BÀI TOÁN GTLN - GTNN BIỂU THỨC MŨ – LOGARIT HAI BIẾN SỐ

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Đánh giá, áp dụng BDT cơ bản đã biết như BĐT Côsi và BĐT Bunhiacopxki.

Cách 2: Áp dụng phương pháp hàm số, hàm đặc trưng.

Thông thường ta thực hiện theo các bước sau :

- **Biến đổi các số hạng chứa trong biểu thức về cùng một đại lượng giống nhau.**
- **Đưa vào một biến mới t, bằng cách đặt t bằng đại lượng đã được biến đổi như trên.**
- **Xét hàm số $f(t)$ theo biến t. Khi đó ta hình thành được bài toán tương đương sau: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ với $t \in D$.**
- **Lúc này ta sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t)$ với $t \in D$.**

Chú ý : Ta chứng minh được:

- **Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên D mà phương trình $f(x)=k$ có nghiệm thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất trên D.**
- **Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và hàm số $y=g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) và liên tục trên D mà phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm thì nghiệm đó là nghiệm duy nhất trên D.**
- **Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên D thì $f(x)>f(y)$ nếu $x>y$ (hoặc $x<y$).**

Cách 3: Áp dụng hình học giải tích.

Câu 1. Xét các số thực dương x và y thỏa mãn $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $g(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+y}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $0<x<\dfrac{1}{2}$.

Ta có từ giả thiết: $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1 \Leftrightarrow \ln(1-2x)+(1-2x)=\ln(x+y)+(x+y)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\ln t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t}+1>0$ với mọi $t>0$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow 1-2x=x+y \Leftrightarrow y=1-3x$

Ta có $g(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-2x}=\dfrac{1}{x-2x^2} \Rightarrow g'(x)=\dfrac{4x-1}{\left(x-2x^2\right)^2} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Khi đó ta có BBT

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$
g'		-	0	+	
g		↘	8	↗	

Vậy GTNN của $g(x)$ là 8 khi $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}$.

Câu 2. Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn hệ thức:

$2\log_2 a-\log_2 b\le\log_2\left(a+6b\right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{ab-b^2}{a^2-2ab+2b^2}$.

A. $P_{Max}=\frac{2}{3}$. **B.** $P_{Max}=0$. **C.** $P_{Max}=\frac{1}{2}$. **D.** $P_{Max}=\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2\log_2 a-\log_2 b\le\log_2\left(a+6b\right)\Leftrightarrow\log_2 a^2\le\log_2\left(ab+6b^2\right)\Leftrightarrow a^2\le ab+6b^2$

$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-6\le 0\Leftrightarrow -3\le\frac{a}{b}\le 2$. Do a,b dương nên $0<\frac{a}{b}\le 2$.

Đặt $t=\frac{a}{b}, 0<t\le 2$. Khi đó: $P=\frac{ab-b^2}{a^2-2ab+2b^2}=\frac{t-1}{t^2-2t+2}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{t-1}{t^2-2t+2}$ với $0<t\le 2$. Ta có: $f'\left(t\right)=\frac{-t^2+2t}{\left(t^2-2t+2\right)^2}\ge 0, \forall t\in\left(0;2\right]$.

Suy ra $f\left(t\right)\le f\left(2\right)=\frac{1}{2}$ với $\forall t\in\left(0;2\right]$. Do đó $\underset{(0;2]}{Max}\, f\left(t\right)=\frac{1}{2}$ khi $t=2$. Vậy $P_{Max}=\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $2^x+2^y=4$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=\left(2x^2+y\right)\left(2y^2+x\right)+9xy$.

A. $P_{\max}=\frac{27}{2}$. **B.** $P_{\max}=18$. **C.** $P_{\max}=27$. **D.** $P_{\max}=12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4=2^x+2^y\ge 2\sqrt{2^{x+y}}\Leftrightarrow 4\ge 2^{x+y}\Leftrightarrow x+y\le 2$. Suy ra $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=1$.

Khi đó $P=\left(2x^2+y\right)\left(2y^2+x\right)+9xy=2\left(x^3+y^3\right)+4x^2y^2+10xy$.

$P=2(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]+(2xy)^2+10xy$

$\le 4(4-3xy)+4x^2y^2+10xy=16+2x^2y^2+2xy(xy-1)\le 18$. Vậy $P_{\max}=18$ khi $x=y=1$.

Câu 4. Cho hai số thực $a,b>0$ thỏa mãn $\log_2(2a+1)+\log_2(3b+1)-6\ge 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2a+3b$ là.

A. 12. **B.** 14. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(2a+1)+\log_2(3b+1)-6\ge 0\Leftrightarrow \log_2\left[(2a+1)(3b+1)\right]\ge 6\Leftrightarrow (2a+1)(3b+1)\ge 64$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $2a+1$ và $3b+1$, ta được

$(2a+1)+(3b+1)\ge 2\sqrt{(2a+1)(3b+1)}\ge 2\sqrt{64}=16\Leftrightarrow 2a+3b+2\ge 16\Leftrightarrow 2a+3b\ge 14$

Dấu "=" xảy ra khi $2a+1=3b+1\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}b$. Vậy $\min(2a+3b)=14$ khi $a=\frac{7}{2};b=\frac{7}{3}$.

Câu 5. Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là

A. $\frac{9}{4}$ **B.** 9 **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{9}{8}$

Lời giải

Chọn C

- Trường hợp 1: $x^2+2y^2>1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1\Leftrightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2\Rightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2>1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có

$$\left(2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(x^2+2y^2\right)\ge (2x+y)^2\Rightarrow x^2+2y^2\ge \frac{2(2x+y)^2}{9}$$

$$\Rightarrow 2x+y\ge \frac{2(2x+y)^2}{9}\Leftrightarrow (2x+y)\left(2x+y-\frac{9}{2}\right)\le 0\Rightarrow 2x+y\in\left(1;\frac{9}{2}\right]$$

Giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2;y=\frac{1}{2}$

- Trường hợp 2: $0<x^2+2y^2<1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1\Leftrightarrow 2x+y\le x^2+2y^2<1<\frac{9}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$.

Câu 6. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a+3b$

A. $S_{\min}=33$. **B.** $S_{\min}=30$. **C.** $S_{\min}=17$. **D.** $S_{\min}=25$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để hai phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ và $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2-20a>0$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\ln x_1+\ln x_2=-\dfrac{b}{a}\\ \log x_3+\log x_4=-\dfrac{b}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln\left(x_1x_2\right)=-\dfrac{b}{a}\\ \log\left(x_3x_4\right)=-\dfrac{b}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}\\ x_3x_4=10^{-\frac{b}{5}}\end{cases}$.

Mà $x_1x_2>x_3x_4\Rightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$ nên suy ra $-\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{5}\ln 10\Rightarrow a>\dfrac{5}{\ln 10}\Rightarrow a\ge 3$.

Theo điều kiện có $b^2-20a>0\Rightarrow b^2>20a\ge 60\Rightarrow b\ge 8$.

Từ đó suy ra $S=2a+3b\ge 30\Rightarrow S_{\min}=30$ khi và chỉ khi $\begin{cases}a=3\\ b=8\end{cases}$.

Câu 7. Cho các số thực $a>\dfrac{1}{3},b>1$. Khi biểu thức

$\log_{3a}b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

A. $9+2^{\sqrt{3}}$. **B.** $3+9^{\sqrt{2}}$. **C.** $3+3\sqrt{2}$. **D.** $2+9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3a>1,b>1$ nên $\log_{3a}b>0,\log_b 3a>0$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$\log_{3a}b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)\ge\log_{3a}b+\log_b\left(18a^2-9a^2\right)=\log_{3a}b+2\log_b 3a\ge 2\sqrt{2}.$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3a>1,b>1\\ a^4=81\\ \log_{3a}b=2\log_b 3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=9^{\sqrt{2}}\end{cases}$. Vậy $a+b=3+9^{\sqrt{2}}$.

Câu 8. Cho các số thực x,y thỏa mãn $5+16.4^{x^2-2y}\le\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$ và $\dfrac{x^2}{2}\ge y+1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $T=M+m$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=\dfrac{21}{2}$. **C.** $T=\dfrac{19}{2}$. **D.** $T=15$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2-2y$.

Ta có $5+16.4^t\le\left(5+4^{2t}\right).7^{2-t}\Leftrightarrow\dfrac{5+4^{t+2}}{7^{t+2}}\le\dfrac{5+4^{2t}}{7^{2t}}$ (1).

Xét hàm số $f\left(u\right)=\dfrac{5+4^u}{7^u}=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u$ ta có $f'\left(u\right)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u\ln\dfrac{1}{7}+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u\ln\dfrac{4}{7}<0,\forall u\in\mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f\left(u\right)$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f\left(t+2\right)\le f\left(2t\right)\Leftrightarrow t+2\ge 2t\Leftrightarrow t\le 2$.

Mặt khác $\dfrac{x^2}{2}\ge y+1\Leftrightarrow x^2-2y\ge 2\Leftrightarrow t\ge 2$. Suy ra $t=2\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-2}{2}$. Thay vào P ta được

$P=\dfrac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}\Leftrightarrow(3-P)x^2+2(5-P)x+20-3P=0\ \ (2).$

Khi $P\neq 3,$ vì P xác định nên phương trình (2) có nghiệm.

Khi đó $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow(5-P)^2-(3-P)(20-3P)\geq 0\Leftrightarrow -2P^2+19P-35\geq 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}\leq P\leq 7.$ Vậy $T=M+m=\dfrac{5}{2}+7=\dfrac{19}{2}.$

Câu 9. Xét các số thực dương x,y thỏa $2021^{2(x^2-y+2)}-\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}\geq 0.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2y-4x.$

A. 2021. **B.** 2020. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết, ta suy ra $2021^{2(x^2-y+2)}\geq\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}\Leftrightarrow 2(x^2-y+2)\geq\log_{2021}\dfrac{4x+y+2}{(x+2)^2}\ \ (1).$

Đặt $\begin{cases}a=4x+y+2\\ b=(x+2)^2=x^2+4x+4\end{cases}\Rightarrow b-a=x^2-y+2$ thì (1) trở thành

$\Rightarrow 2(b-a)\geq\log_{2021}a-\log_{2021}b\Leftrightarrow\log_{2021}a+2a\geq\log_{2021}b+2b\ \ (2).$

Xét hàm số $f(t)=\log_{2021}t+2t$ trên $(0;+\infty)$ ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2021}+2>0,\forall t>0$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty).$

Khi đó $(2)\Leftrightarrow f(a)\geq f(b)\Leftrightarrow a\geq b\Leftrightarrow 4x+y+2\geq(x+2)^2\Leftrightarrow y\geq x^2+2.$

Thay vào $P,$ ta được $P\geq 2x^2-4x+4=2(x-1)^2+2\geq 2.$

Vậy $P_{\min}=2$ khi và chỉ khi $x=1,y=3.$

Câu 10. Cho hai số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+1)\ln x+(y+1)\ln y$ với $\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}$ và $\dfrac{1}{2}\leq y\leq\dfrac{3}{2}$ là m, khi đó m thuộc khoảng nào sau đây

A. $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. **B.** $m\in(0;1)$. **C.** $m\in(1;2)$. **D.** $m\in(2;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)-\ln 2}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}.2^{\ln 2}$

$\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)}=2^{\ln 10}\Leftrightarrow\ln(x+y)=\log\left(2^{\ln 10}\right)\Leftrightarrow\ln(x+y)=\ln 10.\log 2\Leftrightarrow e^{\ln(x+y)}=e^{\ln 10.\log 2}$

$\Leftrightarrow x+y=10^{\log 2}\Leftrightarrow x+y=2$. Do đó $P=(x+1)\ln x+(y+1)\ln y=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$.

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$

Ta có: $f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-\ln(2-x)-\dfrac{3-x}{2-x}=\ln\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{2-2x}{x(2-x)}$.

Lại có: $f''(x)=\dfrac{2}{(2-x)^2}.\dfrac{2-x}{x}-\dfrac{2x^2-4x+4}{\left(2x-x^2\right)^2}=\dfrac{-4(x-1)^2}{\left(2x-x^2\right)^2}<0,\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

Do đó $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

Mà $x=1$ là một nghiệm của pt $f'(x)=0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=1$. Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$

Dựa vào BBT, ta suy ra $\min P=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]} f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\ln\dfrac{3}{2}\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 11. Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $x+3y.3^{x+3y-4}\ge 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+5x+4y$ bằng

A. $\dfrac{43}{8}$. **B.** $\dfrac{33}{4}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x+3y.3^{x+3y-4}\ge 4\Leftrightarrow 3y.3^{x+3y-4}\ge 4-x\Leftrightarrow 3y.3^{3y}\ge(4-x)3^{4-x}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t.3^t$, $\forall t\ge 0$, ta có

$f'(t)=3^t(1+t\ln 3)>0$, $\forall t\ge 0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$(*)\Leftrightarrow f(3y)\ge f(4-x),\ \forall x,y\ge 0\Leftrightarrow 3y\ge 4-x\Leftrightarrow x\ge 4-3y$, $\forall x,y\ge 0$

Xét biểu thức $P=x^2+y^2+5x+4y\Rightarrow P\ge(4-3y)^2+y^2+5(4-3y)+4y$

$\Leftrightarrow P\ge 10y^2-35y+36\ge\dfrac{43}{8}$

Vậy $\min P=\dfrac{43}{8}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}y=\dfrac{7}{4}\\ x=4-3y\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{4}\right)$

Câu 12. Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn phương trình sau:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{2x}+3.4^{y}}}+\frac{1}{\sqrt{4^{y}+3.2^{2x}}}=\frac{x+y-e^{x+y-3}}{2\left(2^{x-1}+2^{y-1}\right)}.$$

Biết rằng, giá trị của x^3+y^4 được viết dưới dạng $\dfrac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $T=m+n$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 149. **B.** 147 . **C.** 160. **D.** 151.

Lời giải

Chọn D

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\frac{1}{\sqrt{2^{2x}+3.4^{y}}}+\frac{1}{\sqrt{4^{y}+3.2^{2x}}}=\frac{x-y-e^{x+y-3}}{2\left(2^{x-1}+2^{y-1}\right)}\Leftrightarrow\frac{2^{x}+2^{y}}{\sqrt{2^{2x}+3.2^{2y}}}+\frac{2^{x}+2^{y}}{\sqrt{2^{2y}+3.2^{2x}}}=x-y-e^{x+y-3}$$

Đặt $2^{x}=a,2^{y}=b$ thì theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a+b}{a+3b};\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{2b}{a+3b}\Rightarrow\dfrac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a+3b}}\le\dfrac{3}{4}+\dfrac{a}{2(a+b)}\\ \dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\le\dfrac{b}{b+a}+\dfrac{a+b}{b+3a};\dfrac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{2a}{b+3a}\Rightarrow\dfrac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b+3a}}\le\dfrac{3}{4}+\dfrac{b}{2(a+b)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a+3b}}+\frac{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{3}{2}+\frac{a+b}{2(a+b)}=4\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le 2$$

Suy ra $\dfrac{2^{x}+2^{y}}{\sqrt{2^{2x}+3.2^{2y}}}+\dfrac{2^{x}+2^{y}}{\sqrt{2^{2y}+3.2^{2x}}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le 2$

Mặt khác theo một bất đẳng thức phụ quen thuộc ta có:

$$x+y-e^{x+y-3}=(x+y-3)-e^{x+y-3}+3\le 3-1=2$$

Vậy $VT\ge 2\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}2^{x}=2^{y}\\ x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\dfrac{3}{2}$

Khi đó $x^{3}+y^{4}=\dfrac{135}{16}=\dfrac{m}{n}\Rightarrow T=m+n=151$.

Câu 13. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $\dfrac{1}{6}\log_{\sqrt{2}}y^{3}+\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^{3}+2\right)\ge\log_{2}\dfrac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^{3}+x+2-4y}-\dfrac{x^{2}+y^{2}}{2}+x(y+1)-y$

A. $\min P=0$. **B.** $\min P=1$. **C.** $\min P=2$. **D.** $\min P=e$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}y>0\\ x>-\sqrt[3]{2}\end{cases}$ (*) ; Với x,y thuộc (*) và thỏa mãn

$$\frac{1}{6}\log_{\sqrt{2}}y^{3}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(x^{3}+2\right)\ge\log_{2}\frac{1}{3}\Leftrightarrow\log_{2}y-\log_{2}\left(x^{3}+2\right)\ge-\log_{2}3$$

$$\Leftrightarrow\log_{2}y+\log_{2}3\ge\log_{2}\left(x^{3}+2\right)\Leftrightarrow\log_{2}3y\ge\log_{2}\left(x^{3}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3y\ge x^{3}+2\Leftrightarrow 3(y-x)\ge x^{3}-3x+2\ \ (**)$$

Xét hàm số $f(x)=x^{3}-3x+2$ xác định và liên tục trên $\left(-\sqrt[3]{2};+\infty\right)$

Có $f'(x)=3x^{2}-3=3\left(x^{2}-1\right)$. Với $f'(x)=0\Leftrightarrow x^{2}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

Và $f(-1)=4;\ f(1)=0;\ f(-\sqrt[3]{2})=3\sqrt[3]{2}>0$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt[3]{2}$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$3\sqrt[3]{2}$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Do đó $\min\limits_{\left(-\sqrt[3]{2};+\infty\right)} f(x)=f(1)=0$ nên suy ra $3\left(y-x\right)\geq 0 \Leftrightarrow y-x\geq 0$

Mà $P=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{x^3+x+2-4y}-\dfrac{x^2+y^2}{2}+x\left(y+1\right)-y=e^{4y-x^3-x-2}-\dfrac{x^2+y^2}{2}+x\left(y+1\right)-y$

$=e^{(y-x)+3y-\left(x^3+2\right)}-\dfrac{\left(y-x\right)^2}{2}-\left(y-x\right)\geq e^{(y-x)}-\dfrac{\left(y-x\right)^2}{2}-\left(y-x\right)$

Xét hàm số (*) $g(t)=e^t-\dfrac{1}{2}t^2-t$ xác định và liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$

Do đó $g'(t)=e^t-t-1$ xác định và liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$

Và $g''(t)=e^t-1\geq e^0-1=0, \forall t\in\left[0;+\infty\right)$.

Do đó hàm số $g'\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$. Tức là $t\geq 0\Rightarrow g'(t)\geq g'(0)=e^0-0-1=0,$

Do đó hàm số $g\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$. Tức là $t\geq 0\Rightarrow g(t)\geq g(0)=e^0-0-0=1$

Suy ra $\min\limits_{\left[0;+\infty\right)} g(t)=g(0)=1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y>0\\3y=x^3+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y>0\\x^3-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y>0\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$.

Câu 14. : Cho các số thực x,y thỏa mãn $e^{x^2+2y^2}+e^{xy}(x^2-xy+y^2-1)-e^{1+xy+y^2}=0$. Gọi M,m lần lượt là GTLN, GTNN của biểu thức $P=\dfrac{1}{1+xy}$. Tính $M-m$.

A. $M-m=1$. **B.** $M-m=2$. **C.** $M-m=\dfrac{1}{2}$. **D.** $M-m=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $e^{x^2+2y^2}+e^{xy}(x^2-xy+y^2-1)-e^{1+xy+y^2}=0\Leftrightarrow e^{x^2+2y^2-xy}+(x^2-xy+y^2-1)-e^{1+y^2}=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-xy+2y^2}+x^2-xy+2y^2=e^{1+y^2}+1+y^2$ (1)

Xét hàm $f(t)=e^t+t, t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0\quad\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow f(x^2-xy+2y^2)=f(1+y^2)\Leftrightarrow x^2-xy+2y^2=1+y^2\Leftrightarrow x^2-xy+y^2=1$

Khi đó $\begin{cases}1=\left(x-y\right)^2+xy\geq xy\\1=\left(x+y\right)^2-3xy\geq -3xy\end{cases}$ suy ra $1\geq xy\geq\dfrac{-1}{3}$.

Do đó $\dfrac{1}{1+1}\leq P=\dfrac{1}{1+xy}\leq\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq P=\dfrac{1}{1+xy}\leq\dfrac{3}{2}$. Vậy $M-m=1$

Câu 15. Cho các số thực x, y thỏa mãn $5+16.4^{x^2-2y}=\left(5+16^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}$. Tính $T=M+m$.

A. $T=\dfrac{21}{2}$. **B.** $T=10$. **C.** $T=15$. **D.** $T=\dfrac{19}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^2-2y$, khi đó giả thiết tương đương với

$$5+16.4^t=\left(5+16^t\right).7^{2-t}\Leftrightarrow \frac{5+4^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{5+4^{2t}}{7^{2t}}.(1)$$

Xét hàm số $f(u)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(u)=5\left(\dfrac{1}{7}\right)^u\ln\dfrac{1}{7}+\left(\dfrac{4}{7}\right)^u\ln\dfrac{4}{7}<0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(u)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow t+2=2t\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$

Khi đó $P=\dfrac{10x+6y+26}{2x+2y+5}=\dfrac{3x^2+10x+20}{x^2+2x+3}$

Ta có $P'=\dfrac{-4x^2-22x-10}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\ x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	3	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

Từ BBT, ta suy ra $M=7$, $m=\dfrac{5}{2}$. Vậy $M+m=7+\dfrac{5}{2}=\dfrac{19}{2}$.

Câu 16. Cho a,b là hai số thực thay đổi thỏa $1<a\le b\le 2$, biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2.\log_a\left(b^2+4b-4\right)+\log^2_{\frac{b}{a}}a$ là $m+3\sqrt[3]{n}$ với m,n là số nguyên dương. Tính $S=m+n$.

A. $S=9$. **B.** $S=18$. **C.** $S=54$. **D.** $S=15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $1<b\le 2\Rightarrow\begin{cases}b-1>0\\ b^2-4\le 0\end{cases}\Rightarrow(b-1)\left(b^2-4\right)\le 0$

$$\Rightarrow b^3-b^2-4b+4\le 0\Rightarrow b^2+4b-4\ge b^3 \text{ mà } a>1 \text{ nên } \log_a\left(b^2+4b-4\right)\ge\log_a b^3$$

Do đó $P\ge 2.\log_a b^3+\log^2_{\frac{b}{a}}a=6\log_a b+\dfrac{1}{(\log_a b-1)^2}$

Đặt $t=\log_a b$, từ điều kiện $\begin{cases}1<a\le b\le 2\\ \dfrac{b}{a}\ne 1\end{cases}\Rightarrow t>1$.

Khi đó $P \ge 6.t + \dfrac{1}{(t-1)^2} = 3.(t-1) + 3(t-1) + \dfrac{1}{(t-1)^2} + 6 \ge 3\sqrt[3]{9} + 6$

Dấu "=" xảy ra khi $3(t-1) = \dfrac{1}{(t-1)^2} \Leftrightarrow (t-1)^3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow t = 1 + \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$. Vậy $m = 6; n = 9$.

Câu 17. Cho hai số thực a, b thay đổi thỏa mãn $0 < 2b < a < 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log^3_{\frac{2b}{a}} a.\log_b \dfrac{2b}{a} + \log_b\left(4b - a^2\right) + \log_{a^{25}} b^{12}$ bằng m. Khẳng định đúng là:

A. $m \in (0;1)$. **B.** $m \in (1;2)$. **C.** $m \in (2;3)$. **D.** $m \in (3;5)$.

Lời giải

Chọn C

◆ Ta có:

$$S = \log^3_{\frac{2b}{a}} a.\log_b \frac{2b}{a} + \log_b\left(4b - a^2\right) + \log_{a^{25}} b^{12} = \frac{12}{25}\log_a b + \frac{1}{\log_a b}.\log^2_{\frac{2b}{a}} a + \log_b\left(4b - a^2\right)$$

$$= -\log_b a^2 + \frac{12}{25}\log_a b + \frac{1}{\log_a b}.\log^2_{\frac{2b}{a}} a + \log_b\left(4a^2b - a^4\right)$$

Ta có: $0 < 2b < a < 1 \Rightarrow (a - 2b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^4 - 4a^2b + 4b^2 \ge 0 \Leftrightarrow 4a^2b - a^4 \le 4b^2$

Mà mặt khác $0 < 2b < a < 1 \Rightarrow 0 < b < \dfrac{1}{2} < 1$ nên suy ra $\log_b\left(4a^2b - a^4\right) \ge \log_b\left(4b^2\right)$

Từ đó ta có:

$$S = -\log_b a^2 + \frac{12}{25}\log_a b + \frac{1}{\log_a b}.\log^2_{\frac{2b}{a}} a + \log_b\left(4b^2\right) \ge 2\log_b\left(\frac{2b}{a}\right) + \frac{12}{25}\log_a b + \frac{1}{\log_a b}.\log^2_{\frac{2b}{a}} a$$

$$= \left(\frac{1}{\log_{\frac{2b}{a}} b} + \frac{1}{\log_{\frac{2b}{a}} b} + \frac{\log^2_{\frac{2b}{a}} a}{\log_a b}\right) + \frac{12}{25}\log_a b \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{\log_{\frac{2b}{a}} b}.\frac{1}{\log_{\frac{2b}{a}} b}.\frac{\log^2_{\frac{2b}{a}} a}{\log_a b}} + \frac{12}{25}\log_a b$$

$$= 3\sqrt[3]{\left(\frac{\log_{\frac{2b}{a}} a}{\log_{\frac{2b}{a}} b}\right)^2.\frac{1}{\log_a b}} + \frac{12}{25}\log_a b = 3\sqrt[3]{\frac{1}{(\log_a b)^3}} + \frac{12}{25}\log_a b$$

$$= \frac{3}{\log_a b} + \frac{12}{25}\log_a b \ge 2\sqrt{\frac{3}{\log_a b}.\frac{12}{25}\log_a b} = 2\sqrt{\frac{12.3}{25}} = \frac{12}{5}$$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức S bằng $\dfrac{12}{5}$ với $m = \dfrac{12}{5} \in (2;3)$

Câu 18. Cho 2 số thực x, y thỏa mãn phương trình sau:

$$\left(1 + 2^{x+y}\right)\left(1 + 2^{x+2y}\right)\left(1 + 2^{x-3y}\right) = \left(1 + 2^x\right)^3.$$

Đặt $P = e^{x^2+y^2} + x^2 + \dfrac{y^2}{4} - (x - 2y)^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = e - 1$. **B.** $P = e$. **C.** $P_{\max} = e^2$. **D.** $P = e - 2$.

Lời giải

Chọn B

Một bất đẳng thức mà ta hay gặp: $(1+a)(1+b)(1+c) \ge \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$

Có bổ đề sau: *Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z,m,n,p khi đó ta luôn có*:

$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge\left(axm+byn+czp\right)^3$

Chứng minh: Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\frac{3axm}{\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right).\left(m^3+n^3+p^3\right).\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

$$\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{n^3}{m^3+n^3+p^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\frac{3bny}{\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right).\left(m^3+n^3+p^3\right).\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

$$\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{p^3}{m^3+n^3+p^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\frac{3cpz}{\sqrt{\left(a^3+b^3+c^3\right).\left(m^3+n^3+p^3\right).\left(m^3+n^3+p^3\right)}}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên có điều phải chứng minh.

Quay lại bài khi đó phương trình trở thành: $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

Theo bất đẳng thức Holder, ta có $\prod_{cyc}\left[\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right]\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

Với bài toán này nếu đặt $2^{x+y}=a,2^{x+2y}=b,2^{x-3y}=c\Rightarrow\sqrt[3]{abc}=2^x$, đây chính là dạng trên.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $2^{x+y}=2^{x+2y}=2^{x-3y}\Leftrightarrow x=y=0$. Vậy khi đó $P=e$.

Câu 19. Cho 2 số thực a,b không âm thỏa mãn $\log_2(ab)\in(0;1)$ đồng thời $\left(\log_2 ab\right)^{\log_2 ab}+\left(1-\log_2 ab\right)^{1-\log_2 ab}=\sqrt{1+\frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b}+1}}$. Biết rằng a^4b^{10} được viết dưới dạng $m\sqrt{n}$ với a,b là các số nguyên dương. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số $(m;n)$ như vậy?

A. $m\in(0;1)$. **B.** $m\in(1;2)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(3;5)$.

Lời giải

Chọn C

Bất đẳng thức Jensen và tính chất của hàm lồi

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và n điểm tùy ý nên $[a;b]$. Ta có

- Nếu $f"(x)>0$ thì $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\ge nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$
- Nếu $f"(x)<0$ thì $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\le nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)$

Ngoài ra cần chú ý thêm

- Nếu hàm số $f(x)$ có $f"(x)>0,\forall x\in[a;b]$ thì $f(x)$ làm hàm lồi trên $[a;b]$
- Nếu hàm số $f(x)$ có $f"(x)<0,\forall x\in[a;b]$ thì $f(x)$ làm hàm lõm trên $[a;b]$

Trước tiên ta sẽ đặt $\log_2 ab=x,1-\log_2 ab=y\Rightarrow x+y=1$.

Vế trái viết lại là x^x+y^y.

Ta có bất đẳng thức $\frac{f(x)+f(y)}{2}\ge f\left(\frac{x+y}{2}\right)(*)$ - ***Bất đẳng thức Jensen***

Thật vậy ta có thể giả thiết $0<a<b<1$ và viết bất đẳng thức dưới dạng

$$\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x)\right]-\left[f(y)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]\le 0$$

Vế trái của bất đẳng thức này có dạng $f'(\alpha)\frac{y-x}{2}-f'(\beta)\frac{y-x}{2}=f''(\gamma)(\alpha-\beta)\frac{y-x}{2}$

Trong đó $x<\alpha<\frac{x+y}{2}<\beta<y,\alpha<\gamma<\beta$.

Vì $\ln f(x)=x\ln x \Rightarrow f'(x)=f(x)(1+\ln x)\Rightarrow f''(x)=f(x)\left((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right)>0,\forall x\in(0;1)$

Suy ra $f''(\gamma)(\alpha-\beta)\frac{y-x}{2}<0$. Vậy bất đẳng thức $(*)$ đúng. Khi đó áp dụng ta có

$$x^x+y^y=x^x+(1-x)^{1-x}=f(x)+f(1-x)\geq 2f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có $\sqrt{1+\frac{2^{a-b+1}}{2^{2a-2b}+1}}\leq\sqrt{1+\frac{2.2^{a-b}}{2\sqrt{2^{2a-2b}}}}=\sqrt{2}$.

Vậy $VT\geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=y=\sqrt[4]{2}\Rightarrow x^4y^{10}=\sqrt{128}=2\sqrt{32}=4\sqrt{8}=8\sqrt{2}$

Câu 20. Cho 2 số thực $x,y>1$ thỏa mãn điều kiện:

$$1+\log_2 3y+2\log_2 3y(3-\log_2 3xy)=\frac{9}{2}\log_x 2.$$

Đặt $P=x^2+xy+y^2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P\in[11;12]$. **B.** $P\in[12;13]$. **C.** $P\in[10;11]$. **D.** $P_{\min}=10$.

Lời giải

Chọn C

Ý tưởng ở bài này là sẽ kiếm một điều kiện ràng buộc giữa x,y rồi sau đó chỉ ra giả thiết chỉ nhận duy nhất 1 bộ nghiệm. Dưới đây là cách giải quyết của bài toán trên

Biến đổi giả thiết ta được: $1+\log_2 3y+2\log_2 3y(3-\log_2 3xy)=\frac{9}{2}\log_x 2$

$\Leftrightarrow \log_2 x+\log_2 x\log_2 3y+2\log_2 3y\log_2 x\log_2\frac{8}{3xy}=\frac{9}{2}$

Ta nhận thấy rằng $\log_2 x+\log_2 3y+\log_2\frac{8}{3xy}=3$.

Để đơn giản ta đặt $\begin{cases}\log_2 x=a\\ \log_2 3y=b\\ \log_2\frac{8}{3xy}=c\end{cases}$. Lúc này ta có 2 giả thiết $\begin{cases}a+b+c=3\\ a+ab+2abc=\frac{9}{2}\end{cases}$.

Thế $b=3-a-c$ vào giả thiết dưới ta được: $(2c+1)a^2+(2c^2-5c-4)a+\frac{9}{2}=0$

Coi vế trái là tam thức bậc 2 theo biến a với c là tham số ta có:

$\Delta=(2c^2-5c-4)^2-18(2c+1)=(2c-1)^2(c^2-4c-2)$

Chú ý với điều kiện $x,y>1$ ta sẽ có $a,b,c>0$. Mặt khác $a+b+c=3\Rightarrow c<3$

Suy ra $\Delta\leq 0$, điều này đồng nghĩa $VT\geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=1\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_2 x=\frac{3}{2}\\ \log_2 3y=1\\ \log_2\frac{8}{3xy}=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\sqrt{2}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$

Từ đây suy ra $P=\dfrac{76+12\sqrt{2}}{9}\in[10;11]$.

Câu 21. Cho hàm số $y=f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+m$. Khi đó, giá trị m để giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng với giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a(3b+2)+\log_b(3a+2)$ với $\forall a,b\in(1;2]$nằm trong khoảng nào sau đây

A. $[3;4]$. **B.** $[5;6]$. **C.** $[7;8]$. **D.** $[9;10]$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases}3a+2=a+a+a+2\ge 4\sqrt[4]{2a^3}\\ 3b+2=b+b+b+2\ge 4\sqrt[4]{2b^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_b(3a+2)\ge\log_b\left(4\sqrt[4]{2a^3}\right)=\log_b 4+\dfrac{3}{4}\log_b a+\dfrac{1}{4}\log_b 2\\ \log_a(3b+2)\ge\log_a\left(4\sqrt[4]{2b^3}\right)=\log_a 4+\dfrac{3}{4}\log_a b+\dfrac{1}{4}\log_a 2\end{cases}$$

Suy ra: $\log_a(3b+2)+\log_b(3a+2)\ge(\log_a 4+\log_b 4)+\dfrac{3}{4}(\log_b a+\log_a b)+\dfrac{1}{4}(\log_b 2+\log_a 2)$

$\ge(\log_2 4+\log_2 4)+\dfrac{3}{4}2\sqrt{\log_b a.\log_a b}+\dfrac{1}{4}(\log_2 2+\log_2 2)$ (do $\forall a,b\in(1;2]$)

$=6$. Suy ra $P_{\min}=6$ khi và chỉ khi $a=b=2$

Từ đó ta cũng suy ra:

$6=P_{\min}=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+m=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+m$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+m=(x^2+5x+5-1)(x^2+5x+5+1)+m=(x^2+5x+5)^2+m-1$

Do phương trình $x^2+5x+5=0$ có hai nghiệm $\notin(1;2]$) nên ta cũng suy ra

$P=(x^2+5x+5)^2+m-1\ge m-1\Rightarrow m-1=6\Leftrightarrow m=7$. Như vậy $m=7\in[7;8]$

Cách 2: Nhìn vào biểu thức P trên ta dự đoán được điểm rơi $a=b=2$

Ta có: $P=\log_a(3b+2)+\log_b(3a+2)\ge\log_a\left(b^2+(2-b)(b+1)^2\right)+\log_b\left(a^2+(2-a)(a+1)^2\right)$

Xét hàm số $y=f(x)=(2-x)(x+1)^2$ với $\forall x\in(1;2]$ có $f(x)\ge 0\ \forall x\in(1;2]$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=1,\ f''(t)<0\Rightarrow(2-x)(x+1)^2>0$

Từ đó ta suy ra $P\ge\log_a\left(b^2+(2-b)(b+1)^2\right)+\log_b\left(a^2+(2-a)(a+1)^2\right)\ge\log_a\left(b^3\right)+\log_b\left(a^3\right)$

$=3(\log_a b+\log_b a)=3\left(\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}\right)\ge 3.2\sqrt{\log_a b.\dfrac{1}{\log_a b}}=6$

Suy ra $P_{\min}=6$ khi và chỉ khi $a=b=2$

--Khúc sau làm tương tự như cách 1 đã trình bày--

Câu 22. Lần lượt cho hai số thực dương x,y thỏa mãn phương trình sau đây: $\log_2\left(\dfrac{3x+3y}{x^2+y^2+xy+3}\right)=x^2+y^2+xy-6(x+y)+2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x+3y+2}{x+y+1}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $(M+m)$ bằng

A. $\dfrac{60}{13}$. **B.** 12. **C.** $\dfrac{26}{5}$. **D.** $\dfrac{40}{13}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{3x+3y}{x^2+y^2+xy+3}\right)=x^2+y^2+xy-6(x+y)+2$

$\Leftrightarrow 1+\log_2\left(\dfrac{3x+3y}{x^2+y^2+xy+3}\right)=x^2+y^2+xy-6(x+y)+3$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{6(x+y)}{x^2+y^2+xy+3}\right)=x^2+y^2+xy-6(x+y)+3$

$\log_2(x^2+y^2+xy+3)+(x^2+y^2+xy+3)=\log_2(6(x+y))+(6(x+y))$

Xét hàm đặc trưng $y=f(t)=\log_2 t+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\quad\forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow x^2+y^2+xy+3=6(x+y)$

Đặt: $\begin{cases}x=a+b\\ y=a-b\end{cases}\Rightarrow (a+b)^2+(a-b)^2+(a+b)(a-b)+3=6(a+b)+6(a-b)$

$\Leftrightarrow 3(a-2)^2+b^2=9=3^2$. Đặt: $\begin{cases}a=\sqrt{3}\cos t+2\\ b=3\sin t\end{cases}$

Suy ra biểu thức

$$P=\frac{2x+3y+2}{x+y+1}=\frac{2(a+b)+3(a-b)+2}{(a+b)+(a-b)+1}=\frac{5a-b+2}{2a+1}=\frac{5\left(\sqrt{3}\cos t+2\right)-3\sin t+2}{2\left(\sqrt{3}\cos t+2\right)+1}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}\cos t-3\sin t+12}{2\sqrt{3}\cos t+5}\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3}P-5\sqrt{3}\right)\cos t+3\sin t=12-5P$$

Điều kiện có nghiệm $\left(2\sqrt{3}P-5\sqrt{3}\right)^2+9\ge(12-5P)^2\Leftrightarrow\dfrac{30-2\sqrt{30}}{13}\le P\le\dfrac{30+2\sqrt{30}}{13}$

Như vậy suy ra: $\begin{cases}P_{\max}=M=\dfrac{30+2\sqrt{30}}{13}\\ P_{\min}=m=\dfrac{30-2\sqrt{30}}{13}\end{cases}\Rightarrow M+m=\dfrac{60}{13}$

Câu 23. Cho hai số thực dương, tính giá trị lớn nhất của biểu thức sau đây:

$$P=2022-\left(16y^3+10^{3x}-24y\right)+12.10^{x+\log y}$$

A. 2046. **B.** 2048. **C.** 2050. **D.** 2038.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=2022-\left(16y^3+10^{3x}-24y\right)+12.10^{x+\log y}=2022-\left(16y^3+10^{3x}-24y\right)+12y.10^x$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có: $2.(2y).10^x\le(2y)^2+\left(10^x\right)^2=4y^2+10^{2x}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $2y=10^x$

Suy ra:

$P=2022-\left(16y^3+10^{3x}-24y\right)+3.2.(2y).10^x$

$\le 2022-\left(16y^3+10^{3x}-24y\right)+3\left(4y^2+10^{2x}\right)=2022+4\left(-4y^3+3y^2+6y\right)+\left(-10^{3x}+3.10^{2x}\right)$

Khảo sát các hàm số sau:

$\begin{cases} f(y) = -4y^3 + 3y^2 + 6y & \forall y \in (0;+\infty) \\ g(x) = (-10^{3x} + 3.10^{2x}) & \forall x \in (0;+\infty) \end{cases}$ ta có:

$\begin{cases} f(y) \le f(1) = 5 \\ g(x) = (-10^{3x} + 3.10^{2x}) = -t^3 + 3t^2 = h(t) \le h(2) = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} y = 1 \\ x = \log t = \log 2 \end{cases}$

Suy ra:

$P = 2022 + 4(-4y^3 + 3y^2 + 6y) + (-10^{3x} + 3.10^{2x})$

$\le 2022 + 4f(y) + g(x) \le 2018 + 4.5 + 4 = 2046$

Như vậy $P_{\max} = 2046$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 10^x = 2 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 24. Cho 2 số thực x,y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a,b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $P = a + b$

A. $P = 8$. **B.** $P = 141$. **C.** $P = 148$. **D.** $P = 151$.

Lời giải

Chọn A

Đây chính là đề thi THPT Quốc Gia 2016 đã được biến tấu để trở thành 1 câu hỏi trắc nghiệm

Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2 = 4\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)^2 = 4\left(x + y + 1 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức $\boldsymbol{AM - GM}$ cho 2 số thực không âm ta có:

$2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \le x + y + 1 \Rightarrow (x+y+1)^2 \le 8(x+y+1) \Rightarrow -1 \le x + y \le 7$

Mặt khác ta lại có:

$(x+y+1)^2 = 4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right) \ge 4(x+y+1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + y \ge 3 \\ x + y \le -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \le x + y \le 7 \\ x + y = -1 \end{array}\right.$

Nếu $x + y = -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}\sqrt{y+3} = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow S = -\frac{9746}{243}$

Nếu $3 \le x + y \le 7$. Đặt $t = x + y\left(t \in [3;7]\right)$

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1).2^{7-t}\left(t \in [3;7]\right)$

$\Rightarrow f'(t) = 3^{t-4}\ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t}\ln 2$

$\Rightarrow f''(t) = 3^{t-4}\ln^2 3 - 2^{7-t}\ln 2 - \ln 2\left(2^{7-t} - (t+1)2^{7-t}\ln 2\right)$

$= 3^{t-4}\ln^2 3 + \left((t+1)\ln^2 2 - 2\ln 2\right)2^{7-t} > 0 \forall t \in [3;7]$

Vì $f'(3) < 0, f'(7) > 0$ nên tồn tại số $a \in (3;7)$ sao cho $f'(a) = 0$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(3;a)$ và đồng biến trên $(a;7)$. Mặt khác

$f(3) = \frac{193}{3}; f(7) = 35 \Rightarrow f(t) \le f(3) = \frac{193}{3} \forall t \in [3;7]$

Ta sẽ đi chứng minh $x^2 + y^2 \ge 5$ với $x + y \ge 3, x \ge 2$. Nhận thấy rằng khi:

$+\ x \in [2;3] \Rightarrow y \ge 3 - x \ge 0 \Rightarrow y^2 \ge x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 2x^2 - 6x + 9 = 2(x-2)(x-1) + 5 \ge 5$

$+\ x > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$

Vậy $x^2+y^2\ge 5\Rightarrow S\le\frac{148}{3}=\frac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=148\\b=3\end{cases}\Rightarrow a+b=151$.

Câu 25. Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>b>0$ và $\log_2(a-b)=\log_3(a+b)$Khi biểu thức $P=\log_2 a+\log_2 b+2\log_3(a+b)-2\log_2(a^2+b^2)$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị $a-b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(4;5)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $\begin{cases}0<a-b=2^t\\0<a+b=3^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-2ab+b^2=4^t\\a^2+2ab+b^2=9^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\dfrac{9^t+4^t}{2}\\ab=\dfrac{9^t-4^t}{4}\end{cases}$

$P=\log_2 ab+2\log_3(a+b)-2\log_2(a^2+b^2)$

$=\log_2\frac{9^t-4^t}{4}+2t-2\log_2\frac{9^t+4^t}{2}=\log_2\frac{9^t-4^t}{(9^t+4^t)^2}+\log_2 4^t=\log_2\frac{36^t-16^t}{(9^t+4^t)^2}$

Đặt $S=\dfrac{36^t-16^t}{(9^t+4^t)^2}=\dfrac{\left(\frac{9}{4}\right)^t-1}{\left(\frac{9}{4}\right)^{2t}+2\left(\frac{9}{4}\right)^t+1}=\dfrac{k-1}{k^2+2k+1}$ với $k=\left(\frac{9}{4}\right)^t$

P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử S có giá trị lớn nhất. Suy ra phương trình $Sk^2+(2S-1)k+S+1=0$ có nghiệm.

$\Rightarrow\Delta=(2S-1)^2-4S(S+1)\ge 0\Leftrightarrow S\le\frac{1}{8}$.

Suy ra S đạt GTLN bằng $\frac{1}{8}$ khi $k=3\Rightarrow\left(\frac{9}{4}\right)^t=3\Leftrightarrow t=\log_{\frac{9}{4}}3$.

Do đó P đạt GTLN bằng $\log_2\frac{1}{8}=-3$ khi $t=\log_{\frac{9}{4}}3$.

Khi đó $\log_2(a-b)=t=\log_{\frac{9}{4}}3\Leftrightarrow a-b=2^{\log_{\frac{9}{4}}3}\approx 2,56$.

Câu 26. Cho hai số thực x và y thỏa mãn: $x+y=\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-4}$. Khi ấy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2^{x+y}}{\ln 2}+x^2+y^2+6xy$ tương ứng là:

A. $\frac{4}{\ln 2}-28$. **B.** $\frac{2}{\ln 2}-4$. **C.** $\frac{8}{\ln 2}+6$. **D.** $\frac{4}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $\begin{cases}x\ge -2\\y\ge 2\end{cases}$

Ta có: $x+y=\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-4}\Rightarrow(x+y)^2=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-4}\right)^2$

$(x+y)^2=x+y+y-2+2\sqrt{(x+2)(2y-4)}\ge x+y\Rightarrow(x+y)^2-(x+y)\ge 0\Rightarrow x+y\ge 1(1)$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpki ta có:

$(x+y)^2=\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2y-4}\right)^2\le 3(x+y)\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)\le 0\to 0\le x+y\le 3(2)$

Từ $(1)\&(2)\Rightarrow 1\le x+y\le 3$

Lại có: $\begin{cases}x\ge -2\\ y\ge 2\end{cases}\Rightarrow (x+2)(y+2)\ge 0\Rightarrow xy\ge -2(x+y)-4$

$\Rightarrow 4xy\ge -8(x+y)-16\Rightarrow P=\dfrac{2^{x+y}}{\ln 2}+(x+y)^2+4xy\ge \dfrac{2^{x+y}}{\ln 2}+(x+y)^2-8(x+y)-16$

Đặt $u=x+y\,(1\le u\le 3)$ khi đó: $P\ge \dfrac{2^u}{\ln 2}+u^2-8u-16$

$f(u)=\dfrac{2^u}{\ln 2}+u^2-8u-16\,(1\le u\le 3)$; $f'(u)=2^u+2u-8=0\Rightarrow u=2$

Ta có BBT hàm số $f(u)$ như sau:

u	1		2		3
$f'(u)$		$-$	0	$+$	
$f(u)$	$\dfrac{2}{\ln 2}-23$	$\searrow$	$\dfrac{4}{\ln 2}-28$	$\nearrow$	$\dfrac{8}{\ln 2}-28$

Từ BBt suy ra: $P\ge \dfrac{4}{\ln 2}-28\Leftrightarrow t=2$. Vậy GTNN của $P=\dfrac{4}{\ln 2}-28\Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=4\end{cases}$.

BÀI TOÁN GTLN - GTNN BIỂU THỨC MŨ – LOGARIT NHIỀU BIẾN SỐ

Câu 1. Cho x,y,z lần lượt là các số thực dương và thỏa mãn hệ phương trình sau $3\log_x(3y)=3\log_{3x}(27z)=\log_{3xy}(81yz)>0$. Khi biểu thức $P=x^5y^4z$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị của $1000P$ nằm trong khoảng nào ?

A. $(18;20)$. **B.** $(20;22)$. **C.** $(22;24)$. **D.** $(24;26)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hệ phương trình sau: $3\log_x(3y)=3\log_{3x}(27z)=\log_{3xy}(81yz)\neq 0$ (*)

Từ phương trình (*), ta có: $3\log_x(3y)=3\log_{3x}(27z)=\log_{3xy}(81yz)=k>0$

Đặt: $\begin{cases}3\log_x(3y)=k\\3\log_{3x}(27z)=k\\\log_{3xy}(81yz)=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{\frac{k}{3}}=3y\to y=\frac{1}{3}x^{\frac{k}{3}}\\(3x)^{\frac{k}{3}}=27z\to z=\frac{1}{27}(3x)^{\frac{k}{3}}\\(3xy)^k=81yz\quad(*)\end{cases}$

Thay nghiệm y,z theo x vào $(*)\Rightarrow\left(3x\frac{1}{3}x^{\frac{k}{3}}\right)^k=81\left(\frac{1}{3}x^{\frac{k}{3}}\right).\frac{1}{27}(3x)^{\frac{k}{3}}\Leftrightarrow\left(x^{\frac{k+3}{3}}\right)^k=3^{\frac{k}{3}}.x^{\frac{2k}{3}}$

$\Leftrightarrow x^{\frac{k^2+3k}{3}}=3^{\frac{k}{3}}.x^{\frac{2k}{3}}\Leftrightarrow x^{\frac{k(k+1)}{3}}=3^{\frac{k}{3}}\Leftrightarrow\left(x^{k+1}\right)^{\frac{k}{3}}=3^{\frac{k}{3}}\Leftrightarrow x^{k+1}=3\Rightarrow x=3^{\frac{1}{k+1}}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{3}x^{\frac{k}{3}}=3^{\frac{k}{3(k+1)}-1}=3^{\frac{-2k-3}{3(k+1)}}\\z=\frac{1}{27}(3x)^{\frac{k}{3}}=3^{\frac{k^2-7k-9}{3(k+1)}}\end{cases}$

Thế các nghiệm x,y,z theo k vào biểu thức cần tính, suy ra:

$$P=x^5y^4z=\left(3^{\frac{1}{k+1}}\right)^5.\left(3^{\frac{-2k-3}{3(k+1)}}\right)^4.3^{\frac{k^2-7k-9}{3(k+1)}}=3^{\frac{5}{k+1}-\frac{8k+12}{3(k+1)}+\frac{k^2-7k-9}{3(k+1)}}=3^{\frac{k^2-15k-6}{3(k+1)}}$$

Khi $P_{\min}\Leftrightarrow\left(\frac{k^2-15k-6}{3(k+1)}\right)_{\min}$. Xét hàm $y=f(k)=\frac{k^2-15k-6}{3(k+1)}\quad\forall k>0$

$$f'(k)=0\Leftrightarrow\frac{k^2-2k-9}{9(k+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1+\sqrt{10}\\k=-1-\sqrt{10}\end{array}\right.\Rightarrow k=-1+\sqrt{10}$$

Dễ dàng suy ra $\min f(k)=f\left(-1+\sqrt{10}\right)=\frac{2\sqrt{10}-17}{3}\Rightarrow 1000P_{\min}=1000.3^{\frac{2\sqrt{10}-17}{3}}\approx 20.052698$

Câu 2. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $2^a+4^b+8^c=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$. **B.** $\frac{281}{50}$. **C.** $\frac{4096}{729}$. **D.** $\frac{14}{25}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $a=\log_2 x,\ 2b=\log_2 y,\ 3c=\log_2 z$. Ta có $S=\log_2(xyz)$.

$$4=x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\leq\left(\frac{4}{3}\right)^3\Leftrightarrow S\leq 3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$$

$MaxS = M = 3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$, $khi\ x = y = z = \frac{4}{3}$

Gọi $z = \min(x, y, z) \Rightarrow 1 \le z \le \frac{4}{3}$.

Do $(x-1)(y-1) \ge 0 \Rightarrow xy \ge x + y + 1 = 3 - z \Rightarrow xyz \ge z(3-z) \ge 2$ (vì $z \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$

Suy ra $S \ge 1$, do đó $m = \min S = 1$ khi $x = z = 1, y = 2$

$4^M + \log_M m = 4^{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)} + \log_{3\log_2\left(\frac{4}{3}\right)} 1 = \frac{4096}{729}$.

Câu 3. Cho ba số thực thay đổi $a, b, c > 1$ thỏa mãn $a + b + c = 6$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x)^2 - (2 + \log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 2022 = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất của x_1x_2 là

A. -2022. **B.** 216. **C.** $12 + 6\log_2 3$. **D.** 108.

Lời giải

Chọn C

Do phương trình $(\log_a x)^2 - (2 + \log_a b + 3\log_a c)\log_a x - 2022 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 nên ta suy ta hệ thức Viét như sau: $(\log_a x_1) + (\log_a x_2) = \log_a(x_1x_2) = 2 + \log_a b + 3\log_a c$

$x_1x_2 = a^{2+\log_a b + 3\log_a c} = a^2bc^3$

Ta lại có tiếp $6 = a + b + c = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} \ge 6\sqrt[6]{\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.b.\frac{c}{3}.\frac{c}{3}.\frac{c}{3}} = 6\sqrt[6]{\frac{a^2bc^3}{108}}$

Suy ra $x_1x_2 = a^2bc^3 \le 108$. Như vậy giá trị lớn nhất của x_1x_2 là 108

Câu 4. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $2^{x^2} + 3^{y^2} + 5^{z^2} = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = x + 3y + 4z$ nằm trong khoảng nào sau đây

A. $(4;5)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(6;7)$. **D.** $(7;8)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $6 = 2^{x^2} + 3^{y^2} + 5^{z^2} \ge 3\sqrt[3]{2^{x^2}.3^{y^2}.5^{z^2}} \Rightarrow 2^{x^2}.3^{y^2}.5^{z^2} \le 8$

Loga cơ số 2 cho hai vế ta có: $\log_2\left(2^{x^2}.3^{y^2}.5^{z^2}\right) \le 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2\log_2 3 + z^2\log_2 5 \le 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$T^2 = (x + 3y + 4z)^2 = \left(1.x + \frac{3}{\sqrt{\log_2 3}}y\sqrt{\log_2 3} + \frac{4}{\sqrt{\log_2 5}}z\sqrt{\log_2 5}\right)^2$$

$$\le \left(1 + \frac{9}{\log_2 3} + \frac{16}{\log_2 5}\right).\left(x^2 + y^2\log_2 3 + z^2\log_2 5\right)$$

$$\Rightarrow T^2 \le (1 + 9\log_3 2 + 16\log_5 2).\left(x^2 + y^2\log_2 3 + z^2\log_2 5\right) = 3.(1 + 9\log_3 2 + 16\log_5 2)$$

$$\Rightarrow T \le \sqrt{3(1 + 9\log_3 2 + 16\log_5 2)} \approx 6{,}38 \in (6;7)$$

Câu 5. Cho ba số thực a, b, c nhận những giá trị dương lớn hơn 1. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left[\log_{(3ab+4)}\left(4a^2 + 9b^2 + c^2\right)\right]^3 + \frac{3}{2\log_{(3ab+4)}(2a + 3b + c) - \log_{(3ab+4)} 3}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$T=\left[\log_{(3ab+4)}\left(4a^2+9b^2+c^2\right)\right]^3+\frac{3}{2\log_{(3ab+4)}(2a+3b+c)-\log_{(3ab+4)}3}$$

$$=\left[\log_{(3ab+4)}\left(4a^2+9b^2+c^2\right)\right]^3+\frac{3}{\log_{(3ab+4)}\dfrac{(2a+3b+c)^2}{3}}$$

$$=\left[\log_{(3ab+4)}\left(4a^2+9b^2+c^2\right)\right]^3+3\log_{\frac{(2a+3b+c)^2}{3}}(3ab+4)$$

Theo Bunhia, ta có:

$$(1+1+1)\left(4a^2+9b^2+c^2\right)\ge(2a+3b+c)^2\Leftrightarrow\left(4a^2+9b^2+c^2\right)\ge\frac{(2a+3b+c)^2}{3}$$

Suy ra: $T\ge\left[\log_{(3ab+4)}\dfrac{(2a+3b+c)^2}{3}\right]^3+3\log_{\frac{(2a+3b+c)^2}{3}}(3ab+4)$. Đặt $t=\log_{(3ab+4)}\dfrac{(2a+3b+c)^2}{3}$

Khi ấy, $T\ge x^3+\dfrac{3}{x}=x^3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\ge4\sqrt[4]{x^3.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}}=4$ .Vậy $T_{\min}=4$

Câu 6. Cho ba số thực $x,y,z\in[1;4]$ và đồng thời thỏa điều kiện $xyz=16$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+2y+2z-3(\log_2x+\log_2y+\log_2z)$ tương ứng là:

A. 3. **B.** 6. **C.** $6+3\sqrt{3}$. **D.** $4+2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên, ta khảo sát hàm số $f(x)=x-3\log_4x-1$ trên đoạn $[1;4]$ như sau:

Có: $f'(x)=1-\dfrac{3}{x\ln4}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\ln4}$. Ta có tiếp:

$$f(1)=f(4)=0;f\left(\frac{3}{\ln4}\right)=\frac{3}{\ln4}-3\log_4\left(\frac{3}{\ln4}\right)-1\approx-0,51$$

Suy ra $f(x)=x-3\log_4x-1\le0,\forall x\in[1;4]$ và dấu bằng xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Tương tự như thế ta cũng thu được $\begin{cases}y-3\log_4y-1\le0,\forall y\in[1;4]\\z-3\log_4z-1\le0,\forall z\in[1;4]\end{cases}$

Suy ra $T=2x+2y+2z-3(\log_2x+\log_2y+\log_2z)=2\left(x+y+z-3(\log_4x+\log_4y+\log_4z)\right)$

$=2\left((x-3\log_4x-1)+(y-3\log_4y-1)+(z-3\log_4z-1)+3\right)\le2.(0+3)=6$. Vậy $T_{\max}=6$

Câu 7. Cho ba số thực $x,y,z\in[1;3]$ và đồng thời thỏa điều kiện $xyz=9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\left(x\log_3x+y\log_3y+z\log_3z\right)$ tương ứng là:

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 7. **C.** $8+3\sqrt{3}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đầu tiên, ta có: $x^2-2(x+1)\log_3x+1=(x+1)(x-2\log_3x-1)$

Xét hàm số sau: $y=f(x)=x-2\log_3x-1\quad\forall x\in[1;3]$

Có: $f'(x)=1-\dfrac{2}{x\ln3}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\ln3}$.

Ta có tiếp:

$f(1)=f(3)=0; f\left(\frac{2}{\ln 3}\right)=\frac{2}{\ln 3}-2\log_3\left(\frac{2}{\ln 3}\right)-1\approx -0,27$

Suy ra $y=f(x)=x-2\log_3 x-1\le 0\quad \forall x\in[1;3]$

Và ta cũng suy ra được $x^2-2(x+1)\log_3 x+1=(x+1)(x-2\log_3 x-1)\le 0\quad \forall x\in[1;3]$

$\Rightarrow x^2-2x\log_3 x\le 2\log_3 x+1\quad \forall x\in[1;3]$

Tương tự, ta cũng dễ dàng chứng minh được: $\begin{cases} y^2-2y\log_3 y\le 2\log_3 y+1 & \forall y\in[1;3] \\ z^2-2z\log_3 z\le 2\log_3 z+1 & \forall z\in[1;3]\end{cases}$

Suy ra: $T=(x^2+y^2+z^2)-2(x\log_3 x+y\log_3 y+z\log_3 z)$

$=(x^2-2x\log_3 x)+(y^2-2y\log_3 y)+(z^2-2z\log_3 z)$

$\le(2\log_3 x+1)+(2\log_3 y+1)+(2\log_3 z+1)=2(\log_3 x+\log_3 y+\log_3 z)+3$

$=2\log_3(xyz)+3=2\log_3 9+3=7$

Vậy $T_{\max}=7$

Câu 8. Cho ba số thực $a>1$, $b>1$, $c>1$. Biết rằng tồn tại số thực dương $x\ne 1$ thỏa mãn hệ thức $a^{\log_b x}=b^{\log_a x^9}$. Khi đó, biểu thức $T=\log_c(ab)+\log_b(a^2bc)$ đạt giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Với ba số thực $a>1$, $b>1$, $c>1$, ta có:

$a^{\log_b c}=a^{\log_a c.\log_b a}=\left(a^{\log_a c}\right)^{\log_b a}=c^{\log_b a}$.

Do tồn tại số thực $x>0$, $x\ne 1$ thỏa mãn hệ thức $a^{\log_b x}=b^{\log_a x^9}$ nên áp dụng tính chất trên ta được: $a^{\log_b x}=b^{\log_a x^9}\Leftrightarrow x^{\log_b a}=x^{9\log_a b}$

$\Leftrightarrow \log_b a=9\log_a b\Leftrightarrow \log_b a=3$.

Do đó, $T=\log_c(ab)+\log_b(a^2bc)=\log_c b.\log_b(ab)+\log_b a^2+1+\log_b c$

$=\log_c b.(\log_b a+1)+2\log_b a+1+\log_b c=4\log_c b+\log_b c+7$.

Vì $a>1$, $b>1$, $c>1$ nên $\log_c b>0$, $\log_b c>0$.

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$4\log_c b+\log_b c\ge 2\sqrt{4\log_c b.\log_b c}=4$.

Suy ra $T\ge 11$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}4\log_c b=\log_b c\\ \log_b a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=b^2\\ a=b^3\end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T bằng 11.

Câu 9. Cho $a,b,c\in\left[\frac{1}{4};1\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)$$

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge x-\frac{1}{4}\Rightarrow \log_y(x^2)\le\log_y\left(x-\frac{1}{4}\right),\forall y\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

Suy ra $2\log_y(x) \le \log_y\left(x-\frac{1}{4}\right), \forall y \in \left[\frac{1}{4};1\right]$

Từ đó ta suy ra $\begin{cases} \log_a\left(b-\frac{1}{4}\right) \ge 2\log_a b & \forall a,b \in \left[\frac{1}{4};1\right] \\ \log_b\left(c-\frac{1}{4}\right) \ge 2\log_b c & \forall b,c \in \left[\frac{1}{4};1\right] \\ \log_c\left(a-\frac{1}{4}\right) \ge 2\log_c a & \forall c,a \in \left[\frac{1}{4};1\right] \end{cases}$

Suy ra

$P = \log_a\left(b-\frac{1}{4}\right) + \log_b\left(c-\frac{1}{4}\right) + \log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)$

$\ge 2\left(\log_a b + \log_b c + \log_c a\right) = 2.3\sqrt[3]{\log_a b.\log_b c.\log_c a} = 6$

Vậy $P_{\min} = 6$

Câu 10. Cho $a,b,c \in [0;1]$ thỏa $\log_2{}^3 a + \log_2{}^3 b + \log_2{}^3 c \le 1$. Khi đó, biểu thức $T = a^3 + b^3 + c^3 - 3\left(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất là:

A. 4. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta xét hàm: $y = f(x) = \log_2 x - x + 1 \ \forall x \in [1;2]$ có

$f'(x) = \frac{1}{x\ln 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$. Ta lại có:

$f(1) = f(2) = 0; f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right) - \frac{1}{\ln 2} + 1 > 0$

Suy ra

$y = f(x) = \log_2 x - x + 1 \ge 0 \ \forall x \in [1;2] \Rightarrow \log_2 a \ge a - 1 \ \forall a \in [1;2]$

Đặt: $\begin{cases} x = \log_2 a \\ y = \log_2 b \\ z = \log_2 c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2{}^3 a + \log_2{}^3 b + \log_2{}^3 c = x^3 + y^3 + z^3 \le 1 \\ a \le x+1; b \le y+1; c \le z+1 \end{cases}$

Ta có:

$T = a^3 + b^3 + c^3 - 3\left(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c\right)$

$\le \left[(x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3\right] - 3\left[x(x+1) + y(y+1) + z(z+1)\right]$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3 \le 1 + 3 = 4$

Suy ra $T_{\max} = 1$ khi và chỉ khi $(a;b;c) = (1;1;2)$ và các hoán vị

Câu 11. Cho x,y,z lần lượt là các số nguyên dương thỏa mãn hệ thức sau đây $\log_2{}^2(x+2y) + \log_2{}^2(2y+3z) + \log_2{}^2(x+3z) = 3$. Khi đó biểu thức $T = \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2}$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 8. **C.** $\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{32}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức Svac-Xo (hay gọi là cộng mẫu): $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\ge\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$, ta có:

$$3=\log_2{}^2(x+2y)+\log_2{}^2(2y+3z)+\log_2{}^2(x+3z)=\frac{\log_2{}^2(x+2y)}{1}+\frac{\log_2{}^2(2y+3z)}{1}+\frac{\log_2{}^2(x+3z)}{1}$$

$$\ge\frac{\left[\log_2(x+2y)+\log_2(2y+3z)+\log_2(x+3z)\right]^2}{1+1+1}\Rightarrow -3\le\log_2\left[(x+2y)(2y+3z)(x+3z)\right]\le 3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{8}\le(x+2y)(2y+3z)(x+3z)\le 8$$

Mặt khác: $(x+2y)(2y+3z)(x+3z)\le\frac{(x+2y+2y+3z+3z+x)^3}{27}=\frac{8(x+2y+3z)^3}{27}$

Nên ta suy ra $\frac{8(x+2y+3z)^3}{27}\ge(x+2y)(2y+3z)(x+3z)\ge\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{8(x+2y+3z)^3}{27}\ge\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow(x+2y+3z)^3\ge\frac{27}{64}=\left(\frac{3}{4}\right)^3\Rightarrow x+2y+3z\ge\frac{3}{4}$$

Suy ra $T=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=\frac{x+2y+3z}{6}=\frac{1}{6}.(x+2y+3z)\ge\frac{1}{6}.\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$. Vậy $T_{\min}=\frac{1}{8}$

Câu 12. Cho các số thực a,b,c lớn hơn 1 thỏa $\log_2(abc)=1+\frac{8}{c}-4ab$. Khi ấy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{1}{2}\log_{2a^2}2+\frac{1}{3}\log_{2b^3}2+\frac{1}{6}\log_{2c^6}2$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\sqrt[6]{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đầu tiên, ta có: $\log_2(abc)=1+\frac{8}{c}-4ab\Leftrightarrow\log_2(4ab)+(4ab)=\log_2\left(\frac{8}{c}\right)+\left(\frac{8}{c}\right)$

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+t,\quad f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+1>0,\forall t\in R\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên R

$$\Rightarrow f(4ab)=f\left(\frac{8}{c}\right)\Leftrightarrow 4ab=\frac{8}{c}\Leftrightarrow abc=2\Rightarrow\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c=1$$

Đặt $x=\log_2 a; y=\log_2 b; z=\log_2 c\Rightarrow x+y+z=1$

Ta có: $T=\frac{1}{2}\log_{2a^2}2+\frac{1}{3}\log_{2b^3}2+\frac{1}{6}\log_{2c^6}2=\frac{1}{2}.\frac{1}{\log_2 2a^2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{\log_2 2b^3}+\frac{1}{6}.\frac{1}{\log_2 2c^6}$

$$=\frac{1}{2+4\log_2 a}+\frac{1}{3+9\log_2 b}+\frac{1}{6+36\log_2 c}=\frac{1}{2+4x}+\frac{1}{3+9y}+\frac{1}{6+36z}$$

$$=\left(\frac{1}{2+4x}+\frac{2+4x}{16}\right)+\left(\frac{1}{3+9y}+\frac{3+9y}{36}\right)+\left(\frac{1}{6+36z}+\frac{6+36z}{144}\right)-\left(\frac{2+4x}{16}+\frac{3+9y}{36}+\frac{6+36z}{144}\right)$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{1}{2+4x}.\frac{2+4x}{16}}+2.\sqrt{\frac{1}{3+9y}.\frac{3+9y}{36}}+2.\sqrt{\frac{1}{6+36z}.\frac{6+36z}{144}}-\left(\frac{2+4x}{16}+\frac{3+9y}{36}+\frac{6+36z}{144}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\left(\frac{2+4x}{16}+\frac{3+9y}{36}+\frac{6+36z}{144}\right)=\frac{3}{4}-\frac{x+y+z}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Vậy $T_{\min}=\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{2};y=\dfrac{1}{3};z=\dfrac{1}{6}\Rightarrow(a;b;c)=\left(\sqrt{2};\sqrt[3]{2};\sqrt[6]{2}\right)$

Câu 13. Cho các số thực x,y,z thỏa $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$. Khi ấy, giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}$ bằng

A. $\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{7+\sqrt{87}}{2}$. **D.** $\dfrac{3+\sqrt{87}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đầu tiên, ta có: $4^x+9^y+16^z=2^x+3^y+4^z$

$$\Leftrightarrow\left(2^{2x}-2.2^x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(3^{2x}-2.3^x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(4^{2x}-2.4^x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3^x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4^x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Khi đó, ta suy ra

$$T=2^{x+1}+3^{y+1}+4^{z+1}=2\left(2^x-\frac{1}{2}\right)+3\left(3^x-\frac{1}{2}\right)+4\left(4^x-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{2}$$

$$\le\sqrt{\left(2^2+3^2+4^2\right).\underbrace{\left[\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3^x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(4^x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}_{=3/4}}+\frac{9}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}\left(2^2+3^2+4^2\right)}+\frac{9}{2}=\frac{9+\sqrt{87}}{2}$$

Vậy $T_{\max}=\dfrac{9+\sqrt{87}}{2}$

Câu 14. Cho các số thực x,y,z. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\sqrt{3+2011^{x+y-2z}}+\sqrt{3+2011^{y+z-2x}}+\sqrt{3+2011^{z+x-2y}}$$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có:

$$P=\sqrt{3+2011^{x+y-2z}}+\sqrt{3+2011^{y+z-2x}}+\sqrt{3+2011^{z+x-2y}}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(2011^{\frac{x+y-2z}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(2011^{\frac{y+z-2x}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(2011^{\frac{z+x-2y}{2}}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2+\left(2011^{\frac{x+y-2z}{2}}+2011^{\frac{y+z-2x}{2}}+2011^{\frac{z+x-2y}{2}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{27+\left(2011^{\frac{x+y-2z}{2}}+2011^{\frac{y+z-2x}{2}}+2011^{\frac{z+x-2y}{2}}\right)^2}\ge\sqrt{27+\left(3\sqrt[3]{2011^{\frac{x+y-2z}{2}}.2011^{\frac{y+z-2x}{2}}.2011^{\frac{z+x-2y}{2}}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{27+\left(3\sqrt[3]{2011^{\frac{x+y-2z}{2}+\frac{y+z-2x}{2}+\frac{z+x-2y}{2}}}\right)^2}=6.$$ Vậy $P_{\min}=6$

Câu 15. Cho các số thực dương thỏa mãn $5\log_2^2a+16\log_2^2b+27\log_2^2c=1$.

Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\log_2a.\log_2b+\log_2b.\log_2c+\log_2c.\log_2a$ bằng

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Đặt: $\begin{cases} x=\log_2 a \\ y=\log_2 b \\ z=\log_2 c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\log_2^2 a+16\log_2^2 b+27\log_2^2 c=5x^2+16y^2+27z^2=1 \\ S=\log_2 a.\log_2 b+\log_2 b.\log_2 c+\log_2 c.\log_2 a=xy+yz+zx \end{cases}$

Mặt khác: $1=5x^2+16y^2+27z^2=\left(3x^2+12y^2\right)+\left(2x^2+18z^2\right)+\left(4y^2+9z^2\right)$

$\geq 2\sqrt{3x^2.12y^2}+2\sqrt{2x^2.18z^2}+24\sqrt{y^2.9z^2}=12\left(xy+yz+zx\right)\Rightarrow 12\left(xy+yz+zx\right)\leq 1$

Nên suy ra $S=xy+yz+zx\leq \dfrac{1}{12}$. Vậy $S_{\max}=\dfrac{1}{12}$.

Cách 2:

Đặt: $\begin{cases} x=\log_2 a \\ y=2\log_2 b \\ z=3\log_2 c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\log_2^2 a+16\log_2^2 b+27\log_2^2 c=5x^2+4y^2+3z^2=1 \\ S=\log_2 a.\log_2 b+\log_2 b.\log_2 c+\log_2 c.\log_2 a=\dfrac{xy}{2}+\dfrac{yz}{6}+\dfrac{zx}{3} \end{cases}$

Suy ra $6S=3xy+yz+2zx$

Ta có: $1=5x^2+4y^2+3z^2 \Leftrightarrow 1-12S=\left(5x^2+4y^2+3z^2\right)-2\left(3xy+yz+2zx\right)$

$=\left(3x^2-6xy+3y^2\right)+\left(y^2-2yz+z^2\right)+\left(2x^2-4xz+2z^2\right)=3\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+2\left(z-x\right)^2\geq 0$

Suy ra $1-12S\geq 0\Rightarrow S\leq \dfrac{1}{12}$ Vậy $S_{\max}=\dfrac{1}{12}$.

Câu 16. Cho các số thực a,b,c lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_2 a\geq \left(1-\log_2 b\log_2 c\right)\log_{bc}2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$S=10\log_2^2 a+10\log_2^2 b+\log_2^2 c$$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi giả thiết ta được $\log_2 a\geq \left(1-\log_2 b\log_2 c\right)\log_{bc}2$

$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(\log_2 b+\log_2 c\right)\geq 1-\log_2 b\log_2 c \Leftrightarrow \log_2 a\log_2 b+\log_2 a\log_2 c+\log_2 b\log_2 c\geq 1$

Đặt $\begin{cases} x=\log_2 a \\ y=\log_2 b \\ z=\log_2 c \end{cases}$. Tiếp theo, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $S=10x^2+10y^2+z^2$

Bây giờ ta cần tìm số k dương sao cho $10x^2+10y^2+z^2\geq 2k\left(xy+yz+xz\right)$

$\Leftrightarrow 10x^2+10y^2+z^2+k\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq k\left(x^2+y^2+z^2\right)+2k\left(xy+yz+xz\right)$

$\Leftrightarrow \left(k+10\right)x^2+\left(k+10\right)y^2+\left(k+1\right)z^2\geq k\left(x+y+z\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{k+10}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{k+10}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\geq k\left(x+y+z\right)^2$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* dạng cộng mẫu ta có

$$\dfrac{x^2}{\frac{1}{k+10}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{k+10}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\geq \dfrac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+1}}$$

Đến đây sử dụng được giả thiết ta sẽ chọn k sao cho $\dfrac{1}{\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+10}+\frac{1}{k+1}}=k\Leftrightarrow k=2$

Như vậy suy ra $10x^2+10y^2+z^2\geq 2.2\left(xy+yz+xz\right)=4\left(xy+yz+xz\right)$

Mà mặt khác $\log_2 a\log_2 b+\log_2 a\log_2 c+\log_2 b\log_2 c=xy+yz+zx\ge 1$

Nên suy ra $10x^2+10y^2+z^2\ge 4(xy+yz+xz)=4.1=4$. Vậy $S_{\min}=4$

Câu 17. Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $\log a\log b+\log b\log c+3\log c\log a=1$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log^2 a+\log^2 b+\log^2 c$ là $\dfrac{-m+\sqrt{n}}{p}$ với m,n,p lần lượt là các số nguyên dương và $\dfrac{m}{p}$ là phân số tối giản. Tính $m+n+p$?

A. 64. **B.** 16. **C.** 102. **D.** 22.

Lời giải

Chọn D

Lưu ý: *Với bài toán này nếu đặt* $(\log a;\log b;\log c)\to(x,y,z)\Rightarrow xy+yz+3xz=1$ *thì ta sẽ không thể áp dụng phương pháp làm của bài trên, khi đó ta sẽ cần phải nghĩ ra cách đặt khác.*

Cách 1:

Đặt $(\log a;\log b;\log c)\to(ix,jy,kz)\Rightarrow ijxy+jkyz+3kixz=1$

Tìm i,j,k sao cho thỏa mãn $ij=kj=3ki\Rightarrow i=k=\dfrac{j}{3}$. (Cân bằng hệ số)

Chọn $j=3\Rightarrow i=k=1$

Khi đó ta được $(\log a;\log b;\log c)\to(x,3y,z)\Rightarrow 3xy+3yz+3xz=1\Rightarrow xy+yz+xz=\dfrac{1}{3}$

Khi đó ta có được đánh giá như sau:

$\log^2 a+\log^2 b+\log^2 c=x^2+9y^2+z^2\ge 2k(xy+yz+xz)$

$\Leftrightarrow x^2+9y^2+z^2+k(x^2+y^2+z^2)\ge 2k(xy+yz+xz)+k(x^2+y^2+z^2)$

$\Leftrightarrow (k+1)x^2+(k+9)y^2+(k+1)z^2\ge k(x+y+z)^2$

Mặt khác ta có: $(k+1)x^2+(k+9)y^2+(k+1)z^2=\dfrac{x^2}{\frac{1}{k+1}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{k+9}}+\dfrac{z^2}{\frac{1}{k+1}}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+9}+\frac{1}{k+1}}$

Đến đây sử dụng được giả thiết ta sẽ chọn k sao cho $\dfrac{1}{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+9}+\frac{1}{k+1}}=k\Leftrightarrow k=\dfrac{-9+3\sqrt{17}}{4}$

Mặt khác ta có: $xy+yz+xz=\dfrac{1}{3}$ nên suy ra $P=x^2+9y^2+z^2\ge 2.\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{-9+3\sqrt{17}}{4}\right)=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Cách 2:

Chú ý rằng ở giả thiết và yêu cầu của bài toán vai trò của 2 biến a,c *là như nhau nên dấu* $"="$ *sẽ xảy ra tại* $a=c$*, đây chính là điểm rơi mấu chốt của bài toán trên. Khi đó ta có:*

$\begin{cases}P=2x^2+y^2\\3x^2+2xy=1\end{cases}\Rightarrow P(3x^2+2xy)=2x^2+y^2\Leftrightarrow(3P-2)x^2+2Pyx-y^2=0$

$\Leftrightarrow(3P-2)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2P\left(\dfrac{x}{y}\right)-1=0$. Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 theo ẩn $\left(\dfrac{x}{y}\right)$, ta có: $\Delta'=P^2+3P-2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}P\ge\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\\P\le\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right.$ Vậy $S_{\min}=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Câu 18. Cho các số thực dương x,y,z khi biểu thức

$P=\log^2\left(10x^2+7y^2+15z^2\right)-2\log\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+2\left(x+y+z\right)\right)-2\log\left(xyz\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị xyz gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

- Viết lại $P=\log^2\left(10x^2+7y^2+15z^2\right)-2\log\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz\left(x+y+z\right)\right)$

$=\log^2\left(10x^2+7y^2+15z^2\right)-2\log\left(xy+yz+zx\right)^2=\log^2\left(10x^2+7y^2+15z^2\right)-4\log\left(xy+yz+zx\right)$

- Ta cần chỉ ra $10x^2+7y^2+15z^2\ge m\left(xy+yz+zx\right)$ để đưa P về một biến ta biến đổi như sau: $20x^2+14y^2+30z^2\ge 2m\left(xy+yz+zx\right)$

$\Leftrightarrow\left(20+m\right)x^2+\left(14+m\right)y^2+\left(30+m\right)z^2\ge m\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{1}{20+m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{14+m}}+\frac{z^2}{\frac{1}{30+m}}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{m}}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Svac-Xo (hay còn gọi là cộng mẫu) thì:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{20+m}}+\frac{y^2}{\frac{1}{14+m}}+\frac{z^2}{\frac{1}{30+m}}\ge\frac{\left(x+y+z\right)^2}{\frac{1}{20+m}+\frac{1}{14+m}+\frac{1}{30+m}}$$

Đến đây ta chỉ việc chọn m thỏa mãn $\frac{1}{20+m}+\frac{1}{14+m}+\frac{1}{30+m}=\frac{1}{m}\Leftrightarrow m=10$.

Vậy ta được $10x^2+7y^2+15z^2\ge 10\left(xy+yz+zx\right)$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{\frac{1}{30}}=\frac{y}{\frac{1}{24}}=\frac{z}{\frac{1}{40}}\Leftrightarrow 15x=12y=20z$$

Cách 2:

Ngoài ra ta cũng có thể dùng phương pháp cân bằng hệ số trong bất đẳng thức CAUCHY để chứng minh

$$\left.\begin{array}{l}\frac{25}{4}x^2+4y^2\ge 10xy\\ \frac{15}{4}x^2+\frac{20}{3}z^2\ge 10xz\\ 3y^2+\frac{25}{3}z^2\ge 10yz\end{array}\right\}$$ cộng các vế ta được $10x^2+7y^2+15z^2\ge 10\left(xy+yz+zx\right)$.

Từ đó ta có $P\ge\log^2\left(10\left(xy+yz+zx\right)\right)-4\log\left(xy+yz+zx\right)=\left(\log\left(xy+yz+zx\right)-1\right)^2\ge 0$

Dấu bằng xảy ra $\begin{cases}y=\frac{5}{4}x;\ z=\frac{3}{4}x\\ xy+yz+zx=10\end{cases}\Leftrightarrow xyz=\frac{15}{16}x^3=\frac{600}{47}\sqrt{\frac{10}{47}}\approx 6$.

Câu 19. Cho biểu thức sau:

$$P=\log_a^2(xy)+\log_{a^2}(y^4)+\log_{a}(x^6y^4+x^2z^2+2x^4y^2z)+\frac{12+5\sqrt{4z-y^2}}{3}.$$

Với $a>1$, $|y|\ge 1$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất bằng b khi $a=a_0$ và $(x;y;z)=(x_1;y_1;z_1)$ hoặc $(x;y;z)=(x_2;y_2;z_2)$. Hãy tính $S=21a_0^2-22b^2+8(|x_1y_1z_1|+|x_2y_2z_2|)$.

A. -42. **B.** -37. **C.** 42. **D.** 44.

Lời giải

Chọn D

Có $\begin{cases} xy>0\\ z\ge \dfrac{y^2}{4}\\ y\ge 1\end{cases}$; $x^6y^4+x^2z^2+2x^4y^2z=x^6y^4+x^2z^2+x^4y^2z+x^4y^2z\ge 4\sqrt[4]{x^{16}y^8z^4}=4x^4y^2z$

Khi đó: $P\ge \log_a^2(xy)+\log_a(y^2)+\log_a(4x^4y^2z)+4+\dfrac{5\sqrt{4z-y^2}}{3}$

$P\ge \log_a^2(xy)+4\log_a(xy)+4+\log_a 4z+\dfrac{5\sqrt{4z-y^2}}{3}$

$P\ge (\log_a(xy)+2)^2+\log_a 4z+\dfrac{5\sqrt{4z-y^2}}{3}\ge 0$

Suy ra $P_{\min}=0$ khi $\begin{cases}\log_a(xy)=-2\\ z=\dfrac{1}{4}\\ y^2=4z\\ x^6y^4=x^2z^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{1}{xy}\\ z=\dfrac{1}{4}\\ y=\pm 1\\ x=\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\\ z=\dfrac{1}{4}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=-1\\ z=\dfrac{1}{4}\end{cases}\end{cases}$.

$S=21a_0^2-22b^2+8(|x_1y_1z_1|+|x_2y_2z_2|)=21.2-22.0+8\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\right)=44$.

Câu 20. Cho a,b,c là ba số thực dương đôi một phân biệt. Có bao nhiêu bộ $(a;b;c)$ thỏa mãn $a^{b+2}\le b^{a+2};b^{c+2}\le c^{b+2};c^{a+2}\le a^{c+2}$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall a,b,c$ thỏa mãn $a+b+c=1$ thì $\begin{cases}a^b.b^c.c^a\le ab+bc+ca\\ a^c.b^a.c^b\le ab+bc+ca\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a^{b+2}.b^{c+2}.c^{a+2}\le (abc)^2(ab+bc+ca)\ (1)\\ a^{c+2}.b^{a+2}.c^{b+2}\le (abc)^2(ab+bc+ca)\ (2)\end{cases}$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được $a^{b+2}.b^{c+2}.c^{a+2}+a^{c+2}.b^{a+2}.c^{b+2}\le 2(abc)^2(ab+bc+ca)$ (*)

Mà $b^{a+2}\ge a^{b+2};c^{b+2}\ge b^{c+2};a^{c+2}\ge c^{a+2}$ nên từ (*) suy ra

$2(abc)^2(ab+bc+ca)\ge (a^{b+2}.b^{c+2}.c^{a+2})^2\Rightarrow abc\sqrt{2(ab+bc+ac)}\ge a^{b+2}.b^{c+2}.c^{a+2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(ab+bc+ac)}\ge a^{b+1}.b^{c+1}.c^{a+1}\ge (b+1)a+(c+1)b+(a+1)c$

$\Leftrightarrow \sqrt{2(ab+bc+ac)} \ge (ab+bc+ca)+a+b+c \Leftrightarrow \sqrt{2(ab+bc+ac)} \ge (ab+bc+ca)+1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{ab+bc+ac}\right)^2 - \sqrt{2(ab+bc+ca)}+1 \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{ab+bc+ac}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2} \le 0$ (vô lý)

Vậy suy ra không có bộ $(a;b;c)$ nào thỏa mãn

Câu 21. Hỏi có tất cả bao nhiêu bộ số thực $(a;b;c)$ với $a,b,c \in [0;1]$, thỏa mãn $a+b+c=2$ và đồng thời làm cho biểu thức $T=3^{4a-4a^2}+16^{b-b^2}+3^c+8a^2+4b^2-6a-2b$ đạt giá trị lớn nhất ?

A. 4. **B.** 18. **C.** 6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Để làm được câu hỏi trên, ta cần áp dụng bất đẳng thức: $a^x \le 1+(a-1)x$ với $\forall x \in [0;1]$ và dấu bằng xảy ra tại $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. Khi đó ta suy ra:

- $3^{4a-4a^2} \le 1+2(4a-4a^2) \Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra tại $\left[\begin{array}{l} 4a-4a^2=0 \\ 4a-4a^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

- $16^{b-b^2} \le 2^{4b-4b^2} \le 1+(4b-4b^2) \Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra tại $\left[\begin{array}{l} 4b-4b^2=0 \\ 4b-4b^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right. \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

- $3^c \le 1+2c \Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra tại $\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$

Suy ra $T=3^{4a-4a^2}+16^{b-b^2}+3^c+8a^2+4b^2-6a-2b$

$\le \left[1+2(4a-4a^2)\right]+\left[1+(4b-4b^2)\right]+(1+2c)+8a^2+4b^2-6a-2b$

$=2(a+b+c)+3=2.2+3=7$

Như vậy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \\ a=\frac{1}{2} \end{array}\right.;\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right.;\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.,$

cùng với $a+b+c=2$ ta thu được các bộ số $(a;b;c)=\left\{(1;1;0);(0;1;1);(1;0;1);\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)\right\}$ tức có tất cả 4 bộ số thực $(a;b;c)$ thỏa mãn

Câu 22. Xét các số $a,b,c>1$ thỏa mãn $\log_a b+2\log_b c+3\log_c a=8$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $2\log_a c+3\log_c b+12\log_b a$ nằm trong khoảng nào ?

A. $(15;20)$. **B.** $(25;30)$. **C.** $(20;25)$. **D.** $(30;35)$

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên, ta đặt: $\begin{cases} x=\log_a b \\ y=\log_b c \\ z=\log_c a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_a b+2\log_b c+3\log_c a=x+2y+3z=8 \\ \log_a b.\log_b c.\log_c a=xyz=1 \end{cases}$

Ta lại có: $\begin{cases} \log_a c=\log_a b.\log_b c=xy \\ \log_c b=\log_c a.\log_a b=xz \\ \log_b a=\log_b c.\log_c a=yz \end{cases} \Rightarrow$ Tìm giá trị lớn nhất của $P=2xy+3zx+12yz$

Suy ra $P=\frac{P}{1}=\frac{P}{xyz}=\frac{2xy+3zx+12yz}{xyz}=\frac{12}{x}+\frac{3}{y}+\frac{2}{z}=\frac{12}{x}+\frac{2y+3z}{yz}$

Do $\begin{cases} x+2y+3z=8\to 2y+3z=8-x \\ xyz=1\to yz=\frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow P=\frac{12}{x}+\frac{8-x}{\frac{1}{x}}=\frac{12}{x}+x(8-x)$ (*)

Ta lại có: $8=x+\underbrace{(2y+3z)}_{Cauchy}\ge x+2\sqrt{2y.3z}=x+2\sqrt{\frac{6}{x}}\Rightarrow x+2\sqrt{\frac{6}{x}}-8\le 0\Leftrightarrow 5-\sqrt{21}\le x\le 6$

Suy ra ta khảo sát hàm số (*) $y=f(x)=\frac{12}{x}+x(8-x)\quad \forall x\in\left[5-\sqrt{21};6\right]$

Đạo hàm + Lập bảng biến thiên, ta dễ dàng suy ra

$P_{\max}=\max\limits_{\left[5-\sqrt{21};6\right]} f(x)=f\left(5-\sqrt{21}\right)=9+5\sqrt{21}\in(30;35)$

Vậy $P_{max}=9+5\sqrt{21}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x=5-\sqrt{21} \\ 2y=3z \\ x+2y+3z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-\sqrt{21} \\ y=\frac{3+\sqrt{21}}{4} \\ z=\frac{3+\sqrt{21}}{6} \end{cases}$

Câu 23. Cho các số thực $x,y,z\in[0;1]$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(2^x+2^y+2^z\right)\left(2^{-x}+2^{-y}+2^{-z}\right)$ được viết dưới dạng $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên không âm và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Hỏi $m+n$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 86. **B.** 87. **C.** 88. **D.** 89

Lời giải

Chọn D

Đặt $\left(2^x;2^y;2^z\right)\to(a,b,c)(1\le a,b,c\le 2)$.

Ta có $1\le a\le 2\Rightarrow(a-1)(a-2)\le 0\Leftrightarrow a+\frac{2}{a}\le 3$. Chứng minh tương tự $b+\frac{2}{b}\le 3, c+\frac{2}{c}\le 3$

Cộng 3 bất đẳng thức trên vế theo vế ta được

$9\ge(a+b+c)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 2\sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}\Rightarrow\frac{81}{8}\ge(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P_{\max}=\frac{81}{8}$ tức $m+n=81+8=89$

Từ đó, ta có tổng quát cho dạng này như sau:

Cho n số $x_1;x_2;...;x_n\in[a;b],c>1$. Khi đó ta luôn có

$$\left(c^{x_1}+c^{x_2}+....+c^{x_n}\right)\left(c^{-x_1}+c^{-x_2}+....+c^{-x_n}\right)\le\frac{\left[n\left(c^a+c^b\right)\right]^2}{4c^{a+b}}$$

Câu 24. Cho a,b,c,d là các số thực dương có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)$$

A. 2. **B.** $4\ln\frac{17}{16}$. **C.** $\left(\frac{17}{16}\right)^4$. **D.** $\ln\frac{17}{16}$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có:

$P=\left(1+a^2+b^2+a^2b^2\right)\left(1+c^2+d^2+c^2d^2\right)=\prod\left(a^2+1\right)\Rightarrow\ln P=\sum\ln\left(a^2+1\right)$

Ta có đánh giá sau $\ln\left(t^2+1\right)\ge mt+n$, để tìm được hai số m,n ta sẽ sử dụng tới bất đẳng thức tiếp tuyến, đây là một phương pháp rất hay để chứng minh các bất đẳng thức đối xứng với các biến độc lập nhau.

Cơ sở của phương pháp

- *Nếu đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $A\left(x_0;y_0\right)$, A không phải điểm uốn thì khi đó tồn tại một khoảng **D** chứa x_0 sao cho $f(x)\ge ax+b$ hoặc $f(x)\le ax+b$. Đẳng thức xảy ra khi $x=x_0$*
- *Nếu đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $A\left(x_0;y_0\right)$ thì ta luôn phân tích được $f(x)-(ax+b)=\left(x-x_0\right)^k g(x), k\ge 2$*

Sau đây ta áp dụng lý thuyết trên vào bài toán trên. Chú ý ta có $\sum\ln\left(a^2+1\right)$ là một biểu thức đối xứng theo bốn biến a,b,c,d đồng thời giả thiết cũng là đối xứng nên ta sẽ dự đoán dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{4}$.

Quay lại bất đẳng thức phụ mà ta đang đi tìm hệ số $\ln\left(t^2+1\right)\ge mt+n$, ta sẽ tìm m,n sao cho hai đồ thị hàm số $y=\ln\left(t^2+1\right), y=mt+n$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $t=\frac{1}{4}$ ta được

$$\begin{cases}m=\frac{8}{17}\\ n=-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16}\end{cases}.$$

Vậy ta có bất đẳng thức phụ là $\ln\left(t^2+1\right)\ge\frac{8}{17}t-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16}$, dễ thấy bất đẳng thức này luôn đúng, khi đó áp dụng vào bài toán ta có:

$$\ln P=\sum\ln\left(a^2+1\right)\ge\frac{8}{17}\underbrace{\sum a}_{=1}+4\left(-\frac{2}{17}+\ln\frac{17}{16}\right)=\frac{8}{17}-\frac{8}{17}+4\ln\frac{17}{16}=4\ln\frac{17}{16}\Rightarrow P\ge\left(\frac{17}{16}\right)^4$$

Câu 25. Cho các số thực $a,b,c\in[2;3]$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $S=4^a+4^b+4^c-\frac{1}{4}(a+b+c)^3$ là $\frac{m}{n}$ với m,n là các số nguyên dương và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $P=m+2n$

A. $P=257$. **B.** $P=258$. **C.** $P=17$. **D.** $P=18$

Lời giải

Chọn D

Với dạng toán này ta sẽ xét tới bất đẳng thức phụ $4^t \le mt+n, \forall t \in [2;3]$

Thay $t=2, t=3$ ta được hệ phương trình $\begin{cases}16=2m+n\\64=3m+n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=48\\n=-80\end{cases}$

Giờ ta cần chỉ ra bất đẳng thức $4^t \le 48t-80$ đúng với mọi $t\in[2;3]$ là bài toán sẽ được giải quyết. Ta xét $f(t)=4^t-48t+80 \Rightarrow f'(t)=4^t\ln 4-48; f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\log_4\frac{48}{\ln 4}$.

Nhận thấy rằng $f(2)=f(3)=0; f\left(\log_4\frac{48}{\ln 4}\right)<0$ nên bất đẳng thức luôn đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t\in\{2;3\}$. Khi đó ta được

$$S=4^a+4^b+4^c-\frac{1}{4}(a+b+c)^3 \le 48(a+b+c)-\frac{(a+b+c)^3}{4}-240=-\frac{t^3}{4}+48t-240\le 16$$

Như vậy $S_{\max}=16$ khi $t=2$ với $t=a+b+c \Rightarrow m+2n=16+2.1=18$

Câu 26. Cho bốn số thực dương a,b,c,d lớn hơn 1 thay đổi thoả mãn $a+b+c+d=2021$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(\log_a x).(\log_b x)-(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d).\log_b x-\log_b a^{2020}=0$. Tìm giá trị biểu thức $S=a+2b+3c+5d$ khi $x_1.x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{8084}{11}$. **B.** $S=\frac{22231}{4}$. **C.** $S=\frac{78819}{4}$. **D.** $S=\frac{78819}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(\log_a x).(\log_b x)-(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d).\log_b x-\log_b a^{2020}=0$

$\Leftrightarrow \log_a b.(\log_b x)^2-(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d).\log_b x-\log_b a^{2020}=0$ (1).

Đặt $\log_b x=t$, phương trình (1) có dạng:

$\Leftrightarrow (\log_a b)t^2-(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d)t-(\log_b a^{2020})=0$ (2).

Từ phương trình (2) ta có $\Delta=(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d)^2+4.\log_a b.\log_b a^{2020}$

$=(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d)^2+4.2020>0$.

Suy ra phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt . Từ đó ta có hệ thức Vi-ét như sau:

Đặt $\begin{cases}t_1=\log_b x_1\\t_2=\log_b x_2\end{cases} \Rightarrow t_1+t_2=\log_b(x_1.x_2)=\frac{1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d}{\log_a b}$

$\Leftrightarrow \log_b(x_1.x_2)=\log_b a.(1+2\log_a b+3\log_a c+5\log_a d)=\log_b a+2+3\log_b c+5\log_b d$

$\Leftrightarrow \log_b(x_1.x_2)=\log_b(ab^2c^3d^5) \Leftrightarrow x_1.x_2=ab^2c^3d^5=2^2.3^3.5^5\left(a.\frac{b}{2}.\frac{b}{2}.\frac{c}{3}.\frac{c}{3}.\frac{c}{3}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}\right)$

Ta có $x_1.x_2=2^2.3^3.5^5\left(a.\frac{b}{2}.\frac{b}{2}.\frac{c}{3}.\frac{c}{3}.\frac{c}{3}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}.\frac{d}{5}\right)\le 337500\left(\frac{a+b+c+d}{11}\right)^{11}$ (BĐT Cosi)

$\Leftrightarrow x_1.x_2\le 337500.\left(\frac{2021}{11}\right)^{11}$. Vậy biểu thức x_1x_2 đạt giá trị lớn nhất bằng $337500.\left(\frac{2021}{11}\right)^{11}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}=\dfrac{d}{5} \\ a+b+c+d=2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2021}{11} \\ b=2.\dfrac{2021}{11} \\ c=3.\dfrac{2021}{11} \\ d=5.\dfrac{2021}{11} \end{cases} \Rightarrow a+2b+3c+5d=\dfrac{78819}{11}.$$

Câu 27. Lần lượt cho hai số thực dương a,b,c thỏa mãn phương trình sau đây: $\log_2\left(\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}\right)=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+2b+c}{a+b+c+1}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $(m+3M)$ bằng

A. $\dfrac{16+2\sqrt{6}}{5}$. **B.** $\dfrac{8+\sqrt{6}}{5}$. **C.** $\dfrac{26}{5}$. **D.** $\dfrac{16-2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}>0\Rightarrow a+b+c>0$

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}\right)=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)$

$\Leftrightarrow 1+\log_2\left(\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}\right)=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)+1$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2a+2b+2c}{a^2+b^2+c^2+1}\right)=a^2-2a+b^2-2b+c^2-2c+1$

$\Leftrightarrow \log_2(2a+2b+2c)+(2a+2b+2c)=\log_2\left(a^2+b^2+c^2+1\right)+\left(a^2+b^2+c^2+1\right)$

Xét hàm đặc trưng $y=f(t)=\log_2 t+t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\quad \forall t>0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)\Rightarrow 2a+2b+2c=a^2+b^2+c^2+1>0$

$\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$

Ta có: $P=\dfrac{a+2b+c}{a+b+c+1}\Rightarrow P(a+b+c+1)=a+2b+c$

$\Leftrightarrow (P-1)(a-1)+(P-2)(b-1)+(P-1)(c-1)=4-4P$

Suy ra $(4-4P)^2\le\big((P-1)(a-1)+(P-2)(b-1)+(P-1)(c-1)\big)^2$

$\Rightarrow (4-4P)^2\le\left((P-1)^2+(P-2)^2+(P-1)^2\right)\underbrace{\left((a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right)}_{=2}$

$\Leftrightarrow (4-4P)^2\le 2\left((P-1)^2+(P-2)^2+(P-1)^2\right)\Leftrightarrow 5P^2-8P+2\le 0\Leftrightarrow \dfrac{4-\sqrt{6}}{5}\le P\le\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\max}=M=\dfrac{4+\sqrt{6}}{5} \\ P_{\min}=m=\dfrac{4-\sqrt{6}}{5} \end{cases} \Rightarrow m+3M=\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}+3.\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}=\dfrac{16+2\sqrt{6}}{5}$$

Câu 28. Cho x,y,z là các số thực dương với $x,y,z\in[1;2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2 x.\log_2\frac{2}{y}+\log_2 y.\log_2\frac{2}{z}+\log_2 z.\log_2\frac{2}{x}$

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 3. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

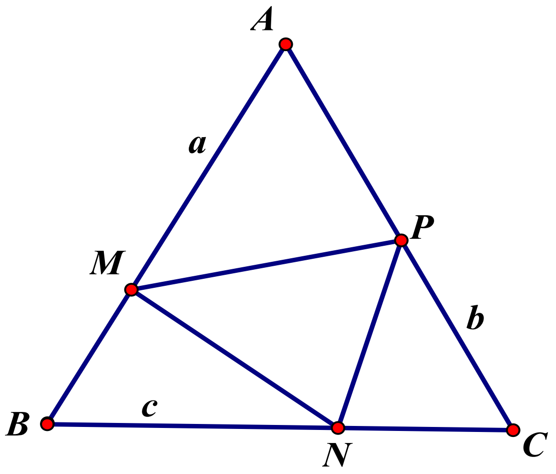
Chọn A

Ta có:

$P=\log_2 x.\log_2\frac{2}{y}+\log_2 y.\log_2\frac{2}{z}+\log_2 z.\log_2\frac{2}{x}$

$=\log_2 x(1-\log_2 y)+\log_2 y(1-\log_2 z)+\log_2 z(1-\log_2 x)$

Đặt: $\begin{cases}a=\log_2 x\\ b=\log_2 y\Rightarrow P=a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\\ c=\log_2 z\end{cases}$



Xét tam giác đều ABC cạnh bằng 1,trên các cạnh AB,BC,CA lần lượt lấy các điểm M,N,P ,với $\begin{cases}a=MA\\ b=PC\\ c=BN\end{cases}$,khi đó ta có bất đẳng thức : $S_{\Delta AMP}+S_{\Delta NCP}+S_{\Delta MBN}\le S_{\Delta ABC}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}a(1-b).\sin 60^0+\frac{1}{2}b(1-c)\sin 60^0+\frac{1}{2}c(1-a)\sin 60^0\le\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$

Vậy $P_{\max}=1$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}a=1\\ b=0\\ 0\le c\le 1\end{cases}$ và các hoán vị của nó.

Câu 29. Cho ba số thực x,y,z thỏa: $2\log_2 z+\log_2 y=\log_2 x.\log_2 y.\log_2 z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\log_2\frac{x}{yz}+4\log_2\frac{y}{xz}+5\log_2\frac{z}{xy}$ có dạng $m\sqrt{n}$. Tính giá trị của biểu thức $2018m+2019n$

A. 14129. **B.** 16147. **C.** 10092. **D.** 16149.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $\begin{cases} a=\log_2 x \\ b=\log_2 y \\ c=\log_2 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P=3\log_2\dfrac{x}{yz}+4\log_2\dfrac{y}{xz}+5\log_2\dfrac{z}{xy}=\dfrac{3}{\log_2\dfrac{yz}{x}}+\dfrac{4}{\log_2\dfrac{xz}{y}}+\dfrac{5}{\log_2\dfrac{xy}{z}} \\ =\dfrac{3}{\log_2 y+\log_2 z-\log_2 x}+\dfrac{4}{\log_2 x+\log_2 z-\log_2 y}+\dfrac{5}{\log_2 x+\log_2 y-\log_2 z} \\ =\dfrac{3}{b+c-a}+\dfrac{4}{a+c-b}+\dfrac{5}{a+b-c} \end{cases}$

$2\log_2 z+\log_2 y=\log_2 x.\log_2 y.\log_2 z \Leftrightarrow 2c+b=abc \Leftrightarrow 4c+2b=2abc$

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\geq\dfrac{4}{m+n}$ Dấu "=" xảy ra khi $m=n$.

Ta có: $P=\dfrac{3}{b+c-a}+\dfrac{4}{a+c-b}+\dfrac{5}{a+b-c}$

$P=\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a+c-b}+2\left(\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{a+b-c}\right)+3\left(\dfrac{1}{a+c-b}+\dfrac{1}{a+b-c}\right)$

$\geq\dfrac{4}{2c}+2.\dfrac{4}{2b}+3.\dfrac{4}{2a}=\dfrac{2}{c}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{6}{a}=\dfrac{2b+4c}{bc}+\dfrac{6}{a}=\dfrac{2abc}{bc}+\dfrac{6}{a}=2a+\dfrac{6}{a}\geq2\sqrt{2a.\dfrac{6}{a}}=4\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases} a=b=c \\ 2a=\dfrac{6}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$

Suy ra: $m=4;n=3\Rightarrow 2018m+2019n=14129$

Câu 30. Cho hai các số thực a, b, c, d, e dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=1000$ và

$$\begin{cases} a-b+c-d+e>0 \\ a+b-c+d-e>0 \\ -a+b+c-d+e>0 \\ a-b+c+d-e>0 \\ -a+b-c+d+e>0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=(a+c)^{b+d}$

A. 499^{499}. **B.** 500^{500}. **C.** 500^{499}. **D.** 499^{500}.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} a-b+c-d+e=h \\ a+b-c+d-e=k \\ -a+b+c-d+e=l \\ a-b+c+d-e=m \\ -a+b-c+d+e=n \end{cases}$ ta thấy rằng $h+k+n+m+l=a+b+c+d+e=1000$ và đồng thời

$2a=h+k, 2b=k+l, 2c=l+m, 2d=m+n, 2e=n+h$. Từ đó suy ra h,k,l,m,n đều là các số chẵn.

Bên cạnh đó ta suy ra được $a+c=\dfrac{1}{2}(h+k+l+m)=\dfrac{1}{2}(1000-n), b+d=\dfrac{1}{2}(1000-h)$.

Để $M=(a+c)^{b+d}$ đạt giá trị lớn nhất thì n và h có giá trị nhỏ nhất, mà n,h chia hết cho 2 nên $h=n=2\Rightarrow \max M=499^{499}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} k=9974-2t \\ l=2,4,...,2t \\ l+m=2+2t \\ k+l+m=996 \end{cases}\left(t=\overline{1,496}\right)$.

________________ TOANMATH.com ________________