BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP

- Đưa về cùng cơ số.

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

- Đặt ẩn phụ.

- Sử dụng tính đơn điệu:

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên D thì $f(u)<f(v) \Rightarrow u<v\left(\forall u,v\in D\right)$.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên D thì $f(u)<f(v) \Rightarrow u>v\left(\forall u,v\in D\right)$.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-2021;2021\right)$ để bất phương trình $27^x-m.3^{1-x}\le m.3^x-27^{1-x}$ có nghiệm?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn A

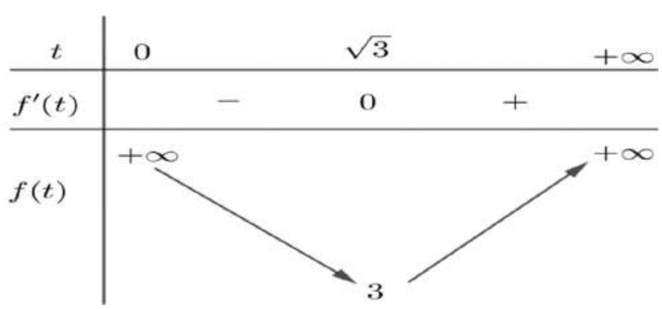
Đặt $3^x=t$ điều kiện $t>0$.

Bất phương trình trở thành:

$t^3+\dfrac{27}{t^3}\le m\left(\dfrac{3}{t}+t\right)$ $(*)$. Do $t>0$ nên $\dfrac{3}{t}+t>0$ suy ra $(*)\Leftrightarrow t^2-3+\dfrac{9}{t^2}\le m$.

Xét $f(t)=t^2-3+\dfrac{9}{t^2}$ $(t>0)$. Với $t>0$ ta có $f'(t)=2t-\dfrac{18}{t^3}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}$.

Ta có bảng biến thiên



Để $(*)$ có nghiệm thì $m\ge \min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=3$. Vậy có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\sqrt{2^x+3}+\sqrt{5-2^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\infty;\log_2 5\right)$.

A. $m\ge 4$. **B.** $m\ge 2\sqrt{2}$. **C.** $m<4$. **D.** $m<2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2^x=t$. Vì $x<\log_2 5\Rightarrow 0<2^x<2^{\log_2 5}\Rightarrow 0<t<5$.

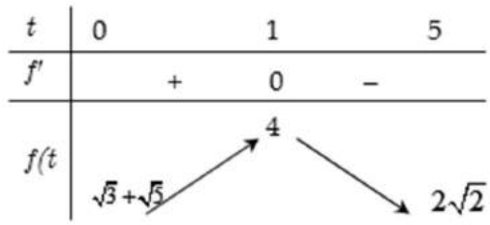
Yêu cầu bài toán trở thành $\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}\le m$, $\forall t\in(0;5)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$ với $0<t<5$.

Có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{t+3}}-\frac{1}{2\sqrt{5-t}}=0\Leftrightarrow \begin{cases}-3<t<5\\ \sqrt{t+3}=\sqrt{5-t}\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m\ge 4$.

Câu 3. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-30;30]$ để bất phương trình $m(3-\sqrt{5})^x+(3+\sqrt{5})^x\ge(m-1).2^x$ đúng với $\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$?

A. 36. **B.** 34. **C.** 35. **D.** 37.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $m(3-\sqrt{5})^x+(3+\sqrt{5})^x\ge(m-1).2^x\Leftrightarrow m\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x\ge m-1$

Đặt $t=\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x$, do $x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ suy ra $t\in\left[\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}};+\infty\right)=\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};+\infty\right)$

Khi đó $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}$. Suy ra bất phương trình:

$$\frac{m}{t}+t\ge m-1\Leftrightarrow t^2+t\ge m(t-1)\Leftrightarrow m\le\frac{t^2+t}{t-1}=f(t)\text{ đúng với }\forall t\in\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2};+\infty\right)$$

Khảo sát nhanh hàm số: $f(t)=\dfrac{t^2+t}{t-1}$ với $\forall t\in\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};+\infty\right)$.

Suy ra được giá trị nhỏ nhất: $\min f(t)=f(1+\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}\Rightarrow m\le\min f(t)=3+2\sqrt{2}\approx 5,8$.

Suy ra: $-30\le m\le 5$ Suy ra có tất cả 36 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 4. Gọi S là tập chứa tất cả những giá trị nguyên $m\in[-20;20]$ để bất phương trình đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$: $3^{\sin^2x}+(2m-1)3^{1+\cos^2x}\ge 4$. Số phần tử của tập S là

A. 18. **B.** 20. **C.** 21. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $t=3^{\sin^2 x}$, do $x\in\mathbb{R}$ suy ra $t=3^{\sin^2 x}\in\left[3^0;3^1\right]=[1;3]$

Khi đó : $3^{1+\cos^2 x}=3^{2-\sin^2 x}=\dfrac{9}{3^{\sin^2 x}}=\dfrac{9}{t}$

Bất phương trình trở thành: $t+(2m-1)\cdot\dfrac{9}{t}\ge 4\Leftrightarrow 9(2m-1)\ge 4t-t^2\quad \forall t\in[1;3]$

Do đó: $9(2m-1)\ge \max\limits_{t\in[1;3]}(f(t))=\max\limits_{t\in[1;3]}\left(4t-t^2\right)=f(2)=4$

Suy ra: $9(2m-1)\ge 4\Leftrightarrow m\ge\dfrac{13}{18}\Rightarrow 1\le m\le 20$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5. Tìm tất cả các tham số m để bất phương trình $2^{\sqrt{4x^2-4x-8m}}+4x^2+2>2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}}+2x\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m<-\dfrac{1}{8}$. **B.** $m\le-\dfrac{1}{8}$. **C.** $m<\dfrac{3}{8}$. **D.** $m\le\dfrac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $2^{\sqrt{4x^2-4x-8m}}+4x^2+2>2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}}+2x\right)\Leftrightarrow 4^{\sqrt{x^2-x-2m}}+4x^2+2>2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}}+2x\right)$

Để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi x, trước hết bất phương trình phải xác định trên $\mathbb{R}$ .Suy ra $x^2-x-2m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le g(x)=\dfrac{x^2-x}{2},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le\min\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}$

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với

$$4^{\sqrt{x^2-x-2m}}+4x^2+2>2\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}}+2x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(2^{\sqrt{x^2-x-2m}}-1\right)^2+(2x-1)^2>0,\quad\forall x\in\mathbb{R}\ (*)$$

Ta có $\left(2^{\sqrt{x^2+x-m}}-1\right)^2+(2x-1)^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ và dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases}2^{\sqrt{x^2-x-2m}}-1=0\\2x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\m=-\dfrac{1}{8}.\end{cases}.$$

Vậy để $(*)$ luôn đúng suy ra $m\ne-\dfrac{1}{8}$. Kết hợp với điều kiện ban đầu vậy $m<-\dfrac{1}{8}$.

Câu 6. Tìm m để bất phương trình $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\ln 120$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 30$. **D.** $\ln 14$.

Lời giải

Chọn A

+ Với $a>1$ ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\right).\ln a=\ln a$.

+ Với $a>1$ xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{a^x-1}{x}\left(x\ne 0\right)$, ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{xa^x\ln a-a^x+1}{x^2}$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=xa^x\ln a-a^x+1\Rightarrow g'\left(x\right)=a^x\ln a+xa^x\ln^2 a-a^x\ln a=xa^x\ln^2 a$.

Với $x>0$ ta có $g'\left(x\right)>0$ suy ra $g\left(x\right)>g\left(0\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)>0\Rightarrow f'\left(x\right)>0,\forall x>0$.

Với $x<0$ ta có $g'\left(x\right)<0$ suy ra $g\left(x\right)>g\left(0\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)>0\Rightarrow f'\left(x\right)>0,\forall x>0$.

Do đó hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{a^x-1}{x}\left(a>1\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(0;+\infty\right)$.

Trở lại bài toán:

+ Xét $x=0$ bất phương trình thỏa mãn.

+ Xét $x>0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx\Leftrightarrow m\le\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h\left(x\right)$.

Từ nhận xét trên ta có $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\le\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

+ Xét $x<0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx\Leftrightarrow m\ge\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h\left(x\right)$.

Từ nhận xét trên ta có $h\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(-\infty;0\right)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\ge\lim\limits_{x\to 0^+}h\left(x\right)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

Kết hợp lại ta có $m=\ln 120$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+\left(2-m\right)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-\left(m+1\right)2^x\ge 0$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+\left(2-m\right)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-\left(m+1\right)2^x\ge 0\Leftrightarrow 2^x\left(3+\sqrt{7}\right)^x+\left(2-m\right)\left(3-\sqrt{7}\right)^x>\left(m+1\right)2^x$

$\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{7}\right)^x+\left(2-m\right)\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^x>m+1$

Đặt $t=\left(3+\sqrt{7}\right)^x$, $t>0$ $\Rightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$t+\left(2-m\right).\dfrac{1}{t}>m+1\ \Leftrightarrow\dfrac{t^2-t+2}{t+1}>m$.

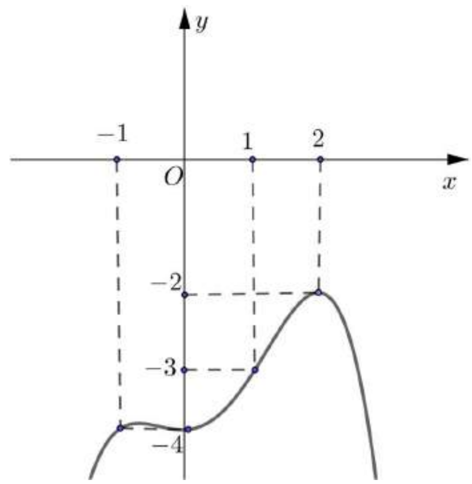
Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-t+2}{t+1}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, ta có $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t-3}{\left(t+1\right)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=0 \end{array}\right.$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:

x	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m<1$. Suy ra trong đoạn $[-10;10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8.) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$$9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$$

A. 10. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\le\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$

$\Leftrightarrow \left(4-f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}+9;\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}\le -m^2+5m \quad (1)$

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x)\le -2, \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $\left(4-f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=4, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\left(4-f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)}+9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}\le 4,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Để (1) có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $4\le -m^2+5m \Leftrightarrow 1\le m\le 4$.

Do m là số nguyên nên $m\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Câu 9. Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$. Tập tất cả các giá trị của m là

A. $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

Lời giải

Chọn B

$4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0,\ \forall x\ge 0 \Leftrightarrow (2^x)^2-2(m+1)2^x+m\ge 0, \forall x\ge 0$ (1).

Đặt $t=2^x$, $(t\ge 1)$. (1) trở thành $t^2-2(m+1)t+m\ge 0,\ \forall t\ge 1$ (2).

Cách 1:

$(2)\Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2t}{2t-1},\ \forall t\ge 1$ (3).

Xét hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2t}{2t-1}$. Ta có hàm số $y=f(t)$ liên tục trên $[1;+\infty)$.

$$f'(t)=\frac{(2t-2)(2t-1)-2(t^2-2t)}{(2t-1)^2}=\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0, \forall t\ge 1.$$

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $f(t)\ge m\quad \forall t\in[1;+\infty) \Leftrightarrow m\le -1$.

Cách 2:

$t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ là một bất phương trình bậc hai.

Tam thức bậc hai ở vế trái luôn có $\Delta'=m^2+m+1>0,\ \forall m$ nên tam thức luôn có hai nghiệm là $t=m+1-\sqrt{m^2+m+1}$ và $t=m+1+\sqrt{m^2+m+1}$.

Suy ra bất phương trình $t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ có tập nghiệm là

$\left(-\infty;m+1-\sqrt{m^2+m+1}\right]\cup\left[m+1+\sqrt{m^2+m+1};+\infty\right)$.

$(2)\Leftrightarrow m+1+\sqrt{m^2+m+1}\le 1\Leftrightarrow \sqrt{m^2+m+1}\le -m\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0\\ m^2+m+1\le m^2\end{cases}\Leftrightarrow m\le -1$.

Câu 10. Có bao nhiêu m nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

A. 28. **B.** 29. **C.** 30. **D.** 31.

Lời giải

Chọn B

$3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0\Leftrightarrow 9.3^{2x}-9.3^x.3^m-3^x+3^m<0$

$\Leftrightarrow 9.3^x\left(3^x-3^m\right)-\left(3^x-3^m\right)<0\Leftrightarrow\left(3^x-3^m\right)\left(9.3^x-1\right)<0$

Ta có $3^x-3^m=0\Leftrightarrow x=m$. Cho $9.3^x-1=0\Leftrightarrow x=-2$.

Vì m nguyên dương nên ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		m		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có tập nghiệm $S=(-2\ ;\ m)$. Suy ra tập hợp các nghiệm nguyên là $\{-1;\ 0;\ 1;\ ...;\ m-1\}$.

Để có không quá 30 nghiệm nguyên thì $m-1\le 28 \Leftrightarrow m\le 29$.

Câu 11. Tất cả giá trị của tham số thực m sao cho bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ có nghiệm đúng với mọi số thực x là

A. $m\le -\frac{3}{2}$. **B.** $m\ne 2$. **C.** $m<-\frac{3}{2}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0 \Leftrightarrow (3^x)^2-2.3^x-3>(3^x+1).2m$

$\Leftrightarrow (3^x+1)(3^x-3)>(3^x+1).2m \Leftrightarrow 3^x-3>2m \Leftrightarrow 3^x>3+2m$

Vậy, để $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0, \forall x\in\mathbb{R}$ khi $3+2m\le 0 \Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$.

Câu 12. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của tham số m để bất phương trình $4^x-2022m.2^{x-1}+3-1011m\le 0$ có nghiệm.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn A

$4^x-2022m.2^{x-1}+3-1011\le 0$ (1). Đặt $t=2^x, t>0$.

Khi đó bất phương trình (1) trở thành $t^2-1011mt+3-1011m\le 0 \Leftrightarrow 1011m\ge \frac{t^2+3}{t+1}(*)$

(Vì $t>0$).

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2+3}{t+1}(t>0)$, $f'(t)=\frac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ có nghiệm $t>0$ $\Leftrightarrow 1011m\ge 2 \Leftrightarrow m\ge \frac{2}{1011}$.

Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của m thoả mãn yêu cầu bài toán là $m=1$.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2021;2022)$ để bất phương trình $9^x-(m+2)3^x-3-m>0$ nghiệm đúng với mọi số thực x?

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn C

$9^x-(m+2)3^x-3-m>0$ (1). Đặt $t=3^x, t>0$.

Khi đó bất phương trình (1) có dạng $t^2-(m+2)t-3-m>0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3-m)>0$

$\Leftrightarrow t-3-m>0$ (vì $t>0$) $\Leftrightarrow t>3+m$ (2).

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi phương trình (2) đúng với mọi $t>0 \Leftrightarrow 3+m\le 0 \Leftrightarrow m\le -3$.

Mà m nguyên thuộc khoảng $(-2021;2022)$ nên $m\in\{-2020;-2019;...;-3\}$.

Vậy có 2018 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $12^x+2(1-m)6^x+3^x>0$ nghiệm đúng với mọi $x>0$?

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$12^x+2(1-m)6^x+3^x>0 \Leftrightarrow 4^x+2(1-m)2^x+1>0\,(1)$

Đặt $t=2^x$, với $x>0\Rightarrow t>1$.

Khi đó bất phương trình (1) trở thành $t^2+2(1-m)t+1>0 \Leftrightarrow 2mt<t^2+2t+1$

$\Leftrightarrow m<\dfrac{t^2+2t+1}{2t}$ (vì $t>1$).

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{2t}$ với $t>1$, $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{2t^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x>0$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t>1\Leftrightarrow m\le 2$.

Mà m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Tổng các số nguyên m, $m\in[-10;10]$ để bất phương trình $m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\le 0$ có nghiệm đúng với mọi $x\in(0;1)$.

A. -34. **B.** 34. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A

Ta có $m.9^x-(2m+1).6^x+m.4^x\le 0 \Leftrightarrow m.\left(\dfrac{9}{4}\right)^x-(2m+1).\left(\dfrac{3}{2}\right)^x+m\le 0$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, $x\in(0;1)\Rightarrow t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành $m.t^2-(2m+1)t+m\le 0$

$\Leftrightarrow \left(t^2-2t+1\right)m-t\le 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{t}{(t-1)^2}$

Đặt $f(t)=\dfrac{t}{(t-1)^2}$, $t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ ta có $f'(t)=\dfrac{-t^2+1}{(t-1)^3}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Ta có bảng biến thiên

t	-1		1		$\frac{3}{2}$
$f'(t)$			‖	$-$	
$f(t)$			‖ $+\infty$	$\searrow$	6

Từ bảng biến thiên, ta có bất phương trình có nghiệm $t\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\Leftrightarrow m\le 6$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-10;10]\Rightarrow m\in\{-10;-9;...;5;6\}$.

Vậy tổng các giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán là -34.

Câu 16. Số các giá trị nguyên m, $m\in[-2021;2022]$ để bất phương trình $(3m+1)12^x-(3+m)6^x+3^x>0$ có nghiệm đúng $\forall x>0$ là

A. 2020. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 4042.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(3m+1)12^x-(3+m)6^x+3^x>0\Leftrightarrow(3m+1)4^x-(3+m)2^x+1>0$

Đặt $2^x=t$. Do $x>0\Rightarrow t>1$.

Khi đó, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (3m+1)t^2-(3+m)t+1>0$, $t>1$

$\Leftrightarrow\left(3t^2-t\right)m>-t^2+3t-1\Leftrightarrow m>\dfrac{-t^2+3t-1}{3t^2-t}$, do $3t^2-t>0,\forall t>1$.

Đặt $f(t)=\dfrac{-t^2+3t-1}{3t^2-t}$, ta có $f'(t)=\dfrac{-8t^2+6t-1}{\left(3t^2-t\right)^2}<0$, $\forall t>1$

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$

Do đó $m\ge\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-2021;2022]\Rightarrow m\in\{1;2;...;2022\}$ Từ đó suy ra có 2022 giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17. Cho bất phương trình $-m.3^{x+1}+\left(4m-\frac{5}{3}\right).\left(4-\sqrt{7}\right)^{x}+\left(4+\sqrt{7}\right)^{x}>0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\left(-\infty;0\right]$.

A. $m\geq\frac{2}{3}$. **B.** $m>\frac{2}{3}$. **C.** $m\leq\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}<m\leq\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-m.3^{x+1}+\left(4m-\frac{5}{3}\right).\left(4-\sqrt{7}\right)^{x}+\left(4+\sqrt{7}\right)^{x}>0$

$\Leftrightarrow -3m.3^{x}+\left(4m-\frac{5}{3}\right).\left(4-\sqrt{7}\right)^{x}+\left(4+\sqrt{7}\right)^{x}>0$

$\Leftrightarrow -3m+\left(4m-\frac{5}{3}\right).\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^{x}+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{x}>0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{x}+\left(4m-\frac{5}{3}\right).\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^{x}-3m>0$

Đặt $t=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{x}$, do $x\in\left(-\infty;0\right]\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t+\left(4m-\frac{5}{3}\right).\frac{1}{t}-3m>0$

$\Leftrightarrow t^{2}-3mt+4m-\frac{5}{3}>0\Leftrightarrow\left(4-3t\right)m+t^{2}-\frac{5}{3}>0\Leftrightarrow m>\frac{t^{2}-\frac{5}{3}}{3t-4}$.

Đặt $f\left(t\right)=\frac{t^{2}-\frac{5}{3}}{3t-4}$, $t\in\left(0;1\right]$, ta có $f'\left(t\right)=\frac{3t^{2}-8t+5}{\left(3t-4\right)^{2}}>0,\forall t\in\left(0;1\right]$

Bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	$\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

Vậy $m\geq\frac{2}{3}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Biết rằng $f(-2)=1$, $f(3)=1$. Tính tổng các giá trị $m\in(-2021;2021)$ để bất phương trình $e^{f^3(x)+3f^2(x)-9f(x)+m}\ge m$ có nghiệm trên khoảng $(-2;3)$.

A. 0. **B.** 10. **C.** 2020. **D.** 2041210.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f^3(x)+3f^2(x)-9f(x)$, khi đó bài toán trở thành tìm m để bất phương trình $e^{g(x)+m}\ge m$ có nghiệm trong khoảng $(-2;3)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)\left[3f^2(x)+6f(x)-9\right]$.

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f(x)=1\\f(x)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=2\\x=3\\x=-2\end{array}\right.$ và ta dễ dàng kiểm tra được các nghiệm này đều là nghiệm bội lẻ nên các điểm $x=\{-2;-1;0;2;3\}$ đều là cực trị của hàm số $g(x)$.

Ta có: $e^{g(x)+m}\ge m\Leftrightarrow e^{g(x)}\ge\dfrac{m}{e^m}$. Khi đó để có nghiệm trong khoảng $(-2;3)$ thì

$\dfrac{m}{e^m}\le\max\limits_{(-2;3)}e^{g(x)}=e^{27}$.

Xét hàm số $y=\dfrac{m}{e^m}\Rightarrow y'=\dfrac{e^m(1-m)}{e^{2m}}=0\Leftrightarrow m=1$. Ta có BBT của hàm số $y=\dfrac{m}{e^m}$ như sau:

m	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

Ta thấy, $\max\limits_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{m}{e^m}\right)=\dfrac{1}{e}<e^{27}=\max\limits_{(-2;3)}\left(e^{g(x)}\right)\Rightarrow$ Bất phương trình $e^{g(x)+m}\ge m$ có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. Mà $m\in(-2021;2021)$ nên suy ra $\sum\limits_{-2020}^{2020}m=0$

Câu 19. Cho hai hàm số $g(x)=-3x^2+(m^2-6)x+m^2-14$ và $f(x)=e^{(x-1)^2}$. Có bao nhiêu giá trị m dương để $f(x)\le g(x)$ có nghiệm duy nhất?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow e^{(x-1)^2}+3x^2+6x+14\le m^2(x+1)\Leftrightarrow e^{(x-1)^2}+3(x+1)^2+11\le m^2(x+1)$

Vì $e^{(x-1)^2}+3(x+1)^2+11>0\forall x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow VP=m^2(x+1)>0\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\x>-1\end{cases}$.

Khi đó, bài toán trở thành tìm $m\ne 0$ để $\dfrac{e^{(x-1)^2}+3x^2+6x+14}{(x+1)}\le m^2$ có nghiệm duy nhất trên khoảng $(-1;+\infty)$. Điều này xảy ra khi $m^2=\min\limits_{(-1;+\infty)}(h(x))$ và nếu tồn tại GTNN.

Với $h(x)=\dfrac{e^{(x-1)^2}+3x^2+6x+14}{x+1}\Rightarrow h'(x)=\dfrac{e^{(x-1)^2}(2x^2-3)+3x^2+6x-8}{(x+1)^2}$.

Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow e^{(x-1)^2}(2x^2-3)+3x^2+6x-8=0$ và ta chỉ lấy nghiệm $x>-1$.

Sử dụng máy tính CASIO $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=a<-1\end{array}\right.$. Ta lập được bảng biến thiên của $h(x)$ như sau:

x	-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$h(1)=12$	↗	

$\Rightarrow\min\limits_{(-1;+\infty)}(h(x))=12\Rightarrow m^2=12\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{12}$ thì thỏa mãn bài toán.

Mà $m\in\mathbb{R}^+\Rightarrow m=\sqrt{12}$ là giá trị duy nhất.

Câu 20. Với m là tham số để bất phương trình $2^x+3^x\ge mx+2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, khi đó

A. $m\in(-\infty;0)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;+\infty)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn B

+) Với $m\le 0$, bất phương trình không nhận các giá trị âm của x làm nghiệm.

Thật vậy, khi đó $2^x+3^x<2$ mà $mx+2\ge 2$. Suy ra $m\le 0$ loại .

+) Với $m>0$, ta có $2^x+3^x\ge mx+2\Leftrightarrow 2^x+3^x-mx-2\ge 0$.

Đặt $f(x)=2^x+3^x-mx-2$, $x\in\mathbb{R}$. Khi đó $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3-m$.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow 2^x\ln 2+3^x\ln 3-m=0\Leftrightarrow 2^x\ln 2+3^x\ln 3=m$ (1)

Đặt $g(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3\Rightarrow g'(x)=2^x\ln^2 2+3^x\ln^2 3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

Suy ra với mỗi giá trị $m>0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất là x_0.

Ta có phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là x_0.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-m<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ nên $f'(x)<0,\forall x<x_0$ và $f'(x)>0,\forall x>x_0$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(x_0)$.

Kết hợp điều kiện đề bài là $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(x_0)\ge 0$ mà $f(0)=0$.

Suy ra $x_0=0$ và $x_0=0$ là giá trị duy nhất để $f(x)=0$.

Suy ra $x_0=0$ là giá trị duy nhất để $f'(x)=0$. Suy ra $f'(0)=\ln 2+\ln 3-m=0$.

Vậy $m=\ln 2+\ln 3=\ln 6$.

Câu 21. Tập các giá trị của tham số m để bất phương trình $9^x-m.6^x+m.4^x\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ là đoạn $[a;b]$. Khi đó $b-a$ có giá trị bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-m.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+m\ge 0$ (1). Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$, $t>0$.

Bất phương trình (1) trở thành $t^2-mt+m\ge 0\Leftrightarrow m(t-1)\le t^2$ (2)

Bất phương trình (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi bất phương trình (2) đúng với mọi $t>0$

Với $t=1$, bất phương trình (2) luôn đúng $\forall m\in R$ (*).

Với $t\ne 1$, bất phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m\le \dfrac{t^2}{t-1} & (t>1) \\ m\ge \dfrac{t^2}{t-1} & (0<t<1)\end{array}\right.$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$ với $t\in(0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Khi đó $f'(t)=\dfrac{t^2-2t}{(t-1)^2}$. Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0\,(l) \\ t=2\,(n)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Với $0<t<1$, bất phương trình (2) tương đương $m\ge f(t)$.

Dựa vào bảng biến thiên, bất phương trình (2) đúng với mọi $0<t<1$ khi $m\ge 0$ (**).

Với $t>1$, bất phương trình (2) tương đương $m\le f(t)$.

Dựa vào bảng biến thiên, bất phương trình (2) đúng với mọi $t>1$ khi $m\le 4$ (***).

Kết hợp (*) (**) (***), bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $0\le m\le 4$.

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$(m^2-6).2^{\sqrt{4x^2+9}-2x}-2^{\frac{18}{\sqrt{4x^2+9}+2x}}<25$ có nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$?

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{4x^2+9}-2x \Rightarrow t'=\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+9}}-2<0, \forall x\in(0;2)$.

x	0		2
t'		$-$	
t	3	$\searrow$	1

Vì $x\in(0;2)\Rightarrow t\in(1;3)$

Ta có: $\left(\sqrt{4x^2+9}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+9}+2x\right)=9 \Rightarrow \dfrac{1}{\left(\sqrt{4x^2+9}+2x\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+9}-2x\right)}{9}$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow (m^2-6)2^t-2^{2t}<25$ có nghiệm đúng $\forall t\in(1;3)$

$\Leftrightarrow m^2-6<\dfrac{2^{2t}+25}{2^t}$ có nghiệm đúng $\forall t\in(1;3)$ $(*)$

Xét hàm số $g(X)=\dfrac{X^2+25}{X}, \forall X\in(2;8)$ và $X=2^t$,vì $t\in(1;3)\Rightarrow X\in(2;8)$

$g'(X)=1-\dfrac{25}{X^2}, \forall X\in(2;8)$. Cho $g'(X)=0\Rightarrow X=5\in(2;8)$

X	2		5		8
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{29}{2}$	$\searrow$	10	$\nearrow$	$\frac{89}{8}$

Từ BBT và kết hợp với $(*)$, ta suy ra: $m^2-6<10 \Leftrightarrow -4<m<4$ và $m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow m=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=2^{|x-1|}-2^{|x+1|}$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f\left(x-\sqrt[3]{m+3x}\right)-3\le 0$ có nghiệm $x\in(0;2]$.

A. $m\ge 1$. **B.** $m\le 21$. **C.** $m<21$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)=2^{|x-1|}-2^{|x+1|}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f(-x)=2^{|-x-1|}-2^{|-x+1|}=-\left(2^{|x-1|}-2^{|x+1|}\right)=-f(x)$ và $f(1)=-3$

$f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{|x-1|}2^{|x-1|}-\dfrac{x+1}{|x+1|}2^{|x+1|}\right)\ln 2<0, \forall x\ne \pm 1.$

Mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra, hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

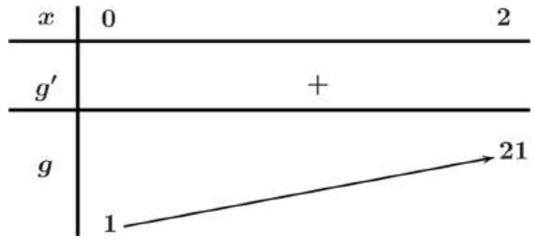
Bpt $f\left(x-\sqrt[3]{m+3x}\right)+3\le 0 \Leftrightarrow f\left(x-\sqrt[3]{m+3x}\right)\le -f(1)=f(-1)$ có nghiệm $x\in(0;2]$

$\Leftrightarrow x-\sqrt[3]{m+3x}\ge -1$ có nghiệm $x\in(0;2]$.

$\Leftrightarrow (x+1)^3 \geq m+3x$ có nghiệm $x \in (0;2]$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+1 \geq m$ có nghiệm $x \in (0;2]$.

Xét hàm số $g(x)=x^3+3x^2+1, \forall x \in (0;2]$ có $g'(x)=3x^2+6x>0, \forall x \in (0;2]$



Từ BBT ta suy ra $m \leq 21$.

Câu 24. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022;2022]$ để bất phương trình $2e^{x^2-mx+4} \leq 2x^2-4mx+10+\left(x^2-2mx+4\right)^2$ có nghiệm ?

A. 4040. **B.** 4041. **C.** 4042. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

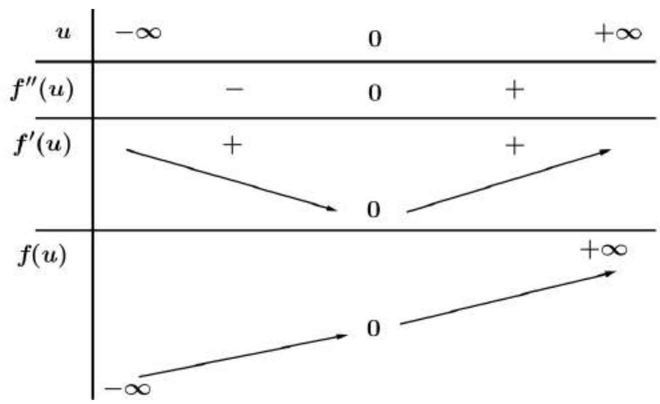
Ta có: $2e^{x^2-mx+4} \leq 2x^2-4mx+10+\left(x^2-2mx+4\right)^2$

$\Leftrightarrow e^{x^2-mx+4} \leq 1+\left(x^2-2mx+4\right)+\dfrac{\left(x^2-2mx+4\right)^2}{2}$. Đặt $u=x^2-2mx+4$ suy ra bpt trở thành:

$\Leftrightarrow e^u \leq 1+u+\dfrac{u^2}{2} \Leftrightarrow e^u-\left(1+u+\dfrac{u^2}{2}\right) \leq 0$

Đến đây ta xét hàm số $y=f(u)=e^u-\left(1+u+\dfrac{u^2}{2}\right)$ có

$f'(u)=e^u-u-1$; $f''(u)=e^u-1=0 \Leftrightarrow u=0$. Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Suy ra bất phương trình $f(u)=e^u-\left(1+u+\dfrac{u^2}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 0 \Rightarrow x^2-2mx+4 \leq 0$ (2)

Như vậy để bất phương trình (2) luôn có nghiệm thì

$\Delta'=m^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right. \xrightarrow{m \in Z;\, m \in [-2022;2022]} \left[\begin{array}{l} -2022 \leq m \leq -2 \\ 2 \leq m \leq 2022 \end{array}\right.$. Như vậy có tất cả 4042 giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 25. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-30;30]$ để bất phương trình $x\left(e^{x+1}-1\right)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+m\ge 0$ nghiệm đúng với $\forall x\in(-2;3)$

A. 61. **B.** 29. **C.** 31. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=x\left(e^{x+1}-1\right)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$.

Ta có: $x\left(e^{x+1}-1\right)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+m\ge 0,\forall x\in(-2;3)$

$\Leftrightarrow x\left(e^{x+1}-1\right)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\ge -m,\forall x\in(-2;3)\Leftrightarrow \min\limits_{x\in(-2;3)} g(x)\ge -m$

Xét hàm số $g(x)=x\left(e^{x+1}-1\right)+\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$

Ta có: $g'(x)=e^{x+1}-1+xe^{x+1}+x^4+2x^3+x^2-x=e^{x+1}(x+1)+x^2(x+1)^2-(x+1)$

Ta đi chứng minh $e^{x+1}(x+1)-(x+1)>0,\forall x\in(-2;3)$. Đặt $t=x+1,t\in(-1;4)$

Xét hàm số $f(t)=te^t-t,t\in(-1;4)$

$f'(t)=e^t+te^t-1$; $f''(t)=2e^t+te^t=e^t(t+2)>0,\forall t\in(-1;4)$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(-1;4)$, do đó phương trình $f'(t)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên $(1;4)$. Mà $f'(0)=0$ nên $t=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f'(t)=0$

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	-1		0		4
$f'(t)$			$-$	0	$+$	
$f(t)$		$+\infty$		0		$+\infty$

Từ đó ta được $f(t)\ge 0,t\in(-1;4)$ hay $e^{x+1}(x+1)-(x+1)>0,\forall x\in(-2;3)$

Do đó $g'(x)\ge 0,\forall x\in(-2;3)$

Ta được $\min\limits_{x\in(-2;3)} g(x)=g(-2)\approx -1,8$

Vậy có 29 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $\left(2^x-3\right)\left(2^{x+1}-m\right)<0$ có nghiệm nguyên và chứa không quá 6 nghiệm nguyên x ?

A. 506. **B.** 507. **C.** 505. **D.** 512.

Lời giải

Chọn B

Ta có bất phương trình đã cho tương đương: $\left(2^x-3\right)\left(2^x-\frac{m}{2}\right)<0$ (*)

Trường hợp 1: Nếu $\frac{m}{2}=3 \Rightarrow$ Bất phương trình (*) trở thành $\left(2^x-3\right)^2<0$ vô nghiệm

Trường hợp 2: Nếu $\frac{m}{2}>3 \Rightarrow$ Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow 3<2^x<\frac{m}{2} \Leftrightarrow \log_2 3<x<\log_2\left(\frac{m}{2}\right)$

Nếu ta chỉ xét các nghiệm nguyên thì $\Leftrightarrow 2 \le x<\log_2\left(\frac{m}{2}\right)$. Để có không quá 6 nghiệm nguyên

x thì $\Leftrightarrow 2<\log_2\left(\frac{m}{2}\right) \le 8 \Leftrightarrow 4<\frac{m}{2} \le 2^8 \Leftrightarrow 9 \le m \le 2^9$

Kết hợp điều kiện ban đầu suy ra: $8<m \le 2^9 \xrightarrow{m\in N^*} 9 \le m \le 512 \Rightarrow$ có 504 giá trị nguyên m

Trường hợp 3: Nếu $\frac{m}{2}<3 \Rightarrow$ Bất phương trình (*) $\Leftrightarrow \frac{m}{2}<2^x<3 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{m}{2}\right)<x<\log_2 3$

Nếu ta chỉ xét các nghiệm nguyên thì $\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{m}{2}\right)<x \le 1$. Để có không quá 6 nghiệm nguyên

x thì $\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{m}{2}\right)<1 \Leftrightarrow \frac{m}{2}<2 \Leftrightarrow m<4 \xrightarrow{m\in N^*} 1 \le m \le 3$

Kết hợp điều kiện ban đầu suy ra: $1 \le m \le 3 \Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên m

Như vậy, tổng cộng có $504+3=507$ giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 27. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $3^{\sin x+3\cos x+m+1}+4^{\sin x+3\cos x+m} \le 6\sin x+18\cos x+6m+7$ có nghiệm ?

A. 7. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 5.

Lời giải

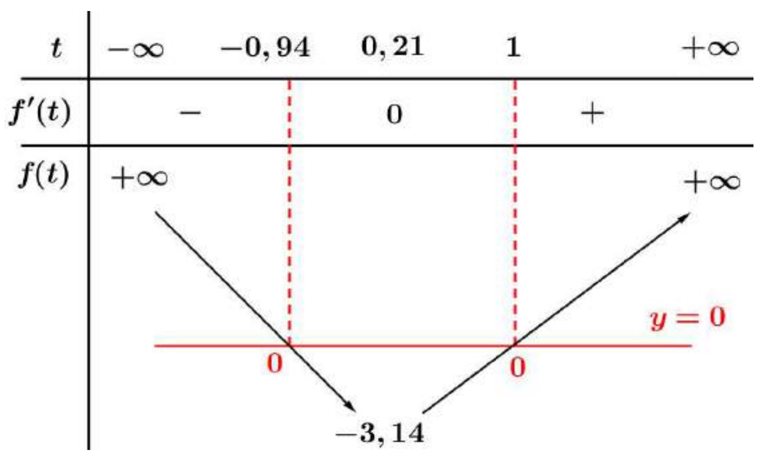
Chọn B

Đặt: $t=\sin x+3\cos x+m$. Như vậy bất phương trình ban đầu trở thành:

$3.3^t+4^t \le 6t+7 \Leftrightarrow 3.3^t+4^t-6t-7 \le 0$

Xét hàm $y=f(t)=3.3^t+4^t-6t-7 \Rightarrow f'(t)=3.3^t\ln 3+4^t\ln 4-6;$

$f''(t)=3.3^t\ln^2 3+4^t\ln^2 4>0$. Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Suy ra bất phương trình $f(t)=3.3^t+4^t-6t-7 \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0,94 \le t \le 1 \\ t=\sin x+3\cos x+m \end{cases}$

$\Leftrightarrow -0,94 \le \sin x + 3\cos x + m \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -\sin x - 3\cos x + 1 \\ m \ge -\sin x - 3\cos x - 0,94 \end{cases}$ (*). Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có nghiệm. Suy ra: $\begin{cases} m \le \max\left(-\sin x - 3\cos x + 1\right) = \max\left(y_1\right) \\ m \ge \min\left(-\sin x - 3\cos x - 0,94\right) = \min\left(y_2\right) \end{cases}$

Ta có: $\left(\sin x + 3\cos x\right)^2 \le \left(1^2 + 3^2\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \le -\sin x - 3\cos x \le \sqrt{10}$

Suy ra: $\begin{cases} \left(-\sin x - 3\cos x + 1\right) \le \sqrt{10} + 1 \\ \left(-\sin x - 3\cos x - 0,94\right) \ge -\sqrt{10} - 0,94 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \le \max\left(y_1\right) = \sqrt{10} + 1 \\ m \ge \min\left(y_2\right) = -\sqrt{10} - 0,94 \end{cases}$

Do $m \in Z$ nên suy ra $-4 \le m \le 4$. Như vậy có tất cả 9 giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 28. Hỏi có tất cả bao nhiêu cặp số thực $\left(x;y\right)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\begin{cases} 2^{x^2+2x-2\log_2 5} = 5^{y-\log_5 2} \\ y^3 - \left|y+2\right| - 2\left|y+3\right| + 10 \le 0 \end{cases}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra: $2^{x^2+2x-2\log_2 5} = 5^{y-\log_5 2} \Leftrightarrow \dfrac{2^{x^2+2x}}{2^{2\log_2 5}} = \dfrac{5^y}{5^{\log_5 2}} \Leftrightarrow \dfrac{2^{x^2+2x}}{5^2} = \dfrac{5^y}{2} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2}$

Nhận thấy: $\begin{cases} 2^{x^2+2x+1} \ge 2^0 = 1 \\ 2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2} \end{cases} \Rightarrow 5^{y+2} \ge 1 \Leftrightarrow y + 2 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge -2$

Từ đ1o ta suy ra giả thiết tiếp theo: $y^3 - \left|y+2\right| - 2\left|y+3\right| + 10 \le 0$

$\Leftrightarrow y^3 - y - 2 - 2y - 6 \le -10 \Leftrightarrow y^3 - 3y + 2 \le 0 \Leftrightarrow \left(y+2\right)\left(y-1\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 1 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: Với $y = -2$, ta có:

$2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2} \Rightarrow 2^{x^2+2x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \left(x+1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Như vậy trường hợp này có 1 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa chính là $\left(-1;-2\right)$

Trường hợp 2: Với $y = 1$, ta có:

$2^{x^2+2x+1} = 5^{y+2} \Rightarrow 2^{x^2+2x+1} = 5^3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 3\log_2 5 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3\log_2 5}$

Như vậy trường hợp này có 2 cặp $\left(x;y\right)$ thỏa chính là $\left(-1 \pm \sqrt{3\log_2 5};1\right)$

Suy ra tổng cộng có tất cả 3 cặp số thực $\left(x;y\right)$ thỏa mãn

Câu 29. Có bao nhiêu số nguyên a, $\left(2 \le a \le 2021\right)$ để có ít nhất 5 số nguyên $5x$ thỏa mãn bất phương trình sau đây:

$$a^{-x} + \frac{1}{2} \le 2^{-x} + \frac{1}{a}$$

A. 1892. **B.** 125. **C.** 127. **D.** 1893.

Lời giải

Chọn D

Nếu $a = 2$, bất phương trình luôn đúng với mọi giá trị của x.

Nếu $a \ge 3$ bất phương trình tương đường với $g\left(x\right) = a^{-x} + \dfrac{1}{2} - 2^{-x} - \dfrac{1}{a} \le 0$ (2)

Ta có $g(1)=0$; $g'(x)=-a^{-x}\ln a+2^{-x}\ln 2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{-x}=\frac{\ln 2}{\ln a} \Leftrightarrow x=x_0=-\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{\ln 2}{\ln a}\right)$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x>x_0$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x<x_0$

Khi $a=3 \Rightarrow x_0>1; a=4 \Rightarrow x_0=1; a\ge 5 \Rightarrow x_0<1$.

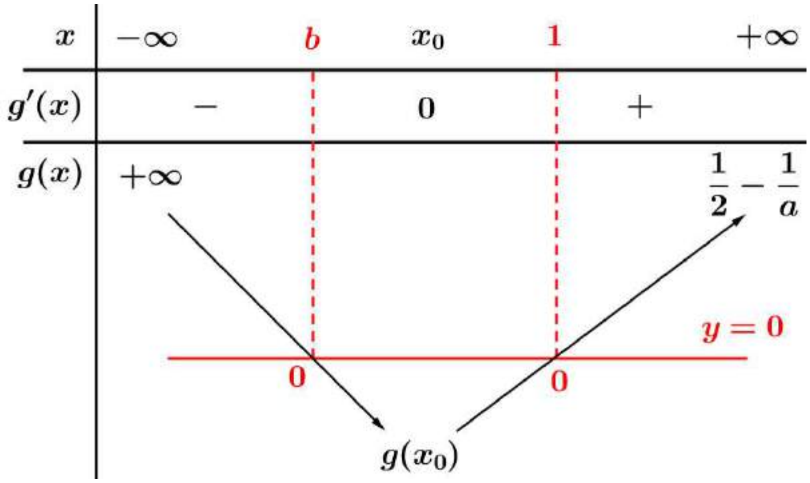
Nếu $a=4 \Rightarrow x_0=1 \Rightarrow g(x)\le 0 \Leftrightarrow x=1$ chứa đúng một số nguyên $5x$ là số 5 (loại).

Nếu $a=3 \Rightarrow x_0>1 \Rightarrow g(x)\le 0 \Leftrightarrow S_x=[1;1,28378] \Rightarrow S_{5x}=[5;6,17]$ chứa đúng hai số nguyên $5x$ là số 5 và số 6 (loại).

Nếu $a>4 \Rightarrow x_0<1 \Rightarrow S_x=[b;1] \Rightarrow S_{5x}=[5b;5]$ chứa tối thiểu 5 số nguyên $5x$ là số $1,2,3,4,5$

$\Leftrightarrow b\le \frac{1}{5} \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{5}\right)\le 0 \Leftrightarrow a^{-\frac{1}{5}}-2^{-\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\le 0 \Rightarrow a\in\{130;...,2021\}$.

Từ đó ta có bảng biến thiên như sau:



Vậy có $1+[(2021-130)+1]=1893$ số nguyên a thỏa mãn

Câu 30. Biết rằng có số thực $a>0$ sao cho $a^{3\cos 2x}\ge 2\cos^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Chọn mệnh đề **đúng.**

A. $a\in\left(\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$. **B.** $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **C.** $a\in\left(\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right)$. **D.** $a\in\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

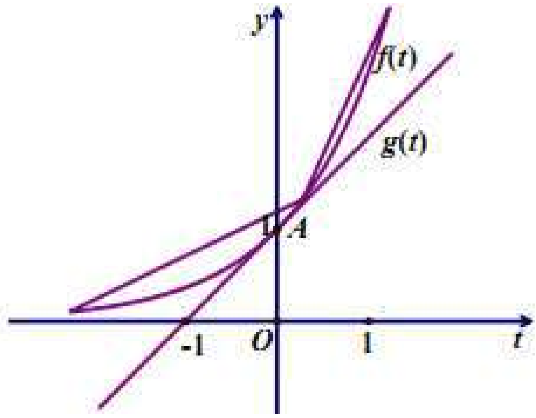
Ta có $a^{3cos2x}\ge 2cos^2x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow a^{3cos2x}\ge 1+cos2x, \forall x\in\mathbb{R}$

Đặt $t=cos2x, t\in[-1;1]$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm a để $a^{3t}\ge t+1\ \forall t\in[-1;1]$ (l).

Trường hợp 1: Với $a=1$, bất phương trình $a^{3t}\ge t+1 \Leftrightarrow 1\ge t+1 \Leftrightarrow t\le 0$, suy ra $a=1$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Với $0<a<1$, , khi đó $\forall t>0$ ta luôn có $a^{3t}<a^0=1<t+1$, suy ra $0<a<1$ không thỏa mãn (1).

Trường hợp 3: Với $a>1$, xét các hàm số $f(t)=a^{3t}$ và $g(t)=t+1$ (có đồ thị như hình vẽ)



Nhận xét: Đoạn thẳng $f(t)$ và đoạn thẳng $g(t)$ luôn có điểm chung $A(0;1)$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(t) \geq g(t)\ \forall t \in [-1;1]$ khi và chỉ khi *g(t)* tiếp xúc với *f(t)* tại điểm A(0;1).

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình có nghiệm $t=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{3t} = t+1 \\ 3a^{3t}\ln a = 1 \end{cases}$ có nghiệm $t=0$ $\Leftrightarrow 3\ln a = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e}$ (thỏa mãn $a>1$)

Vậy $a = \sqrt[3]{e} \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Cách 2: Xét tương giao sau đây: $\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$

Ta có $a^{3cos2x} \geq 2cos^2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^{3cos2x} \geq 1 + cos2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $t = cos2x, t \in [-1;1]$. Yêu cầu bài toán trở thành tìm a để $a^{3t} - t - 1 \geq 0\ \forall t \in [-1;1]\ (l)$.

Xét hàm số $f(t) = a^{3t} - t - 1$, có $f'(t) = 3a^{3t}\ln a - 1$

Nhận xét: phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm $t = 0 \in [-1;1]$, do đó để $f(t) \geq 0, \forall t \in [-1;1]$ thì **điều kiện cần** là $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 3\ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e}$

Điều kiện đủ: Với $a = \sqrt[3]{e}$ ta có $f(t) = e^t - t - 1, f'(t) = e^t - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Hàm $f(t)$ liên tục trên $[-1;1]$, có $f(-1) = \frac{1}{e}, f(1) = e-2, f(0) = 0.$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} f(t) = 0$, tức là $f(t) \geq 0\ \forall t \in [-1;1]$, suy ra $a = \sqrt[3]{e}$ thỏa mãn.

Vậy $a = \sqrt[3]{e} \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

_______________ TOANMATH.com _______________