=\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n+1)!}.$$

Sử dụng công thức Stirling

$$n!=\alpha_n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,\quad \text{với}\quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n=1,$$

ta nhận được

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P_n&=\frac{3^{3n}(2\pi)^{3/2}n^{3n+3/2}e^{-3n}}{(2\pi)^{1/2}(3n+1)^{3n+1+1/2}e^{-3n-1}}\\&=2\pi e\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{3/2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

3.8.2.

(a)

$$P_{2n} = \prod_{k=2}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\ldots\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$
$$= 1+\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$
$$P_{2n-1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\frac{2n-2}{2n-1} = 1.$$

(b) Ta có

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n} = n+1\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,$$

do đó tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *phân kỳ.*

(c) Tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ *phân kỳ, thật vậy,*

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3.8.3. Trước hết chú ý rằng đối với các số hạng không âm a_n *ta có*

(1) $$a_1+a_2+\ldots+a_n \le (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

Hơn nữa sử dụng bất đẳng thức $e^x \ge 1+x$, $x\ge 0$ *ta được*

(2) $$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \le e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Từ các bất đẳng thức (1) và (2) và tính liên tục của hàm luỹ thừa ta suy ra sự hội tụ của tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *là tương đương với sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.8.4. Giả thiết rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ, tức là với* N *đủ lớn thì* $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n \le \frac{1}{2}$. *Từ 1.2.1 ta có*

$$\prod_{k=N}^{\infty}(1-a_k) \ge 1-\sum_{k=N}^{i} a_k > \frac{1}{2}.$$

Vì $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_k) = P_{N-1}\prod\limits_{k=N}^{n}(1-a_k)$ *nên có thể suy ra rằng dãy* $\left\{\frac{P_N}{P_{N-1}}\right\}$ *đơn điệu giảm bị chặn dưới, tức là nó hội tụ, giả thiết rằng chuỗi đó hội tụ về* P*, thế thì* $P \in [\frac{1}{2}, 1]$*. Từ đó suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_{N-1}P \neq 0$*. Để chứng minh điều còn lại ta giả thiết* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ. Nếu dãy* $\{a_n\}$ *không hội tụ về 0 thì dãy* $\{1-a_n\}$ *không hội tụ về 1 và khi đó điều kiện cần cho tính hội tụ của tích* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ *không được thoả mãn. Vì thế ta giả thiết rằn* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, và đồng thời* $0 \le a_n < 1$ *với* n *bắt đầu từ một chỉ số* N *nào đó. Từ công thức (xem 2.5.7)*

$$e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right) + \ldots,$$

ta được $1 - x \le e^{-x}$ *với* $0 \le x < 1$*, vì các số hạng trong các dấu ngoặc đơn là dương. Từ đó suy ra*

$$0 \le \prod_{k=N}^{n}(1-a_k) \le e^{-\sum\limits_{k=N}^{n} a_k}, \quad n \ge N,$$

và đương nhiên $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=N}^{n}(1-a_k) = 0$*. Từ đó ta kết luận rằng* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ *phân kỳ.*

3.8.5. Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n}(1+a_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k}) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k\sqrt{k}}\right).\end{aligned}$$

Do đó sử dụng 3.8.4 ta suy ra tích hội tụ.

3.8.6.

(a) *Vì* $\cos\frac{1}{n} = 1 - \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ *và* $1 \neq 1 - \cos\frac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$*, sử dụng kết quả của bài 3.8.4 suy ra sự hội tụ của tích sẽ được suy ra từ sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ *(xem 3.2.1.(e)).*

(b) *Tương tự câu (a) ta có sự hội tụ của tích được suy ra từ sự hội tụ của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$ *(xem 3.2.1.(d)).*

(c) Ta có
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}=1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}.$$
Vì $\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}>0$ với $n\geq 2$ và
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}=2,$$
theo câu 3.8.3 ta suy ra tích phân kỳ.

(d) Chú ý rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ và sử dụng kết quả của bài 3.8.4 ta suy ra tích đang xét là hội tụ.

(e) Sự phân kỳ của tích được suy ra từ tính phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$ (xem 3.2.5(a)).

(f) Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=1$, sử dụng kết quả bài 2.5.5 ta suy ra rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\ln n}{\sqrt[n^2]{n}-1}=1$. Do đó sự hội tụ của tích được suy từ sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

3.8.7. Từ giả thiết ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ và không mất tổng quát ta có thể giả thiết rằng $|a_n|<1$. Vì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(a_n+1)}{a_n^2}=\frac{1}{2} \tag{1}$$

và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ, nên sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ tương đương với sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$, tức là tương đương với sự hội tụ của tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$. Chú ý rằng nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ hội tụ thì theo (1), với n đủ lớn ta có
$$a_n-\ln(1+a_n)>\frac{1}{4}a_n^2.$$
Do đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ phân kỳ tới $-\infty$, tức là $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ phân kỳ tới 0.

3.8.8. Kết quả được suy ra từ 3.8.7.

3.8.9. Sử dụng 3.8.7 va 3.8.8.

3.8.10. Sử dụng đẳng thức

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}a_n^2|}{|a_n|^3} = \frac{1}{3}$$

và tiến hành như cách giải của bài 3.8.7.

3.8.11. Không. Thật vậy, sử dụng kết quả bài trước ta thấy rằng tích được nêu trong phần gợi ý sẽ hội tụ khi $\alpha > \frac{1}{3}$. Mặt khác các chuỗi

$$-\frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) - \frac{1}{3^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right) - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$$

và

$$\left(-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3^\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4^\alpha}\right)^2 + \ldots$$

cùng hội tụ khi $\alpha \le \frac{1}{2}$.

3.8.12. Chú ý rằng nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}a_n^2 - \frac{1}{3}a_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^k}{k}a_n^k|}{|a_n|^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

3.8.13. Sử dụng công thức Taylor

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2(1+\theta_n)^2}a_n^2 = a_n - \Theta_n a_n^2,$$

trong đó $\frac{2}{9} < \Theta_n < 2$ nếu $|a_n| < \frac{1}{2}$. Do đó với n_1, n_2 đủ lớn và $n_1 < n_2$ thì

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} \ln(1+a_n) = \sum_{n=n_1}^{n_2} -\Theta \sum_{n=n_1}^{n_2} a_n^2, \quad \text{trong đó} \quad \Theta \in \left(\frac{2}{9}, 2\right).$$

Từ đó suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

3.8.14. *Nếu các tích* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *và* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ *cùng hội tụ thì tích* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n^2)$ *cũng hội tụ. Từ đó suy ra chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *hội tụ . Điều phải chứng minh được suy ra từ bài tập trên.*

3.8.15. *Có, thật vậy vì dãy* $\{a_n\}$ *đơn điệu giảm về 1 nên ta viết được* $a_n = 1 + \alpha_n$ *trong đó* $\{\alpha_n\}$ *là một dãy đơn điệu giảm dần về 0. Sự hội tụ của tích đang xét tương đương với sự hội tụ của chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln(1+\alpha_n).$$

Rõ ràng chuỗi đang xét là hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz về chuỗi đan dấu.

3.8.16.

(a) *Vì* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1 + 1 = 2$ *nên tích đang xét không thoả mãn điều kiện cần của tính hội tụ.*

(b) *Tính hội tụ của tích* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *được suy ra từ sự hội tụ của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n^2$.

(c), (d) *Sự hội tụ của các tích được suy ra từ sự hội tụ của các chuỗi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n + \sum_{n=1}^{\infty}\ln b_n$$

và

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln a_n - \sum_{n=1}^{\infty}\ln b_n.$$

3.8.17. *Giả sử ta có chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *hôi tụ , khi đó* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, tính hội tụ của hai tích vô hạn được suy ra từ 3.8.4 và từ đẳng thức*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n}{x_n^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x_n}{x_n}}{x_n^2} = \frac{1}{6}.$$

Bây giờ giả thiết rằng một trong hai tích hội tụ, thế thì $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *và tính hội tụ của* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *cũng được suy từ các đẳng thức kể trên.*

3.8.18. *Chú ý rằng*

$$a_1 \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{a_k}{S_{k-1}}\right) = a_1 \prod_{k=2}^{n} \frac{S_k}{S_{k-1}} = S_n.$$

3.8.19. *Xem bài tập 3.1.9.*

3.8.20. *Xem bài tập 3.1.9.*

3.8.21. *Sử dụng bài tập trên với $a_n = x^n$.*

3.8.22. *Giả sử rằng tích $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, tức là $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$, trong đó $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$. Từ điều này ta suy ra tồn tại một số $\alpha > 0$ sao cho $|P_n| > \alpha$ với $n \in \mathbb{N}$. Dãy hội tụ $\{P_n\}$ là một dãy Cauchy, do đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $|P_{n+k} - P_{n-1}| < \varepsilon\alpha$ với $n > n_0$ và $k \in \mathbb{N}$. Thế thì*

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_{n-1}} - 1\right| < \frac{\varepsilon\alpha}{|P_{n-1}|} \leq \varepsilon, \quad \text{với} \quad n \geq n_0.$$

Giả thiết rằng với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$(*) \qquad |a_n a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

với $n \geq n_0$ và $k \in \mathbb{N}$. Chon $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ta có

$$(**) \qquad \frac{1}{2} < \frac{P_{n-1}}{P_{n_0}} < \frac{3}{2} \quad \text{với} \quad n > n_0.$$

Trong $(*)$ thay ε bằng $\frac{2\varepsilon}{3|P_{n_0}}$ ta tìm được một số tự nhiên n_1 sao cho

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_{n-1}} - 1\right| < \frac{2\varepsilon}{3|P_{n_0}|} \quad \text{với } n \geq n_1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Do đó với $n > \max\{n_0, n_1\}$ ta được

$$|P_{n+k} - P_{n-1}| < \frac{2\varepsilon}{3} \left|\frac{P_{n-1}}{P_{n_0}}\right| < \varepsilon.$$

Điều này có nghĩa là dãy $\{P_n\}$ là dãy Cauchy, hơn nữa từ (**) ta suy ra giới hạn của nó khác 0.

3.8.23. Ta có

$$\prod_{k=1}^{2n}(1+x^k) = \prod_{k=1}^{2n}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-x^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-x^k)}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-x^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x^{2k})\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})} = \frac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}(1-x^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1})}.$$

Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy (xem bài 3.8.22) ta suy ra điều phải chứng minh.

3.8.24. Đây là một hệ quả của 3.8.3.

3.8.25. Chú ý rằng với $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ thì

$$|(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)-1| \le (1+|a_1|)(1+|a_2|)...(1+|a_n|)-1$$

và sử dụng tiêu chuẩn Cauchy (xem 3.8.22).

3.8.26. Đặt $P_n = (1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Thế thì $P_n - P_{n-1} = P_{n-1}a_n$ và

$$\begin{aligned} P_n &= P_1 + (P_2 - P_1) + ... + (P_n - P_{n-1}) \\ &= P_1 + P_1 a_2 + P_2 a_3 ... + P_{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned} P_n &= (1+a_1) + a_2(1+a_1) + a_3(1+a_1)(1+a_2) \\ &\quad + ... + a_n(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{n-1}), \end{aligned}$$

hay là tương ứng

$$\begin{aligned} P_n &= (1+a_1) + (a_2 + a_1a_2) + (a_3 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3) \\ &\quad + ... + (a_n + a_1a_n + a_2a_n + ...a_{n-1}a_n \\ &\quad + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n + ... + a_1a_2...a_{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Chú ý rằng từ sự hội tụ của tích $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ ta kéo theo sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi $1 + a_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_{n-1})$. Chuỗi này tạo thành từ *việc sắp xếp chuỗi kép có các số hạng thuộc một ma trận vô hạn*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_1a_2 & a_1a_3 & a_2a_3 & a_1a_4 & \dots \\ a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Từ 3.7.18 ta suy ra chuỗi kép hội tụ tuyệt đối và từ 3.7.22 ta được chuỗi lặp đang xét là hội tụ, và từ đó chứng minh được đẳng thức trong đề bài.

3.8.27. *Từ sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *ta suy ra chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x$ *hội tụ tuyệt đối với mọi* $x \in \mathbb{R}$*. Sử dụng kết quả bài trên ta suy ra điều phải chứng minh.*

3.8.28. *Hiển nhiên với* $|q| < 1$ *và* $x \in \mathbb{R}$ *thì tích* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^n x)$ *hội tụ tuyệt đối. Trong bài trên chọn* $a_n = q^n$ *ta được hàm* $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^n x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$*. Bây giờ chú ý rằng* $f(x) = (1+qx)f(qx)$ *và đồng nhất hệ số ta được*

$$A_1 = \frac{q}{1-q} \quad \text{và} \quad A_n = A_{n-1}\frac{q^n}{1-q^n} \quad \text{với} \quad n = 2, 3 \dots$$

Cuối cùng ta chỉ được ra rằng (sử dụng quy nạp)

$$A_n = \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdot \ldots \cdot (1-q^n)}.$$

3.8.29. *Đặt* $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)$ *và chú ý rằng* $(1+qx)f(q^2x) = f(x)$ *ta biện luận như ở câu 3.8.28.*

3.8.30. *Ta có*

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n x)\left(1+\frac{a_n}{x}\right) &= \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}\right) \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)+\sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{x^k}. \end{aligned}$$

Từ sự hội tụ tuyệt đối của $\sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k x^k$ *và* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{x^k}$ *ta suy ra sự hội tụ của tích Cauchy của chúng (xem bài giải của 3.6.1). Chú ý rằng tích Cauchy này tạo thành một chuỗi kép tương ứng với ma trận vô hạn*

$$\begin{pmatrix} A_1A_1 & A_2A_2 & A_3A_3 & \dots \\ A_2A_1\left(x+\frac{1}{x}\right) & A_3A_2\left(x+\frac{1}{x}\right) & A_4A_3\left(x+\frac{1}{x}\right) & \dots \\ A_3A_1\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & A_4A_2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & A_5A_3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Do đó từ 3.7.18 và 3.7.22 ta suy ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{x^k} = (A_1A_1 + A_2A_2 + A_3A_3 + \dots) + (A_2A_1 + A_3A_2 + \dots) \left(x + \frac{1}{x}\right) + (A_3A_1 + A_4A_2 + \dots)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \dots$$

3.8.31. *[4] Từ 3.8.30 ta có*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Đặt

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}x)\left(1+\frac{q^{2n-1}}{x}\right)$$

và sử dụng đẳng thức $qxF(q^2x) = F(x)$ *ta được*

$$B_1 = B_0 q, \quad B_n = B_{n-1}q^{2n-1},$$

sử dụng quy nạp suy ra

$$B_n = B_0 q^{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Khi đó

$$F(x) = B_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\right).$$

Để xác định B_0 *ta sử dụng kết quả bài 3.8.29 và 3.8.30. Đặt* $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k})$ *và* $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$*, thế thì*

$$B_0 q^{n^2} = B_n = A_n + A_1A_{n+1} + \dots = \frac{q^{n^2}}{P_n} + \frac{q^{(n+1)^2+1}}{P_nP_{n+1}} + \dots,$$

ta được

$$P_nB_0 - 1 < \frac{q^{2n}}{P^2} + \frac{q^{4n}}{P^4} + \ldots.$$

Cho $n \to \infty$ *ta được* $B_0 = \frac{1}{P}$.

3.8.32. *Sử dụng kết quả bài 3.8.30 với*

(a) $x = -1$.

(b) $x = 1$.

(c) $x = q$.

3.8.33. *Chú ý rằng với* $n > 1$ *ta có*

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x-k}{x+k} - \prod_{k=1}^{n}\frac{x-k}{x+k}\right).$$

Vì thế

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{1+x} + \sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{x-k}{x+k}.$$

Nếu x *là một số nguyên dương thì với* n *đủ lớn ta có* $S_n = \frac{1}{2}$. *Ta phải chứng minh rằng với* $x \neq 1, 2, \ldots$ *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ *bằng cách nhận xét rằng với* k *đủ lớn thì* $\left|\frac{x-k}{x+k}\right| = 1 - \frac{2x}{x+k}$. *Do đó sử dụng kết quả bài 3.8.4*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left|\frac{x-k}{x+k}\right| = 0.$$

ta được điều phải chứng minh.

3.8.34. *Giả thiết rằng* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+ca_n)$ *hội tụ với* $c = c_0$ *và* $c = c_1$ *mà* $c_0 \neq c_1$. *Khi đó các tích*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}} \quad \text{và} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}}}{1+c_0a_n}$$

cũng hội tụ. Hơn nữa

$$\frac{(1+c_1a_n)^{\frac{c_0}{c_1}}}{1+c_0a_n} = 1 + \frac{c_0(c_0-c_1)}{2}a_n^2(1+\varepsilon_n),$$

trong đó $\varepsilon_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó sử dụng bài 3.8.3 và 3.8.4 ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ hội tụ. Thêm nữa khi sử dụng kết quả bài 3.8.13 ta được chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ. Từ đó suy ra với $c \in \mathbb{R}$ bất kỳ cả hai chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n)^2$ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ hội tụ. Ta suy ra điều phải chứng minh từ bài 3.8.7.

3.8.35. Rõ ràng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \prod\limits_{k=0}^{n} (x^2 - k^2)$ hội tụ tới 0 với x là số nguyên dương. Giả sử nó hội tụ tới một giá trị x_0 không nguyên dương. Với $x \in \mathbb{R}$ ta xét dãy $\{b_n\}$ mà

$$b_n = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} (x^2 - k^2)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (x_0^2 - k^2)}.$$

Khi đó

$$b_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{x^2 - k^2}{x_0^2 - k^2} = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{x^2 - x_0^2}{x_0^2 - k^2}\right).$$

Từ đó suy ra bắt đầu từ một chỉ số nào đó dãy sẽ đơn điệu. Hơn nữa vì tích $\prod\limits_{k=0}^{n} \frac{x^2-k^2}{x_0^2-k^2}$ hội tụ nên dãy $\{b_n\}$ bị chặn, ta cũng có

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=0}^{n} (x^2 - k^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{k=0}^{n} (x_0^2 - k^2) b_n$$

Theo tiêu chuẩn Abel chuỗi đang xét hội tụ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3.8.36.

(a) Ta có

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_n^{kx}}.$$

Nhân N đẳng thức đầu lại với nhau được

$$(i) \qquad \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{p_N} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=p_N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^x}.$$

trong đó $\sum'$ *là ký hiệu tổng trên các số tự nhiên có các ước số chỉ là các số nguyên tố* $p_1, p_2, ..., p_N$. *Khi đó*

$$0 < \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k^x} = \sum_{k=p_N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{k^x} < \sum_{k=p_N+1}^{\infty}\frac{1}{k^x}.$$

Vì $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=p_N+1}^{\infty}\frac{1}{k^x} = 0$ *ta được*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

(b) Từ (i) trong phần (a) ta suy ra

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} > \sum_{k=1}^{p_N}\frac{1}{k}.$$

Từ sự phân kỳ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *ta suy ra tích* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ *phân kỳ về 0, tức là tương đương với sự phân kỳ của tích* $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ *(xem 3.8.4).*

3.8.37. [18]

(a) Dùng công thức De Moivre $\cos mt + i\sin mt = (\cos t + i\sin t)^m$ *cho* $m = 2n+1$ *ta có*

$$\sin(2n+1)t = (2n+1)\cos^{2n}t\sin t - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}t\sin^3 t + ... + (-1)^n\sin^{2n+1}t.$$

Hay là ta viết được thành

$$(1) \qquad \sin(2n+1)t = \sin t W(\sin^2 t),$$

trong đó $W(u)$ *là đa thức bậc* $\le n$. *Vì hàm ở vế trái của đẳng thức bằng 0 tại các điểm* $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = 1, 2, ..., n$ *đều thuộc vào khoảng* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *ta* *suy ra đa thức $W(u)$ bằng 0 tại các điểm $u_k = \sin^2 t_k$, $k = 1, 2, ..., n$, và ta có*

$$W(u) = A\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{u}{\sin^2 t_k}\right).$$

Do vậy sử dụng (1) ta được

$$\text{(2)} \qquad \sin(2n+1)t = A\sin t\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Ta cần phải đi tìm A. Ta có $A = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 2n+1$, thay giá trị A vào (2) và chọn $t = \frac{x}{2n+1}$ ta được

$$\text{(3)} \qquad \sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n+1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Đối với $x \in \mathbb{R}$ và $m \in \mathbb{N}$ nào đó cho trước sao cho $|x| < (m+1)\pi$ ta lấy n lớn hơn m, theo (3) ta được

$$\text{(4)} \qquad \sin x = P_{m,n}Q_{m,n},$$

trong đó

$$P_{m,n} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n-1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n-1}}\right);$$

$$Q_{m,n} = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2n-1}}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n-1}}\right).$$

Cho $n \to \infty$ được

$$\text{(5)} \qquad \lim_{n\to\infty} P_{m,n} = x\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Từ (4) với $x \neq k\pi$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty} Q_{m,n} = Q_m$. Để đánh giá Q_m ta chú ý rằng từ giả thiết ở trên,

$$0 < \frac{|x|}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} \le \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}, \quad \text{với} \quad k = m+1, ..., n.$$

Sử dụng các bất đẳng thức $\frac{2}{\pi}u < \sin u < u$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, *ta thấy rằng* $\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) < Q_{m,n} < 1$. *Vì tích* $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4n^2}\right)$ *hội tụ ta có*

$$\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2}\right) \leq Q_{m,n} \leq 1.$$

Từ đó suy ra

$$\text{(6)} \qquad \lim_{m\to\infty} Q_m = 1.$$

Cuối cùng đẳng thức cần tìm được suy ra từ (4), (5) *và* (6).

(b) Sử dụng (a) và chú ý rằng $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

3.8.38. Thay $x = \frac{\pi}{2}$ *trong biểu thức nêu trong 3.8.37(a).*

3.8.39.

(a) Sự hội tụ của tích được xét sẽ tương đương với sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right),$$

còn sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi được suy từ đẳng thức

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right|}{\frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

(b) Ta có

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Từ 3.8.3 ta suy ra tích hội tụ tuyệt đối.

3.8.40. Rõ ràng tích $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$, $a_n > -1$ *hội tụ khi và chỉ khi chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ *hội tụ. Hơn nữa nếu* P *là giá trị của tích và* S *là tổng của chuỗi thì* $P = e^S$.

Giả sử rằng tích hội tụ tuyệt đối, từ đẳng thức

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1, \quad (\text{vì } \lim_{n\to\infty} a_n=0).$$

chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ *hội tụ tuyệt đối. Hiển nhiên là (từ 3.7.8) ts có mọi thay đổi của chuỗi đều hội tụ về một tổng. Cuối cùng sử dụng chú ý từ đầu chứng minh ta suy ra mọi thay đổi các phần tử của tích đều không làm thay đổi giá trị của tích.*

Bây giờ giả thiết rằng giá trị của tích $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *không phụ thuộc vào trật tự của các từ nhân tử của tích, điều này có nghĩa là tổng của chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ *cũng độc lập với trật tự các số hạng của mình. Sử dụng định lý Riemann ta suy ra chuỗi hội tụ tuyệt đối, tức là từ (1) ta suy ra chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}|1+a_n|$ *hội tụ, ta có điều phải chứng minh.*

3.8.41. *[20] Đặt* $R_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{2n}=\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$. *Ta có*

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)=R_\alpha,$$
$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2\beta+1}\right)=\frac{1}{R_\beta}.$$

Thế thì tích riêng thứ $\alpha+\beta$ *của tích đang xét sẽ bằng* $\frac{R_{n\alpha}}{R_{n\beta}}$. *Sử dụng công thức Wallis (xem 3.8.38) ta được*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

và từ đó ta được

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n\alpha}}{R_{n\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

3.8.42. *Nếu tích* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ *hội tụ có điều kiện (xem 3.8.40). Từ định lý Riemann ta suy ra các số hạng của chuỗi có thể sắp lại để tạo thành một chuỗi mới hội tụ có tổng là một số bất kỳ cho trước* S *hoặc phân kỳ (tới* $\pm\infty$*). Điều phải chứng minh được suy từ biểu thức* $P=e^S$ *(xem 3.8.40).*

Tài liệu tham khảo

[1] *J. Banaś, S. Wądrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, Windawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa,1994.*

[2] *W. I. Bernuk, I. K. Zuk, O. W. Melnikov, Sbornik olimpiadnych zadac po matematike, Narodnaja Asveta, Minsk , 1980.*

[3] *P. Biler, A. Witkowski, Problems in Mathematical Analysis, Marcel Dekker, Inc, New York and Base, 1990.*

[4] *T. J. Bromwich, An Introduction to the Theory of Infinte Series, Macmillan and Co., ltd., London ,1949.*

[5] *R. B. Burckel, An Introduction to Classical Complex Analysis, Academic Press, New York and San Francisco, 1979.*

[6] *B. Demidovic, Sbornik zadac i upraznenij po matemaiceskomu analizu, Nauka, Moskva, 1969.*

[7] *A. J. Dorogovcev, Matematiceskij analiz. Spravocnoe posobe, Vyscaja Skola, Kiev, 1985.*

[8] *A. J. Dorogovcev, Matematiceskij analiz. Sbornik zadac, Vyscaja Skola, Kiev, 1987.*

[9] *G. M. Fichtenholz, Differential - und Integralrechnung, I,II,III, V.E.B. Deutscher Verlag Wiss. , Berlin, 1966-1968.*

[10] *G. H. Hardy, A Course of Pure Mathematics , Cambrige University Press, Cambirige, 1946.*

[11] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G.Polya, Inequalities , Cambrige University Press, Cambirige, 1967.*

[12] G. Klambauer, *Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.

[13] G. Klambauer, *Problems and Propositions in Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1979.

[14] K. Knopp, *Theorie und Anwendung der Unendhichen Reihen*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1947.

[15] L. D. Kudriavtsev, A. D. Kutasov, V. I. Chejlov, M. I. Shabunin, *Problems de Aná Matemático. Límite, Continuidad, Derivabilidad*, Mir, Moskva, 1989.

[16] K. Kuratowski, *Introduction to Calculus*, Pergamon Press, Oxford - Eidenburg - New York, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1969.

[17] D. S. Mitrinović, *Elemetary Inequalities*, P. Noordhoff Ltd., Gronigen, 1964.

[18] D. S. Mitrinović, D. D. Adamović, *Nizovi i Redovi. Definicije, stavovi. zadaci, problemi (Serbo - Croatian)*, Naucna Knjiga, Belgrade, 1971.

[19] A. Ostrowski, *Aufgabensammlung zur Infinitesimalrechnung, Band I: Funktionen einer Variablen*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1964.

[20] G. Pólia, G. Szegő, *Problems and theorems in analysis I*, Spriger - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[21] Ya. I. Rivikind, *Zadaci pr matematiceskomu analizu*, Vysejsaja Skola, Minsk, 1973.

[22] W.I. Rozhkov, V.D. Kurdevanidze, N. G. Pafionov, *Sbornik zadac matematiceskich olimpiad*. Izdat. Univ. Druzhby Narodov, Maskva, 1987.

[23] W. Rudin, *Principle of Mathematical Analysis*, McGraw - Hill Book Company, New York, 1964.

[24] W. A. Sadownicij, A. S. Pdkolzin, *Zadaci studenceskich olimpiad po matematike*, Nauka, Moskva, 1978.

[25] W. Sierpiński, *Arytmetyka teoratyczna*, PWN, Warszawa, 1959.

[26] W. Sierpiński, *Dzialania nieskończone*, Czytelnik, Warszawa, 1948.

[27] H. Silverman, *Complex variables*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1975.

[28] G. A. Tonojan, W. N. Sergeev, *Studencceskije oimpiady*, Erevanskogo Universiteta, Erivan, 1985.