BIẾN ĐỔI & TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC MŨ - LÔGARIT
BIỂU DIỄN LÔGARIT QUA CÁC LÔGARIT CƠ SỐ KHÁC NHAU

PHƯƠNG PHÁP

Muốn rút gọn các biểu thức chứa logarit ta cần sử dụng các quy tắc tính logarit và đổi cơ số của logarit. Ngoài ra, ta còn cần sử dụng các công thức lũy thừa đã học.

• $a^0 = 1, (a \neq 0)$.	• $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^1 = a$	• $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$	• $\log_a a^\alpha = \alpha, (0 < a \neq 1)$
• $\dfrac{(a)^\alpha}{(a)^\beta} = (a)^{\alpha-\beta}$	• $\log_{a^\alpha} a = \dfrac{1}{\alpha}, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^\alpha.(b)^\beta = (a)^{\alpha+\beta}$	• $.\log_a b^\alpha = \alpha.\log_a b, (a,b > 0, a \neq 1)$.
• $(a)^\alpha.(b)^\alpha = (a.b)^\alpha$	• $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta}.\log_a b$
• $\dfrac{(a)^\alpha}{(b)^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha, (b \neq 0)$	• $\log_{a^\beta} b^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}.\log_a b$
• $(a)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(a)^\alpha}, (\beta \in \mathbb{N}^*)$	• $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc), (b,\ c > 0, a \neq 1)$.
• $(a^\alpha)^\beta = (a)^{\alpha\beta}$	• $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right),\ (b,\ c > 0, a \neq 1)$.
• $(a)^\alpha = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$	• $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ (a,b > 0, a \neq 1)$.

Câu 1. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương thỏa mãn $a^{\log_3 7} = 27,\ b^{\log_7 11} = 49,\ c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$ bằng

A. 467. **B.** 469. **C.** 468. **D.** 465.

Lời giải

Chọn B

Có $T = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} + \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} + \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25} = (27)^{\log_3 7} + (49)^{\log_7 11} + \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}$.

Áp dụng $a^{\log_a b} = b$, ta được $\begin{cases} (27)^{\log_3 7} = (3^3)^{\log_3 7} = \left(3^{\log_3 7}\right)^3 = 7^3 = 343 \\ (49)^{\log_7 11} = (7^2)^{\log_7 11} = \left(7^{\log_7 11}\right)^2 = 11^2 = 121 \\ \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} = \left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 25} = \left(11^{\log_{11} 25}\right)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$

Vậy $T = 343 + 121 + 5 = 469$.

Câu 2. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực khác 0 thỏa mãn $4^a = 25^b = 10^c$. Tính $T = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$.

A. $T = \dfrac{1}{10}$ **B.** $T = \dfrac{1}{2}$ **C.** $T = 2$ **D.** $T = \sqrt{7}$

Lời giải

Chọn C

Giả sử $4^a = 25^b = 10^c = t \Rightarrow \begin{cases} a = \log_4 t \\ b = \log_{25} t \\ c = \log_{10} t \end{cases}$. Do $a,\ b,\ c$ là các số thực khác 0 nên $t > 0,\ t \neq 1$.

Ta có $T = \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{\log_{10} t}{\log_4 t} + \dfrac{\log_{10} t}{\log_{25} t} = \dfrac{\log_t 4}{\log_t 10} + \dfrac{\log_t 25}{\log_t 10} = \log_{10} 4 + \log_{10} 25$

$= \log_{10}(4.25) = \log_{10} 100 = 2.$

Câu 3. Cho các số thực dương $x,\ y,\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a \neq 1$ thì $\log_a x,\ \log_{\sqrt{a}} y,\ \log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Giá trị biểu thức $P = \dfrac{3x}{y} + \dfrac{7y}{z} + \dfrac{2020z}{x}$ bằng

A. 2029. **B.** 2030. **C.** 2031. **D.** 2033.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có

$\begin{cases} xz = y^2 \\ \log_a x + \log_{\sqrt[3]{a}} z = 2\log_{\sqrt{a}} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ \log_a (x.z^3) = \log_a y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = y^2 \\ xz^3 = y^4 \end{cases} \Rightarrow x = y = z > 0.$

$\Rightarrow P = \dfrac{3x}{y} + \dfrac{7y}{z} + \dfrac{2020z}{x} = 3 + 7 + 2020 = 2030.$

Câu 4. Cho $x = \log_2 3$, $y = \log_2 337$. Từ đó hãy tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{-\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4} - ... - \ln\frac{2021}{2022}}{\ln 1348}$ theo x, y.

A. $P = \dfrac{1+x+y}{2+y}$. **B.** $P = \dfrac{1+x+y}{2y}$. **C.** $P = \dfrac{x+y}{2y}$. **D.** $P = -\dfrac{1+x+y}{2+y}$.

Lời giải

Chọn A

$$P = \frac{-\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4} - ... - \ln\frac{2021}{2022}}{\ln 1348} = \frac{-\left(\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + ... + \ln\frac{2021}{2022}\right)}{\ln 1348}$$

$$= \frac{-\ln\frac{1}{2022}}{\ln 1348} = \frac{\ln 2022}{\ln 1348} = \frac{\log_2 2022}{\log_2 1348} = \frac{\log_2(2.3.337)}{\log_2(2^2.337)} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 337}{\log_2 2^2 + \log_2 337} = \frac{1+x+y}{2+y}.$$

Câu 5. Cho $a,\ b$ là hai số thực dương thỏa mãn: $\log b \neq -1011$ và $\log^2 a + 4\log^2 b = 4\log a.\log b$. Giá trị của biểu thức $L = \dfrac{3033 + \log a + \log b}{2021 + \log(a + 9b^2)}$ bằng

A. $L = -\dfrac{5}{2}$. **B.** $L = 3$. **C.** $L = \dfrac{3}{4}$. **D.** $L = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log^2 a + 4\log^2 b = 4\log a.\log b$

$\Leftrightarrow \log^2 a + 4\log^2 b - 4\log a.\log b = 0 \Leftrightarrow (\log a - 2\log b)^2 = 0 \Leftrightarrow \log a = 2\log b \Leftrightarrow a = b^2.$

Vậy $L=\frac{3033+\log a+\log b}{2021+\log\left(a+9b^2\right)}=\frac{3033+\log b^2+\log b}{2021+\log\left(b^2+9b^2\right)}=\frac{3033+3\log b}{2022+2\log b}=\frac{3.(1011+\log b)}{2.(1011+\log b)}=\frac{3}{2}$.

Câu 6. Cho $x,\ y,\ m$ là ba số thực dương khác 1 và $x>y$ thỏa mãn $\log_m\frac{x+3y}{4}=\frac{1}{\log_x m^2}+\frac{1}{\log_y m^2}$.

Khi đó biểu thức $P=\frac{x^2+4xy+y^2}{(x+y)^2}$ có giá trị bằng:

A. $P=\frac{25}{8}$. **B.** $P=\frac{25}{100}$. **C.** $P=\frac{59}{50}$. **D.** $P=\frac{59}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_m\frac{x+3y}{4}=\frac{1}{\log_x m^2}+\frac{1}{\log_y m^2}\Leftrightarrow\log_m\frac{x+3y}{4}=\log_m\sqrt{x}+\log_m\sqrt{y}$

$\Leftrightarrow x+3y=4\sqrt{xy}\Leftrightarrow(x+3y)^2=16xy\Leftrightarrow x^2-10xy+9y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(x-9y)=0$

$\Leftrightarrow x=9y$ do $(x>y)$

Như vậy: $P=\frac{x^2+4xy+y^2}{(x+y)^2}=\frac{81y^2+36y^2+y^2}{(9y+y)^2}=\frac{118y^2}{100y^2}=\frac{59}{50}$.

Câu 7. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b)$. Tính giá trị của $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

A. 2. **B.** 108. **C.** 216. **D.** 324.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_2 a=x$, $\log_3 b=y$. Ta có $a=2^x, b=3^y$ và $2+x=3+y\Leftrightarrow y=x-1$;

$\log_6(a+b)=2+x\Leftrightarrow a+b=6^{2+x}=36.6^x$.

Khi đó $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a.b}=\frac{36.6^x}{2^x.3^y}=\frac{36.6^x}{2^x.3^{x-1}}=\frac{108.6^x}{2^x.3^x}=108$.

Câu 8. Cho $\log_{27}5=a$, $\log_3 7=b$, $\log_2 3=c$. Tính $\log_6 35$ theo a, b, c.

A. $\frac{(3a+b)c}{1+c}$. **B.** $\frac{(3a+b)c}{1+b}$. **C.** $\frac{(3a+b)c}{1+a}$. **D.** $\frac{(3b+a)c}{1+c}$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\log_{27}5=a\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow\log_3 5=3a$.

Ta lại có $\log_2 5=\log_2 3\cdot\log_3 5=3ac$ và $\log_2 7=\log_2 3\cdot\log_3 7=bc$.

Vậy $\log_6 35=\frac{\log_2 35}{\log_2 6}=\frac{\log_2 5+\log_2 7}{\log_2 2+\log_2 3}=\frac{3ac+bc}{1+c}=\frac{(3a+b)c}{1+c}$.

Câu 9. Cho $a,b,c>0; a,b\neq 1$. Tính $A=\log_a(b^2).\log_b(\sqrt{bc})-\log_a(c)$

A. $\log_a c$. **B.** 1. **C.** $\log_a b$. **D.** $\log_a bc$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$A=\log_a(b^2).\log_b(\sqrt{bc})-\log_a(c)$.

$=2\log_a b.\dfrac{1}{2}\log_b(bc)-\log_a(c)=\log_a b.(\log_b b+\log_b c)-\log_a(c)$.

$=\log_a b.(1+\log_b c)-\log_a c=\log_a b+\log_a b.\log_b c-\log_a c$.

$=\log_a b+\log_a c-\log_a c=\log_a b$.

Câu 10. Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_{x^2} w=15$, $\log_z w=20$ và $\log_{xyz} w=15$. Tính $\log_y w$.

A. -60. **B.** 60. **C.** $\dfrac{1}{60}$. **D.** $-\dfrac{1}{60}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{x^2} w=15\Rightarrow \log_x w=30\Rightarrow \log_w x=\dfrac{1}{30}$.

$\log_z w=20\Rightarrow \log_w z=\dfrac{1}{20}$.

Lại do

$\log_{xyz} w=15\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_w(xyz)}=15$.

$\Leftrightarrow \log_w x+\log_w y+\log_w z=\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow \dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{20}+\log_w y=\dfrac{1}{15}\Leftrightarrow \log_w y=-\dfrac{1}{60}\Leftrightarrow \log_y w=-60$.

Câu 11. Cho $\log_9 5=a$, $\log_4 7=b$ và $\log_2 3=c$. Biết $\log_{24}175=\dfrac{mb+nac}{pc+q}$. với $m,n,p,q\in\mathbb{Z}$ và q là số nguyên tố. Tính $A=mnpq$.

A. 24. **B.** 42. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$\log_9 5=a\Rightarrow \log_3 5=2a.$

$\log_4 7=c\Rightarrow \log_2 7=2b.$

$\log_2 3=c$

$\log_2 5=\log_2 3.\log_3 5=2ac$

Khi đó $\log_{24}175=\dfrac{\log_2 175}{\log_2 24}=\dfrac{\log_2(7.5^2)}{\log_2(2^3.3)}=\dfrac{\log_2 7+\log_2 5^2}{\log_2 2^3+\log_2 3}=\dfrac{\log_2 7+2\log_2 5}{3+\log_2 3}=\dfrac{2b+4ac}{c+3}$.

Suy ra $\begin{cases} m=2\\ n=4\\ p=1\\ q=3\end{cases}$. Do đó $A=m.n.p.q=2.4.1.3=24.$

Câu 12. Cho $a=\log_2 3$, $b=\log_3 5$ và $c=\log_{11} 15$. Biết $\log_{66} 120=\dfrac{mc+nac+pabc}{a+c+ab+ac}$ với $m,n,p\in\mathbb{Z}$.

Tính $T=m+n+p$.

A. $T=5$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 5=\log_2 3.\log_3 5=a.b$.

$\log_2 11=\log_2 15.\log_{15} 11=[\log_2(3.5)].\dfrac{1}{\log_{11} 15}=(\log_2 3+\log_2 5).\dfrac{1}{\log_{11} 15}=\dfrac{a+ab}{c}$.

Do đó $\log_{66} 120=\dfrac{\log_2 120}{\log_2 66}=\dfrac{\log_2\left(2^3.3.5\right)}{\log_2\left(2.3.11\right)}=\dfrac{3+\log_2 3+\log_2 5}{1+\log_2 3+\log_2 11}$.

$=\dfrac{3+a+ab}{1+a+\dfrac{a+ab}{c}}=\dfrac{3c+ac+abc}{a+c+ab+ac}$. Suy ra: $\begin{cases} m=3 \\ n=1 \\ p=1 \end{cases}$. Vậy $T=5$.

Câu 13. Cho $\log_{27} 5=a, \log_3 7=b, \log_2 3=c$, nếu biểu diễn $\log_6 35=\dfrac{(xa+yb)c}{m+nc}$ thì giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-3m^2+n$ bằng bao nhiêu?

A. . $P=7$.. **B.** $P=8$. **C.** $P=0$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_6 35=\log_6 5+\log_6 7=\dfrac{1}{\log_5 2+\log_5 3}+\dfrac{1}{\log_7 2+\log_7 3}(1)$

Từ giả thiết: $\log_{27} 5=a$; $\log_2 3=c$

$\Rightarrow \log_3 5=3a \Rightarrow \log_2 5=\log_2 3.\log_3 5=3ac$, $\log_2 7=\log_2 3.\log_3 7=bc$.

Do đó, $(1)\Leftrightarrow \log_6 35=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3ac}+\dfrac{1}{3a}}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{3ac}{1+c}+\dfrac{bc}{1+c}=\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$.

$\Rightarrow x=3; y=1; m=1; n=1$.

Vậy $P=x^2+y^2-3m^2+n=8$.

Câu 14. Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>b>1$ và $\dfrac{1}{\log_a b}+\dfrac{1}{\log_b a}=\sqrt{2021}$. Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị biểu thức $P=\dfrac{m}{\log_{ab} b}-\dfrac{m}{\log_{ab} a}=2022$.

A. $m=\sqrt{2017}$. **B.** $m=\dfrac{2022}{\sqrt{2017}}$. **C.** $m=\sqrt{2020}$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn B

Do $a>b>1\Rightarrow \log_a b>0$, $\log_b a>0$, $\log_b a>\log_a b$.

Ta có: $\dfrac{1}{\log_b a}+\dfrac{1}{\log_a b}=\sqrt{2021}\Leftrightarrow \log_a b+\log_b a=\sqrt{2021}$

Do đó, $P=2022\Leftrightarrow m\left(\log_b a+1\right)-m\left(1+\log_a b\right)=2022\Leftrightarrow m\left(\log_b a-\log_a b\right)=2022\left(*\right)$

Mặt khác

$\left(\log_b a-\log_a b\right)^2=\left(\log_b a+\log_a b\right)^2-4=2021-4=2017\Rightarrow \log_b a-\log_a b=\sqrt{2017}$

Do vậy, $\left(*\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{2022}{\sqrt{2017}}=\dfrac{2022\sqrt{2017}}{2017}$

Câu 15. Gọi a là số thực sao cho 3 số $a+\log_3 2021$, $a+\log_9 2021$, $a+\log_{81} 2021$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $q=\dfrac{1}{2}$. **B.** $q=2$. **C.** $q=3$. **D.** $q=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Do 3 số $a+\log_3 2021;a+\log_9 2021;a+\log_{81} 2021$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên công bội q của cấp số nhân là:

$$q=\frac{a+\log_9 2021}{a+\log_3 2021}=\frac{a+\log_{81} 2021}{a+\log_9 2021}=\frac{\log_{81} 2021-\log_9 2021}{\log_9 2021-\log_3 2021}=\frac{-\frac{1}{4}\log_3 2021}{-\frac{1}{2}\log_3 2021}=\frac{1}{2}.$$

Câu 16. Biết rằng b là số nguyên thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{a-3}{b}\right)-\dfrac{b\left(a+a^2\right)+3-a}{b}=\log_2\left(4a^2+4a+8\right)$. Số giá trị thực của a là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện : $\begin{cases} b\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{a-3}{b}>0 \end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có: $\log_2\left(\dfrac{a-3}{b}\right)-\dfrac{b\left(a+a^2\right)+3-a}{b}=\log_2\left(4a^2+4a+8\right)$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{a-3}{b}\right)=\log_2\left(4a^2+4a+8\right)+\frac{b\left(a+a^2\right)+3-a}{b}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{a-3}{b}\right)=\log_2\left[4\left(a^2+a+2\right)\right]-2a+a^2-\frac{a-3}{b}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{a-3}{b}\right)+\frac{a-3}{b}=\log_2\left(a^2+a+2\right)+a^2+a+2.$$

Nếu tồn tại cặp $\left(a;b\right)$ thỏa mãn đề bài thì $\dfrac{a-3}{b}>0$.

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=\log_2 t+t$, là hàm số xác định và đồng biến trên $\left(0:+\infty\right)$ $\left(1\right)$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{a-3}{b}\right)=f\left(a^2+a+2\right)$.

$\Leftrightarrow \frac{a-3}{b}=a^2+a+2 \Leftrightarrow ba^2+(b-1)a+2b+3=0$

Phương trình $ba^2+(b-1)a+2b+3=0 \ (2)$ có nghiệm khi

$\Delta=(b-1)^2-4b(2b+3)\geq 0$

$\Leftrightarrow 7b^2+14b-1\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-7-2\sqrt{14}}{7}\leq b\leq \frac{-7+2\sqrt{14}}{7}$.

Vì $b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$ nên $b\in\{-2;-1\}$.

Nếu $b=-2$ thay vào (2) ta có: $a\in\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}$.

Nếu $b=-1$ thay vào (2) ta có: $a\in\left\{-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right\}$.

Vậy có 4 giá trị a thỏa mãn bài toán.

Câu 17. Biết rằng a,b là hai số thực dương và thỏa mãn đẳng thức $\left(2021^{a+b-1}+2021^{a+2b-1}\right).\left(2021^{3a+4b-3}+2021^{1-a-b}\right)=4.2021^{2a+3b-2}$. Tìm giá trị của biểu thức $T=\frac{a^3+b^3}{2021}$.

A. $T=\frac{2022}{2021}$. **B.** $T=\frac{2}{2021}$. **C.** $T=\frac{1}{2021}$. **D.** $T=\frac{4}{2021}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết : $\left(2021^{a+b-1}+2021^{a+2b-1}\right).\left(2021^{3a+4b-3}+2021^{1-a-b}\right)=4.2021^{2a+3b-2}$

$\Leftrightarrow 2021^{4a+5b-4}+2021^{4a+6b-4}+2021^{b}+1=4.2021^{2a+3b-2}$

$\Leftrightarrow 2021^{2a+2b-2}+2021^{2a+3b-2}+2021^{-2b-2a+2}+2021^{-2a-3b+2}=4 \ (1)$.

Áp dụng bất đẳng thức (AM_GM) ta có:

$2021^{2a+2b-2}+2021^{-2b-2a+2}\geq 2\sqrt{2021^{2a+2b-2}.2021^{-2b-2a+2}}=2\sqrt{2021^{0}}=2$

$2021^{-2a-3b+2}+2021^{2a+3b-2}\geq 2\sqrt{2021^{-2a-3b+2}.2021^{2a+3b-2}}=2$

Suy ra $2021^{2a+2b-4}+2021^{2a+3b-4}+2021^{-2b-2a}+2021^{-2a-3b}\geq 4$

Đẳng thức (1) xảy ra khi:

$$\begin{cases}2021^{2a+2b-2}=2021^{-2b-2a+2}\\2021^{-2a-3b+2}=2021^{2a+3b-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b-2=-2b-2a+2\\-2a-3b+2=2a+3b-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\2a+3b=2\end{cases}\Leftrightarrow a=1;b=0.$$

Vậy $T=\frac{a^3+b^3}{2021}=\frac{1}{2021}$.

Câu 18. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\sqrt{\log x}+\sqrt{\log y}+\log\sqrt{x}+\log\sqrt{y}=100$ và $\sqrt{\log x}$, $\sqrt{\log y}$, $\log\sqrt{x}$, $\log\sqrt{y}$ là các số nguyên dương. Khi đó kết quả xy bằng

A. 10^{164}. **B.** 10^{100}. **C.** 10^{200}. **D.** 10^{144}.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{\log x} \\ b=\sqrt{\log y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=a^2 \\ \log y=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^{a^2} \\ y=10^{b^2} \end{cases} \Rightarrow xy=10^{a^2+b^2}$.

Ta có : $\begin{cases} \log\sqrt{x}=\log\sqrt{10^{a^2}}=\dfrac{a^2}{2} \\ \log\sqrt{y}=\log\sqrt{10^{b^2}}=\dfrac{b^2}{2} \end{cases}$ thỏa điều kiện $\dfrac{a^2}{2}$ và $\dfrac{b^2}{2}$ là các số nguyên dương .

Vậy a^2 và b^2 là các số chẵn dương . Do đó a và b là các số chẵn dương .

Ta có : $\sqrt{\log x}+\sqrt{\log y}+\log\sqrt{x}+\log\sqrt{y}=100$

$\Leftrightarrow a+b+\log\sqrt{10^{a^2}}+\log\sqrt{10^{b^2}}=100$

$\Leftrightarrow a+b+\dfrac{a^2+b^2}{2}=100 \Leftrightarrow a^2+2a+\left(b^2+2b-200\right)=0$.(*)

Ta coi $(*)$ là phương trình bậc 2, ẩn là a và tham số b.

Do đó $(*)$ có $\Delta'=201-b^2-2b$

Để $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 1\le b\le\sqrt{202}-1$ (Do b nguyên dương).

Như vậy $b\in\{1;2;3;...;13\}$

Mà b là các số chẵn dương nên $b\in\{2;4;6;8;10;12\}$.

Vì a là số chẵn , dương với $b\in\{2;4;6;8;10;12\}$, thay vào phương trình (*) ta có $\begin{cases} b=8 \\ a=10 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=10 \\ a=8 \end{cases}$.

Vậy $xy=10^{a^2+b^2}=10^{164}$.

Câu 19. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}=15$ và $3^{2x+\sqrt{3y+1}}+3^{3y+\sqrt{4z+1}}+3^{4z+\sqrt{2x+1}}=3^{30}$. Giá trị của $x.y.z$ bằng

A. 288. **B.** 864. **C.** 1152. **D.** 576.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x\ge\dfrac{-1}{2};y\ge\dfrac{-1}{3};z\ge\dfrac{-1}{4}$.

Ta có: $15^2=\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+1}+\sqrt{4z+1}\right)^2\le 3.(2x+1+3y+1+4z+1)=3.(2x+3y+4z+3)$

Suy ra $2x+3y+4z\ge\dfrac{15^2}{3}-3=72$.

Mặt khác, từ giả thiết và chứng minh trên, ta có

$3^{30}=3^{2x+\sqrt{3y+1}}+3^{3y+\sqrt{4z+1}}+3^{4z+\sqrt{2x+1}}\ge 3\sqrt[3]{3^{2x+\sqrt{3y+1}}.3^{3y+\sqrt{4z+1}}.3^{4z+\sqrt{2x+1}}}$

$=3.\sqrt[3]{3^{2x+\sqrt{3y+1}+3y+\sqrt{4z+1}+4z+\sqrt{2x+1}}}=3\sqrt[3]{3^{2x+3y+4z+15}}\ge 3.\sqrt[3]{3^{72+15}}=3^{30}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{2x+1}=\sqrt{3y+1}=\sqrt{4z+1}\\ 3^{2x+\sqrt{3y+1}}=3^{3y+\sqrt{4z+1}}=3^{4z+\sqrt{2x+1}}\\ 2x+3y+4z=72\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12\\ y=8\\ z=6\end{cases}$.

Ta được $x.y.z=12.8.6=576$.

Câu 20. Giả sử a, b là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{29}{2}$. **B.** $-\frac{31}{2}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2+y^2\right)-xy(x+y)$ và $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-\left(x^2+y^2\right)\right]$

Từ giả thiết, ta có:

$\begin{cases}x+y=10^z\\ x^2+y^2=10^{z+1}\end{cases}\Rightarrow x^3+y^3=10^z.10^{z+1}-\frac{1}{2}\left(10^{2z}-10^{z+1}\right).10^z$.

Vì $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x, y, z nên

$10^z.10^{z+1}-\frac{1}{2}\left(10^{2z}-10^{z+1}\right).10^z=a.10^{3z}+b.10^{2z}$, $\forall z$

$\Leftrightarrow 10^{2z+1}-\frac{1}{2}.10^{3z}+\frac{1}{2}.10^{2z+1}=a.10^{3z}+b.10^{2z},\forall z$

$\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{2}\right).10^{3z}+(b-15).10^{2z}=0,\forall z$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+\frac{1}{2}=0\\ b-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=15\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{29}{2}.$

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=\log_3\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{109}{4}}\right)$. Tính

$$T=f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+...+f\left(\frac{2020}{2021}\right).$$

A. 4042. **B.** 4040. **C.** 3030. **D.** 6060.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(1-x)=\log_3\left(1-x-\frac{1}{2}+\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+\frac{109}{4}}\right)=\log_3\left(\sqrt{x^2-x+\frac{109}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$f(x)+f(1-x)=\log_3\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{109}{4}}\right)+\log_3\left(\sqrt{x^2-x+\frac{109}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$=\log_3\left[\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{109}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2-x+\frac{109}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]=\log_3 27=3$

$T=f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2}{2021}\right)+...+f\left(\frac{2020}{2021}\right)$

$=\left(f\left(\frac{1}{2021}\right)+f\left(\frac{2020}{2021}\right)\right)+\left(f\left(\frac{2}{2021}\right)+f\left(\frac{2019}{2021}\right)\right)+...+\left(f\left(\frac{1010}{2021}\right)+f\left(\frac{1011}{2021}\right)\right)$

$=3+3+...+3=3.1010=3030.$

Câu 22. Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ trong đó $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\geq 4$ (1)

Lại có: $14-(y-2)\sqrt{y+1}=14-(y+1)\sqrt{y+1}+3\sqrt{y+1}$.

Đặt $t=\sqrt{y+1}\geq 0$.

Xét hàm số $f(t)=-t^3+3t+14$ trên $[0;+\infty)$, ta có $\max\limits_{t\in[0;+\infty)} f(t)=f(1)=16$

$\Rightarrow 14-(y-2)\sqrt{y+1}\leq 16 \Rightarrow \log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\leq 4$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow P=2$.

Câu 23. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$\log_a 2017+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^{2i}}\log_{\sqrt[2^i]{a}}2017=\log_a 2017^2-\frac{\log_a 2017}{2^{2018}}$, với $0<a\neq 1$.

A. $n=2016$. **B.** $n=2017$. **C.** $n=2018$. **D.** $n=2019$.

Lời giải

Chọn C

Gọi vế trái và vế phải của hệ thức đề bài cho lần lượt là A và B.

Ta có $\frac{1}{2^{2n}}\log_{\sqrt[2^n]{a}}2017=\frac{2^n}{2^{2n}}\log_a 2017$.

Do đó $A=\log_a 2017+\frac{2}{2^2}\log_a 2017+\frac{4}{2^4}\log_a 2017+\frac{8}{2^6}\log_a 2017+...+\frac{2^n}{2^{2n}}\log_a 2017$

$=\left(1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^4}+\frac{8}{2^6}+...+\frac{2^n}{2^{2n}}\right)\log_a 2017$.

Ta có : Dãy số $1;\frac{2}{2^2};\frac{4}{2^4};\frac{8}{2^6};...;\frac{2^n}{2^{2n}}$ lập thành một cấp số nhân với công bội $q=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^4}+\frac{8}{2^6}+...+\frac{2^n}{2^{2n}}=u_1.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}.$$

Như vậy:

$A=\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\log_a 2017$

$B=\log_a 2017^2-\frac{\log_a 2017}{2^{2018}}=2\log_a 2017-\frac{1}{2^{2018}}\log_a 2017$

Từ đó $\Rightarrow 2-\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^{2018}}\Rightarrow n=2018$.

Câu 24. Cho $x>0$. Biết biểu thức $A=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(3^x-3^{-x}\right)^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(3^x-3^{-x}\right)^2}}}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $S=a+b$.

A. 2.3^x. **B.** 2.3^{-x}. **C.** 2. **D.** 3^{2x}.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(3^x-3^{-x}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(3^{2x}-2+3^{-2x}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(3^{2x}+2+3^{-2x}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(3^x+3^{-x}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\left(3^x+3^{-x}\right)$

Suy ra $A=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(3^x-3^{-x}\right)^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(3^x-3^{-x}\right)^2}}}=\sqrt{\frac{-1+\frac{1}{2}\left(3^x+3^{-x}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(3^x+3^{-x}\right)}}=\sqrt{\frac{3^x+3^{-x}-2}{3^x+3^{-x}+2}}$

$=\sqrt{\frac{3^{2x}-2.3^x+1}{3^{2x}+2.3^x+1}}=\sqrt{\frac{\left(3^x-1\right)^2}{\left(3^x+1\right)^2}}=\frac{3^x-1}{3^x+1}$ (Vì $x>0$ nên $3^x-1>0$).

Vậy $S=a+b=2.3^x$.

Câu 25. Cho a,b là các số thực và hàm số

$f(x)=a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+b\sin x.\cos\left(2020x\right)+7$. Biết rằng $f\left(2020^{\ln 2021}\right)=12$. Tính $P=f\left(-2021^{\ln 2020}\right)$.

A. $P=4$. **B.** $P=2$. **C.** $P=-2$. **D.** $P=10$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-7=a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+b\sin x.\cos\left(2020x\right)$

Do $\sqrt{x^2+1}+x>|x|+x\geq 0$ nên hàm số $g\left(x\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $g\left(-x\right)=a\log^{2021}\left(\sqrt{\left(-x\right)^2+1}+\left(-x\right)\right)+b\sin\left(-x\right).\cos\left(2020.\left(-x\right)\right)$

$\Leftrightarrow g\left(-x\right)=a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-b\sin x.\cos\left(2020x\right)$

$\Leftrightarrow g\left(-x\right)=a\log^{2021}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)-b\sin x.\cos\left(2020x\right)$

$\Leftrightarrow g(-x)=-a\log^{2021}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-b\sin x.\cos(2020x)$

$\Leftrightarrow g(-x)=-g(x)$. Vậy hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lại có: $2020^{\ln 2021}=2021^{\ln 2020}$

$\Rightarrow g\left(2020^{\ln 2021}\right)=-g\left(-2021^{\ln 2020}\right)$

$\Leftrightarrow f\left(2020^{\ln 2021}\right)-7=-\left[f\left(-2021^{\ln 2020}\right)-7\right]\Leftrightarrow 12-7=-f\left(-2021^{\ln 2020}\right)+7$

$\Leftrightarrow f\left(-2021^{\ln 2020}\right)=2$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=\log\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Cho biểu thức S có dạng $S=f(2)+f(3)+...+f(2020)$. Biết rằng tổng S được viết dưới dạng $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b>0$. Khi đó giá trị của $(b-a)$ bằng

A. 2020 **B.** 2019 **C.** 2018 **D.** 4040

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=\log\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=f(x)=\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=\log(x-1)+\log(x+1)-2\log x$

Suy ra ta có:

$f(2)=\log 1+\log 3-2\log 2$

$f(3)=\log 2+\log 4-2\log 3$

$f(4)=\log 3+\log 5-2\log 4$

$f(5)=\log 4+\log 6-2\log 5$

....

$f(2019)=\log 2018+\log 2020-2\log 2019$

$f(2020)=\log 2019+\log 2021-2\log 2020$

Suy ra $S=\log 1-2\log 2+\log 2+\log 2020+\log 2021-2\log 2020=\log\left(\dfrac{2021}{4040}\right)$

Như vậy suy ra $\begin{cases}a=2021\\ b=4040\end{cases}\Rightarrow b-a=4040-2021=2019$

Câu 27. Cho $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=\mathrm{e}^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$.

A. $m-n^2=-1$. **B.** $m-n^2=1$. **C.** $m-n^2=2018$. **D.** $m-n^2=-2018$.

Lời giải

Chọn A

$1+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2(x+1)^2+(x+1)^2+x^2}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2(x+1)^2}$.

$f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=\mathrm{e}^{\frac{x(x+1)+1}{x(x+1)}}$, $\forall x>0$.

Xét dãy số (u_k): $u_k=\dfrac{k(k+1)+1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k(k+1)}=1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$, $(k\in\mathbb{N}^*)$.

Ta có $u_1=1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$, $u_2=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$, $u_3=1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$, …, $u_{2017}=1+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}$.

$f(1).f(2).f(3)...f(2017)=\mathrm{e}^{u_1+u_2+u_3+...+u_{2017}}$.

$u_1+u_2+u_3+...+u_{2017}=2017+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{2018^2-1}{2018}=\dfrac{m}{n}$.

Vậy $m-n^2=-1$.

Câu 28. Cho dãy số $u_n=\dfrac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n+1)}{2^{2n}}$ với số tự nhiên $n\ge 1$. Số hạng nhỏ nhất của dãy số có giá trị là m. Hỏi có bao nhiêu số hạng của dãy số cùng đạt giá trị là m

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét ba số hạng liên tiếp sau đây:

$$u_{n-1}=\frac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n)}{2^{2n}};u_n=\frac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n+1)}{2^{2n}};u_{n+1}=\frac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n+2)}{2^{2n}};$$

Để số hạng u_n nhỏ nhất thì

$$\begin{cases}u_{n-1}=\dfrac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n)}{2^{2n}}\le u_n=\dfrac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n+1)}{2^{2n}};\\ u_n=\dfrac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n+1)}{2^{2n}}\le u_{n+1}=\dfrac{\log_{11}2.\log_{11}3....\log_{11}(n+2)}{2^{2n}};\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\log_{11}(n+1)}{2^2}\le 1\\ 1\le\dfrac{\log_{11}(n+2)}{2^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{11}(n+1)\le 4\\ \log_{11}(n+2)\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow 11^4-2\le n\le 11^4-1$$

Suy ra có hai giá trị nguyên dương của n thỏa mãn, ứng với hai số hạng của dãy số cùng đạt giá trị nhỏ nhất, tương ứng là $\left[\begin{array}{l}n=11^4-1\\ n=11^4-2\end{array}\right.$

Câu 29. Lần lượt gọi a,b,c,d là các số nguyên dương thỏa mãn $\log_a b=\dfrac{3}{2}$ và $\log_c d=\dfrac{5}{4}$; Khi $a-c=9$ thì $b-d$ bằng

A. 80. **B.** 93. **C.** 50. **D.** 97.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases}\log_a b=\dfrac{3}{2}\\ \log_c d=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=a^{\frac{3}{2}}\\ c=d^{\frac{5}{4}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2=a^3\\ c^4=d^5\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}b^2=a^3=m\\ c^4=d^5=n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=k^6\\ n=l^{20}\end{cases}$ với $m,n,k,l\in Z^+\Rightarrow\begin{cases}b^2=a^3=k^6\\ c^4=d^5=l^{20}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=k^2\\ b=k^3\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}c=l^4\\ d=l^5\end{array}\right.\end{array}\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} a-c=k^2-l^4=9 \quad (*) \\ b-d=k^3-l^5 \quad (**) \end{array}\right.$. Từ $(*) \Leftrightarrow \left(k-l^2\right)\left(k+l^2\right)=9$

Do $m,n,k,l \in Z^+ \Rightarrow \left(k-l^2\right),\left(k+l^2\right) \in Z$

Do $k+l^2>0$ nên suy ra $\begin{cases} k-l^2>0 \\ k-l^2 \neq k+l^2 \end{cases}; k-l^2<k+l^2$

Suy ra phương trình $(*) \Leftrightarrow \left(k-l^2\right)\left(k+l^2\right)=9 \Leftrightarrow \begin{cases} k-l^2=1 \\ k+l^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=5 \\ \begin{cases} l^2=4 \\ l>0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ l=2 \end{cases}$

Từ đó suy ra $(**) \Rightarrow b-d=k^3-l^5=5^3-2^5=93$

Câu 30. Chọn hai số a,b đôi một khác nhau bất kì trong tập hợp sau đây $A=\left\{2;2^2;2^3;...;2^{25}\right\}$. Tính xác suất để $\log_a b$ là 1 số nguyên

A. $\frac{31}{300}$. **B.** $\frac{7}{60}$. **C.** $\frac{37}{300}$. **D.** $\frac{11}{100}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $A=\left\{2;2^2;2^3;...;2^{25}\right\}$ suy ra A có 25 phần tử

Do $\log_a b$ là 1 số nguyên nên suy ra $b>a$

Như vậy a có 25 cách chọn và b có 24 cách chọn tức $n(\Omega)=25.24=600$ cách

Đặt $\begin{cases} a=2^m \\ b=2^n \end{cases}$. Suy ra $\log_a b=\log_{2^m}\left(2^n\right)=\frac{\log\left(2^n\right)}{\log\left(2^m\right)}=\frac{n\log 2}{m\log 2}=\frac{n}{m};\log_a b \in Z \Rightarrow \frac{n}{m} \in Z$

Khi $m=1$ thì n có 24 cách chọn
Khi $m=2$ thì n có 11 cách chọn
Khi $m=3$ thì n có 7 cách chọn
Khi $m=4$ thì n có 5 cách chọn
Khi $m=5$ thì n có 4 cách chọn
Khi $m=6$ thì n có 3 cách chọn
Khi $m=7$ thì n có 2 cách chọn
Khi $m=8$ thì n có 2 cách chọn
Khi $m=9$ thì n có 1 cách chọn
Khi $m=10$ thì n có 1 cách chọn
Khi $m=11$ thì n có 1 cách chọn
Khi $m=12$ thì n có 1 cách chọn

Như vậy tổng biến cố thỏa mãn đề bài là:

$n(A)=24+11+7+5+4+3+2+2+1+1+1+1=62$ cách

Như vậy xác suất cần tìm là $P=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{62}{25.24}=\frac{31}{300}$.

TOANMATH.com