TẠP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

CÁC BÀI TOÁN

NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN

LỜI GIỚI THIỆU

Trong đề thi thử của các trường hay trong đề thi THPT Quốc Gia thì các bài toán về chủ đề nguyên hàm tích phân chiếm khoảng 7 câu từ dễ đến khó, nhằm giúp bạn đọc phần nào có cái nhìn toàn diện về các câu hỏi liên quan tới vấn đề này trong các đề thi của năm vừa rồi và đồng thời có thêm nhiều kiến thức hay và khó khác thì trong chuyên đề này mình đã đề cập tới rất nhiều các vấn đề khó như các bài toán liên quan tới phương trình vi phân, bất đẳng thức tích phân… Để có thể viết nên được chuyên đề này không thể không có sự tham khảo từ các nguồn tài liệu của các các group, các khóa học, tài liệu của các thầy cô mà tiêu biểu là

1. Thầy Lã Duy Tiến – Giáo viên trường THPT Bình Minh
2. Group Nhóm toán: https://www.facebook.com/groups/nhomtoan/
3. Group Hs Vted.vn: https://www.facebook.com/groups/vted.vn/
4. Group Nhóm Toán và Latex: https://www.facebook.com/groups/toanvalatex/
5. Website Toán học Bắc – Trung – Nam: http://toanhocbactrungnam.vn/
6. Website Toanmath: https://toanmath.com/
7. Anh Phạm Minh Tuấn: https://www.facebook.com/phamminhtuan.2810
8. Thầy Lê Phúc Lữ - Công tác tại phòng R&D Công ty Fsoft thuộc tập đoàn FPT.
9. Thầy Đặng Thành Nam – Giảng viên Vted
10. Thầy Huỳnh Đức Khánh
11. Thầy Nguyễn Thanh Tùng
12. Bạn Nguyễn Quang Huy – Sinh viên đại học bách khoa Hà Nội

Trong bài viết mình có sưu tầm từ nhiều nguồn nên có thể sẽ có những câu hỏi chưa hay hoặc chưa phù hợp mong bạn đọc bỏ qua. Trong quá trình biên soạn không thể tránh khỏi những thiếu sót, mong bạn đọc có thể góp ý trực tiếp với mình qua địa chỉ sau:

Nguyễn Minh Tuấn

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT

Facebook: https://www.facebook.com/tuankhmt.fpt

Email: tuangenk@gmail.com

Blog: https://lovetoan.wordpress.com/

CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

Nguyễn Minh Tuấn

Nguyên hàm tích phân có thể được coi là một phần toán tương đối hay và khó luôn xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia, để cùng mở đầu về chương này, mình xin giới thiệu và khái quát đôi nét về lịch sử của các bài toán nguyên hàm và tích phân và sơ qua về chương trình ta sẽ học sắp tới.

GIỚI THIỆU ĐÔI NÉT VỀ LỊCH SỬ

Các ý tưởng giúp hình thành môn vi tích phân phát triển qua một thời gian dài. Các nhà toán học Hi Lạp là những người đã đi những bước tiên phong. Leucippus, Democritus và Antiphon đã có những đóng góp vào phương pháp "vét cạn" của Hi Lạp, và sau này được Euxodus, sống khoảng 370 trước Công Nguyên, nâng lên thành lí luận khoa học. Sở dĩ gọi là phương pháp "vét cạn" vì ta xem diện tích của một hình được tính bằng vô số hình, càng lúc càng lấp đầy hình đó. Tuy nhiên, chỉ có Archimedes (Ac-xi-met), (287-212 B.C), mới là người Hi Lạp kiệt xuất nhất. Thành tựu to lớn đầu tiên của ông là tình được diện tích giới hạn bởi tam giác cong parabol bằng 4/3 diện tích của tam giác có cùng đáy và đỉnh và bằng 2/3 diện tích của hình bình hành ngoại tiếp. Để tìm ra kết quả này, Ác-xi-met dựng một dãy vô tận các tam giác, bắt đầu với tam giác có diện tích bằng A và tiếp tục ghép thêm các tam giác mới nằm xen giữa các tam giác đã có với đường parabol. Hình parabol dần dần được lấp đầy bởi các tam giác có tổng diện tích là:

$$A, A+\frac{A}{4}, A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}, A+\frac{A}{4}+\frac{A}{16}+\frac{A}{64}....$$

Diện tích giới hạn bởi parabol là: $A\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...\right)=\frac{4A}{3}$

Ác-xi-met cũng dùng phương pháp "vét cạn" để tính diện tích hình tròn. Đây là mô hình đầu tiên của phép tính tích phân, nhờ đó ông đã tìm được giá trị gần đúng của số pi ở khoảng giữa hai phân số 3 10/71 và 3 1/7. Trong tất cả những khám phá của mình, Ac-xi-met tâm đắc nhất là công thức tính thể tích hình cầu. "*Thể tích hình cầu thì bằng 2/3 thể tích hình trụ ngoại tiếp*". Thể theo nguyện vọng lúc sinh thời, sau khi ông mất, người ta cho dựng một mộ bia có khắc hoa văn một hình cầu nội tiếp một hình trụ. Ngoài toán học, Ac-xi-met còn có những phát minh về cơ học, thủy động học. Tất cả học sinh đều quen thuộc với định luật mang tên ông về sức đẩy một vật thể khi nhúng vào một chất lỏng cùng với câu thốt bất hủ "*Eureka! Eureka!*" (Tìm ra rồi! Tìm ra rồi!) khi ông đang tắm. Ông tìm ra các định luật về đòn bẩy cùng câu nói nổi tiếng "*Hãy cho tôi một điểm tựa, tôi sẽ nhấc bổng quả đất*").

Dù ông có vẽ thích toán học hơn vật lí, nhưng Ac-xi-met vẫn là một kỹ sư thiên tài. Trong những năm quân xâm lược La Mã hùng mạnh tấn công đất nước Syracuse quê hương ông, nhờ có những khí tài do ông sáng chế như máy bắn đá, cần trục kéo lật tàu địch, gương parabol đốt cháy chiến thuyền, đã giúp dân thành Syracuse cầm chân quân địch hơn 3 năm. Cuối cùng quân La Mã cũng tràn được vào thành. Dù có lệnh tướng La Mã là Marcus không được giết chết ông, một tên lính La Mã thô bạo xông vào phòng làm việc khi ông đang mê mãi suy nghĩ cạnh một sa bàn một bài toán hình dang dở. Khi thấy bóng của nó đổ lên hình vẽ, ông quát lên: " Đừng quấy rầy đến các đương tròn của ta !". Thế là tên lính nỗi cáu, đâm chết ông. Sau khi ông mất, nền toán học hầu như rơi vào trong bóng tối cho đến thế kỹ thứ 17. Lúc này do nhu cầu kỹ thật, phép tính vi tích phân trở lại để giải quyết những bài tóan về sự biến thiên các đại lượng vật lý. Phép tính vi tích phận được phát triển nhờ tìm ra cách giải quyết được bốn bài toán lớn của thời đại:

1. Tìm tiếp tuyến của một đường cong.
2. Tìm độ dài của một đường cong.
3. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một đại lượng ; ví dụ tìm khỏang cách gần nhất và xa nhất giữa một hành tinh và mặt trời, hoặc khoảng cách tối đa mà một đạn đạo có thể bay tới theo góc bắn đi của nó.
4. Tìm vận tốc và gia tốc của một vật thể theo thời gian biết phương trình giờ của vật thể ấy.

Vào khỏang giữa thế kỷ 17, những anh tài của thời đại, như Fermat, Roberval, Descartes, Cavalieri lao vào giải các bài toán này. Tất cả cố gắng của họ đã đạt đến đỉnh cao khi Leibniz và Newton hoàn thiện phép tính vi tích phân. Leibniz (1646-1716) Ông là một nhà bác học thiên tài, xuất sắc trên nhiều lãnh vực: một nhà luật học, thần học, triết gia, nhà chính trị. Ông cũng giỏi về địa chất học, siêu hình học, lịch sử và đặc biệt toán học. Leibniz sinh ở Leipzig, Đức. Cha là một giáo sư triết học tại Đại học Leipzig, mất khi ông vừa sáu tuổi. Cậu bé suốt ngày vùi đầu ở thư viện của cha, ngấu nghiến tất cả các quyển sách về đũ mọi vần đề. Và thói quen này đã theo cậu suôt đời. Ngay khi mới 15 tuổi, ông đã được nhận vào học luật tại Đại học Leipzig, và 20 tuổi đã đậu tiến sĩ luật. Sau đó, ông hoạt động trong ngành luật và ngoại giao, làm cố vần luật pháp cho các ông vua bà chúa. Trong những chuyến đi công cán ở Paris, Leibnz có dịp gặp gỡ nhiều nhà toán học nổi tiếng, đã giúp niềm say mê toán học của ông thêm gia tăng. Đặc biệt, nhà vật lí học lừng danh Huygens đã dạy ông toán học. Vì không phải là dân toán học chuyên nghiệp, nên có nhiều khi ông khám phá lại những định lí toán học đã được các nhà toán học khác biết trước. Trong đó có sự kiện được hai phe Anh Đức tranh cãi trong suốt 50 năm. Anh thì cho chính Newton là cha đẻ của phép tính vi tích phân trong khi Đức thì nói vinh dự đó phải thuộc về Leibniz. Trong khi hai đương sự thì không có ý kiến gì. Đúng ra là hai người đã tìm được chân lý trên một cách độc lập: Leibniz tìm ra năm 1685, mười năm sau Newton, nhưng cho in ra công trình của mình trước Newton hai mươi năm. Leibniz sống độc thân suốt đời và mặc dù có những đóng góp kiệt xuất, ông không nhận được những vinh quang như Newton. Ông trải qua những năm cuối đời trong cô độc và nổi cay đắng. Newton(1642-1727) - Newton sinh ra tại một ngôi làng Anh Quốc. Cha ông mất trước khi ông ra đời, một tay mẹ nuôi nầng và dạy dỗ trên nông trại nhà. Năm 1661, ông vào học tại trường đại học Trinity ở Cambridge mặc dủ điểm hình học hơi yếu. Tại đây ông được Barrow, nhà toán học tài năng chú ý. Ông lao vào học toán và khoa học, nhưng tốt ngghiệp loại bình thường. Vì bệnh dịch hoành hành khắp châu Âu và lan truyền nhanh chóng đến London, ông phải trở lại làng quê và trú ngụ tại đó trong hai năm 1665, 1666. Chính trong thời gian này, ông đã xây dựng những nền tảng của khoa học hiện đại: khám phá nguyên tắc chuyển động các hành tinh, của trọng lực, phát hiện bản chất của ánh sáng. Tuy thế ông không phổ biến các khám phá của mình. Ông trở lại Cambridge năm 1667 để lấy bằng cao học. Sau khi tốt nghiệp, ông dạy học tại Trinity. Năm 1669, ông giữ chức giáo sư trưởng khoa toán, kế nhiệm giáo sư Barrow, một chức danh vinh dự nhất trong giáo dục. Trong những năm sau đó, ông đã công thức hoá các đinh luật hấp dẫn, nhờ đó giải thích được sự chuyễn động của các hành tinh, mặt trăng và thủy triều.Ông cũng chế tạo ra kình viễn vọng hiện đại đầu tiên. Trong đời ông, ông ít khi chịu cho in các khám phá vĩ đại của mình, chỉ phổ biến trong phạm vi bạn bè đồng nghiệp. Năm 1687, trước sự khuyến khích nhiệt tình của nhà thiên văn học Halley, Newton mới chịu cho xúât bản cuốn Những nguyên tăc toán học. Tác phẩm này ngay lập tức được đánh giá là một trong những tác phẫm có ảnh hưởng lớn lao nhất của nhân loại. Cũng tương tự như thế, chỉ sau khi biết Leibniz đã in công trình của minh, ông mới công bố tác phẫm của mình về phép tính vi tich phân. Vĩ đại như thế, nhưng khi nói về minh ông luôn cho rằng sở dĩ ông có đôi khi nhìn xa hơn kẻ khác vì ông đứng trên vai của các vĩ nhân. Và với những khám phá lớn lao của mình, ông nói: "*Tôi thấy mình như một đứa trẻ chơi đùa trên bãi biển, may mắn gặp được những viên sỏi tròn trịa, hoặc một vỏ sò đẹp hơn bình thường, trong khi trước mặt là một đại dương bao la của chân lí mà tối chưa được biết*".

NỘI DUNG CỦA CHUYÊN ĐỀ

1. TÍCH PHÂN TRUY HỒI

Trong bài viết này chủ yếu là các bài toán ở dạng tự luân, mình sẽ giới thiệu qua để có thể không may đề thi thử của các trường có thể ra thì ta có thể xử lý được. Ở phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các dạng tích phân truy hồi dạng $I_n = \int_\alpha^\beta f(x,n)dx$ với các câu hỏi hay gặp là:

1. Thiết lập công thức truy hồi $I_n = g(I_{n\pm k})(k = \overline{1;n})$.
2. Chứng minh công thức truy hồi cho trước.

3. Sau khi thiết lập được công thức truy hồi yêu cầu đi tính I_n ứng với một vài giá trị *n* nào đó hoặc tính giới hạn của hàm số hoặc dãy số có liên quan với I_n.

Ta cùng xét các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Xét tích phân $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}
2. Tính I_5, I_6.
3. Tìm công thức tổng quát của I_n.
4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n=(n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Lời giải

1. Tìm mối quan hệ giữa I_n, I_{n+2}

Ta có: $I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\left(1-\cos^2 x\right)dx=I_n-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.\cos^2 xdx\,(1)$

Sử dụng công thức nguyên hàm từng phần ta đặt $\begin{cases}du=-\sin xdx\\ v=\int\sin^n x.\cos xdx=\dfrac{\sin^{n+1}x}{n+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin_n x.\cos^2 xdx=\left.\frac{\cos x\sin^{n+1}x}{n+1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}xdx=\frac{I_{n+2}}{n+1}(2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $I_{n+2}=I_n-\dfrac{I_{n+2}}{n+1}\Leftrightarrow I_n=\dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2}$

2. Tính I_5, I_6.

Sử dụng kết quả ở trên ta được: $\begin{cases}I_5=\dfrac{4}{5}I_3=\dfrac{8}{15}I_1=\dfrac{8}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\dfrac{8}{15}\\ I_6=\dfrac{5}{6}I_4=\dfrac{15}{24}I_2=\dfrac{15}{24}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\dfrac{15\pi}{96}\end{cases}$

3. Tìm công thức tổng quát của I_n.

Ta có: $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\dfrac{\pi}{4}$

Ta đã có kết quả $I_n=\dfrac{n+2}{n+1}I_{n+2}$, đến đây xét 2 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $n=2k\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$. Ta có: $I_2=\dfrac{4}{3}I_4, I_4=\dfrac{6}{5}I_6,\ldots,I_{2k-2}=\dfrac{2k}{2k-1}I_{2k}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_2=\frac{4.6\ldots2k}{3.5\ldots(2k-1)}I_{2k}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}=\frac{4.6\ldots2k}{3.5\ldots(2k-1)}I_{2k}\Leftrightarrow I_{2k}=\frac{3.5\ldots(2k-1)}{4.6\ldots2k}\frac{\pi}{4}$$

+ Trường hợp 2: Với n lẻ hay $n=2k-1$, ta có: $I_1=\dfrac{3}{2}I_3, I_3=\dfrac{5}{4}I_5,\ldots,I_{2k-3}=\dfrac{2k-1}{2k-3}I_{2k-1}$.

Nhân theo vế các đẳng thức ta được:

$$I_{2k-1}=\frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}I_1=\frac{2.4...(2k-2)}{3.5...(2k-1)}$$

4. Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n=(n+1)I_n.I_{n+1}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

Ta có: $u_n=(n+1)I_n.I_{n+1}=(n+1).\frac{n+2}{n+1}I_{n+2}I_{n+1}=(n+2)I_{n+1}.I_{n+2}=u_{n+1}$

Vậy $u_{n+1}=u_n=...=u_1=2I_1I_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2: Xét tích phân $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$

1. Tính I_n
2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

Lời giải

1. Tính I_n

Đặt $\begin{cases}u=(1-x^2)^n\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I_n=x(1-x^2)^n\Big|_0^1+2n\int_0^1x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$=2n\int_0^1\left(1-(1-x^2)\right)(1-x^2)^{n-1}dx=2n\left(\int_0^1(1-x^2)^{n-1}dx-\int_0^1(1-x^2)^n dx\right)=2n(I_{n-1}-I_n)$$

Vậy $I_n=2n(I_{n-1}-I_n)\Leftrightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\ (*)$

Từ $(*)$ ta có $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}=\frac{2n}{2n+1}.\frac{2n-2}{2n-1}I_{n-2}=\frac{4.6.8...2n}{5.7.9...(2n+1)}I_1$

Mặt khác ta lại có: $I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\Rightarrow I_n=\frac{2.4.6.8...2n}{3.5.7.9...(2n+1)}$.

2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

Ta có: $I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}\Rightarrow I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}I_n\Leftrightarrow\frac{I_{n+1}}{I_n}=\frac{2n+2}{2n+3}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+2}{2n+3}=1$

Ví dụ 3: Xét tích phân $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$ với $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Chứng minh rằng $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$
2. Tính I_5,I_6

Lời giải

1. Ta có:

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\left(\tan^{n+2}x+\tan^n x\right)-\tan^n x\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^n x\left(\tan^2 x+1\right)-\tan^n x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xd\left(\tan x\right)-I_n=\frac{1}{n+1}-I_n$$

Ta có điều phải chứng minh!

2. Ta có:

- $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=\frac{1}{2}\ln 2$
- $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\left(\tan x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{4-\pi}{4}$

Áp dụng công thức truy hồi $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$ ta được:

- $I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-I_1\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}$
- $I_6=\frac{1}{5}-I_4=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}-I_2\right)=\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 4:

1. Xét tích phân $I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}dx}{1+e^x}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n=\frac{e^{n-1}-1}{n-1}-I_{n-1}$.
2. Xét tích phân $I_n=\int_0^3\left(3-x\right)^n e^x dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n=-3^n+nI_{n-1}$

Lời giải

1. Ta có:

$$I_n+I_{n-1}=\int_0^1\frac{e^{nx}dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{e^{x(n-1)}dx}{1+e^x}=\int_0^1\frac{e^{x(n-1)}\left(e^x+1\right)dx}{1+e^x}=\frac{e^{x(n-1)}}{n-1}\Bigg|_0^1=\frac{e^{n-1}-1}{n-1}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

2. Xét tích phân $I_n=\int_0^3\left(3-x\right)^n e^x dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $I_n=-3^n+nI_{n-1}$

Đặt $\begin{cases}u=\left(3-x\right)^n\\ dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-n\left(3-x\right)^{n-1}dx\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow I_n=\left(3-x\right)^n e^x\Big|_0^3+n\int_0^3\left(3-x\right)^{n-1}e^x dx=-3^n+nI_{n-1}$

Từ đây có điều phải chứng minh!

Ví dụ 5: Cho $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Biết $\left(u_n\right)$ là dãy cho bởi $u_n=\frac{I_n}{I_{n+1}}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=v^n\\ dv=\sqrt{1-x}\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=nx^{n-1}dx\\ v=\int\sqrt{1-x}\,dx=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3\end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{2}{3}x^n\left(\sqrt{1-x}\right)^3\Big|_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1\left(\sqrt{1-x}\right)^3.x^{n-1}dx$$

$$= \frac{2}{3}n\left(\int_0^1\sqrt{1-x}.x^{n-1}dx - \int_0^1\sqrt{1-x}.x^n dx\right) = \frac{2}{3}n\left(I_{n-1} - I_n\right)$$

Vậy $I_n = \frac{2}{3}n\left(I_{n-1} - I_n\right) \Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} \Rightarrow I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}I_n \Rightarrow \lim u_n = \lim\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

2. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

Nguyên hàm phân thức hữu tỷ là một bài toán khá cơ bản, nhưng cũng được phát triển ra rất nhiều bài toán khó, trong mục này ta sẽ tìm hiểu cách giải quyết dạng toán này. Tổng quát với hàm hữu tỉ, nếu bậc của tử lớn hơn hoặc bằng bậc của mẫu thì phải chia tách phần đa thức, còn lại hàm hữu tỉ với bậc tử bé hơn mẫu. Nếu bậc của tử bé hơn bậc của mẫu thì phân tích mẫu ra các thừa số bậc nhất $(x+a)$ hay (x^2+px+q) bậc hai vô nghiệm rồi đồng nhất hệ số theo phần tử đơn giản: $\frac{A}{x+a};\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$. Đồng nhất hệ số ở tử thức thì tính được các hằng số A, B, C, … Kết hợp với các biến đổi sai phân, thêm bớt đặc biệt để phân tích nhanh.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN ĐA THỨC HỮU TỶ.

- $\int_a^b |P(x)|dx$: Chia miền xét dấu $P(x)$,
- $\int_a^b x(mx+n)^{\alpha}dx$: Đặt $u=mx+n$ hoặc phân tích,
- $\int_a^b (mx+n)(px^2+qx+r)^{\alpha}dx$: Đặt $u=px^2+qx+r$,
- $\int_a^b (x+m)^{\alpha}.(x+m)^{\beta}dx$: Nếu $\alpha<\beta$ thì đặt $u=x+n$.

CÁC DẠNG TÍCH PHÂN HÀM PHÂN THỨC

1. Dạng $\int_a^b \frac{1}{px^2+qx+r}dx$. Lập $\Delta=q^2-4pr$.

- Nếu $\Delta=0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(mx+n)^2}$, dùng công thức của hàm đa thức.
- Nếu $\Delta<0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2+k^2}$, đặt $x=k\tan t$
- Nếu $\Delta>0 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x^2-k^2}$, biến đổi $\frac{1}{x^2-k^2}=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{x-k}-\frac{1}{x+k}\right)$

2. Dạng $\int_a^b \frac{mx+n}{px^2+qx+r}dx$. Lập $\Delta=q^2-4pr$

- Nếu $\Delta\ge 0 \Rightarrow$ Phân tích và dùng công thức.
- Nếu $\Delta<0 \Rightarrow \frac{mx+n}{px^2+qx+r}=\frac{A(px^2+qx+r)'}{px^2+qx+r}+\frac{B}{(x+\alpha)^2+k^2}$

3. Dạng $\int_a^b \frac{dx}{x\left(1+x^n\right)^m} = \int_a^b \frac{x^{n-1}dx}{x^n\left(1+x^n\right)^m}$, đặt $t = 1 + x^n$.

Chú ý: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-a;a]$.

Nếu $f(x)$ lẻ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$. Nếu $f(x)$ chẵn thì $\int_{a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

CÁC CÔNG THỨC NÊN NHỚ.

- $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$
- $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{1}{(ax+b)^2+c^2}dx = \frac{\arctan\left(\frac{ax+b}{c}\right)}{ac} + C$

CÔNG THỨC TÁCH NHANH PHÂN THỨC HỮU TỶ

- $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \Rightarrow \begin{cases} A = \left.\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)}\right|_{x=a} \\ B = \left.\frac{P(x)}{(x-a)(x-c)}\right|_{x=b} \\ C = \left.\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}\right|_{x=c} \end{cases}$
- $\frac{P(x)}{(x-m)\left(ax^2+bx+c\right)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \Rightarrow \begin{cases} A = \left.\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\right|_{x=m} \\ Bx+C = \left.\frac{P(x)-A\left(ax^2+bx+c\right)}{x-m}\right|_{x=1000} \end{cases}$

Ví dụ : Tìm các nguyên hàm, tính các tích phân sau:

1. $\int \frac{x^4-2}{x^3-x}dx$
2. $\int \frac{dx}{x\left(1+x^8\right)}$
3. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$
4. $K = \int_0^2 \frac{x^4-x+1}{x^2+4}dx$
5. $L = \int_0^1 \frac{x^4+x^2+1}{x^6+1}dx$
6. $N = \int_0^{1/\sqrt[4]{3}} \frac{xdx}{x^8-1}$
7. $Q = \int_1^2 \frac{8x^7+2}{x\left(1+x^7\right)}dx$
8. $J = \int \frac{x^4+2}{x^6+1}dx$
9. $\int_4^3 \frac{x^{10}}{x^3+1}dx$
10. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

Lời giải

1. Ta có $\frac{x^4-2}{x^3-x}=x+\frac{x^2-2}{x^3-x}=x+\frac{x^2-2}{x(x-1)(x+1)}$.

Đặt $\frac{x^2-2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Rightarrow x^2-2=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A$

Đồng nhất hệ số thì được $A=2,B=-\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2}$, do đó:

$$\int f(x)dx=\int\left(x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C$$

2. Ta có $\int\frac{dx}{x(1+x^8)}=\int\frac{x^7dx}{x^8(1+x^8)}=\frac{1}{8}\int\frac{d(x^8)}{x^8(1+x^8)}=\frac{1}{8}\ln\frac{x^8}{1+x^8}+C$

3. Ta có $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C$

4. Đặt $x=2\tan t, x\in[0;2]\Leftrightarrow t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\Rightarrow K=\int_0^{\pi/4}\frac{16\tan^4t-2\tan t+1}{4(\tan^2t+1)}.\frac{2dt}{\cos^2t}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(16\tan^4t-2\tan t+1\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(16\tan^2t(1+\tan^2t)-16\tan^2t-2\tan t+1\right)dt$$

Từ đó tính được $K=-\frac{16}{3}+\frac{17\pi}{8}-\ln\sqrt{2}$

5. Ta có $L=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x^2}{x^6+1}\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$

Lần lượt đặt $x=\tan t, x^3=\tan u$ thì $L=\frac{5\pi}{12}$

6. Đặt $t=x^2$ thì $xdx=\frac{1}{2}dt$ .Khi $x=0$ thì $t=0, x=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ thì $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow N=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\left(\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan t\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{8}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)-\frac{\pi}{24}$$

7. Ta có $Q=\int_1^2\frac{8x^7+1+1}{x(1+x^7)}dx=\int_1^2\frac{8x^7+1}{x^8+x}dx+\int_1^2\frac{1}{x(1+x^7)}dx$

$$=\ln\left(x^8+x\right)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{x^6}{x^7\left(1+x^7\right)}dx=\ln 129+\frac{1}{7}\int_1^2\frac{d\left(x^7\right)}{x^7\left(1+x^7\right)}$$

$$=\ln 129+\frac{1}{7}\ln\frac{x^7}{1+x^7}\Big|_1^2=\ln 129+\frac{1}{7}\ln\frac{256}{129}$$

8. Ta có $J=\int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^4-x^2+1}\right)dx=C+\arctan x+\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$

Như vậy ta chỉ cần tính $K=\int\frac{dx}{x^4-x^2+1}$

Với trường hợp $x=0$ làm dễ dàng, xét trường hợp $x\neq 0$ ta có

$$K=\int\frac{\frac{dx}{x^2}}{x^2-1+\frac{1}{x^2}}=-\int\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}$$

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow K=\int\frac{t^2dt}{t^4-t^2+1}=\frac{1}{2}\left(\int\left[\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t}+\frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t}\right]dt-\int\frac{dt}{t^4-t^2+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t}+\frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t}\right)dt-\frac{1}{2}K\Rightarrow K=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^2+1-\sqrt{3}t}+\frac{1}{t^2+1+\sqrt{3}t}\right)dt$

Phần còn lại xin nhường lại cho bạn đọc!

9. Biến đổi tích phân cần tính ta được

$$\int_4^3\frac{x^{10}}{x^3+1}dx=\int_4^3\left(x^7-x^4+x-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^3+1}\right)dx$$

$$=\int_4^3\left[x^7-x^4+x-\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{x^3+1}\right]dx$$

Tính $I=\int_4^3\frac{1}{x^3+1}dx=\int_4^3\frac{d(x+1)}{(x+1)\left[x^2-x+1\right]}=\int_4^3\frac{d(x+1)}{(x+1)\left[(x+1)^2-3(x+1)+3\right]}$

Đặt $t=x+1\Rightarrow dt=dx\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int_5^4\frac{\left(t^2-3t+3\right)-\left(t^2-3t\right)}{t\left(t^2-3t+3\right)}dt=\frac{1}{3}\int_5^4\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\int_5^4\frac{t-3}{t^2-3t+3}dt$

$$=\frac{1}{3}\int_5^4\frac{dt}{t}-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int_5^4\frac{2t-3}{t^2-3t+3}dt-\frac{3}{2}\int_5^4\frac{dt}{t^2-3t+3}\right]$$

Đến đây xin nhường lại cho bạn đọc!

10. Ta có $I=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

Đặt $x+\frac{1}{x}=t$ khi đó ta được:

$$I=\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{dt}{t^2-2}=\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{dt}{\left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{5}{2}}^{2}\left(\frac{1}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{d\left(t-\sqrt{2}\right)}{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{d\left(t+\sqrt{2}\right)}{t+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{\frac{5}{2}}^{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{19-6\sqrt{2}}{17}\right)$$

3. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Để làm tốt được các bài toán nguyên hàm – tích phân hàm lượng giác ta cần nắm chắc được các biến đổi hạ bậc lượng giác, tích thành tổng, theo góc phụ $t=\tan\frac{x}{2},\ldots$

- $\frac{1}{\sin(x+a).\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}.\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$
- $\frac{1}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{1}{\sin(x+\alpha)}$
- $\frac{1}{a\sin x+b\cos x\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{1}{1\pm\cos(x+\alpha)}$
- $\frac{\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma}{a\sin x+b\cos x+c}=\frac{A(a\sin x+b\cos x+c)'}{a\sin x+b\cos x+c}+\frac{B}{a\sin x+b\cos x+c}$
- $\frac{1}{a\sin^2 x+b\sin x\cos x+\cos^2 x}=\frac{1}{a\tan^2 x+b\tan x+c}.\frac{1}{\cos^2 x}$
- $\frac{\sin x\cos x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^\alpha}=\frac{A(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)'}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^\alpha}$

Đặc biệt cận tích phân đối, bù, phụ thì đặt tương ứng $t=-x,t=\pi-x,t=\frac{\pi}{2}-x$. Tích phân liên kết, để tính *I* thì đặt thêm *J* mà việc tính tích phân $I+J$ và $I-J$ hoặc $I+kJ$ và $I-mJ$ dễ dàng lợi hơn. Tích phân truy hồi I_n theo I_{n-1} hay I_{n-2} thì $\sin^n x,\cos^n x$ tách lũy thừa 1 và dùng phương pháp tích phân từng phần còn $\tan^n x,\cot^n x$ tách lũy thừa 2 và dùng phương pháp tích phân đổi biến số. Ngoài ra ta cần phải nhớ:

1. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx;\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

2. Các dạng tích phân lượng giác:

- $\int_a^b P(x).\sin\alpha xdx,\int_a^b P(x).\cos\alpha xdx$: đặt $u=P(x),v'=\sin$ hoặc $\cos\alpha x$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x=\frac{\pi}{2}-t$
- $\int_0^{\pi}R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x=\pi-t$
- $\int_0^{2\pi}R(x,\sin x,\cos x)dx$: đặt $x=2\pi-t$

- $\int_a^b R(\sin x, \cos x)dx$: đặt $t = \tan\frac{x}{2}$, đặc biệt:

Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x, \cot x$.

Để tìm hiểu sâu hơn ta sẽ cùng đi vào các dạng toán cụ thể.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.

I. DẠNG 1. $I = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Dùng đồng nhất thức:

$$1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} = \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(a-b)} = \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(a-b)}$$

Từ đó suy ra: $I = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left[\ln|\sin(x+b)| - \ln|\sin(x+a)|\right] + C$$

2. CHÚ Ý.

Với cách này, ta có thể tìm được các nguyên hàm:

- $J = \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$
- $K = \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ bằng cách dùng đồng nhất thức $1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$

3. VÍ DỤ MINH HỌA.

Tính các nguyên hàm, tích phân sau:

- $I = \int \frac{dx}{\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$

Ta có: $1 = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right) - x\right]}{\frac{1}{2}} = 2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x\right]$

Từ đó: $I = 2\int \frac{\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin x\right]}{\sin x \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx = 2\int\left[\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right]dx$

$$=2\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}-2\int\frac{d\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=2\ln\left|\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|+C$$

- $I=\int\frac{dx}{\cos 3x\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}$

Ta có $1=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sin\left[\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)-3x\right]}{\frac{1}{2}}=2\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x\right]$

$$\Rightarrow I=2\int\frac{\left[\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\cos 3x-\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x\right]}{\cos 3x\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}dx=2\int\frac{\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}dx-2\int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{d\left(\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\right)}{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}+\frac{2}{3}\int\frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x}=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\cos 3x}{\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)}\right|+C$$

- $I=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}$

Ta có:

$$1=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}dx$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx+\sqrt{2}\int\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}dx$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{d\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}-\sqrt{2}\int\frac{d\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}=\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)}\right|+C$$

II. DẠNG 2. $I=\int\tan(x+a)\tan(x+b)dx$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Ta có $\tan(x+a)\tan(x+b)=\dfrac{\sin(x+a)\sin(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

$=\dfrac{\sin(x+a)\sin(x+b)+\cos(x+a)\cos(x+b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}-1=\dfrac{\cos(a-b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}-1$

Từ đó suy ra $I=\cos(a-b)\int\dfrac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}-1$

Đến đây ta gặp bài toán tìm nguyên hàm ở ***Dạng 1.***

2. CHÚ Ý

Với cách này, ta có thể tính được các nguyên hàm:

- $J=\int\cot(x+a)\cot(x+b)dx$
- $K=\int\tan(x+a)\tan(x+b)dx$

3. VÍ DỤ MINH HỌA

- $I=\int\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)dx$

Ta có $\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

$=\dfrac{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}-1$

$=\dfrac{\cos\left[\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}-1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}-1$

Từ đó $I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\int\dfrac{1}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}dx-\int dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}I_1-x+C$

Tính $I_1=\int\dfrac{dx}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

Ta có $1=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\sin\left[\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]}{\dfrac{1}{2}}=2\left[\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

Từ đó $I_1=2\int\dfrac{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}dx$

$$=2\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx-2\int \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}dx=2\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+C$$

Suy ra $I=\frac{\sqrt{3}}{2}.2\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-x+C=\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-x+C$

- $K=\int \tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$

Ta có $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$$=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+1$$

$$=\frac{\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+1=\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}+1$$

Từ đó: $K=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}dx+\int dx=\frac{1}{2}K_1+x+C$

Đến đây, bằng cách tính ở Dạng 1, ta tính được:

$$K_1=\int \frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+C\Rightarrow K=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|+x+C$$

III. DẠNG 3. $I=\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Có: $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$

$\Rightarrow a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$

$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right|+C$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

- $I=\int \frac{2dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=\int \frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x}=\int \frac{dx}{\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}}$

$$=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|+C$$

- $J=\int\frac{dx}{\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x-\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{\frac{\pi}{6}-2x}{2}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\right|+C$$

IV. DẠNG 4. $I=\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}\end{cases}$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

- $I=\int\frac{dx}{3\cos x+5\sin x+3}$

Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$. Từ đó ta có

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\frac{2t}{1+t^2}+3}=\int\frac{2dt}{3-3t^2+10t+3+3t^2}=\int\frac{2dt}{10t+6}$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(5t+3)}{5t+3}=\frac{1}{5}\ln|5t+3|+C=\frac{1}{5}\ln\left|5\tan\frac{x}{2}+3\right|+C$$

- $J=\int\frac{2dx}{2\sin x-\cos x+1}$

Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

Từ đó $J=\int\frac{2.\frac{2dt}{1+t^2}}{2.\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{4dt}{4t-1+t^2+1+t^2}=\int\frac{4dt}{2t^2+4t}=2\int\frac{dt}{t(t+2)}$

$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln|t|-\ln|t+2|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\tan\frac{x}{2}+2\right|+C$$

- $K=\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}$

Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \tan x=\frac{2t}{1-t^2}\end{cases}$

Từ đó $K=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2}{t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int tdt$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$$

V. Dạng 5. $I=\int\frac{dx}{a.\sin^2x+b.\sin x\cos x+c.\cos^2x}$

1. PHƯƠNG PHÁP.

$I=\int\frac{dx}{(a\tan^2x+b\tan x+c).\cos^2x}$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2x}=dt$. Suy ra $I=\int\frac{dt}{at^2+bt+c}$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

- $I=\int\frac{dx}{3\sin^2x-2\sin x\cos x-\cos^2x}=\int\frac{dx}{(3\tan^2x-2\tan x-1)\cos^2x}$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2x}=dt\Rightarrow I=\int\frac{dt}{3t^2-2t-1}=\int\frac{dt}{(t-1)(3t+1)}$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{3}{3t+1}\right)dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{4}\int\frac{d(3t+1)}{3t+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{3t+1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\tan x-1}{3\tan x+1}\right|+C$$

- $J=\int\frac{dx}{\sin^2x-2\sin x\cos x-2\cos^2x}=\int\frac{dx}{\left(\tan^2x-2\tan x-2\right)\cos^2x}$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2x}=dt$

$$\Rightarrow J=\int\frac{dt}{t^2-2t-2}=\int\frac{d(t-1)}{(t-1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-1-\sqrt{3}}{t-1+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\tan x-1-\sqrt{3}}{\tan x-1+\sqrt{3}}\right|+C$$

VI. DẠNG 6. $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a_2\sin x+b_2\cos x}dx$

1. PHƯƠNG PHÁP.

Ta tìm A,B sao cho: $a_1\sin x+b_1\cos x=A\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)$

2. VÍ DỤ MINH HỌA.

- $I=\int\frac{4\sin x+3\cos x}{\sin x+2\cos x}dx$

Ta tìm A,B sao cho $4\sin x+3\cos x=A\left(\sin x+2\cos x\right)+B\left(\cos x-2\sin x\right)$

$$\Rightarrow 4\sin x+3\cos x=(A-2B)\sin x+(2A+B)\cos x\Rightarrow\begin{cases}A-2B=4\\2A+B=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$$

Từ đó: $I=\int\frac{2\left(\sin x+2\cos x\right)-\left(\cos x-2\sin x\right)}{\sin x+2\cos x}dx$

$$=2\int dx-\int\frac{d\left(\sin x+2\cos x\right)}{\sin x+2\cos x}=2x-\ln\left|\sin x+2\cos x\right|+C$$

- $J=\int\frac{3\cos x-2\sin x}{\cos x-4\sin x}dx$

Ta tìm A,B sao cho $3\cos x-2\sin x=A\left(\cos x-4\sin x\right)+B\left(-\sin x-4\cos x\right)$

$$\Rightarrow 3\cos x-2\sin x=\left(A-4B\right)\cos x+\left(-4A-B\right)\sin x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A-4B=3\\4A+B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{11}{17}\\B=-\dfrac{10}{17}\end{cases}$$

Từ đó: $J=\int\frac{\frac{11}{17}\left(\cos x-4\sin x\right)-\frac{10}{17}\left(-\sin x-4\cos x\right)}{\cos x-4\sin x}dx$

$$=\frac{11}{17}\int dx-\frac{10}{17}\int\frac{d\left(\cos x-4\sin x\right)}{\cos x-4\sin x}=\frac{11}{17}x-\frac{10}{17}\ln\left|\cos x-4\sin x\right|+C$$

3. CHÚ Ý.

1. Nếu gặp $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)^2}dx$ ta vẫn tìm A,B sao cho:

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A\left(a_2\sin x+b_2\cos x\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)$$

2. Nếu gặp $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx$ ta tìm A,B sao cho:

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1=A\left(a_2\sin x+b_2\cos x+c_2\right)+B\left(a_2\cos x-b_2\sin x\right)+C$$

Chẳng hạn:

- $I=\int\frac{8\cos x}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$. Ta tìm A,B sao cho:

$$8\cos x=A\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)+B\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$$

$$\Rightarrow 8\cos x=\left(A\sqrt{3}-B\right)\sin x+\left(A+B\sqrt{3}\right)\cos x\Rightarrow\begin{cases}A\sqrt{3}-B=0\\A+B\sqrt{3}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2\\B=2\sqrt{3}\end{cases}$$

Từ đó: $I=\int\frac{2\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)+2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}dx$

$$=2\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+2\sqrt{3}\int\frac{d\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2}=2I_1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+C$$

Tìm $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|+C$$

Vậy $I=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right|-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}+C$

- $J=\int\frac{8\sin x+\cos x+5}{2\sin x-\cos x+1}dx$. Ta tìm A,B,C sao cho:

$$8\sin x+\cos x+5=A\left(2\sin x-\cos x+1\right)+B\left(2\cos x+\sin x\right)+C$$

$$\Rightarrow 8\sin x+\cos x+5=\left(2A+B\right)\sin x+\left(-A+2B\right)\cos x+A+C\Rightarrow\begin{cases}2A+B=8\\-A+2B=1\\A+C=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=2\\C=2\end{cases}$$

Từ đó: $J=\int\frac{3\left(2\sin x-\cos x+1\right)+2\left(2\cos x+\sin x\right)+2}{2\sin x-\cos x+1}dx$

$=3\int dx+2\int\frac{2\cos x+\sin x}{2\sin x-\cos x+1}dx+2\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$

$=3x+2\ln\left|2\sin x-\cos x+1\right|+2J_1$

- Tìm $J_1=\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+1}$. Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\begin{cases}dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{cases}$

$$\Rightarrow J_1=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2.\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}=\int\frac{dt}{t^2+2t}=\int\frac{dt}{t(t+2)}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+2}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$$

Vậy: $J=3x+2\ln|2\sin x-\cos x+1|+\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2}\right|+C$

VII. DẠNG 7. BIẾN ĐỔI ĐƯA VỀ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN HOẶC 6 DẠNG Ở TRÊN.

- $I=\int\cos 3x\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 7x)dx$

  $=\frac{1}{2}\int\cos xdx+\frac{1}{2}\int\cos 7xdx=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{14}\sin 7x+C$

- $I=\int\cos x\sin 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int\sin 2x(\cos 2x+\cos 4x)dx$

  $=\frac{1}{2}\int\sin 2x\cos 2xdx+\frac{1}{2}\int\sin 2x\cos 4xdx$

  $=\frac{1}{4}\int\sin 2xd(\sin 2x)+\frac{1}{4}\int(-\sin 2x+\sin 6x)dx$

  $=\frac{1}{8}\sin^2 2x+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{24}\cos 6x+C$

- $I=\int\tan x\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)dx$

Ta có: $\tan x\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}$

$$=\frac{\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos x\left(\cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sin x\left(1-2\sin^2 x+\frac{1}{2}\right)}{\cos x\left(2\cos^2 x-1-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)}{\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)}=\frac{3\sin x-4\sin^3 x}{4\cos^3 x-3\cos x}=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

Từ đó: $I=\int\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{d(\cos 3x)}{\cos 3x}=-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x|+C$

- $I=\int\sin^3 x\sin 3xdx$

Ta có: $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\Rightarrow\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$

$\Rightarrow\sin^3 x\sin 3x=\frac{3\sin x-4\sin 3x}{4}.\sin 3x$

$$=\frac{3}{4}\sin x\sin 3x-\frac{1}{4}\sin^2 3x=\frac{3}{8}(\cos 2x-\cos 4x)-\frac{1}{8}(1-\cos 6x)$$

$$=\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 6x-\frac{1}{8}$$

Từ đó: $I=\int\left(\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{3}{8}\cos 4x+\frac{1}{8}\cos 6x-\frac{1}{8}\right)dx=\frac{3}{16}\sin 2x-\frac{3}{32}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin 6x-\frac{1}{8}x+C$

- $I=\int\left(\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x\right)dx$

Ta có: $\sin^3 x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}$, $\cos^3 x=\dfrac{3\cos x+\cos 3x}{4}$

Suy ra $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{4}.\cos 3x+\dfrac{3\cos x+\cos 3x}{4}.\sin 3x$

$$=\frac{3}{4}\sin x\cos 3x-\frac{1}{4}\sin 3x\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x\sin 3x+\frac{1}{4}\cos 3x\sin 3x$$

$$=\frac{3}{8}\left[\sin(-2x)+\sin 4x\right]+\frac{3}{8}\left[\sin(-2x)-\sin 4x\right]=-\frac{3}{4}\sin 2x$$

Vậy $I=-\dfrac{3}{4}\int\sin 2xdx=\dfrac{3}{8}\cos 2x+C$

- $I=\int\dfrac{dx}{\sin x\cos^3 x}=\int\dfrac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\dfrac{1}{\tan x}.\dfrac{1}{\cos^2 x}.\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\int\dfrac{1}{\tan x}\left(1+\tan^2 x\right)\dfrac{dx}{\cos^2 x}$

Đặt $\tan x=t\Rightarrow\dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt$

$$\Rightarrow I=\int\frac{t^2+t}{t}dt=\int tdt+\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}t^2+\ln|t|+C=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\tan x|+C$$

- $I=\int\dfrac{dx}{\sin^4 x\cos x}=\int\dfrac{\cos xdx}{\sin^4 x\cos^2 x}$

Đặt $\sin x=t\Rightarrow\cos xdx=dt\Rightarrow I=\int\dfrac{dt}{t^4\left(1-t^2\right)}=\int\dfrac{1-t^4+t^4}{t^4\left(1-t^2\right)}dt=\int\dfrac{1+t^2}{t^4}dt+\int\dfrac{dt}{1-t^2}$

$$=\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)}=-\frac{1}{3}t^{-3}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3 x}-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$$

- $I=\int\dfrac{\sin 3x\sin 4x}{\tan x+\tan 2x}dx=\int\dfrac{\sin 3x\sin 4x}{\dfrac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}}dx=\int\sin 4x\cos 2x\cos xdx$

$$=\frac{1}{2}\int(\sin 6x+\sin 2x)\cos xdx=\frac{1}{2}\int\sin 6x\cos xdx+\frac{1}{2}\int\sin 2x\cos xdx$$

$$=\frac{1}{4}\int(\sin 7x+\sin 5x)dx+\frac{1}{4}\int(\sin 3x+\sin x)dx$$

$$=-\frac{1}{28}\cos 7x-\frac{1}{20}\cos 5x-\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{1}{4}\cos x+C$$

- $I=\int\dfrac{dx}{\sin^3 x}$.Đặt $\begin{cases}u=\dfrac{1}{\sin x}\\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx\\ v=-\cot x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int\frac{\cot x.\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cot x}{\sin x}-I_1$$

Tính $I_1=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^3 x}-\int\frac{dx}{\sin x}=I-\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

$$\Rightarrow I=-\frac{\cot x}{\sin x}-I_1=-\frac{\cot x}{\sin x}-I+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\Rightarrow 2I=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{\cot x}{\sin x}+C\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{\cot x}{2\sin x}+C$$

- $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx$

Biến đổi giả thiết ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+1\right)dx$$

Đặt $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(t^2+1\right)\ln\left(t^2+t+1\right)dt$.

Đến đây sử dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ bài toán sẽ được giải quyết

Cách 2. Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)dx$

Sử dụng nguyên hàm từng phần ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin x}dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}dx$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\ln 2-\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}dx\right)$$

Từ đây ta sẽ đi tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin x}dx$. Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x$ ta được

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\cos x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos x}dx\Rightarrow I=0$$

- $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Sử dụng tích phân từng phần ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(2\cos x+1)}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

Đặt $\begin{cases}u=2\cos x+1\\ dv=\frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=-\frac{d(1+3\cos x)}{3\sqrt{1+3\cos x}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin x dx\\ v=-\frac{2}{3}\sqrt{1+3\cos x}\end{cases}$

Khi đó

$$I=-\frac{2}{3}\left(2\cos x+1\right)\sqrt{1+3\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sqrt{1+3\cos x}dx$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos x}d\left(1+3\cos x\right)=\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\sqrt{\left(1+3\cos x\right)^3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{34}{27}$$

4. ĐƯA BIỂU THỨC VÀO TRONG DẤU VI PHÂN

Ở nội dung bài viết này ta sẽ nhắc tới một số bài toán sử dụng kỹ thuật đưa một biểu thức vào trong dấu vi phân, để làm được những bài toán này cần chú ý đến kỹ năng biến đổi, đạo hàm. Sau đây sẽ cùng xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1: Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}dx=\frac{1}{m}+\frac{1}{e\ln n}.\ln\left(p+\frac{e}{e+\pi}\right)$ với $m,\ n,\ p$ là các số nguyên dương. Tính tổng $P=m+n+p$

A. $P=5.$ **B.** $P=6.$ **C.** $P=7.$ **D.** $P=8.$

Lời giải

Những bài toán cần đến kỹ thuật này đa phần sẽ được phát biểu một cách khá lằng nhằng sẽ gây khó khăn cho người làm bài. Tuy nhiên hầu hết sẽ được đơn giản hóa bằng cách tách thành 2 tích phân khác, mà để làm được điều này thì trên tử phải tách theo mẫu số.

Ta có $I=\int_0^1 \frac{\pi x^3+2^x+ex^3 2^x}{\pi+e.2^x}dx=\int_0^1\left(x^3+\frac{2^x}{\pi+e.2^x}\right)dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1+A=\frac{1}{4}+A$

Tính $A=\int_0^1\frac{2^x}{\pi+e.2^x}dx$ Đặt $t=\pi+e.2^x\Rightarrow dt=e.\ln 2.2^x dx\Rightarrow 2^x dx=\frac{1}{e\ln 2}dt$

Khi đó $A=\frac{1}{e.\ln 2}.\int_{\pi+e}^{\pi+2e}\frac{dt}{t}=\frac{1}{e.\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+e}^{\pi+2e}=\frac{1}{e\ln 2}\ln\frac{\pi+2e}{\pi+e}=\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)$

Vậy $I=\frac{1}{4}+\frac{1}{e\ln 2}\ln\left(1+\frac{e}{e+\pi}\right)\Rightarrow\begin{cases}m=4\\ n=2\\ p=1\end{cases}\Rightarrow P=m+n+p=7.$

Nhận xét:

- Mấu chốt của bài toán là ta nhận ra được mẫu đạo hàm ra một phần của tử từ đó rút ra phép đặt mẫu để lấy vi phân.
- Ngoài ra nếu trình bày tự luận thì ta cũng không cần phải đặt mẫu làm gì cả, đưa trực tiếp tử vào trong dấu vi phân rồi nhân thêm hằng số bên ngoài.

Chọn ý **C.**

Ví dụ 2: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+(2x+\cos x)\cos x+1-\sin x}{x+\cos x}dx=a\pi^2+b-\ln\frac{c}{\pi}$ với *a,b,c* là các số hữu tỉ. Tính $P=ac^3+b.$

A. $P=\frac{5}{4}$ **B.** $P=\frac{3}{2}$ **C.** $P=2$ **D.** $P=3$

Lời giải

Vẫn là một bài toán với cách phát biểu không hề dễ chịu, mấu chốt vẫn là đưa biểu thức vào trong dấu vi phân và tách thành 2 tích phân như bài trước !

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x^2+2x\cos x+\cos^2 x\right)+\left(1-\sin x\right)}{x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x+\cos x\right)^2}{x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x+\cos x\right)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(x+\cos x\right)}{x+\cos x}$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2+\sin x+\ln\left|x+\cos x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}\pi^2+1+\ln\frac{\pi}{2}=\frac{1}{8}\pi^2+1-\ln\frac{2}{\pi}$$

Vậy $\begin{cases}a=\frac{1}{8}\\ b=1\\ c=2\end{cases}\Rightarrow P=ac^3+b=2.$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 3: Biết $I=\int_1^e\frac{\ln^2 x+\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^3}dx=\frac{1}{a}-\frac{b}{\left(e+2\right)^2}$ với $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$. Tính $P=b-a$.

A. $P=-8$ **B.** $P=-6$ **C.** $P=6$ **D.** $P=10$

Lời giải

Bài toán này không còn đơn giản như 2 bài toán trước nữa. Vẫn bám sát phương pháp làm ta sẽ phải đơn giản và làm xuất hiện biểu thức hợp lí để đưa vào trong dấu vi phân. Vậy biến đổi như thế nào để xuất hiện biểu thức đó?

Ta có $\int_1^e\frac{\ln^2 x+\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^3}dx=\int_1^e\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}.\frac{\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^2}dx$

Chú ý rằng $\left(\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\right)'=\frac{\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^2}$. Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$\int_1^e\frac{\ln^2 x+\ln x}{\left(\ln x+x+1\right)^3}dx=\int_1^e\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}d\left(\frac{\ln x+1}{\ln x+x+1}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}udu=-\frac{1}{2}t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{e+2}}=\frac{1}{8}-\frac{2}{\left(e+2\right)^2}$$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 4: Biết $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x^2-1}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}dx=\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=b-36a$.

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=2$ **D.** $P=5$

Lời giải

Sau đây ta sẽ tìm hiểu một số bài toán đưa biểu thức vào trong dấu vi phân với hàm phân thức hữu tỉ. Cách làm không phải là chỉ đưa tử vào trong dấu vi phân mà cần phải biến đổi bằng cách sau.

Chia cả hai vế cho x^2 ta được:

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6}=\int_{-2}^{-1}\frac{d\left(x+\frac{1}{x}-2\right)}{\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2}=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}-2}\Bigg|_{-2}^{-1}=\frac{1}{36}$$

Nhận xét:

- Kỹ thuật chia cả hai vế cho số hạng bậc cao nhất của tử sẽ được áp dụng khá nhiều trong những bài toán đưa biểu thức vào trong dấu vi phân với hàm phân thức hữu tỉ.
- Các bài toán này hầu hết cần phải biến đổi mẫu số để phân tích tử số ra một cách hợp lí từ đó mới có thể đưa vào trong dấu vi phân.

Chọn ý **A.**

Ví dụ 5: Biết $I=\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\left(\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}+\frac{9\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}\right)dx=\pi\sqrt{a}+\ln\left(b+6\sqrt{c}\right)$. Tính $\frac{ab}{c}$.

A. $\frac{22}{13}$ **B.** $\frac{48}{13}$ **C.** $\frac{37}{13}$ **D.** $\frac{28}{13}$

Lời giải

Bài toán này nhìn hình thức khá khủng bố, do yêu cầu của những bài toán này là làm đơn giản tích phân cho nên tránh việc cộng cả hai biểu thức trong dấu tích phân mà cần phải tách chúng ra để tính đơn giản hơn.

Ta có $I=\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\left(\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1}+\frac{9\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}\right)dx=\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{d\left(x^4+x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}+\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{9\left(x^2+1\right)}{x^4+x^2+1}dx$

Tích phân thứ nhất tính rất dễ dàng bằng cách đưa biểu thức vào trong dấu vi phân rồi, còn tích phân thứ 2 ta sẽ xử lý thế nào? Như bài trước ta sẽ chia cả tử và mẫu cho x^2, ta có:

$$9\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=9\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=9\int_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx=\frac{9}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\Bigg|_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

Đến đây dễ dàng tính được:

$$I=\ln\left(x^4+x^2+1\right)\Big|_{0}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}+\frac{9}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\Bigg|_{1}^{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}=\ln\left(66+18\sqrt{13}\right)+\sqrt{3}\pi$$

Chọn ý **A.**

Nhận xét: Ở bài toán trên ta đã sử dụng một tính chất của hàm phân thức hữu tỉ.

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

5. TÍCH PHÂN LIÊN KẾT

Có rất nhiều bài toán tích phân ta không thể sử dụng cách tính trực tiếp được hoặc tính trực tiếp tương đối khó với những bài toán như vậy ta thường sử dụng tới một kỹ thuật đó là tìm tích phân liên kết. Chủ yếu các bài toán sử dụng phương pháp này là các tích phân lượng giác hoặc có thể là hàm phân thức. Để hiểu rõ hơn ta cùng đi vào phương pháp.

Xét tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ ta sẽ tìm liên kết với tích phân $K=\int_a^b g(x)dx$ và tìm các mối liên hệ giữa I, K. Ta đi thiết lập mối liên hệ giữa I, K $\begin{cases} cI+dK=m \\ eI+vK=n \end{cases}$. Giải hệ này ta sẽ tìm được cả I và K.

Kinh nghiệm. *Ta thường gặp các trường hợp sau:*

- Hai tích phân $I=K$, tính được $I+K$ từ đó suy ra *I*.
- K là một tích phân tính đơn giản, khi đó từ $mI+nK=a$ ta sẽ tính được *I*.

Cách tìm tích phân. K. Việc tìm tích phân này chủ yếu dựa vào kinh nghiệm, riêng đối với tích phân lượng giác thì ta thường hay chú ý đến việc đổi chỗ sinx cho cosx để tạo tích phân liên kết!

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \sin^2 x dx$
2. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3} dx$
3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x \sin x}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx$
4. $I=\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}+3}$
5. $I=\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$

Lời giải

1. Ở ngay câu đầu ta đã thấy ngay sự khó khăn rồi phải chứ? Bây giờ sẽ nghĩ tới tích phân liên kết. Chú ý tới đẳng thức $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ta sẽ thử tạo tích phân liên kết với tích phân $K=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \cos^2 x dx$

Ta có: $I+K=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

Mặt khác ta lại có:

$$K-I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Từ đây suy ra được $I=\frac{1}{8}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

2. *Chú ý tích phân liên kết của ta là* $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx$.

Ta có: $I+\sqrt{3}K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2}dx=\frac{1}{4}I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Giờ cần tìm một mối liên hệ nữa giữa I,K, chú ý đến kiến thức kiến thức phần trước – Đưa biểu thức vào trong dấu vi phân, ở đây ta thấy rằng $(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x$, do đó nghĩ cách làm sao đó để có thể đưa một biểu thức vào trong dấu vi phân. Ta có:

$$K-I\sqrt{3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^3}=\frac{1}{2\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{3}-3}{6}$$

Từ đây suy ra $I=\frac{1+\sqrt{3}}{6}$.

3. *Chú ý nếu tính được tích phân* $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$

Ta có: $\left(\cos^4x\right)'=-4\cos^3x\sin x,\left(\sin^4x\right)'=4\sin^3x\cos x\Rightarrow\left(\cos^4x+\sin^4x\right)=-\sin 4x$

$$\Rightarrow 4(I-K)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x}{\sin^4x+\cos^4x}dx=-\ln\left(\sin^4x+\cos^4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0\Rightarrow I=K$$

Để ý rằng $I+K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos 2x)}{1+\cos^2 2x}=\frac{\pi}{4}$

Vậy $I=\frac{\pi}{8}$

4. *Chọn tích phân liên kết* $K=\int_0^1\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d\left(e^{2x}\right)}{e^{2x}+3}=\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+3}{4}\right)$

Ta có $3I+K=\int_0^1dx=1\Rightarrow I=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{e^2+3}{4}\right)$

5. *Ta chú ý tới hằng đẳng thức sau* $x^6+1=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$, *ta chọn* $K=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}dx$

Ta có:

- $I-K=\int_0^1\frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$
- $K=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1}=\frac{1}{3}\arctan x^3\Big|_0^1=\frac{\pi}{12}$

Vậy $I=\frac{\pi}{3}$

LUYỆN TẬP

Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

2. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{100} x}{\sin^{100} x+\cos^{100} x}dx$

3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

4. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

5. $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\sqrt{3}\cos x}dx$

6. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$

7. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.\cos^4 xdx$

8. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^{n+2} xdx$

9. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+1}{\sin x+\cos x+1}dx$

10. $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 2x}{\cos 2x}dx$

11. $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^6(1+x^2)}dx$

12. $I=\int_0^1\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$

13. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 5x}{\sin 2x}dx$

14. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 5x}{\cos x}dx$

15. $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cot x-3\tan x}{\cot x+\tan x}dx$

6. KỸ THUẬT LƯỢNG GIÁC HÓA

Khi tính tích phân ta sẽ gặp một số bài toán dưới dấu căn thức chứa một số hàm có dạng đặc biệt mà khó tính như bình thường được, khi đó ta sẽ nghĩ tới phương pháp lượng giác hóa. Với những dạng sau thì ta sẽ sử dụng phương pháp lượng giác hóa.

- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{a^2-x^2}$ thì ta đặt $x=a\sin t$ hoặc $x=a\cos t$
- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{x^2-a^2}$ thì ta đặt $x=\dfrac{a}{\sin t}$ hoặc $x=\dfrac{a}{\cos t}$
- Nếu bài toán có chứa x^2+a^2 hoặc $\sqrt{x^2+a^2}$ thì ta đặt $x=a\tan t$
- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{\dfrac{x+a}{a-x}}$ thì ta đặt $x=a\cos 2t$
- Nếu bài toán có chứa $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ thì ta đặt $x=a+(b-a)\sin^2 t$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$
2. $I=\int_0^1\dfrac{dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$
3. $I=\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
4. $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
5. $I=\int_0^{\frac{5}{2}}\sqrt{\dfrac{5+x}{5-x}}\,dx$

Lời giải

1. Hãy thử đặt bút làm câu này theo cách bình thường xem vấn đề ở đây là gì nhé!

Đặt $x=2\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$

$$\Rightarrow I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi$$

2. Đặt $x=2\sin t, t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos tdt$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos tdt}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{4\cos^2 t}=\frac{1}{4}\tan t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

3. Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$. Ta được:

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=\frac{1}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{16}$$

4. Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t\cos tdt}{\sqrt{\left(1-\sin^2 t\right)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 tdt}{\cos^4 t}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\tan^2 td\left(\tan t\right)=\frac{1}{3}\tan^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{9\sqrt{3}}$$

5. Đặt $x=5\cos 2t\Rightarrow dx=-10\sin 2tdt$

$$\Rightarrow I=-10\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{5\left(1+\cos 2t\right)}{5\left(1-\cos 2t\right)}}dt=20\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,dt=\frac{5}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$$

7. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Kỹ thuật từng phần là một kỹ thuât khá cơ bản nhưng rất hiệu quả trong các bài toán tính tích phân, ở trong phần này ta sẽ không nhắc lại các bài toán cơ bản nữa mà chỉ đề cập tới một số bài toán nâng cao trong phần này. Trước tiên ta sẽ đi nhắc lại và chứng minh công thức tính nguyên hàm – tích phân từng phần.

Giả sử $u(x), v(x)$ *là các hàm liên tục trên miền D khi đó ta có:*

$$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow \int d(uv) = \int udv + \int vdu$$
$$\Leftrightarrow uv = \int udv + \int vdu \Leftrightarrow \int udv = uv - vdu$$

Công thức trên chính là công thức nguyên hàm từng phần. Như vậy ta đã cùng chứng minh công thức tính nguyên hàm từng phần, sau đây cùng đi vào các bài toán cụ thể.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 x.f'(x).e^{f(x)}dx = 8$ và $f(3) = \ln 3$. Tính $I = \int_0^3 e^{f(x)}dx$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 11$. **C.** $I = 8 - \ln 3$. **D.** $I = 8 + \ln 3$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)e^{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{f(x)} \end{cases}$ Khi đó $\int_0^3 x.f'(x)e^{f(x)}dx = x.e^{f(x)}\Big|_0^3 - \int_0^3 e^{f(x)}dx$

$$\Rightarrow 8 = 3.e^{f(3)} - \int_0^3 e^{f(x)}dx \Rightarrow \int_0^3 e^{f(x)}dx = 9 - 8 = 1$$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 xdx = 10$ và $f(0) = 3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx$ bằng?

A. $I = -13$. **B.** $I = -7$. **C.** $I = 7$. **D.** $I = 13$.

Lời giải

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 xdx = 10$, đặt $\begin{cases} u = \cos^2 x \\ dv = f'(x)\cos^2 xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin 2xdx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow 10 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cos^2 xdx = \cos^2 xf(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx$$

$$\Leftrightarrow 10 = -f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin 2xdx = 10 + f(0) = 13$$

Chọn ý **D.**

Hai ví dụ mở đầu có vẻ vẫn đang chỉ dừng ở mức dễ áp dụng công thức, từ bài thứ 3 trở đi mọi thứ sẽ nâng cao hơn nhiều yêu cầu phải biến đổi và có tư duy hơn trong việc đặt u, dv!

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in[0;2]$. Tính $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$

A. $I=-\frac{14}{3}$. **B.** $I=-\frac{32}{5}$. **C.** $I=-\frac{16}{3}$. **D.** $I=-\frac{16}{5}$.

Lời giải

Một bài toán vận dung cao khá là khó, bât giờ ta sẽ đi tìm biểu thức dv, ta có thể dễ ràng thấy rằng $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|$, từ đây ta sẽ giải quyết bài tóa như sau.

Từ giả thiết $f(x)f(2-x)=e^{2x^2-4x}\Rightarrow f(2)=1$

Ta có $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$ Đặt $\begin{cases} u=x^3-3x^2 \\ dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=(3x^2-6x)dx \\ v=\ln|f(x)| \end{cases}$

$$\Rightarrow I=(x^3-3x^2)\ln|f(x)|\Big|_0^2-\int\limits_0^2(3x^2-6x)\ln|f(x)|dx=-3\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)|dx=-3J$$

Ta có $J=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)|dx \overset{x=2-t}{=} \int\limits_2^0\left[(2-t)^2-2(2-t)\right]\ln|f(2-t)|d(2-t)$

$$=\int\limits_2^0\left[(2-x)^2-2(2-x)\right]\ln|f(2-x)|d(2-x)=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln|f(2-x)|dx$$

$$\Rightarrow 2J=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)|dx+\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln|f(2-x)|dx=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln|f(x)f(2-x)|dx$$

$$=\int\limits_0^2(x^2-2x)\ln e^{2x^2-4x}dx=\int\limits_0^2(x^2-2x)(2x^2-4x)dx=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}$$

Vậy $I=-3J=-\frac{16}{5}$.

Chọn ý **D.**

Ví dụ 4: Cho biểu thức $S=\ln\left(1+\int\limits_{\frac{n}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin 2x)e^{2\cot x}dx\right)$ với số thực $m\neq 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $S=5.$ **B.** $S=9.$

C. $S=2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right).$ **D.** $S=2\tan\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right).$

Lời giải

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\sin 2x)e^{2\cot x}dx=2\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}dx-\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}dx\ (1)$

Xét $\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xe^{2\cot x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}d\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(-\frac{2}{\sin^2 x}\right)e^{2\cot x}dx$

$=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\cot x}dx\ \ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $I=\sin^2 x.e^{2\cot x}\Big|_{\frac{\pi}{4+m^2}}^{\frac{\pi}{2}}=-1+\sin^2\frac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}$

$$\Rightarrow S=\ln\left(\sin^2\frac{\pi}{4+m^2}.e^{2\cot\frac{\pi}{4+m^2}}\right)=2\cot\left(\frac{\pi}{4+m^2}\right)+2\ln\left(\sin\frac{\pi}{4+m^2}\right)$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x f'(x)dx=\int_0^1 e^x f''(x)dx\neq 0$. Tính $\frac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}$

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Ta đặt $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x f'(x)dx=\int_0^1 e^x f''(x)dx=a$. Sử dụng tích phân từng phần ta có:

$$\begin{cases} a=\int_0^1 e^x d\left(f'(x)\right)=e.f'(1)-f'(0)-\int_0^1 e^x f'(x)dx\Rightarrow e.f'(1)-f'(0)=2a \\ a=\int_0^1 e^x d\left(f(x)\right)=e.f(1)-f(0)-\int_0^1 e^x f(x)dx\Rightarrow e.f(1)-f(0)=2a \end{cases}\Rightarrow\frac{ef'(1)-f'(0)}{ef(1)-f(0)}=1$$

Chọn ý **D.**

8. ĐÁNH GIÁ HÀM SỐ ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Trong các bài toán tính tích phân ta sẽ gặp phải một số trường hợp tính tích phân hàm cho bởi 2 công thức phải sử dụng đến đánh giá để so sánh 2 biểu thức từ đó chia tích phân cần tính ra thành 2 phần.

Ta xét bài toán tổng quát. Tính tích phân $I=\int_a^b \min\left(f(x),g(x)\right)dx$

- Bước 1: Giải phương trình $f(x)=g(x)$
- Bước 2: Xét dấu cho hàm $h(x)=f(x)-g(x)$ trên $[a;b]$
- Bước 3: Chia tích phân cần tính ra thành các tích phân nhỏ.

Chú ý: *Yêu cầu bài toán có thể thay min bằng max.*

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

1. $I=\int_0^2 \min\left\{x^2,\sqrt{x}\right\}dx$
2. $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \min\left\{\tan x,x\right\}dx$
3. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\left\{\sin x,\cos x\right\}dx$
4. $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \min\left\{\tan x+2\sin x,3x\right\}dx$
5. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \max\left\{e^x+\cos x,2+x-\dfrac{x^2}{2}\right\}dx$

Lời giải

1. Xét phương trình $x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=0\end{array}\right.$

Ta thấy rằng khi $\left\{\begin{array}{l}x\in[0;1]\Rightarrow x^2\le\sqrt{x}\Rightarrow\min\left\{x^2;\sqrt{x}\right\}=x^2\\x\in[1;2]\Rightarrow x^2\ge\sqrt{x}\Rightarrow\min\left\{x^2;\sqrt{x}\right\}=\sqrt{x}\end{array}\right.$

Vậy $I=\int_0^2\min\left\{x^2,\sqrt{x}\right\}dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\sqrt{x}\,dx=\dfrac{4\sqrt{2}-1}{3}$

2. Xét hàm số $f(x)=\tan x-x$. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\ge0$. Vậy $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác ta lại có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

- Nếu $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]\Rightarrow f(x)\ge f(0)=0\Rightarrow\tan x\ge x$
- Nếu $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]\Rightarrow f(x)\le f(0)=0\Rightarrow\tan x\le x$

Vậy $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\min\left\{\tan x,x\right\}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\tan xdx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}xdx=\dfrac{\pi^2}{32}+\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Xét phương trình $\sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

- Nếu $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \sin x \le \cos x$
- Nếu $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \ge \cos x$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \sqrt{2}$

4. Xét hàm số: $f(x) = \tan x + 2\sin x - 3x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x - 3 = \frac{(\cos x - 1)^2 (2\cos x + 1)}{\cos^2 x} \ge 0 \forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \min\{\tan x + 2\sin x, 3x\} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} (\tan x + 2\sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3x dx = -1 - \ln 2 + \frac{\pi^2}{6}$$

5. Xét hàm số $f(x) = e^x + \cos x - 2 - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = x + e^x - \sin x - 1 \Rightarrow f''(x) = 1 + e^x + \cos x$

Ta thấy rằng $f''(x) \ge 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x)' \ge f(0) = 0 \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Mà $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x + \cos x) dx = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + e^{\frac{\pi}{4}}$

9. KỸ THUẬT THẾ BIẾN – LẤY TÍCH PHÂN 2 VẾ

Kỹ thuật thế biến – lấy tích phân 2 vế được áp dụng cho những bài toán mà giả thiết có dạng tổng của hai hàm số, khi đó ta sẽ lợi dụng mối liên hệ giữa các hàm theo biến số x để thay thế những biểu thức khác sao cho 2 hàm số đó đổi chỗ cho nhau, để rõ hơn ta sẽ cùng tìm hiểu các ví dụ sau.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện sau $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$ Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{5}$ **B.** $\frac{\pi}{10}$ **C.** $\frac{\pi}{15}$ **D.** $\frac{\pi}{20}$

Lời giải

Một bài toán khá hay có 2 cách giải được đưa ra, ta sẽ cùng tiếp cận 2 cách giải sau đây để thấy được nội dung của phương pháp được áp dụng trong phần này!

Cách 1: Lấy tích phân 2 vế.

Lấy tích phân 2 vế cận tự 0 tới 1 giả thiết ta được:

$$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow \int_0^1 2f(x)dx-3\int_0^1 f(1-x)d(1-x)=\int_0^1\sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 5\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{20}$$

Cách 2: Thế biến.

Chú ý vào hai biểu thức $x, 1-x$ bây giờ nếu ta thế x bởi $1-x$ thì ta sẽ được hệ phương trình theo hai biến $f(x), f(1-x)$.

Thế x bởi $1-x$ ta được:

$$\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}\\ 2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{1-(1-x)^2}\end{cases}\Rightarrow 4f(x)-9f(x)=2\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{-x^2+2x}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{-x^2+2x}}{-5}\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{20}$$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$ Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx$

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{3}{2}$ **C.** $I=\frac{5}{2}$ **D.** $I=\frac{7}{2}$

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $\frac{1}{x}$ ta được $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}$

Do đó ta có hệ $\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \\ 4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\frac{2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{2}$

Chọn ý **B.**

Cách khác. Từ $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x \Rightarrow f(x)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right)$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)dx=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dx-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$. Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}dx$ Đặt $t=\frac{1}{x}$ suy ra $dt=-\frac{1}{x^2}dx=-t^2dx \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$

Đổi cận $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\to t=2 \\ x=2\to t=\frac{1}{2} \end{cases}$ Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}t.f(t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(t)}{t}dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x}dx=I$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dx-2I \Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}dx=\frac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$ Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{5}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=\frac{4}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $1-x$ ta được:

$$(1-x)^2f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4$$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)f(1-x)+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4.$$

Ta có $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \Rightarrow f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x)$.

Thay vào (1) ta được: $(x^2-2x+1)\left[2x-x^4-x^2f(x)\right]+f(x)=1+2x-6x^2+4x^3-x^4$

$$\Leftrightarrow (1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=x^6-2x^5+2x^3-2x^2+1$$
$$\Leftrightarrow (1-x^2+2x^3-x^4)f(x)=(1-x^2)(1-x^2+2x^3-x^4) \Rightarrow f(x)=1-x^2$$

Vậy $I=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}(1-x^2)dx=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{0}^{1}=\frac{2}{3}$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$

Tính tích phân $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx$.

A. $I=-\frac{\pi}{10}$. **B.** $I=-\frac{\pi}{20}$. **C.** $I=\frac{\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+3f(x)=\frac{1}{4+x^2}$

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}\\ 2f(-x)+3f(x)=\frac{1}{4+x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+6f(-x)=\frac{2}{4+x^2}\\ 9f(x)+6f(-x)=\frac{3}{4+x^2}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{5(4+x^2)}$

Khi đó $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{\pi}{20}$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x$

Tính tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

A. $I=-2$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+f(x)=\cos x$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}2f(x)+f(-x)=\cos x\\ 2f(-x)+f(x)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+2f(-x)=2\cos x\\ f(x)+2f(-x)=\cos x\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\cos x.$

Khi đó $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos dx=\frac{1}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

Chọn ý **B.**

10. TÍCH PHÂN HÀM CHO BỞI 2 CÔNG THỨC

Ta hiểu nôm na tích phân hàm phân nhánh tức là các phép tính tích phân những hàm cho bởi hai công thức, đây là một vấn đề dễ không có gì khó khăn cả nếu đã từng gặp và biết phương pháp làm.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{khi } x\ge 0 \\ e^{2x} & \text{khi } x\le 0 \end{cases}$ Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx$

A. $I=\dfrac{3e^2-1}{2e^2}$. **B.** $I=\dfrac{7e^2+1}{2e^2}$. **C.** $I=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$ **D.** $I=\dfrac{11e^2-11}{2e^2}$

Lời giải

Chú ý là đây là hàm cho bởi 2 công thức nên ta sẽ tách tích phân cần tính ra thành 2 tích phân khác

Ta có $I=\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{0} e^{2x}dx+\int\limits_{0}^{2}(x+1)dx=\dfrac{9e^2-1}{2e^2}$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, thỏa $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}, f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $\ln 15$ **B.** $2+\ln 15$ **C.** $3+\ln 15$ **D.** $4+\ln 15$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}\Rightarrow f(x)=\int\dfrac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases} \ln(1-2x)+C_1 & ;x<\dfrac{1}{2} \\ \ln(2x-1)+C_2 & ;x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tới đây ta xét 2 trường hợp:

- Nếu $f(0)=1\Rightarrow \ln(1-2.0)+C_1=1\to C_1=1$.
- Nếu $f(1)=2\Rightarrow \ln(2.1-1)+C_2=2\to C_2=2$.

Do đó $f(x)=\begin{cases} \ln(1-2x)+1 \text{ khi } x<\dfrac{1}{2} \\ \ln(2x-1)+2 \text{ khi } x>\dfrac{1}{2} \end{cases}\to\begin{cases} f(-1)=\ln 3+1 \\ f(3)=\ln 5+2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(-1)+f(3)=3+\ln 5+\ln 3=3+\ln 15$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\dfrac{1}{3}$ Giá trị biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\ln 20+\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{1}{3}$ **C.** $\ln 80+1$ **D.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{8}{5}+1$

Lời giải

Tương tự như những bài trên, đây là bài toán cũng yêu cầu tính tích phân hàm cho bởi 2 công thức, chỉ có điều bài toán này có tới 3 hàm thì ta vẫn xử lý tương tự như bài trước thôi!

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)$

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}dx=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\ln(1-x)-\ln(-x-2)\right)+C_1 & ;x<-2\\ \frac{1}{3}\left(\ln(1-x)-\ln(x+2)\right)+C_2 & ;-2<x<1\\ \frac{1}{3}\left(\ln(x-1)-\ln(x+2)\right)+C_3 & ;x>1\end{cases}$$

Xét 2 trường hợp:

- Nếu $f(0)=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{1}{3}\left(\ln(1-0)-\ln(0+2)\right)+C_2=\frac{1}{3}\Rightarrow C_2=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$.
- Nếu $f(-3)-f(3)=0\Rightarrow C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}$.

Ta có $f(-4)+f(-1)-f(4)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_2+C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $(0;+\infty)\backslash\{e\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}$, $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6$ và $f(e^2)=3$ Giá trị biểu thức $f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)$ bằng?

A. $3(\ln 2+1)$ **B.** $2\ln 2$ **C.** $3\ln 2+1$ **D.** $\ln 2+3$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-1)}$ từ đây suy ra

$$\Rightarrow f(x)=\int\frac{1}{x(\ln x-1)}dx=\int\frac{d(\ln x-1)}{(\ln x-1)}=\ln|\ln x-1|+C=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+C_1 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+C_2 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}$$

Ta xét 2 trường hợp:

- $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\ln 6\Rightarrow\ln\left(1-\ln\frac{1}{e^2}\right)+C_1=\ln 6\Rightarrow C_1=\ln 2$
- $f(e^2)=3\Rightarrow\ln\left(\ln e^2-1\right)+C_2=3\Rightarrow C_2=3$

Do đó $f(x)=\begin{cases}\ln(1-\ln x)+\ln 2 \text{ khi } x\in(0;e)\\ \ln(\ln x-1)+3 \text{ khi } x\in(e;+\infty)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln 2+\ln 2\\ f(e^3)=\ln 2+3\end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e^3)=3(\ln 2+1)$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 5: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$ với điều kiện: $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Biết $F(0)=1$, $F(\pi)=0$, tính $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$

A. $P=0$ **B.** $P=2-\sqrt{3}$ **C.** $P=1$ **D.** Không $\exists$

Lời giải

Với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$F(x)=\int\frac{dx}{1+\sin 2x}=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\frac{dx}{2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Ta xét 2 trường hợp sau:

- Ta có $0;-\dfrac{\pi}{12}\in\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên:

$$F(0)-F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{-\frac{\pi}{12}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(0)=1}F\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Ta có $\pi;\dfrac{11\pi}{12}\in\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4}\right)$ nên:

$$F(\pi)-F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{F(\pi)=0}F\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $P=F\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)-F\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)=1$

Chọn ý **C.**

11. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

Những bài toán tích phân trong phần này không khó, tất cả được che giấu dưới một lớp các ẩn số, việc làm của chúng ta là phát hiện ra được cách đặt ẩn để đưa tất cả về dạng chuẩn thì bài toán sẽ được giải quyết hoàn toàn.

Ví dụ 1: Cho $\displaystyle\int_0^{2017}f(x)dx=2$. Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\sqrt{e^{2017}-1}}\frac{x}{x^2+1}.f\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]dx.$

A. $I=1$ **B.** $I=2$ **C.** $I=4$ **D.** $I=5$

Lời giải

Thoạt nhìn thì có lẽ tương đối khủng, nhưng tuy nhiên bằng cách đặt ẩn phụ thì bài toán này trở nên vô cùng đơn giản.

Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)$, suy ra $dt=\dfrac{2xdx}{x^2+1}\Rightarrow\dfrac{xdx}{x^2+1}=\dfrac{dt}{2}$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=\sqrt{e^{2017}-1} \to t=2017 \end{cases}$

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2017} f(t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2017} f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{1}^{9}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4$, $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{3} f(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Ở đây có 2 giả thiết cần biến đổi để đưa về tích phân liên quan tới hàm $f(x)$.

- Xét $\int\limits_{1}^{9}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4$. Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x \Rightarrow 2tdt=dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \to t=1 \\ x=9 \to t=3 \end{cases}$ Suy ra $\Rightarrow 4=\int\limits_{1}^{9}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int\limits_{1}^{3} f(t)2dt \Rightarrow \int\limits_{1}^{3} f(t)dt=2$.

- Xét $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2$ Đặt $u=\sin x \Rightarrow du=\cos x dx$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \to u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \to u=1 \end{cases}$. Suy ra $2=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=\int\limits_{0}^{1} f(t)dt$

Vậy $I=\int\limits_{0}^{3} f(x)dx=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx+\int\limits_{1}^{3} f(x)dx=4$.

Chọn ý **C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=4$, $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2f(x)}{x^2+1}dx=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1} f(x)dx$.

A. $I=6$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=4$. Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(\tan^2 x+1)dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0 \to t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \to t=1 \end{cases} \Rightarrow 4=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=\int_0^1\frac{f(t)}{t^2+1}dt=\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx$

Từ đó suy ra $I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx+\int_0^1 \frac{x^2f(x)}{x^2+1}dx=4+2=6$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)dx=1$, $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx=1$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

Lời giải

- Xét $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)dx=1$.

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-2\sin x.\cos xdx=-2\cos^2 x.\tan xdx=-2t.\tan xdx\Rightarrow \tan xdx=-\frac{dt}{2t}$

Khi đó $1=A=-\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x}dx\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x}dx=2$

- Xét $B=\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx=1$

Đặt $u=\ln^2 x\Rightarrow du=\frac{2\ln x}{x}dx=\frac{2\ln^2 x}{x\ln x}dx=\frac{2u}{x\ln x}dx\Rightarrow \frac{dx}{x\ln x}=\frac{du}{2u}$

Khi đó $1=B=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(u)}{u}du=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(x)}{x}dx\Rightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x}dx=2$

- Xét tích phân cần tính $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$

Đặt $v=2x\Rightarrow I=\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(v)}{v}dv=\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x}dx+\int_1^4 \frac{f(x)}{x}dx=2+2=4$.

Chọn ý **D.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^5+4x+3)=2x+1\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_{-2}^{8} f(x)dx$.

A. $\frac{32}{3}$ **B.** 10 **C.** 72 **D.** 2

Lời giải

Vấn đề ở câu này nằm ở giả thiết, vậy làm sao để sử dụng giả thiết để tính được tích phân mà đề bài yêu cầu đây? Ý tưởng rất đơn giản đó là đặt $x=t^5+4t+3$.

Đặt $x=t^5+4t+3\Rightarrow dx=(5t^4+4)dt$ khi đó ta được:

$$\int_{-2}^{8} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(t^5+4t+3\right)\left(5t^4+4\right)dt = \int_{-1}^{1}(2t+1)\left(5t^4+4\right)dt = 10$$

Chọn ý **B.**

12. TÍCH PHÂN ĐỔI CẬN – ĐỔI BIẾN

Các bài toán tích phân đổi biến đổi cận là các bài toán tương đối hay, xuất hiện thường xuyên trong các đề thi thử và đề thi THPT Quốc Gia. Để làm tốt dạng này ta cần phải nhớ những kiến thức sau:

Tính chất 1. Cho tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$.

- Đặt $x=a+b-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I=\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$
- Với 2 số *m,n* ta luôn có $I=\frac{1}{m+n}\int_a^b (m.f(x)+n.f(a+b-x))dx$

Tính chất 2. Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì ta có:

- $\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$
- $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=2\int_{-a}^0 f(x)dx$
- $I=\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{-a}^a \frac{f(-x)}{b^{-x}+1}dx=\int_{-a}^a \frac{b^x.f(x)}{b^x+1}dx \Rightarrow 2I=\int_{-a}^a f(x)dx$

Chứng minh

Ở đây sẽ chứng minh một tính chất tiêu biểu, các tính chất còn lại sẽ chứng minh tương tự.

Ta chứng minh: $I=\int_{-a}^a \frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_{-a}^a \frac{f(-x)}{b^{-x}+1}dx=\int_{-a}^a \frac{b^x.f(x)}{b^x+1}dx \Rightarrow 2I=\int_{-a}^a f(x)dx$

Do $f(x)$ là hàm chẵn nên ta luôn có $f(x)=f(-x)$

Đặt $x=-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I=-\int_a^{-a} \frac{f(-t)}{b^{-t}+1}d(t)=\int_{-a}^a \frac{b^t.f(t)}{b^t+1}dt=I=\int_{-a}^a \frac{b^x.f(x)}{b^x+1}dx$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

Tính chất 3. Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì ta có:

- $\int_{-a}^0 f(x)dx=-\int_0^a f(x)dx$
- $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

Tính chất này chứng minh tương tự như với hàm chẵn!

Tính chất 4. Nếu $f(x)$ là hàm tuần hoàn chu kì T, $f(x+T)=f(x)$ thì ta có:

- $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$
- $\int_0^{nT} f(x)dx=n\int_0^T f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$

Tính chất 5. Kỹ thuật xử lý một số bài toán sử dụng tính chất $\int_a^b f(a+b-x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

Cách làm chung cho những bài thuộc dạng này đó là:

Viết 2 lần giả thiết $\begin{cases} I=\int_a^b f(x)dx \\ I=\int_a^b f(a+b-x)dx \end{cases} \Rightarrow 2I=\int_a^b \left(f(x)+f(a+b-x)\right)dx$

Với cách làm này ta sẽ có cách giải quyết tổng quát rất nhanh những bài toán có dạng mà giả thiết cho $f(x)f(a+b-x)=c>0$. Khi đó ta có tính chất sau: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}dx=\frac{b-a}{2\sqrt{c}}$

Chứng minh

Ta viết lại 2 lần giả thiết như sau:

$$\begin{cases} I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}dx \\ I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}+f(a+b-x)}dx \end{cases} \Rightarrow 2I=\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{c}+f(x)}+\frac{1}{\sqrt{c}+f(a+b-x)}\right)dx$$

Ta có:

$$g(x)=\frac{2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)}{c+\sqrt{c}\left(f(x)+f(a+b-x)\right)+f(x)f(a+b-x)}=\frac{2\sqrt{c}+f(x)+f(a+b-x)}{c+\sqrt{c}\left(f(x)+f(a+b-x)\right)+c}=\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$\Rightarrow 2I=\int_a^b \frac{1}{\sqrt{c}}dx \Rightarrow I=\frac{b-a}{2\sqrt{c}}$$ - *điều phải chứng minh*

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Lời giải

Giả thiết có tổng nên gợi ý ngay đến sử dụng tính chất 1 . Ta có:

$$I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{1+1}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}\,dx=6$$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 2: Có bao nhiêu số thực $a\in[-2017;2017]$ thỏa mãn $\int_{-a}^{a}\frac{\cos x}{2018^x+1}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

A. 1284 **B.** 1285 **C.** 1286 **D.** 1287

Lời giải

Bài này chính là tính chất 2! Áp dụng tính chất 2 ta có:

$$\int_{-a}^{a}\frac{\cos x}{2018^x+1}dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \int_{-a}^{a}\cos x dx=\sqrt{3}\Leftrightarrow \sin a=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ a=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{R})$$

- Nếu $a=\frac{\pi}{3}+k2\pi \Rightarrow -321\le k\le 320$
- Nếu $a=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \Rightarrow -321\le k\le 320$

Vậy có 1284 số a thỏa mãn yêu cầu.

Chọn ý **A.**

Ví dụ 3: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(x+4)\forall x\in\mathbb{R}, \int_0^4 f(x)dx=1$ và $\int_1^2 f(3x+5)dx=12$. Tính $\int_0^7 f(x)dx$.

A. 35 **B.** 36 **C.** 37 **D.** 38

Lời giải

Nhìn qua ta nhận thấy ngay dấu hiệu của hàm tuần hoàn, tuy nhiên phải xử lý giả thiết thứ 2 đã!

Ta có: $\int_1^2 f(3x+5)dx=12 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_1^2 f(3x+5)d(3x+5)=12 \Leftrightarrow \int_8^{11} f(x)dx=36$

Áp dụng tính chất thứ 3 của hàm tuần hoàn $\int_a^b f(x)dx=\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$ ta có:

$$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx=\int_0^4 f(x)dx+\int_{4+4}^{7+4} f(x)dx=37$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 4: Cho $a+b=2018$ và $I=\int_a^b \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}}dx=10$. Tính $J=\int_a^b \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)dx$.

A. $-\frac{9}{2\pi}$ **B.** $-\frac{9}{3\pi}$ **C.** $-\frac{9}{\pi}$ **D.** $-\frac{8}{\pi}$

Lời giải

Đây là bài toán có giả thiết $a+b=2018$ và tích phân các cận từ a tới b nên ta sẽ chú ý đến tính chất thứ 5.

Ta có $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}} \Rightarrow f(2018-x)=\frac{\sqrt{2018-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{2018-x}}$

Theo cách làm của tính chất 5 ta có:

$$2I=\int_a^b \left(f(x)+f(2018-x)\right)dx=2\int_a^b dx=10 \Leftrightarrow a-b=-20$$

Kết hợp với giả thiết ta giải ra được $\begin{cases} a=999 \\ b=1019 \end{cases} \Rightarrow J=\int_a^b \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)dx=\int_{999}^{1019}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)dx=-\frac{9}{2\pi}$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ thỏa mãn $f(x)=f(2-x), \int_0^2 f(x)dx=10$. Tính $\int_0^2 (x^3-3x^2)f(x)dx$

A. -40 **B.** 20 **C.** 40 **D.** -20

Lời giải

Vẫn là ý tưởng cũ dạng toán cũ sử dụng đến tính chất 5.

Ta có:

$$\begin{cases} I = \int_0^2 \left(x^3 - 3x^2\right) f(x)\,dx \\ I = \int_0^2 \left((2-x)^3 - 3(2-x)^2\right) f(2-x)\,dx \end{cases} \Rightarrow 2I = -4\int_0^2 f(x)\,dx = -40 \Rightarrow I = -20$$

Chọn ý **D.**

13. TÍCH PHÂN CÓ CẬN THAY ĐỔI

Nếu như bình thường ta hay xét với những bài tích phân có cận là các hằng số cố định thì trong phần này ta sẽ cùng tìm hiểu các bài toán có cận là các hàm theo biến x. Trước tiên để làm được những bài toán này ta cần nhớ kiến thức sau:

Định lý: Nếu $f(x)$ là hàm khả tích trên $[a;b]$, liên tục tại mọi $x\in[a;b]$ thì hàm số $F(x)$ xác định bởi $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ khả vi tại x và $F'(x)=f(x)$.

Tổng quát ta có $F'(x)=\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right)'=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x))$

Phương pháp chung: Để giải những bài toán ở phần này tất cả đều theo 2 bước chính:

- Bước 1: Đạo hàm giả thiết
- Bước 2: Biến đổi kết quả của đạo hàm để suy ra yêu cầu của bài toán.

Sau đây là những ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3x^5+96=\int_a^x f(t)dt$. Tìm a?

A. -96 **B.** -2 **C.** 4 **D.** 15

Lời giải

Những ai lần đầu gặp bài này ắt hẳn sẽ rất khó khăn, tuy nhiên ta đã có phương pháp rồi do đó sẽ bám sát nó!

Lấy đạo hàm hai vế ta được $15x^4=f(x)$

Từ đây suy ra $3x^5+96=\int_a^x 15x^4dt=3t^5\Big|_a^x=3\left(x^5-a^5\right)\Rightarrow a=-2$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 2: Cho $[f(x)]^3=\int_0^x\left([f(t)]^3-[f'(t)]^3+3f(t)[f'(t)]^2\right)dt+2018$. Tính $f(1)$.

A. $2018e$ **B.** $-2018e$ **C.** $\sqrt[3]{2018e}$ **D.** $-\sqrt[3]{2018e}$

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$[f(x)]^3=[f(x)]^3-[f'(x)]^3+3f(x)[f'(x)]^2$$
$$\Leftrightarrow\left(f(x)-f'(x)\right)^3=0\Leftrightarrow f(x)=f'(x)\Rightarrow f(x)=ce^x$$

Thay vào giả thiết ta có:

$$\left(ce^x\right)^3=\int_0^x\left(\left(ce^t\right)^3-\left(ce^t\right)^3+3ce^t\left(ce^t\right)^2\right)dt+2018$$
$$\Leftrightarrow\left(ce^x\right)^3=\int_0^x\left(3c^3e^{3t}\right)dt+2018=3c^3.\frac{e^{3t}}{3}\Bigg|_0^x+2018$$
$$\Rightarrow c=\sqrt[3]{2018}\Rightarrow f(1)=e\sqrt[3]{2018}$$

Chú ý:

- Ở lời giải trên có chỗ $f(x)=f'(x)\Rightarrow f(x)=ce^{x}$ vấn đề này ta sẽ được tìm hiểu ở phần sau!
- Bước tìm hằng số c ở đoạn sau chú ý là ta đang coi x cố định để tính tích phân cho ra một hàm theo biến x.

Chọn ý **C.**

Ví dụ 3: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^{2018}+1}}dt>0$

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(-\infty;+\infty)\setminus\{0\}$ **D.** $(0;+\infty)$

Lời giải

Đặt $f(x)=\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^{2018}+1}}dt\Rightarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{2018}+1}}, f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra được $x\in(-\infty;+\infty)\setminus\{0\}$.

Chọn ý **C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời điều kiện $\begin{cases} g(x)=1+2018\int\limits_0^x f(t)dt \\ g(x)=f^2(x) \end{cases}$. Tính $I=\int\limits_0^1 \sqrt{g(x)}dx$

A. $I=\frac{1009}{2}$. **B.** $I=505$. **C.** $I=\frac{1011}{2}$. **D.** $I=\frac{2019}{2}$.

Lời giải

Theo cách làm chung thì ta vẫn đi lấy đạo hàm hai vế!

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} g'(x)=2018f(x) \\ g'(x)=2f'(x).f(x) \end{cases}\Rightarrow 2018f(x)=2f'(x).f(x)$

$$\Leftrightarrow 2f(x)\left[1009-f'(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=0\ (L) \\ f'(x)=1009\Rightarrow f(x)=1009x+C \end{array}\right.$$

Thay ngược lại, ta được $1+2018\int\limits_0^x(1009t+C)dt=(1009x+C)^2$

$$\Leftrightarrow 1+2018\left(\frac{1009}{2}t^2+Ct\right)\Bigg|_0^x=(1009x+C)^2 \Leftrightarrow C^2=1.$$

Suy ra $f(x)=1009x+1$ hoặc $f(x)=1009x-1$ (loại vì $f(x)=1009x-1$).

Khi đó $I=\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}\,dx=\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1(1009x+1)dx=\dfrac{1011}{2}$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $f^2(x)\le 1+3\int\limits_0^x f(t)dt=g(x)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}\,dx$ có giá trị lớn nhất là?

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{7}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $g(x)=1+3\int\limits_0^x f(t)dt$ ta có $\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(x)=3f(x)\end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge f^2(x)\Rightarrow g(x)\ge\dfrac{[g'(x)]^2}{9}\Leftrightarrow\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\le\dfrac{3}{2}$.

Lấy tích phân cận từ $0\to t$ ta được:

$$\int\limits_0^t\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}dx\le\int\limits_0^t\frac{3}{2}dx\Leftrightarrow\sqrt{g(x)}\Big|_0^t\le\frac{3}{2}x\Big|_0^t$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{g(t)}-\sqrt{g(0)}\le\frac{3}{2}t\Leftrightarrow\sqrt{g(t)}\le\frac{3}{2}t+1.$$

Do đó $\int\limits_0^1\sqrt{g(x)}\,dx\le\int\limits_0^1\left(\dfrac{3}{2}x+1\right)dx=\dfrac{7}{4}$

Chọn ý **B.**

14. BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI F'(X) VÀ F(X)

Trong phần này ta sẽ cùng nhau tìm hiểu về một lớp bài toán liên quan tới quan hệ của hai hàm $f'(x), f(x)$, đây là một dạng đã xuất hiện trong đề thi THPT Quốc Gia 2018 của Bộ GD&ĐT và trong rất nhiều đề thi thử của các trường chuyên, ta sẽ cùng bắt đầu tìm hiểu vấn đề này ngay sau đây.

1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TÍCH.

Ta sẽ bắt gặp các bài toán có dạng $f'(x)=g(x).h(f(x))$, với $g(x)$ là hàm theo biến x thì khi gặp những bài toán này cách làm chung của ta sẽ là lấy nguyên hàm 2 vế, cụ thể:

$$f'(x)=g(x).h(f(x))\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{h(f(x))}=g(x)\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{h(f(x))}dx=\int g(x)dx$$

Hoặc có thể lấy tích phân 2 vế, đến đây thì tùy thuộc vào yêu cầu và giả thiết của bài toán thì ta có thể suy ra kết quả cần tính.

Để cùng hiểu rõ hơn ta sẽ bắt đầu với những ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3(f(x))^2\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng?

A. $-\frac{41}{100}$ **B.** $-\frac{1}{10}$ **C.** $-\frac{391}{400}$ **D.** $-\frac{1}{40}$

Đề thi THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Phân tích: Nếu ban đầu gặp dạng này thì có lẽ ta sẽ không biết cách sử lý thế nào, tuy nhiên bám sát vào bài toán tổng quát ta sẽ có hướng làm như sau:

Giả thiết tương đương với: $f'(x)=4x^3(f(x))^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{(f(x))^2}=4x^3$.

Đến đây ta sẽ lấy nguyên hàm hay tích phân? Chú ý là với những bài toán bắt tính giá trị của hàm số tại một điểm nào đó mà giả thiết đã cho giá trị của hàm tại một điểm nào đó có giá trị xác định thì ta sẽ lấy tích phân hai vế. Lấy tích phân cận từ 1 đến 2 cả 2 vế ta được:

$$\frac{f'(x)}{(f(x))^2}=4x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{(f(x))^2}dx=\int_1^2 4x^3dx=15$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}\Bigg|_1^2=15\Leftrightarrow-\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=15\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=2$ và $\left[f(x)\right]^4\left[f'(x)\right]^2\left(x^2+1\right)=1+\left[f(x)\right]^3\ \forall x\in[0;1]$. Biết rằng $f'(x)\ge 0, f(x)>0 \forall x\in[0;1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2<f(1)<3$ **B.** $3<f(1)<4$ **C.** $4<f(1)<5$ **D.** $5<f(1)<6$

Đề thi thử chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi

Lời giải

Vẫn là ý tưởng đó nhưng có vẻ đã được tác giả chôn giấu kỹ hơn!

Ta bám sát bài toán tổng quát, chú ý với bài toán tổng quát thì $f'(x)$ chỉ ở bậc 1 vậy làm sao để đưa về bậc 1 bây giờ? Rất đơn giản thôi ta sẽ lấy căn hai vế!

Ta có:

$$f'(x)f^2(x)\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1+f^3(x)}\Leftrightarrow \frac{f'(x)f^2(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1\frac{f'(x)f^2(x)}{\sqrt{1+f^3(x)}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1\frac{d\left(1+f^3(x)\right)}{\sqrt{1+f^3(x)}}dx=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{1+f^3(x)}\Big|_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+f^3(x)}-\sqrt{1+2^3}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow f(1)=2.6051...$$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên $[1;+\infty)$, thỏa $f(1)=0$, $e^{2f(x)}.\left[f'(x)\right]^2=4x^2-4x+1$ với mọi $x\in[1;+\infty)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-1<f'(4)<0.$ **B.** $0<f'(4)<1.$ **C.** $1<f'(4)<2.$ **D.** $2<f'(4)<3.$

Lời giải

Câu này thoạt nhìn có vẻ thấy khá khó khăn nhưng vẫn ý tưởng giống bài của chuyên Lê Khiết thôi ta sẽ lấy căn hai vế!

Lấy căn hai vế ta được $e^{f(x)}f'(x)=2x-1$ do $f'(x)$ không âm trên $[1;+\infty)$

$$\Rightarrow \int e^{f(x)}f'(x)dx=\int(2x-1)dx\Leftrightarrow e^{f(x)}=x^2-x+C.$$

Thay $x=1$ vào hai vế, ta được $e^{f(1)}=1^2-1+C\Rightarrow C=1.$

Suy ra $e^{f(x)}=x^2-x+1\Rightarrow f(x)=\ln\left(x^2-x+1\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}\Rightarrow f'(4)=\frac{7}{13}.$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}[f'(x)]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq 0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Lời giải

Ta đã nhìn thấy chút bóng dáng của $P=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}=1\Rightarrow\int\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}dx=x\Leftrightarrow-\frac{1}{f'(x)}=x+C\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+C}$$

Mà $f'(0)=-1\Rightarrow C=1\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+1}$. Vậy $P=\int_0^1 f'(x)dx=-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=-\ln 2\approx-0,69$.

Chọn ý **B.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(x)\neq-1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^3\frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}dx$

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(0)=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f(3)=2.$

Do $f(3-x)f(x)=1\Rightarrow[1+f(3-x)]^2.f^2(x)=[1+f(x)]^2$.

Khi đó ta được:

$$I=\int_0^3\frac{xf'(x)}{[1+f(x)]^2}dx=-\int_0^3 xd\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\Bigg|_0^3+\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx=-1+J.$$

Tính $J=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx\overset{t=3-x}{=}-\int_3^0\frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}dx.$

Suy ra $2J=\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx+\int_0^3\frac{1}{1+f(3-x)}dx\overset{f(3-x).f(x)=1}{=}\int_0^3 1dx=3\Rightarrow J=\frac{3}{2}$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

Chọn ý **A.**

Tóm lại: Qua 5 ví dụ vừa rồi ta đã làm quen được với dạng toán có $f'(x),f(x)$ và đã tìm hiểu qua cách giải của các bài toán này, những thứ ta cần phải chú ý đó là:

- Chuyển $f'(x)$ và hàm theo biến $f(x)$ sang một bên, chú ý $f'(x)$ phải luôn bậc nhất

- Lấy nguyên hàm hoặc tích phân tùy thuộc vào đề bài
- Ngoài ra có thể nhớ nhanh kết quả sau: $f'(x)=kf(x)\Rightarrow f(x)=Ce^{kx}$

2. BÀI TOÁN LIÊN QUAN TỚI TỔNG.

Xét bài toán tổng quát sau: $f'(x)+k(x)f(x)=g(x)$. Gọi $G(x)=\int g(x)dx$ với $G(x)$ là một họ nguyên hàm của $g(x)$. Nhân cả hai vế với $e^{G(x)}$ ta được:

$$e^{G(x)}f'(x)+g(x).e^{G(x)}f(x)=k(x)e^{G(x)}$$
$$\Leftrightarrow\left(e^{G(x)}f(x)\right)'=k(x)e^{G(x)}\Rightarrow f(x)=e^{-G(x)}\int k(x)e^{G(x)}dx$$

Ngoài ra còn một số dạng nữa ta sẽ tìm hiểu trong các ví dụ.

Ta sẽ cùng giải quyết dạng toán này thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$, thỏa mãn $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ với mọi $x\in\mathbb{R}\backslash\{0;-1\}$ và $f(1)=-2\ln 2$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$ với $a,\ b\in\mathbb{Q}$, tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=\frac{3}{4}$. **C.** $P=\frac{13}{4}$. **D.** $P=\frac{9}{2}$.

Lời giải

Theo như bài toán tổng quát thì $f'(x)$ đang độc lập thế nên ở bài toán này ta cũng cần phải độc lập $f'(x)$. Biến đổi giả thiết ta được

$$x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{x(x+1)}f(x)=1$$

Ta có: $\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{x}{x+1}$

Nhân cả hai vế với $\frac{x}{x+1}$ ta thấy rằng: $\frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]'$. Do đó giả thiết tương đương với :

$$\left[f(x).\frac{x}{x+1}\right]'=\frac{x}{x+1}\Rightarrow f(x).\frac{x}{x+1}=\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x-\ln|x+1|+C.$$

Mà $f(1)=-2\ln 2\Rightarrow C=-1\Rightarrow f(x).\frac{x}{x+1}=x-\ln|x+1|-1$.

Cho $x=2$ ta được $f(2).\frac{2}{3}=2-\ln 3-1\Rightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\frac{9}{2}$.

Chọn ý **D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 8. **D.** 10.

Chuyên Đại học Vinh

Lời giải

Đây là một câu nhìn qua tương đối lạ, tuy nhiên ý tưởng của bài toán vẫn như bài trên đó là vẫn biến đổi một vế là đạo hàm của vế kia chỉ có điều cách thực hiện không tương tự. Hướng giải của bài toán như sau:

Nhận thấy được $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=\left[f(x).f'(x)\right]'$.

Do đó giả thiết tương đương với $\left[f(x).f'(x)\right]'=15x^4+12x$.

$$f(x).f'(x)=\int\left(15x^4+12x\right)dx=3x^5+6x^2+C\xrightarrow{f(0)=f'(0)=1.}C=1\Rightarrow f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1$$

$$\Rightarrow\int f(x).f'(x)dx=\int\left(3x^5+6x^2+1\right)dx\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C'.$$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $\frac{f^2(0)}{2}=C'\Rightarrow C'=\frac{1}{2}$.

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1\Rightarrow f^2(1)=8$.

Chọn ý **C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=f'(0)=1$ và $f(x)+2f'(x)+f''(x)=x^3+2x^2\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{107}{12}-\frac{21}{e}$ **B.** $\frac{107}{21}-\frac{12}{e}$ **C.** $\frac{107}{12}+\frac{21}{e}$ **D.** $\frac{107}{21}+\frac{12}{e}$

Lời giải

Đây lại là một dạng nhìn rất lạ phải không, nhưng thực chất chính là bài toán tổng quát ban đầu, tuy nhiên phải có chút tinh ý nhận ra điều sau:

$$f(x)+f'(x)+\left(f'(x)+f''(x)\right)=x^3+2x^2$$
$$\Leftrightarrow f(x)+f'(x)+\left(f(x)+f'(x)\right)'=x^3+2x^2$$
$$\Leftrightarrow e^x\left(f(x)+f'(x)\right)+e^x\left(f(x)+f'(x)\right)'=e^x\left(x^3+2x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(e^x\left(f(x)+f'(x)\right)\right)'=e^x\left(x^3+2x^2\right)$$
$$\Rightarrow e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+C$$

Mặt khác $f(0)=f'(0)=1$ nên $C=4$

$$\Rightarrow e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+4$$
$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)'=e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+4$$
$$\Rightarrow e^x f(x)=\int\left(e^x\left(x^3-x^2+2x-2\right)+4\right)dx=e^x\left(x^3-4x^2+10x-12\right)+4x+C$$

Ta lại có:

$$f(0)=1\Rightarrow C=13\Rightarrow f(x)=x^3-4x^2+10x-12+(4x+13)e^{-x}\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{107}{12}-\frac{21}{e}$$

Chọn ý **A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 đồng thời liên tục trên đoạn $[0;2]$ $f(0)=1, f(2)=e^4$ và $f(x)>0,\left(f(x)\right)^2-f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0\forall x\in[0;2]$. Tính $f(1)$.

A. e **B.** $e^{\frac{3}{4}}$ **C.** e^2 **D.** $e^{\frac{3}{2}}$

Lời giải

Bài này nhìn qua thì thấy giống bài trước, có lẽ bạn đọc đến đây sẽ tập chung đưa về như bài trước nhưng điều này gần như không thể bởi vì sự xuất hiện "vô duyên" của dấu "-". Vậy làm sao để xử lý được dấu "-"? Ý tưởng thì vẫn là thế tuy nhiên để ý rằng đạo hàm của hàm nào ra dấu "-"? Rất đơn giản đó là hàm phân thức! Đến đây ta biến đổi bài toán:

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2}=1\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=x+C\Rightarrow \ln f(x)=\int(x+C)dx=\frac{x^2}{2}+Cx+D$$

Mặt khác:

$$f(0)=1,f(2)=e^6\Rightarrow\begin{cases}D=0\\4=2+2C+D\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1\\D=0\end{cases}\Rightarrow \ln f(x)=\frac{x^2}{2}+x\Rightarrow f(x)=e^{\frac{x^2}{2}+x}$$

Do đó $f(1)=e^{\frac{3}{2}}$.

Chọn ý **D.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=-1, f(1)=-\frac{2}{3}$ và $f''(x)f(x)-2\left[f'(x)\right]^2=x\left[f(x)\right]^3, \forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1\left(3x^2+2\right)f(x)dx$ bằng?

A. $-\ln\frac{3}{2}$ **B.** $-3\ln\frac{3}{2}$ **C.** $-2\ln\frac{3}{2}$ **D.** $-6\ln\frac{3}{2}$

Chọn ý **D.**

2. Cho hàm số $f(x)>0,\forall x\geq 0$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f''(x)f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0, f'(0)=0, f(0)=1$. Tính $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 5: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và $\begin{cases} \dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x) \\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2 \end{cases}$, $\forall x\in[1;2]$. Tính $I=\int_1^2\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]dx.$

A. $I=\dfrac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\dfrac{3}{2}.$ **D.** $I=2.$

Lời giải

Bài này có vẻ tương đối khó khăn rồi do đây là 2 hàm độc lập, tuy nhiên ta chú ý vẫn bám sát ý tưởng của các bài toán trong mục này!

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)-\dfrac{(x+1)}{x}f'(x)=-2017 \\ \dfrac{x}{x+1}g'(x)+\dfrac{1}{x^2}f(x)=2018 \end{cases}$. Cộng lại vế theo vế ta được:

$$\left[\frac{1}{(x+1)^2}g(x)+\frac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\frac{(x+1)}{x}f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\frac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1\Rightarrow\frac{x}{x+1}g(x)-\frac{(x+1)}{x}f(x)=x+C.$$

Mà ta lại có $f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\Rightarrow I=\int_1^2\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int_1^2(x-1)dx=\dfrac{1}{2}.$

Chọn ý **A.**

LUYỆN TẬP

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $2f(x)+x.f'(x)\ge 673x^{2017}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{3.2017}$ **C.** $\dfrac{1}{3.2018}$ **D.** $\dfrac{1}{3.2019}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)f(x)}}$ và $f(0)=1, f(1)=\sqrt[3]{a+b\sqrt{2}}$ với a,b là các số nguyên.

Tính $P=ab$.

A. $P=-3$ **B.** $P=-66$ **C.** $P=6$ **D.** $P=-36$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2f(x)$ và $f(0)=\sqrt{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $2\sqrt{3}(e^2-1)$ **B.** $\sqrt{3}(2e-1)$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}(e^2-1)}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}(2e-1)}{2}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $-\ln 2$ **C.** $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ **D.** $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $f''(x)=\left[f'(x)\right]^2$. Giá trị của biểu thức $f(1)-f(0)$ bằng

A. $\ln 2$ **B.** $-\ln 2$ **C.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $-\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=-e^x f^2(x)\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính $f(\ln 2)$

A. $\ln 2+\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\ln^2 2+\frac{1}{2}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $1<f(5)<2$ **B.** $4<f(5)<5$ **C.** $3<f(5)<4$ **D.** $2<f(5)<3$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(3)=\frac{2}{3}$ và $f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2613<f^2(8)<2614$ **B.** $2614<f^2(8)<2615$

C. $2618<f^2(8)<2619$ **D.** $2616<f^2(8)<2617$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)f'(x)=3x^5+6x^2$. Biết rằng $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. 144 **B.** 100 **C.** 64 **D.** 81

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $\sum_{i=1}^{2018} f(i)$ bằng

A. $-\frac{2010}{2019}$ **B.** $-\frac{2017}{2018}$ **C.** $-\frac{2016}{2017}$ **D.** $-\frac{2018}{2019}$

Câu 11: Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)+g(1)=9e$ và $f(x)=-x^2g'(x);g(x)=-x^2f'(x)$. Tích phân $\int_1^4 \frac{f(x)+g(x)}{x^2}dx$ bằng

A. $\frac{9}{e}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$ **B.** $9\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$ **C.** $\frac{e}{9}\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$ **D.** $\frac{e-\sqrt[4]{e}}{9}$

Câu 12: Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)+g(1)=4$ và $f(x)=-x^2g'(x);g(x)=-x^2f'(x)$. Tích phân $\int_1^4(f(x)+g(x))dx$ bằng

A. $8\ln 2$ **B.** $3\ln 2$ **C.** $6\ln 2$ **D.** $4\ln 2$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ và có đạo hàm liên tục trên $[0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$ **B.** $e^4f(4)-f(0)=-\frac{26}{3}$

C. $e^4f(4)-f(0)=\frac{4}{3}$ **D.** $e^4f(4)-f(0)=-\frac{4}{3}$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $2xf(x)+f'(x)=x(x^2-1)$. Tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{e-4}{8e}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{7}{6}$ **D.** $\frac{e-4}{4e}$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f'(x)f(x)=\cos x\sqrt{1+f^2(x)}$. Tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng

A. $8+\frac{11\pi}{2}$ **B.** $8+\frac{7\pi}{2}$ **C.** $\frac{7\pi}{2}-8$ **D.** $\frac{11\pi}{2}-8$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f(x)=(f'(x))^2$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{19}{12}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{19}{3}$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $2018f(x)+x.f'(x)\ge x^{2019},\forall x\in[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{4037}$ **B.** $\frac{1}{2018.4037}$ **C.** $\frac{1}{2019.4037}$ **D.** $\frac{1}{2020.4037}$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\forall x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ và đồng thời $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$. Tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$ bằng

A. $\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **B.** $2\ln\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ **C.** $\ln\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}-1\right)$ **D.** $\frac{1}{2020.4037}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=0$, $f(x)>-1$ và đồng thời $f'(x)=\sqrt{x^2+1}=2x\sqrt{f(x)+1},\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(\sqrt{3})$?

A. 12 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 9

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=0$ và đồng thời thỏa mãn $x+2x.f(x)=[f'(x)]^2, \forall x\in[1;4]$. Đặt $I=\int_1^4 f(x)dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1<I<4$ **B.** $4<I<8$ **C.** $8<I<12$ **D.** $12<I<16$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=2x^2-x+1, \forall x\in\mathbb{R}$, và đồng thời $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng?

A. 28 **B.** 22 **C.** $\frac{19}{2}$ **D.** 10

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $f'(x)+2xf(x)=2x.e^{-x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$?

A. $1-\frac{3}{2e}$ **B.** $-\frac{1}{2e}$ **C.** $1-\frac{e}{2}$ **D.** $\frac{e}{2}$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=\frac{9}{e}$ và $f'(x)+3x^2f(x)=(15x^4+12x)e^{-x^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $3+\frac{4}{e}$ **B.** $2e-1$ **C.** $3-\frac{4}{e}$ **D.** $2e+1$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f^2(x)f''(x)+2f(x)(f'(x))^2=15x^4+12x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1, f'(0)=9$. Tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng?

A. $\frac{199}{14}$ **B.** $\frac{227}{42}$ **C.** $\frac{227}{14}$ **D.** $\frac{199}{42}$

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, có $f(1)=0$ và đồng thời $x+2x.f(x)=[f'(x)]^3, \forall x\in[1;4]$. Tích phân $\int_1^4 (2f(x)+1)^2 dx$ bằng?

A. 1 **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$, có $f(1)=4$ và đồng thời $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2, \forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. 5 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 10

Câu 27: Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=\frac{-1}{2}$. Biết rằng $\sum_{i=1}^{2018} f(i)=\frac{a}{b}\left(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b}<-1$ **B.** $\frac{a}{b}>1$ **C.** $a+b=1010$ **D.** $b-a=3029$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)=f(x)+e^x+1, \forall x \in [0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. $2e-1$ **B.** $2(e-1)$ **C.** $1-e$ **D.** $1-2e$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[1;3]$, $f(1)=f'(1)=1$ và $f(x)>0$, $f(x)f''(x)=(f'(x))^2-(xf(x))^2, \forall x \in [1;3]$. Tính $\ln f(3)$

A. -4 **B.** -3 **C.** 4 **D.** 3

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời $f(2)=\ln\frac{3}{4}, f'(x)e^{f(x)}=\frac{2}{x^3}, \forall x \in [2;2018]$. Biết rằng $\sum_{i=2}^{2018} f(i)=\ln a-\ln b+\ln c-\ln d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương và a,c,d là số nguyên tố đồng thời $a<b<c<d$. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d$ bằng?

A. 1968 **B.** 1698 **C.** 1689 **D.** 1986

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$, $f(3)=4$ và đồng thời $[f'(x)]^2=8x^2-20-4f(x), \forall x \in [0;3]$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng?

A. 9 **B.** -6 **C.** 21 **D.** 12

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;2]$, biết rằng $f(0)=1, f(2)=e^6$ và $[f(x)]^2-f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0, \forall x \in [0;2]$. Tính $f(1)$

A. 9 **B.** -6 **C.** 21 **D.** 12

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời $[f'(x)]^2+4(6x^2-1)f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$ **B.** $-\frac{17}{15}$ **C.** $\frac{13}{15}$ **D.** $-\frac{7}{15}$

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=\frac{1}{2}$ và đồng thời điều kiện $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=e^x$. Giá trị của $f(2)$ bằng?

A. $\frac{e}{3}$ **B.** $\frac{e}{6}$ **C.** $\frac{e^2}{3}$ **D.** $\frac{e^2}{6}$

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+x, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3 (a,b \in \mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng?

A. $\frac{25}{4}$ **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{13}{4}$

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $[f(x)]^2=2+3\int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{4}+\sqrt{2}$ **B.** $\frac{11}{4}$ **C.** $\frac{3}{4}+\sqrt{3}$ **D.** $\frac{15}{4}$

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx=-4$ và $f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $11<f(\pi)<12$ **B.** $5<f(\pi)<6$ **C.** $6<f(\pi)<7$ **D.** $12<f(\pi)<13$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$ có đạo đến cấp 2 liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)\geq 1, \forall x\in[0;1]$ và $f^2(0)+f(0)f'(0)=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$?

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{11}{6}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)[f(x)]^{2018}=xe^x, \forall x\in\mathbb{R}$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=-\frac{1}{e}$ là?

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f(1)=-2$ và đồng thời $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1, \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính $\int_1^2 f(x)dx$?

A. $-\frac{\ln 2}{2}-1$ **B.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$ **C.** $-\ln 2-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $\frac{2f'(x)}{[f(x)]^2}=\frac{f(x)(x+2)}{x^3}, \forall x>0$ và $f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tích phân $\int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2}dx$?

A. $\frac{11}{2}+\ln 2$ **B.** $-\frac{1}{2}+\ln 2$ **C.** $\frac{3}{2}+\ln 2$ **D.** $\frac{7}{2}+\ln 2$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=e$ và đồng thời điều kiện $(x+2)f(x)=xf'(x)-x^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(2)$?

A. $4e^2-4e+4$ **B.** $4e^2-2e+1$ **C.** $2e^3-2e+2$ **D.** $4e^2-4e+1$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x)=\frac{f(x)}{x}+3x^2, \forall x\in(0;+\infty)$ và $\int_1^2 \frac{3x^3}{f^2(x)}dx=\frac{1}{9}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)$ bằng?

A. $\frac{27}{2}$ **B.** $\frac{43}{2}$ **C.** $\frac{45}{2}$ **D.** $\frac{49}{2}$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $[f'(x)]^2=e^xf(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$?

A. $e-2$ **B.** e^2-2 **C.** e^2-1 **D.** $e-1$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f'(x)=\tan x f(x),\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right], f(0)=1$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x f(x)dx$?

A. $\frac{1+\pi}{4}$ **B.** $\frac{\pi}{4}$ **C.** $\ln\frac{\pi+1}{4}$ **D.** 0

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=e^{-f(x)}(2x+3)$, $f(0)=\ln 2$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $6\ln 2+2$ **B.** $6\ln 2-2$ **C.** $6\ln 2-3$ **D.** $6\ln 2+3$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời $xf'(x)-f(x)=x^2,\forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 xf(x)dx$?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=-1$ và đồng thời điều kiện $f'(x)=f(x)+x^2e^x+1,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $f(3)$?

A. $6e^3+3$ **B.** $6e^2+2$ **C.** $3e^2-1$ **D.** $9e^3-1$

Câu 49: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và đồng thời $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là?

A. $y=16x+20$ **B.** $y=-16x+20$ **C.** $y=-16x-20$ **D.** $y=16x-20$

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\frac{[f(x)]^2[f'(x)]^2}{e^{2x}}=1+[f(x)]^2,\forall x\in[0;1]$. Biết $f(0)=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1)\in\left(\frac{5}{2};3\right)$ **B.** $f(1)\in\left(3;\frac{7}{2}\right)$ **C.** $f(1)\in\left(2;\frac{5}{2}\right)$ **D.** $f(1)\in\left(\frac{3}{2};2\right)$

ĐÁP ÁN

Câu 1. Chọn ý **C.**

Theo giả thiết ta có $(x^2f(x))'\geq 673x^{2018}$, lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới x ta được

$$\int_0^x (x^2f(x))'dx\geq\int_0^x 673x^{2018}dx\Leftrightarrow x^2f(x)\geq\frac{673x^{2019}}{2019}$$

$$\Rightarrow f(x)\geq\frac{x^{2017}}{3}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1\frac{x^{2017}}{3}dx=\frac{1}{3.2018}$$

Câu 2: Chọn ý **A.**

Câu 3: Chọn ý **C.**

Câu 4: Chọn ý **D.**

Câu 5: Chọn ý **B.**

Câu 6: Chọn ý **B.**

Câu 7: Chọn ý **C.**

Câu 8: Chọn ý **C.**

Câu 9: Chọn ý **B.**

Câu 10: Chọn ý **D.**

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=2x+1\Rightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\xrightarrow{f(1)=-\frac{1}{2}}f(x)=-\frac{1}{x^2+x}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{2018}f(i)=-\sum_{i=1}^{2018}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2019}\right)=-\frac{2018}{2019}$$

Câu 11: Chọn ý **B.**

Đặt $h(x)=f(x)+g(x),h(1)=g(1)+f(1)=9e$. Ta có

$$f(x)+g(x)=-x^2\left[f'(x)+g'(x)\right]\Rightarrow h(x)+x^2h'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{h'(x)}{h(x)}=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\ln|h(x)|=\frac{1}{x}+C\xrightarrow{h(1)=9e}h(x)=9e^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow\int_1^4\frac{f(x)+g(x)}{x^2}dx=\int_1^4\frac{9}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=9\left(e-\sqrt[4]{e}\right)$$

Câu 12: Chọn ý **A.**

Tương tự câu 11

Câu 13: Chọn ý **A.**

Câu 14: Chọn ý **A.**

Câu 15: Chọn ý **B.**

Câu 16: Chọn ý **B.**

Câu 17: Chọn ý **D.**

Tương tự câu 1.

Câu 18: Chọn ý **B.**

Câu 19: Chọn ý **B.**

Câu 20: Chọn ý **D.**

Câu 21: Chọn ý **A.**

Câu 22: Chọn ý **A.**

Câu 23: Chọn ý **C.**

Câu 24: Chọn ý **C.**

Câu 25: Chọn ý **B.**

Câu 26: Chọn ý **D.**

Câu 27: Chọn ý **D.**

Câu 28: Chọn ý **B.**

Câu 29: Chọn ý **A.**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{(f(x))^2} = -x^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x^3}{3}+C$$

$$\xrightarrow{f(1)=f'(1)=1} C = \frac{4}{3} \Rightarrow \ln f(x) = \int\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{3}\right)dx = -\frac{x^4}{12}+\frac{4x}{3}+C_1$$

$$\xrightarrow{f(1)=1} D = -\frac{5}{4} \Rightarrow \ln f(x) = -\frac{x^4}{12}+\frac{4x}{3}-\frac{5}{4} \Rightarrow \ln f(3) = -4$$

Câu 30: Chọn ý **C.**

Biến đổi giả thiết ta có

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = \int \frac{2}{x^3}dx \Leftrightarrow e^{f(x)} = -\frac{1}{x^2+C} \xrightarrow{f(2)=\ln\frac{3}{4}} C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln\left[\prod_{i=2}^{2018}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\right]$$

$$= \ln\left[\frac{(2^2-1)(3^2-1)...(2018^2-1)}{(2.3...2018)^2}\right] = \frac{1.3.2.4.3.5...2017.2019}{(2.3...2018)^2}$$

$$= \frac{2017!.\frac{2019!}{1.2}}{(2018!)^2} = \frac{2019}{1.2.2018} = \frac{3.673}{2^2.1009} \Rightarrow \sum_{i=2}^{2018} f(i) = \ln 3 - \ln 4 + \ln 673 - \ln 1009$$

Câu 31: Chọn ý **B.**

Từ giả thiết ta có $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \int_0^3 (8x^2-20-4f(x))dx = 12 - 4\int_0^3 f(x)dx$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^3 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^3 - \int_0^3 xf'(x)dx = 12 - \int_0^3 xf'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 [f'(x)]^2 dx = 12 - 4\left(12 - \int_0^3 xf'(x)dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 (f'(x)-2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$$

$$\xrightarrow{f(3)=4} C = -5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5 \Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = -6$$

Câu 32: Chọn ý **D.**

Ta có $f(x) \geq f(0) = 1, \forall x \in [0;2]$ do vậy

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1 \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2}+Cx+D$$

Mặt khác do $f(0) = 1, f(2) = e^6 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ 6 = 2+2C+D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2}{2}+2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}$

Câu 33: Chọn ý **C.**

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[0;1]$ ta được

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4\int_0^1 (6x^2-1)f(x)dx = \int_0^1 (40x^6-44x^4+32x^2-4)dx = \frac{376}{105}$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$\int_0^1 (6x^2-1)f(x)dx = \int_0^1 f(x)d(2x^3-x)$$
$$=(2x^3-x)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (2x^3-x)f'(x) = 1-\int_0^1 (2x^3-x)f'(x)dx$$

Thay lại đẳng thức trên ta có

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 4\left(1-\int_0^1 (2x^3-x)f'(x)dx\right) = \frac{376}{105}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 4\int_0^1 (2x^3-x)f'(x)dx + \frac{44}{105} = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)-2(2x^3-x)\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2(2x^3-x) \Rightarrow f(x) = x^4-x^2+C$$
$$\xrightarrow{f(1)=1} C=1 \Rightarrow f(x)=x^4-x^2+1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{13}{15}$$

Câu 34: Chọn ý **D.**

Câu 35: Chọn ý **B.**

Câu 36: Chọn ý **A.**

Xem lại phần tích phân có cận thay đổi

Câu 37: Chọn ý **B.**

Câu 38: Chọn ý **C.**

Biến đổi giả thiết tương đương $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) \ge 1, \forall x \in [0;1]$

Lấy tích phân cận từ 0 đến x ta được

$$\int_0^x f(x)f'(x)dx \ge \int_0^x [f(0)f'(0)+x]dx$$
$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} - \frac{f^2(0)}{2} \ge f(0)f'(0)x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow f^2(x) \ge x^2 + f^2(0) + 2f(0)f'(0)x$$
$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x)dx \ge \int_0^1 [x^2+f^2(0)+2f(0)f'(0)x]dx = \frac{1}{3}+f^2(0)+f(0)f'(0) = \frac{11}{6}$$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

Câu 39: Chọn ý **B.**

Ta có $\int f'(x)[f(x)]^{2018} dx = \int xe^x dx = (x-1)e^x + C$

$$\Rightarrow \frac{[f(x)]^{2019}}{2019} = (x-1)e^x + C; f(1)=1 \Rightarrow \frac{1}{2019} = C \Rightarrow f(x) = \sqrt[2019]{1+2019(x-1)e^x}$$

Vậy $f(x) = -\frac{1}{e} \Leftrightarrow 1+2019(x-1)e^x = -\frac{1}{e^{2019}} \Leftrightarrow 2019(x-1)e^{x+2019} + e^{2019} + 1 = 0$

Xét hàm số

$$g(x) = 2019(x-1)e^{x+2019} + e^{2019} + 1 \Rightarrow g'(x) = 2019\left[e^{x+2019} + (x-1)e^{x+2019}\right] = 2019xe^{x+2019}$$

Do $g'(x)=0$ có đúng 1 nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm

Câu 40: Chọn ý **B.**

Từ giả thiết ta có $x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\Leftrightarrow(xf(x)+1)^2=(xf(x)+1)$

Suy ra $\int\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}dx=\int dx=x+C\Leftrightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x+C}$

Mặt khác $f(1)=-2\Rightarrow C=0\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Suy ra $\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)dx=-\ln 2-\frac{1}{2}$

Câu 41: Chọn ý **C.**

Câu 42: Chọn ý **A.**

Câu 43: Chọn ý **C.**

Câu 44: Chọn ý **D.**

Câu 45: Chọn ý **B.**

Câu 46: Chọn ý **B.**

Câu 47: Chọn ý **B.**

Câu 48: Chọn ý **D.**

Câu 49: Chọn ý **D.**

Câu 50: Chọn ý **A.**

Tương tự với câu trong đề thi thử Chuyên Lê Khiết , xem lại phần trước

15. BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Các bài toán bất đẳng thức tích phân được giới thiệu trong phần này nhất là phần sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* đa phần chỉ mang tính tính tham khảo, không nên quá đi sâu do đây là chương trình liên quan tới toán cao cấp của bậc đại học, chỉ nên học phần 1 và phần 2!

1. PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG

Với dạng toán này ta cần chú ý tới những kiến thức sau đây:

Với $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên $[a;b]\ (a<b)$ ta có:

- $\int_a^b (f(x))^{2n}dx \ge 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)\equiv 0\ \forall x\in[a;b]$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0\ \forall x\in[a;b] \\ f(x)\le 0\ \forall x\in[a;b]\end{cases}$
- Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn *prabol* và một đường thẳng:

$$I^2=\left(\int_{x_1}^{x_2}\left|ax^2+bx+c\right|dx\right)^2=\frac{\Delta^3}{36a^4}$$

Với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.

Ví dụ 1: Cho 2 số thực a, b thỏa mãn $a<b, a+b=ab+4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I=\int_a^b \left|x^2-(a+b)+ab\right|dx$

A. $4\sqrt{3}$ **B.** 12 **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** 48

Lời giải

Đây chỉ là bài tập mở đầu áp dụng công thức thôi do a,b đã là nghiệm của phương trình bậc 2 trong dấu trị tuyệt đối rồi!

Ta có:

$$I^2=\left(\int_a^b\left|x^2-(a+b)x+ab\right|dx\right)^2=\frac{\Delta^3}{36}$$
$$=\frac{\left((a+b)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+4)^2-4ab\right)^3}{36}=\frac{\left((ab+2)^2+12\right)^2}{36}\ge 48$$

Chọn ý **D.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 (f'(x))^2dx=-7\int_0^1 x^3f'(x)dx-\frac{7}{4}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $\frac{7}{8}$ **D.** $\frac{7}{10}$

Lời giải

Thoạt nhìn thì bài toán này có vẻ khá là rắc rối, nhưng hãy chú ý nếu coi $f'(x)$ là ẩn thì ta thấy bóng dáng của tam thức bậc 2, đến đây ta sẽ giải quyết bài toán như sau:

Biến đổi giả thiết ta được:

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = -7\int_0^1 x^3 f'(x)dx - \frac{7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+\frac{7}{2}x^3\right)^2 dx - \int_0^1 \left(\frac{7x^3}{2}\right)^2 dx = \frac{-7}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x)+\frac{7}{2}x^3\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{7x^3}{2} \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = \frac{-7x^4}{8} + C$$

Mặt khác ta lại có $f(1)=0 \Rightarrow C = \frac{7}{8} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{10}$.

Chọn ý **D.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(1)-f(0) \ge 1$ và $\int_0^1 f'(x)\left[3f^2(x)+2\right] \ge \int_0^1 2\sqrt{6f'(x)f(x)}dx$. Tích phân $\int_0^1 f^3(x)dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{21}}{9}$ **B.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{21}}{9}-1$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}-1$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=1$ thỏa mãn $2\int_0^1 \sqrt{f'(x)f(x)}dx \ge \int_0^1 f'(x)\left(f^2(x)+1\right)dx$. Tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$ bằng?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5\sqrt{33}}{18}$ **C.** $\frac{5\sqrt{33}+54}{18}$ **D.** $\frac{5\sqrt{33}-27}{18}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4f(1)=f(0)$ và $\int_0^1 f^2(x)dx - 3\int_0^1 f(x)dx = 2\int_0^1 \sqrt{(3x+1)f'(x)f(x)}dx$. Tính $f(0)$?

A. $-\frac{9}{\ln 4}$ **B.** $-\frac{15}{\ln 4}$ **C.** $-\frac{3}{\ln 4}$ **D.** $-\frac{5}{\ln 4}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $6\int_0^2 \sqrt{f'(x)f(x)}dx \ge 2\int_0^2 f'(x)f^2(x)dx + 9$. Tích phân $\int_0^2 f^3(x)dx$ bằng

A. $\frac{29}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 2 **D.** 29

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 \left[f^2(x)+2\ln^2\frac{2}{e}\right]dx = 2\int_0^1 f(x)\ln(x+1)dx$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\ln\frac{e}{4}$ **B.** $\ln\frac{4}{e}$ **C.** $\ln\frac{e}{2}$ **D.** $\ln\frac{2}{e}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int_0^1 \left(f'(x)f^2(x)+\frac{1}{9}\right)dx \le 2\int_0^1 \sqrt{f'(x)}f(x)dx$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{6}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)+2\sqrt{2}f(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=-\frac{\pi+2}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** 0 **C.** 2 **D.** $\sqrt{2}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn điều kiện $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]dx=\frac{2-\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$.

A. 1 **B.** 0 **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $\frac{\pi}{2}$

Chú ý xem lời giải ví dụ 1 để vận dụng!

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f(1)=e.f(0)=e$ và $\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^2$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2e}$

Lời giải

Đây là một bài toán tương đối khó có dạng hơi hơi giống với các bài toán ở phần 5! Ta hãy để ý rằng $\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|\Big|_0^1=\ln\frac{f(1)}{f(0)}=\ln e=1$. Đến đây ta có định hướng giải bài toán này bằng phương pháp hệ số bất định như sau.

Giả sử tồn tại một số a thỏa mãn:

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-a\right)^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left[\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2-2a\frac{f'(x)}{f(x)}+a^2\right]dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx=\int_0^1\left[2a\frac{f'(x)}{f(x)}-a^2\right]dx=2a-a^2$$

Mà theo giả thiết ta có $\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1\Rightarrow 2a-a^2\le 1\Leftrightarrow(a-1)^2\le 0\Leftrightarrow a=1$

Vậy khi đó giả thiết bài toán sẽ được biến đổi tương đương:

$$\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2dx\le 1\Leftrightarrow\int_0^1\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-1\right)^2dx\le 0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=1\Rightarrow f(x)=ke^x$$

Ta có $f(1)=e.f(0)=e$ nên $k=1\Rightarrow f(x)=e^x\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Chọn ý **B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1[f(x)]^2dx=4$ và $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1[f(x)]^3dx$ bằng?

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải

Ở đây các hàm xuất hiện dưới dấu tích phân là $[f(x)]^2$, $xf(x)$, $f(x)$ nên ta sẽ nảy ra ý tưởng liên kết với bình phương $[f(x)+\alpha x+\beta]^2$.

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có:

$$\int_0^1[f(x)+\alpha x+\beta]^2dx=\int_0^1[f(x)]^2dx+2\int_0^1(\alpha x+\beta)f(x)dx+\int_0^1(\alpha x+\beta)^2dx$$

$$=4+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\alpha\beta+\beta^2.$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $\int_0^1[f(x)+\alpha x+\beta]^2dx=0$ hay $4+2(\alpha+\beta)+\frac{\alpha^2}{3}+\alpha\beta+\beta^2=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+(3\beta+6)\alpha+3\beta^2+6\beta+12=0$. Để tồn tại α thì $\Delta=(3\beta+6)^2-4(3\beta^2+6\beta+12)\ge 0$

$$\Leftrightarrow -3\beta^2+12\beta-12\ge 0\Leftrightarrow -3(\beta-2)^2\ge 0\Leftrightarrow \beta=2\Rightarrow \alpha=-6.$$

Vậy $\int_0^1[f(x)-6x+2]^2dx=0\Rightarrow f(x)=6x-2,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \int_0^1[f(x)]^3dx=10.$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ đồng thời $\int_0^1[f'(x)]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Đề minh họa THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Đây là một câu từng xuất hiện trong đề minh họa THPT Quốc Gia 2018 của bộ và sau đó đã trở thành một trào lưu trong các đề thi thử và thậm chí đến đề khảo thí chất lượng của bộ cũng đã từng xuất hiện bài toán này, tuy nhiên các cách giải trên mạng đa phần là sử dụng đến bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* tuy nhiên đây có lẽ không phải ý tưởng ra đề của Bộ bởi đây là kiến thức bậc Đại học. Dưới đây là sẽ tiếp cận bài toán bằng kiến thức của bậc THPT.

Ý tưởng của bài toán vẫn là đưa về bình phương tuy nhiên hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^2f(x)$ không có mối liên hệ với nhau. Vậy làm sao để làm xuất hiện bình phương đây? Có $f'(x)$ đang ở dạng bình phương thì ta sẽ nghĩ ngay đến việc sử dụng tích phân từng phần cho $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}$ ta được: $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)dx.$

Kết hợp với giả thiết $f(1)=0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3f'(x)dx=-1.$

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=7\\ \int_0^1 x^3f'(x)dx=-1\end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2$, $x^3f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2$.

Với mỗi số thực α ta có :

$$\int_0^1\left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2dx=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx+2\alpha\int_0^1 x^3f'(x)dx+\alpha^2\int_0^1 x^6dx=7-2\alpha+\frac{\alpha^2}{7}=\frac{1}{7}(\alpha-7)^2.$$

Ta cần tìm α sao cho $\int_0^1\left[f'(x)+\alpha x^3\right]^2dx=0$ hay $\frac{1}{7}(\alpha-7)^2=0\Leftrightarrow\alpha=7.$

Vậy $\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2dx=0\Rightarrow f'(x)=-7x^3,\forall x\in[0;1]\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$

$$\Rightarrow C=\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{5}.$$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn đồng thời $f(1)=0,\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{3}{2}-2\ln 2$ và $\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{1-\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{1-2\ln 2}{2}$. **C.** $\frac{3-2\ln 2}{2}$. **D.** $\frac{3-4\ln 2}{2}$.

Lời giải

Thoạt nhìn thì ta sẽ thấy bài này tương tự bài trước vẫn phải làm xuất hiện $f'(x),(f'(x))^2$, cùng biến đổi để xem có như bài trước không nhé!

Như các bài trước, ta biến đổi $\int_0^1\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=2\ln 2-\frac{3}{2}$ để làm xuất hiện $f'(x)$ bằng cách tích phân từng phần. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=\frac{1}{(x+1)^2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$.

Khi đó ta được:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{f(x)}{x+1}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}dx = -\frac{f(1)}{2} + \frac{f(0)}{1} + \int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1}dx$$

Tới đây ta bị vướng $f(0)$ vì giả thiết không cho. Do đó ta sẽ thêm bớt hằng số như sau:

$$\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \dfrac{1}{(x+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = -\dfrac{1}{x+1} + k \end{cases}$$ với k là hằng số.

Khi đó kết hợp với $f(1) = 0$ ta được:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = \left(-\frac{1}{x+1} + k\right)f(x)\bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + k\right)f'(x)dx$$

$$= -(-1+k)f(0) - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x+1} + k\right)f'(x)dx$$

Ta chọn k sao cho $-1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

Khi đó: $2\ln 2 - \frac{3}{2} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\int_0^1 \frac{x}{x+1}f'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{x+1}f'(x)dx = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2$, $\frac{x}{x+1}f'(x)$ nên ta cần có $\left[f'(x) + \alpha\frac{x}{x+1}\right]^2$.

Ta tìm được $\alpha = -1 \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{x}{x+1}dx = x - \ln|x+1| + C$

$\Rightarrow C = \ln 2 - 1 \Rightarrow f(x) = x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1$. Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1-2\ln 2}{2}$

Chọn ý **B.**

2. CÂN BẰNG HỆ SỐ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC AM – GM

Trong phần này ta sẽ tiếp cận một số bài toán khó hơn phải sử dụng đến bất đẳng thức AM – GM và các kỹ thuật cân bằng hệ số trong bất đẳng thức. Đầu tiên nhắc lại bất đẳng thức AM – GM. Cho 2 số thực dương a,b thì ta luôn có $a + b \ge 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \le 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $f(1) = \sqrt{\frac{2e}{e-1}}$ **B.** $f(1) = \frac{2(e-2)}{e-1}$ **C.** $f(1) = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}$ **D.** $f(1) = \sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}$

Lời giải

Lướt nhìn qua bài toán này thì khá là "hãi" nhưng tuy nhiên hai tích phân đang ở cùng cận nên ta sẽ đưa nó vào cùng một tích phân và sử dụng bất đẳng thức AM – GM như sau:

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{f^2(x)} + [f'(x)]^2\right] dx \overset{AM-GM}{\geq} 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$= 2\ln|f(x)|\Big|_0^1 = 2\ln|f(1)| - 2\ln|f(0)| = 2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right| = 2\ln e = 2.$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có:

$$\int_0^1 \frac{dx}{f^2(x)} + \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int x dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + 2C}.$$

Ta có: $f(1) = ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C} = e\sqrt{2C} \Leftrightarrow 2 + 2C = e^2 2C \Leftrightarrow C = \dfrac{1}{e^2 - 1}$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{2x + \frac{2}{e^2-1}} \Rightarrow f(1) = \sqrt{2 + \frac{2}{e^2-1}} = \sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) > 0$ và có đạo hàm $f'(x) > 0$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right] dx \leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

A. $I = 2\left(\sqrt{e} - 1\right)$. **B.** $I = 2\left(e^2 - 1\right)$. **C.** $I = \dfrac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $I = \dfrac{e^2-1}{2}$.

Lời giải

Bài toán này là một bài toán khó nhưng tuy nhiên nếu biết về bất đẳng thức AM – GM thì nó trở lên khá là đơn giản

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$$f^3(x) + 4[f'(x)]^3 = 4[f'(x)]^3 + \frac{f^3(x)}{2} + \frac{f^3(x)}{2}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{4[f'(x)]^3 . \frac{f^3(x)}{2} . \frac{f^3(x)}{2}} = 3f'(x)f^2(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right] dx \geq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx.$$

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$\int_0^1 \left[f^3(x) + 4[f'(x)]^3\right] dx \leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx \Rightarrow 4[f'(x)]^3 = \frac{f^3(x)}{2} = \frac{f^3(x)}{2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2}\int dx \Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x + C}.$$

Ta có: $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2\left(\sqrt{e} - 1\right)$.

Nhận xét. Đây là hướng tiếp cận theo bất đẳng thức AM – GM tuy nhiên ta còn một cách khác có thể sẽ nhanh hơn tẹo. Để ý nếu ta coi a,b lần lượt là $f(x),f'(x)$ thì ta sẽ có được đa thức thuần nhất bậc 3. Cụ thể ta có:

$$f(a,b)=a^3+4b^3-3a^2b=(a+b)(a-2b)^2\ge 0$$

Khi đó giả thiết tương đương:

$$\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]dx\le 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)+f'(x)\right)\left(f(x)-2f'(x)\right)^2dx\le 0$$

Mặt khác $f(x)>0$, $f'(x)>0$ nên dấu “=” xảy ra khi $f(x)=2f'(x)$.

Đến đây bài toán lại trở nên bình thường!

Chọn ý **A.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\ge 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Tính giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=1.$ **B.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=4.$ **C.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$ **D.** $f\left(\frac{1}{2}\right)=e.$

Lời giải

Cách làm chung của các bài toán thế này là từ giả nếu bài toán cho là lớn hơn hoặc bằng thì ta phải chỉ ra dấu nhỏ hơn hoặc bằng và ngược lại. Bài toán này cũng như thế, ta cần chỉ ra được $\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\le 1$ bằng các đánh giá cơ bản.

Hàm dưới dấu tích phân là: $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}=\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}},\ \forall x\in[0;1]$.

Điều này khiến ta nảy ra ý tưởng đánh giá:

$$\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}\le ax+\frac{b.f'(x)}{f(x)},$$

Muốn vậy ta phải đánh giá theo $AM-GM$ như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\quad\text{với } m\ge 0 \text{ và } x\in[0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho: $\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\right]dx\ge 2\sqrt{m}.\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx$ hay:

$$\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1+m\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\ge 2\sqrt{m}.1\Leftrightarrow\ln\left|f(1)\right|-\ln\left|f(0)\right|+\frac{m}{2}\ge 2\sqrt{m}\Leftrightarrow 2-0+\frac{m}{2}\ge 2\sqrt{m}$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2-0+\frac{m}{2}=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=4$.

Với $m=4$ thì ta có:

$$\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+4x\right]dx=4\ge 4.\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\Rightarrow\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\le 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=4x\Rightarrow\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 4xdx\Leftrightarrow\ln|f(x)|=2x^2+C\Rightarrow f(x)=e^{2x^2+C}$.

Theo giả thiết $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=e^2\end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{2x^2}\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$.

Cách 2. Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$1^2\le\left(\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx\right)^2=\left(\int_0^1\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}dx\right)^2\le\int_0^1 xdx.\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)}=1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=kx$, thay vào $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}dx=1$ ta được $k=4$.

Suy ra $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=4x$. Đến đây lời giải giống như trên.

P/s: Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta sẽ tìm hiểu ở phần sau!

Chọn ý **C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1[f(x)f'(x)]^2dx\le 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=\sqrt{3}$. Tính giá trị của $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

A. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$. **B.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$. **C.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}$. **D.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e$.

Lời giải

Nhận thấy bài này dấu "$\le$" nên cần phải đánh giá theo chiều ngược lại, chú ý tới bài toán liên quan tới $f'(x), f(x)$, nếu ta đánh giá được $[f(x)f'(x)]^2$ về $f(x)f'(x)$ thì bài toán coi như được giải quyết. Muốn vậy ta phải đánh giá theo AM – GM như sau:

$$[f(x)f'(x)]^2+m\ge 2\sqrt{m}.f(x)f'(x)\text{ với }m\ge 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho:

$$\int_0^1\left([f(x)f'(x)]^2+m\right)dx\ge 2\sqrt{m}\int_0^1 f(x)f'(x)dx$$

Hay $1+m\ge 2\sqrt{m}.\left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_0^1\Leftrightarrow 1+m\ge 2\sqrt{m}$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1+m=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=1$.

Khi đó ta được:

$$\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx + 1 = \int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx + \int_0^1 1dx$$
$$= \int_0^1 \left(\left[f(x)f'(x)\right]^2 + 1\right)dx \ge 2\int_0^1 \left(f(x)f'(x)\right)dx = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $\left[f(x)f'(x)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)f'(x) = 1 \\ f(x)f'(x) = -1 \end{array}\right.$.

- Nếu $f(x)f'(x) = -1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)dx = -\int_0^1 dx \Leftrightarrow \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 = -x\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1 = -1$ (vô lý)
- Nếu $f(x)f'(x) = 1 \Rightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+2C}$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$.

Cách 2. Ta có $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = \left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}\left[f^2(1) - f^2(0)\right] = 1$.

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$1^2 = \left(\int_0^1 1.f(x)f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 1^2dx.\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx \le 1.1 = 1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x) = k$, thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = 1$ ta được

$k = 1$. Suy ra $f'(x)f(x) = 1$. Đến đây làm tiếp như trên!

P/s: Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta sẽ tìm hiểu ở phần sau!

Chọn ý **A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2 \frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}dx \le 24$ và $f(1) = 1$, $f(2) = 16$. Tính giá trị của $f\left(\sqrt{2}\right)$.

A. $f\left(\sqrt{2}\right) = 1$. **B.** $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$. **C.** $f\left(\sqrt{2}\right) = 2$. **D.** $f\left(\sqrt{2}\right) = 4$.

Lời giải

Chắc rằng qua 4 ví dụ ở trên ta đã phần nào hình dung và nắm được ý tưởng và phương pháp làm dạng này rồi, bài cuối cùng sẽ không đi phân tích mà đi luôn vào lời giải!

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)} = \frac{1}{x}.\frac{\left[f'(x)\right]^2}{f(x)}$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $AM - GM$ như sau:

$$\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} \text{ với } m\ge 0 \text{ và } x\in[1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho $\int_1^2\left(\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}+mx\right)dx\ge 2\sqrt{m}\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx$ hay:

$$24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\sqrt{f(x)}\Big|_1^2 \Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24+\frac{2m}{3}=12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$

Với $m=16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}=16x\Rightarrow\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=\int 2xdx\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=x^2+C\Rightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2$$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(1)=1\\f(2)=16\end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^4\Rightarrow f\left(\sqrt{2}\right)=4.$

Cách 2. Ta có $\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2.\int_1^2\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}\Big|_1^2=2\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]=6.$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có

$$6^2=\left(\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2=\left(\int_1^1\sqrt{x}.\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}dx\right)^2\le\int_1^2 xdx.\int_1^2\frac{\left[f'(x)\right]^2}{xf(x)}dx\le\frac{x^2}{2}\Big|_1^2.24=36$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}=k\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=kx$ thay vào $\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=6$

ta được $k=4.$ Suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x.$ Đến đây làm tiếp như trên!

Chọn ý **D.**

3. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARZ CHO TÍCH PHÂN

Nhìn chung thì các bài toán này chưa gặp thì sẽ thấy nó lạ và rất khó, tuy nhiên nếu đã gặp và làm quen rồi thì bài toán này trở nên tương đối dễ, có thể dễ hơn 2 dạng toán trên !

- Bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz* cho tích phân

Cho $f(x),g(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên đoạn $[a;b]$ khi đó ta luôn có :

$$\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx\ge\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=kg(x)$ với số thực $k\ne 0$.

Chứng minh

Với mọi $t\in\mathbb{R}$ xét bình phương ta luôn có $\int_a^b\left(t.f(x)+g(x)\right)^2dx\ge 0$

Điều này tương đương với :

$$h(t)=\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)t^2+2\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)t+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0\forall t\in\mathbb{R}$$

+ Trường hợp 1 : $\int_a^b f^2(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$ bất đẳng thức đã cho là đẳng thức.

+ Trường hợp 2 : $\int_a^b f^2(x)dx>0$, đây là tam thức bậc 2 hệ số *a* dương và luôn không âm, tức biệt số *delta* luôn không dương. Tương đương :

$$\Delta'=\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2-\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx\le 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

Đến đây ta có điều phải chứng minh !

- Bất đẳng thức *Holder* cho tích phân

Cho $f(x),g(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ là các hàm khả tích trên đoạn $[a;b]$ khi đó ta luôn có :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

Trong đó p,q là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=0$ đồng thời $\int_0^1[f'(x)]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Đề minh họa THPT Quốc Gia 2018

Lời giải

Bài toán này ta đã được gặp ở phần phân tích bình phương rồi, giờ ta sẽ tìm hiểu một cách tiếp cận khác bằng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz. Chú ý là bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho tích phân thì luôn phải có một lượng bình phương cho nên ta không được biến đổi giả thiết $(f'(x))^2$, tuy duy vẫn như phần trước, ta phải làm xuất hiện $f'(x)$ ở giả thiết thứ 2.

Tích phân từng phần cho $\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{1}{3}$ ta được:

$$\int_0^1 x^2f(x)dx=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)dx\Leftrightarrow\int_0^1 x^3f'(x)dx=-1.$$

Sử dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có :

$$\left(\int_0^1 x^3f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1 x^6dx.\int_0^1[f'(x)]^2dx=1\Rightarrow -1\le\int_0^1 x^3f'(x)dx\le 1$$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $f'(x)=kx^3$. Thế ngược lại ta tìm được $k=-7$

Vậy $f'(x)=-7x^3, \forall x\in[0;1]\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$

$$\Rightarrow C=\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{5}.$$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $f(-1)=0, \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\frac{16}{3}$ và $\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx=112$, tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$.

A. $\frac{168}{5}$ **B.** $\frac{35}{2}$ **C.** $\frac{35}{4}$ **D.** $\frac{84}{5}$

Câu 2: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1(f'(x))^2dx=\int_0^1(x+1)e^xf(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{2}$ **B.** $\frac{e^2}{4}$ **C.** $e-2$ **D.** $\frac{e}{2}$

Câu 3: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$ và $\int_0^1[f'(x)]^2\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{1+\ln 2}$. Tích phân $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B.** $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

C. $\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **D.** $\left(-1+\sqrt{2}\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Câu 4: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và đồng thời $\int_0^1 x.f(x)dx=\frac{4}{15}$ và $\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{49}{45}$. Tính $\int_0^1[f(x)]^2dx$

A. $\frac{2}{9}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{4}{63}$ **D.** 1

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1(f'(x))^2dx=\frac{9}{5}$ và $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\frac{2}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{3}{5}$

Câu 6: Cho hàm $f(x)$liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1(f'(x))^2dx=\int_0^1 e^xf(x)dx=\frac{e^2-1}{4}$ và $ef(1)=f(0)$. Tính tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$.

A. $e-2$ **B.** $e-1$ **C.** $2e-3$ **D.** $2e-1$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết rằng $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}, \int_0^1 f'(x)\cos\pi x dx=\frac{\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{3\pi}{2}$ **B.** $\frac{2}{\pi}$ **C.** π **D.** $\frac{1}{\pi}$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=3$ và $\int_0^1 f'(x)\sin\pi x dx=\pi$. Tích phân $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. $\frac{3\pi}{2}$ **B.** $\frac{2}{\pi}$ **C.** $-\frac{6}{\pi}$ **D.** $\frac{1}{\pi}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{\pi^2}{8}$, $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).f(x)dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$ **B.** π **C.** $\frac{1}{\pi}$ **D.** $\frac{2}{\pi}$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx=\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{6}{5}$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx=\frac{\pi}{4}$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x.f(x)dx=\frac{\pi}{4}$. Tính $f(2018\pi)$

A. -1 **B.** 0 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(2)=0$ $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx=-\frac{1}{3}$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx=7$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$ **B.** $\frac{-7}{5}$ **C.** $\frac{-7}{20}$ **D.** $\frac{7}{20}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x.f^2(x)dx=\int_0^1 x^2.f(x)dx-\frac{1}{16}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{5}$

Chú ý xem lời giải ví dụ 1 để vận dụng!

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \cos x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^\pi f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{4}{\pi}$. **D.** $\frac{3}{2\pi}$.

Lời giải

Nhìn cách phát biểu của bài toán tương đối giống với bài trên, nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có :

$$1 = \left(\int_0^\pi \cos x.f(x)dx\right)^2 \le \int_0^\pi \cos^2 xdx.\int_0^\pi f^2(x)dx = \frac{\pi}{2}.\int_0^\pi f^2(x)dx.$$

Suy ra $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2}{\pi}$ đến đây sẽ có nhiều bạn khoanh **A.**

Chú ý rằng dấu $"="$ xảy ra khi $f(x) = k\cos x$ thay vào $\int_0^\pi f(x)dx = 1$ ta được:

$$1 = \int_0^\pi f(x)dx = k\int_0^\pi \cos xdx = k.\sin x\Big|_0^\pi = 0$$

Điều này là vô lý! Vậy lời giải đúng của ta sẽ cần phải sử dụng tới phương pháp biến thiên hằng số. Ta có $\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \cos xf(x)dx = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \int_0^\pi a\cos xf(x)dx \\ b = \int_0^\pi bf(x)dx \end{cases}$ với $\begin{cases} a,\ b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$

Theo *Cauchy – Schwarz ta có :*

$$(a+b)^2 = \left(\int_0^\pi (a\cos x + b)f(x)dx\right)^2 \le \int_0^\pi (a\cos x + b)^2 dx\int_0^\pi f^2(x)dx$$

Lại có $\int_0^\pi (a\cos x + b)^2 dx = \frac{1}{2}\pi\left(a^2 + 2b^2\right)$. Suy ra $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2(a+b)^2}{\pi\left(a^2+2b^2\right)}$ với $\begin{cases} a,\ b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$

Do đó $\int_0^\pi f^2(x)dx \ge \frac{2}{\pi}.\max\left\{\frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}\right\} = \frac{3}{\pi}$

Chọn ý **B.**

Nhận xét:

- Ta nhân thêm $a,\ b$ vào giả thiết được gọi là phương pháp biến thiên hằng số.
- Cách tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2}$ ta làm như sau:

+ Nếu $b = 0 \Rightarrow P = 1$ (chính là đáp án sai mà mình đã làm ở trên)

+ Nếu $b \neq 0 \Rightarrow P = \dfrac{(a+b)^2}{a^2+2b^2} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 2\dfrac{a}{b} + 1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 2} = \dfrac{t^2+2t+1}{t^2+2}\left(t = \dfrac{a}{b}\right)$

Tới đây ta đạo hàm hoặc dùng MODE 7 dò tìm. Kết quả thu được GTLN của P bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $t = 2 \Rightarrow \dfrac{a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = 2b.$

Vậy dấu "=" để bài toán xảy ra khi $\begin{cases} a = 2b \\ f(x) = b(2\cos x + 1) \end{cases}$

Thay ngược lại điều kiện, ta được: $\int\limits_0^\pi b(2\cos x+1)dx = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{1}{\pi} \Rightarrow f(x) = \dfrac{2\cos x+1}{\pi}$

Lúc này $\int\limits_0^\pi f^2(x)dx = \int\limits_0^\pi \left(\dfrac{2\cos x+1}{\pi}\right)dx = \dfrac{3}{\pi}$

Cách khác. *Đưa về bình phương*

Hàm dưới dấu tích phân là $f^2(x), f(x), \cos x.f(x)$ nên ta liên kết với $(f(x)+\alpha\cos x+\beta)^2$

Với mỗi số thực $\alpha,\ \beta$ ta có:

$$\int\limits_0^\pi (f(x)+\alpha\cos x+\beta)^2 dx = \int\limits_0^\pi f^2(x)dx + 2\int\limits_0^\pi (\alpha\cos x+\beta)f(x)dx + \int\limits_0^\pi (\alpha\cos x+\beta)^2 dx$$

$$= \int\limits_0^\pi f^2(x)dx + 2(\alpha+\beta) + \dfrac{\pi}{2}\alpha^2 + \pi\beta^2$$

Ta cần tìm $\alpha,\ \beta$ sao cho $2(\alpha+\beta) + \dfrac{\pi}{2}\alpha^2 + \pi\beta^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$2(\alpha+\beta) + \dfrac{\pi}{2}\alpha^2 + \pi\beta^2 = \dfrac{\pi}{2}\left(\alpha + \dfrac{2}{\pi}\right)^2 + \pi\left(\beta + \dfrac{1}{\pi}\right)^2 - \dfrac{3}{\pi} \geq -\dfrac{3}{\pi}$$

Vậy với $\alpha = -\dfrac{2}{\pi}; \beta = -\dfrac{1}{\pi}$ thì ta có: $\int\limits_0^\pi \left[f(x) - \dfrac{2}{\pi}\cos x - \dfrac{1}{\pi}\right]^2 dx = \int\limits_0^\pi f^2(x)dx - \dfrac{3}{\pi}$

Suy ra $\int\limits_0^\pi f^2(x)dx = \int\limits_0^\pi \left[f(x) - \dfrac{2}{\pi}\cos x - \dfrac{1}{\pi}\right]^2 dx + \dfrac{3}{\pi} \geq \dfrac{3}{\pi}$. Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = \dfrac{2\cos x+1}{\pi}$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x.f(x)dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 (f(x))^3 dx$ là

A. 10 **B.** 1 **C.** 80 **D.** 8

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^x f(x)dx = 1$. Gọi *m* là giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 (f(x))^2 dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0 < m < 1$ **B.** $1 < m < 2$ **C.** $2 < m < 3$ **D.** $3 < m < 4$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sin x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\pi} f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{\pi}$ **B.** $\frac{3\pi-8}{\pi^2-8}$ **C.** $\frac{3\pi-4}{\pi^2-2}$ **D.** $\frac{3}{2\pi}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 3 **D.** $\frac{8}{3}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;e]$ thỏa mãn $\int_1^{e} f(x)dx = \int_1^{e} \ln x.f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^{e} f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2e-5}{e^2-3e+1}$ **B.** $\frac{2e-3}{e-2}$ **C.** $\frac{2e-3}{e^2-3e+1}$ **D.** $\frac{2e-5}{e-2}$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx$ bằng?

A. $\frac{4\ln(2e)}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$ **B.** $\frac{4\ln(2)-4}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$ **C.** $\frac{16\ln(2e)}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$ **D.** $\frac{16\ln(2)-16}{\pi^2-4\pi+4\ln^2 2}$

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^{2018}.f(x)dx = 1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$ là?

A. 4036 **B.** 4038 **C.** 4034 **D.** 4032

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x.f(x)dx = \int_0^1 f(x)\sqrt{x}\,dx = 1$ và $\int_0^1 [f(x)]^2 dx = 5$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{5}{7}$ **C.** $\frac{1}{18}$ **D.** $\frac{1}{21}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f'(x)\sin x dx = -1$ và $\int_0^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{2}{\pi}$. Tính tích phân $\int_0^{\pi} x.f(x)dx$

A. $-\frac{4}{\pi}$ **B.** $-\pi$ **C.** $-\frac{2}{\pi}$ **D.** $-\frac{\pi}{2}$

Chú ý xem lời giải ví dụ minh họa để vận dụng!

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, thỏa $\int_1^2 x^3 f(x)dx = 31$ Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_1^2 f^4(x)dx$ bằng?

A. 961. **B.** 3875. **C.** 148955. **D.** 923521.

Lời giải

Vẫn là bất đẳng thức Cauchy – Schwarz nhưng yêu cầu của bài toán $f(x)$ bậc 4 và giả thiết chỉ có 1, vì thế ý tưởng của ta là đánh giá trực tiếp yêu cầu $\int_1^2 f^4(x)dx$ qua $\int_1^2 x^3 f(x)dx = 31$.

Thế sử dụng Cauchy – Schwarz như thế nào? Rất đơn giản đó là sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz!

Ta có áp dụng hai lần liên tiếp bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta được:

$$31^4 = \left(\int_1^2 x^3 f(x)dx\right)^4 = \left[\left(\int_1^2 x^2.xf(x)dx\right)^2\right]^2 \le \left(\int_1^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_1^2 x^2 f^2(x)dx\right)^2 \le \left(\int_1^2 x^4 dx\right)^3 \int_1^2 f^4(x)dx$$

Suy ra $\int_1^2 f^4(x)dx \ge \dfrac{31^4}{\left(\int_1^2 x^4 dx\right)^3} = 3875$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = kx$ nên $k\int_1^2 x^4 dx = 31 \Leftrightarrow k = 5 \Rightarrow f(x) = 5x^2$

Chọn ý **B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f(2) = 1$, $\int_0^2 x^2 f(x)dx = \dfrac{8}{15}$ và $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \dfrac{32}{5}$ Giá trị của tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng?

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{3}$.

Lời giải

Vẫn như bài trên ta phải làm xuất hiện $(f'(x))^4$. Tích phân từng phần $\int_0^2 x^2 f(x)dx = \dfrac{8}{15}$ kết hợp với $f(2) = 1$, ta được $\int_0^2 x^3 f'(x)dx = \dfrac{32}{5}$.

Áp dụng *Cauchy – Schwarz 2* lần ta được

$$\left(\frac{32}{5}\right)^4 = \left(\int_0^2 x^3 f'(x)dx\right)^4 = \left(\int_0^2 x^2.xf'(x)dx\right)^4 \le \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_0^2 x^2[f'(x)]^2 dx\right)^2$$

$$\le \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2\left(\int_0^2 x^2[f'(x)]^2 dx\right)^2 \le \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^2 \times \left(\int_0^2 x^4 dx.\int_0^2 [f'(x)]^4 dx\right)$$

$$= \left(\int_0^2 x^4 dx\right)^3 \times \int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \frac{1048576}{625} = \left(\frac{32}{5}\right)^4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $xf'(x) = kx^2 \Rightarrow f'(x) = kx$ thay vào $\int_0^2 [f'(x)]^4 dx = \dfrac{32}{5}$ ta tìm được $k = 1$

$$\Rightarrow f'(x)=x\Rightarrow f(x)=\int x dx=\frac{x^2}{2}+C\xrightarrow{f(2)=1}C=-1.$$

Vậy $f(x)=\frac{x^2}{2}-1\Rightarrow\int\limits_0^2 f(x)dx=-\frac{2}{3}.$

Chọn ý **B.**

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức *AM - GM* ta có:

$$\left[f'(x)\right]^4+x^4+x^4+x^4\ge 4x^3f'(x)$$

Do vậy $\int\limits_0^2\left[f'(x)\right]^4dx+3\int\limits_0^2 x^4dx\ge 4\int\limits_0^2 x^3f'(x)dx.$ Mà giá trị của hai vế bằng nhau, có nghĩa là dấu "=" xảy ra nên $f'(x)=x$. Đến đây là tiếp như trên!

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(1)=\frac{3}{2}$; $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}$ và $\int_0^1(x-1)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2}dx=-\frac{1}{3}$. Tính $\int_0^1 f^2(x)dx$?

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{8}{15}$ **C.** $\frac{53}{60}$ **D.** $\frac{203}{60}$

Lời giải

Một bài toán khá khó, ta thấy rằng có một lượng bình phương trong căn nhưng tuy nhiên nếu để nguyên thì không thể nào áp dụng Cauchy – Schwarz được, do đó sẽ nảy ra ý tưởng sử dụng bất đẳng thức AM – GM để phá căn. Nhưng ta không thể áp dụng luôn được do $x-1<0$ bởi bất đẳng thức AM – GM áp dụng cho 2 số dương, do đó phải đổi chiều lại mới sử dụng được. Trước tiên phải biến đổi giả thiết đầu tiên trước đã.

Sử dụng tích phân từng phần ta có: $\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{6}=f(1)-\int_0^1 x.f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x.f'(x)dx=\frac{2}{3}$

Mặt khác theo bất đẳng thức *AM – GM ta có:*

$$2(1-x)\sqrt{1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2}\le(1-x)^2+1+\frac{x}{x-2}(f'(x))^2$$

Tích phân hai vế trên đoạn $[0;1]$ ta có:

$$\frac{2}{3}\le\frac{4}{3}+\int_0^1\frac{x}{x-2}(f'(x))^2dx\Rightarrow\int_0^1\frac{x}{2-x}(f'(x))^2dx\le\frac{2}{3}$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz ta có:*

$$\left(\int_0^1 x.f'(x)dx\right)^2=\frac{4}{9}=\left(\int_0^1\sqrt{x(2-x)}\sqrt{\frac{x}{2-x}}f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1 x(2-x)dx.\int_0^1\frac{x}{2-x}(f'(x))^2dx$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{x}{2-x}(f'(x))^2dx\ge\frac{2}{3}\Rightarrow f'(x)=2-x\Rightarrow f(x)=2x-\frac{x^2}{2}\Rightarrow\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{53}{60}.$$

Chọn ý **C.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=0$ và $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|=6$.

Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^2 f(x)dx$ là?

A. 2 **B.** $2-\sqrt{2}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $-1+\sqrt{2}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\left|\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 x^2 f(x)dx - \int_0^1 axf(x)dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2-ax)dx\right|$$
$$\le \int_0^1 |x^2-ax||f(x)|dx \le \int_0^1 |x^2-ax|\max_{[0;1]}|f(x)|dx = 6\int_0^1 |x^2-ax|dx$$

Do đó $\left|\int_0^1 x^2 f(x)dx\right| \le 6\min_{a\in\mathbb{R}}\int_0^1 |x^2-ax|dx \le 6\min_{[0;1]}\int_0^1 |x^2-ax|dx = 2-\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra tại $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn ý **B.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)|=6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ là?

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx=0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)|=6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^3 f(x)dx$ là?

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{3\left(2-\sqrt[3]{4}\right)}{4}$ **C.** $\frac{2-\sqrt[3]{4}}{16}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx=0$ và $\max_{[0;1]}|f(x)|=6$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 x^4 f(x)dx$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\frac{3\left(4-\sqrt{2}\right)}{10}$ **C.** $\frac{4-\sqrt{2}}{20}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{24}$

Tóm lại:

- Đây là một vấn đề có thể gọi là khó, nhưng tuy nhiên nếu tìm hiểu kỹ thì ta có thể thấy nó cũng khá đơn giản, mấu chốt vẫn luôn là các đại lượng bình phương, các đại lượng khác đều phải biến đổi để đưa về đại lượng này.
- Kinh nghiệm giải nhanh: Các bài toán ở đây dấu "=" đều xảy ra tại $f(x)=k.g(x)$, ví dụ như bài toán ví dụ 1, $f'(x)=kx^3$, vậy trong khi thi trắc

nghiệm nếu biến đổi theo đúng mẫu của bất đẳng thức này rồi thì ta có thể dự đoán được mối liên hệ và thế ngược lại tìm hằng số k, không phải mất công sử dụng bất đẳng thức để chứng minh nó nữa, sẽ tiết kiệm được thời gian làm bài!

LUYỆN TẬP

Câu 1: Với các số thực $a\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=\int_0^1\left|x^2-ax\right|dx$

A. $m=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ **B.** $m=\frac{-1+\sqrt{2}}{3}$ **C.** $m=\frac{-1+\sqrt{2}}{6}$ **D.** $m=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

Chọn ý **A.**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta dễ dàng tìm được $S\ge\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

Câu 2: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $I=\max_{f(x)\in A}\left\{\int_0^1 x^{2013}f(x)dx-\int_0^1 x.f^2(x)dx\right\}$

A. $\frac{1}{2014}$ **B.** $\frac{503}{2014}$ **C.** $\frac{2012}{2013}$ **D.** $\frac{1}{16104}$

: Chọn ý **A.**

Ta có $\int_0^1 x^{2013}f(x)dx-\int_0^1 x.f^2(x)dx=-\int_0^1\left(\sqrt{x}f(x)-\frac{x^{2012}\sqrt{x}}{2}\right)^2dx+\frac{1}{4}\int_0^1 x^{4025}dx\le\frac{1}{4.4026}$

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I=\int_a^b\left|x^2+(2-m)x-2\right|dx\,(a<b)$ trong đó a,b là nghiệm của phương trình $x^2+(2-m)x-2=0$

A. $\frac{128}{9}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ **D.** 8

Chọn ý **C.**

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta dễ dàng tìm được $I\ge\frac{8\sqrt{2}}{3}$

Câu 4: Với các số thực $a\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích phân $I=\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx$.

A. $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$ **B.** $\frac{1}{8}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{2-\sqrt{2}}{8}$

Chọn ý **B.**

Phá trị tuyệt đối ta có

$$M=\int_0^1\left|x^3-ax\right|dx=\int_0^{\sqrt{a}}\left|x^3-ax\right|dx+\int_{\sqrt{a}}^1\left|x^3-ax\right|dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{a}}\left(ax-x^3\right)dx+\int_{\sqrt{a}}^1\left(x^3-ax\right)dx=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\ge\frac{1}{8}$$

Câu 5: Cho *m* là tham số thực $m\in[1;3]$. Gọi *a,b* lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tích phân $S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx$. Tính $P=a+b$

A. $P=\frac{41}{6}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=\frac{21}{4}$ **D.** $P=2$

Chọn ý **A.**

Biến đổi giả thiết ta có

$$S=\int_m^{2m}\left|x^3-4mx^2+5m^2x-2m^3\right|dx=\int_m^{2m}\left|(x-m)^2(x-2m)\right|dx$$
$$=-\int_m^{2m}\left((x-m)^2(x-2m)\right)dx=-\int_m^{2m}(x-m)^3d(x-m)+m\int_m^{2m}(x-m)^2d(x-m)$$
$$=\left(-\frac{1}{4}(x-m)^4+\frac{m}{3}(x-3)^3\right)\Bigg|_m^{2m}=\frac{1}{12}m^4\in\left[\frac{1}{12};\frac{81}{12}\right]$$

Câu 6: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Xác định số thực *c* nhỏ nhất sao cho $\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx\le c\int_0^1 f(x)dx\ \forall f(x)\in A$.

A. 2018 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2018}$ **D.** $\sqrt{2018}$

Chọn ý **A.**

Đặt $t^{2018}=x\Rightarrow dx=2018t^{2017}\Rightarrow\int_0^1 f\left(\sqrt[2018]{x}\right)dx=2018\int_0^1 t^{2017}f(t)dt\le 2018\int_0^1 f(t)dt$

Do c nhỏ nhất nên $c\le 2018$. Ta sẽ chứng minh $c=2018$ là số cần tìm. Ta xét hàm số $f(x)=x^p$ thay vào bất đẳng thức đề bài ta có $\int_0^1 x^{\frac{p}{2018}}dx\le c\int_0^1 x^p dx\Rightarrow c\ge\frac{2018(p+1)}{p+2018}$

Cho $p\to+\infty$ ta suy ra $c\ge 2018$. Vậy $c=2018$ là số cần tìm

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2018f(0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M=\int_0^1\left[\frac{1}{(f(x))^2}+(f'(x))^2\right]dx$

A. $\ln 2018$ **B.** $2\ln 2018$ **C.** $2e$ **D.** $2018e$

Chọn ý **B.**

Sử dụng cách phân tích bình phương ta có

$$M=\int_0^1\left[\frac{1}{(f(x))^2}+(f'(x))^2\right]dx=\int_0^1\left[\frac{1}{f(x)}-f'(x)\right]^2dx+2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx$$
$$\ge 2\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=2\ln 2018$$

Câu 8: Cho 2 số thực *a,b* thỏa mãn $a<b$ và $a+b=ab+4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức tích phân $M=\int_a^b\left|(x-a)^2(x-b)\right|dx$.

A. 12 **B.** 0 **C.** $\frac{64}{3}$ **D.** $\frac{49}{3}$

Chọn ý **A.**

Thực hiện tương tự các câu trên.

Câu 9: Kí hiệu A là tập các hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$.

Tìm $I=\min\limits_{f(x)\in A}\left\{-\int_0^1 x^{2013}f(x)dx+\int_0^1 x.f^2(x)dx\right\}$

A. $-\frac{1}{2019}$ **B.** $-\frac{1}{16144}$ **C.** $-\frac{2017}{2018}$ **D.** $-\frac{1}{16140}$

Chọn ý **B.**

Câu 10: Với $m\in[1;3]$, gọi *a,b* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $I=\int_m^{2m}(x-m)^2(x-2m)^2dx$. Tính $a+b=?$

A. 31 **B.** 36 **C.** $\frac{122}{15}$ **D.** $\frac{121}{4}$

Chọn ý **C.**

Câu 11: Biết giá trị nhỏ nhất của $I=\int_{2m}^{2m^2+2}\left|x^2-2\left(m^2+m+1\right)x+4\left(m^3+m\right)\right|dx=\frac{a}{b}$, với *a,b* là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b=?$

A. 7 **B.** 337 **C.** 25 **D.** 91

Chọn ý **C.**

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $a.f(b)+b.f(a)\le\frac{2018}{\pi}$ với mọi *a,b* thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$

A. $\frac{1009}{\pi}$ **B.** $\frac{2018}{\pi}$ **C.** $\frac{1009}{2}$ **D.** 1009

Chọn ý **C.**

Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt\Rightarrow M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\cos tdt$

Tương tự đặt $x=\cos t\Rightarrow M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\sin tdt$

Do đó $M=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(\cos t)\sin t+f(\sin t)\cos t\right)dt\le\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2018}{\pi}dt\le\frac{1009}{2}$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x)=\frac{2018}{\pi\left(x^2+1\right)}$

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\left(1-\sqrt{x}\right)^2\right)\le1$ với mọi *x* thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của tích phân $I=\int_0^1\left(1-\sqrt{x}\right)f(x)dx$.

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{\pi}{12}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{\pi}{16}$

Chọn ý **C.**

Đặt $x=\sin^4t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2t\right)f\left(\sin^4t\right)4\sin^3t\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin^4t\right)4\sin^3t\cos^3tdt$

Đặt $x=\cos^4 t \Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)f\left(\cos^4 t\right)4\cos^3 t\sin tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos^4 t\right)4\sin^3 t\cos^3 tdt$

Do đó $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f\left(\sin^4 t\right)+f\left(\cos^4 t\right)\right)\sin^3 t\cos^3 tdt\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos^3 tdt=\frac{1}{6}$

Câu 14: Cho a,b là hai số thực thỏa mãn $0\le a\le b\le 1$. Đặt $f(a,b)=\int_a^b\left(2-x-3x^2\right)dx\,(a<b)$. Biết rằng $\max f(a,b)=\frac{m}{n}$ với *m,n* là các số thực dương vào $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n$.

A. 49 **B.** 71 **C.** 67 **D.** 179

Chọn ý **A.**

Ta đặt $g(a)=\int_a^b\left(2-x-3x^2\right)dx=2(b-a)+\frac{a^2-b^2}{2}+a^3-b^3$

Ta có $g'(a)=0\Leftrightarrow a=-1;a=\frac{2}{3}\Rightarrow \max\limits_{[0;1]}g(a)=\max\left\{g(0);g(1);g\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

$$=\max\left\{\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right);\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right)-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right)-\frac{22}{27}\right\}$$

$$=g(b)=\frac{1}{2}\left(-2b^3-b^2+4b\right)\le\frac{22}{27}$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)\le 1\forall x$ và $f(1)=0$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(1)$

A. $e-1$ **B.** $\frac{e-1}{e}$ **C.** $\frac{e}{e-1}$ **D.** e

Chọn ý **B.**

Câu 16: Cho $f(x)$ liên tục trên $[1;8]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2\left(\left(f\left(x^3\right)\right)^2+2f\left(x^3\right)\right)dx=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)dx-\frac{38}{15}$. Giá trị của tích phân $\int_1^8 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{2\left(\sqrt[3]{2}-4\right)}{5}$ **B.** $\frac{58}{5}$ **C.** $\frac{490}{3}$ **D.** $\frac{128}{5}$

Chọn ý **B.**

Đặt $x^3=t\Rightarrow 3x^2dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{3\sqrt[3]{t^2}}\Rightarrow \int_1^2\left(\left(f\left(x^3\right)\right)^2+2f\left(x^3\right)\right)dx=\int_1^8\frac{\left(f(x)^2+2f(x)\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$

Đến đây ta lại sử dụng kỹ thuật đưa về bình phương để giải quyết bài toán!

Câu 17: Cho số thực dương *a*, giá trị lớn nhất của tích phân $I=\int_{-2a}^a\left|\frac{2x^2+2ax-4a^2}{1+a^4}\right|dx$ bằng?

A. $\frac{27}{4}$ **B.** $\sqrt[4]{3}$ **C.** $\frac{27}{\sqrt[4]{4}}$ **D.** $\frac{27}{4\sqrt[4]{3}}$

Chọn ý **D.**

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f'(x) \geq f(x) > 0$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$.

A. $\frac{1}{f(0)}$ **B.** $\frac{1}{f(1)}$ **C.** $\frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)}$ **D.** $\frac{1}{2f(0)} + \frac{1}{2f(1)}$

Chọn ý **C.**

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} \leq \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_0^1 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(1)}$

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $\int_0^1 \left(f^3(x) + 4(f'(x))^3\right) dx \leq 3\int_0^1 f'(x) f^2(x) dx$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $2(\sqrt{e} - 1)$ **B.** $2(e^2 - 1)$ **C.** $\frac{-1 + \sqrt{e}}{2}$ **D.** $\frac{e^2 - 1}{2}$

Chọn ý **A.**

Nhận thấy $f'(x) > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow 1 = f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

Khi đó ta có $f^3(x) + 4[f'(x)]^3 - 3f'(x) f^2(x) = [f(x) - 2f'(x)]^2 (f(x) + f'(x)) \geq 0$

Đến đây ta có thể dễ dàng giải quyết bài toán!

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1], f'(x) \geq 2f(x) > 0$, với mọi $x \in [0;1]$ và $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}$. Giá trị của biểu thức $\frac{f(1)}{f(0)}$ bằng

A. $\sqrt{2e}$ **B.** e^2 **C.** $2e$ **D.** $\frac{e}{2}$

Chọn ý **C.**

Ta có $f'(x) \geq 2f(x) > 0 \Rightarrow 2 \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx \leq \int_0^1 \frac{f'(x)}{2\sqrt{f^3(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{f(0)}} - \frac{1}{\sqrt{f(1)}}$

Dấu "=" xảy ra khi $f'(x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = ke^{2x} (k > 0) \Rightarrow \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{ke^2}{ke^0} = e^2$

16. BÀI TOÁN TỔNG HỢP.

ĐỀ BÀI

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn bất phương trình $\int_1^2 e^{kx}dx < \dfrac{2018.e^k - 2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7 **B.** 8 **C.** Vô số. **D.** 6

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $y = f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

A. $m = 15$ **B.** $m = 20$ **C.** $m = 25$ **D.** $m = 30$

Câu 3: Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \dfrac{1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^8} - \dfrac{1}{x^{11}}} \right) dx = \dfrac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a, b, c nguyên dương, $\dfrac{a}{b}$ tối giản và $c < a$. Tính $S = a + b + c$?

A. $S = 51$ **B.** $S = 67$ **C.** $S = 39$ **D.** $S = 75$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x dx = -4$. Khi đó giá trị của $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$ **B.** $(5;6)$ **C.** $(12;13)$ **D.** $(11;12)$

Câu 5: Cho $\int_0^1 x\left[\ln(x+2) + \dfrac{1}{x+2} \right] dx = \dfrac{a^2 \ln 2 - bc\ln 3 + c}{4}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 13$ **B.** $T = 15$ **C.** $T = 17$ **D.** $T = 11$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).[f(x)]^{2018} = x.e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hỏi phương trình $f(x) = -\dfrac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của tham số m nằm trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn phương trình $\int_0^m \dfrac{\sin x}{5 + 4\cos x} dx = \dfrac{1}{2}$?

A. 6 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 4

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \dfrac{f\left(\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}} dx = \dfrac{2\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)}+C$ **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$ **C.** $\frac{2x+3}{4(x^2+1)}+C$ **D.** $\frac{2x+3}{8(x^2+1)}+C$

Câu 9: Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x.\cos mx dx=\frac{\pi-2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(\frac{7}{4};2\right)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ **C.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{6};\frac{8}{7}\right)$

Câu 10: Cho $I_n=\int \tan^n x dx$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó $I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}$ bằng?

A. $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$ **B.** $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$ **C.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$ **D.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$

Câu 11: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J=1+\ln 4$ **B.** $J=4-\ln 2$ **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$ **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng?

A. $S=\frac{31}{2}$ **B.** $S=\frac{9}{2}$ **C.** $S=\frac{5}{2}$ **D.** $f(0).f(2)=1$

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn điều kiện $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6 **B.** –4 **C.** 4 **D.** –10

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx=2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$ **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$ **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$ **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$.

Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$..

A. 2 **B.** 4 **C.** –1 **D.** 6

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. -4 **B.** $e-2$ **C.** 4 **D.** $2-e$

Câu 17: Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx=a.e+b\ln(e+c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$?

A. $P=1$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=-2$

Câu 18: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(0;\ 2018\pi)$?

A. $P=1$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=-2$

Câu 19: Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}dx=\frac{1}{a}+b\ln\frac{3}{2}\ (a,b>0)$ tìm các giá trị thực của tham số k để $\int_8^{ab}dx<\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k<0$ **B.** $k\neq 0$ **C.** $k>0$ **D.** $k\in\mathbb{R}$

Câu 20: Giả sử a,b,c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx=\frac{1}{2}\int_1^3(au^4+bu^2+c)du$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$

A. $S=3$ **B.** $S=0$ **C.** $S=1$ **D.** $S=2$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$. **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4f(4)-f(0)=3$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2018e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017e^{2018}$.

C. $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2019e^{2018}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=e$. **B.** $f(1)=\frac{1}{e}$. **C.** $f(1)=\frac{2}{e}$. **D.** $f(1)=-\frac{2}{e}$.

Câu 24: Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\dfrac{ax+b}{x+4}\ (4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn điều kiện $2f^2(x)=\left[F(x)-1\right]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4$ **B.** $a=1, b=-1$ **C.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ **D.** $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

Câu 25: Cho $I=\int\limits_0^m(2x-1)e^{2x}dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I<m$ là khoảng $(a;b)$. Tính $P=a-3b$.

A. $P=-3$ **B.** $P=-2$ **C.** $P=1$ **D.** $P=0$

Câu 26: Giá trị $I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}}x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây?

A. 0,046 **B.** 0,036 **C.** 0,037 **D.** 0,038

Câu 27: Biết $\int\limits_0^4\dfrac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\dfrac{5}{3}\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$ **B.** $T=2$ **C.** $T=1$ **D.** $T=3$

Câu 28: Cho tích phân $I_n=\int\limits_0^1\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$ với $n\in\mathbb{N}$.

Đặt $u_n=1.(I_1+I_2)+2(I_2+I_3)+3(I_3+I_4)+...+n(I_n+I_{n+1})-n$. Biết $\lim u_n=L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L\in(-1;0)$ **B.** $L\in(-2;-1)$ **C.** $L\in(0;1)$ **D.** $L\in(1;2)$

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn tích phân

$$\int\limits_0^2\left(1-n^2+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}\right)dx=-2$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 tích phân $\int\limits_0^1 f(2x)dx=2$ và $\int\limits_0^2 f(6x)dx=14$. Tính tích phân $\int\limits_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$.

A. 30 **B.** 32 **C.** 34 **D.** 36

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x)\geq e^x+x$ và $f'(2)=2e$, $f(0)=e^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(2)\leq 4e-1$. **B.** $f(2)\leq 2e+e^2$. **C.** $f(2)\leq e^2-2e$. **D.** $f(2)>12$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = 2$ và $\int_1^2 f(x).f'(x)dx = 1$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)dx = \frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)d(f(x)) = \frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\frac{251}{7}$. **C.** $f(2)=\frac{256}{7}$. **D.** $f(2)=\frac{261}{7}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\frac{4}{9}$. **B.** $P=-\frac{2}{9}$. **C.** $P=\frac{7}{9}$. **D.** $P=\frac{14}{9}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi $a,\ b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=\frac{1}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{2}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(3-x).f(x)=1 \\ f(x)\neq -1 \end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{xf'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=\frac{3}{2}$. **D.** $I=\frac{5}{2}$.

Câu 37: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int_1^4 [f(x)+g(x)]dx$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Câu 38: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=2-e$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}[f'(x)]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq 0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=\frac{4}{5}$. **C.** $I=-\frac{5}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x)=f'(1-x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết rằng $f(0)=1$, $f(1)=41$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\sqrt{41}$. **B.** $I=21$. **C.** $I=41$. **D.** $I=42$.

Câu 42: Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=\frac{1}{2}$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=2$.

Câu 43: Biết tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}dx=1+\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}+a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với $a, b\in\mathbb{Z}^+$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Câu 44: Biết $\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Câu 45: Biết $\int_0^2\sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}dx=a\pi+b\sqrt{2}+c$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Câu 46: Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $P=a-b+c$.

A. $P=-37$. **B.** $P=-35$. **C.** $P=35$. **D.** $P=41$.

Câu 47 : Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$, thỏa mãn điều kiện $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\ge 0$, $f'(0)=0;f(0)=1$ và đồng thời điều kiện $f''(x)f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0$. Tính giá trị của $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Câu 49: Có bao nhiêu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1(f(x))^{2018}dx=\int_0^1(f(x))^{2019}dx=\int_0^1(f(x))^{2020}dx$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ có $f(1)=1;f(4)=3\ln\frac{5}{2}+1$ và thỏa mãn đồng thời $\int_1^4\frac{f'(x)}{x+1}dx=\frac{9}{10};\int_1^4 x\left(f'(x)\right)^2dx=9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10}$. Tính tích phân $\int_1^4 f(x)dx$

A. $5\ln\frac{5}{2}-6$ **B.** $5\ln\frac{5}{2}+6$ **C.** $15\ln\frac{5}{2}-6$ **D.** $15\ln\frac{5}{2}+6$

Câu 51: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[\frac{(2018+\cos x)^{1+\cos x}}{2018+\sin x}\right]dx=a\ln a-b\ln b-1$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng?

A. 2015 **B.** 4030 **C.** 4037 **D.** 2025

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)>0,\forall x\in[0;8]$ và $\int_0^8 f(x)dx=10$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ trên $(0;8]$ là?

A. $\frac{4}{5}$ **B.** 10 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** 8

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$ đồng thời $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos x}dx=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx=2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)dx$ bằng?

A. 4 **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$ **D.** 6

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$.

Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$ **B.** $I=2\ln^2 2$ **C.** $I=\ln^2 2$ **D.** $I=2\ln 2$

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn điều kiện $I=\int_0^3 f(x)dx=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx$ là?

A. $4+12e$ **B.** $12+4e$ **C.** $3e+14$ **D.** $14+3e$

Câu 56: Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\frac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a\in\left(\frac{1}{2018};1\right)$ **B.** $a\in\left(0;\frac{1}{2018}\right]$ **C.** $a\in[1;2018)$ **D.** $a\in[2018;+\infty)$

Câu 57: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m=-\frac{1}{2}$ **B.** $m=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$ **C.** $m=\frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$ **D.** $m=\frac{1}{2}$

Câu 58: Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx=-f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x)=\ln x^{15}$.

A. $m=20$ **B.** $m=4$ **C.** $m=5$ **D.** $m=3$

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$. **B.** $m=\frac{5}{2}$, $M=3$

C. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$. **D.** $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Câu 61: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $\int_0^1 f(x)dx = 4$, $\int_0^3 f(x)dx = 6$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} f(|2x+1|)dx$

A. $I = 3$ **B.** $I = 5$ **C.** $I = 6$ **D.** $I = 4$

Câu 62: Biết $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

A. $P = 8$ **B.** $P = 10$ **C.** $P = 6$ **D.** $P = 12$

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$. Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ **B.** $\frac{15}{4}$ **C.** $\frac{45}{8}$ **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời điều kiện $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$ ta được kết quả là?

A. $I = e + 4$ **B.** $I = 8$ **C.** $I = 2$ **D.** $I = e + 2$

Câu 65: Tính tổng $T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\frac{1}{4121202989}$ **B.** $\frac{1}{4121202990}$ **C.** $\frac{1}{4121202992}$ **D.** $\frac{1}{4121202991}$

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0;1)$. Biết rằng $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4$, $\forall x \in (0;1)$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)} dx$ theo a và b.

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$ **B.** $I = \frac{3b+a}{4ab}$ **C.** $I = \frac{3b-a}{4ab}$ **D.** $I = \frac{3a-b}{4ab}$

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)>0,\ \forall x\in[1;2]$ và $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx=\frac{7}{375}$. Biết $f(1)=1,\ f(2)=\frac{22}{15}$, tính $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $P=\frac{71}{60}$ **B.** $P=\frac{6}{5}$ **C.** $P=\frac{73}{60}$ **D.** $P=\frac{37}{30}$

Câu 69: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)dx=c\ln 2-\frac{a}{b}$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=9$ **B.** $T=-11$ **C.** $T=5$ **D.** $T=7$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$ **B.** $T=9$ **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$ **D.** $T=2-9\ln 2$

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1 \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1, \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Tính tích phân $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{7}{4}$

Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện $\begin{cases} f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ x[f(x)]^2+[f'(x)]^2=f(x)f''(x), \forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$ **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$ **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$

Câu 73: Cho các số $a,b>2$ thỏa mãn $2\int_1^a \frac{e^{x^2}}{x}dx=\int_1^b \frac{e^x}{x}dx$. Khi đó, quan hệ giữa a,b là?

A. $a=2b$ **B.** $b=2a$ **C.** $a=b^2$ **D.** $b=a^2$

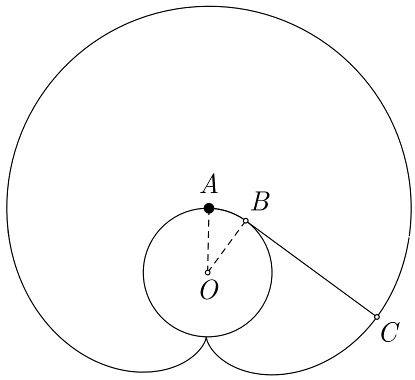
Câu 74: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f^2(-x)=(x^2+2x+4)f(x+2)$ Biết rằng $f(x)\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ tính tích phân $I=\int_0^2 xf''(x)dx$.

A. $I=-4$ **B.** $I=4$ **C.** $I=0$ **D.** $I=8$

Câu 75: Trong giải tích, $I=\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $m,n,p\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ được gọi là tính được (*có thể biểu diễn bởi các hàm như đa thức, hữu tỷ, lượng giác, logarit, ...*) khi một trong các số $p,\dfrac{m+1}{n},p+\dfrac{m+1}{n}$ là số nguyên. Xét nguyên hàm $I=\int\dfrac{x^a dx}{\left(\sqrt[a]{x^5+1}\right)^6}$, hỏi có bao nhiêu số $a\in\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ để I có thể tính được?

A. 5 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 6

Câu 76 : Một con dê được buộc vào điểm A trên hàng rào về phía ngoài của khu vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Sợi dây buộc con dê có độ dài bằng nửa chu vi khu vườn. Hình bên mô tả phần cỏ bên ngoài vườn mà con dê có thể ăn được. Biết rằng với hàm số $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$ và điểm B thuộc (O) sao cho $AOB=\alpha>0$ thì đoạn BC là tiếp tuyến (O) có độ dại $f(\alpha)$ sẽ quét qua một phần mặt phẳng mà diện tích được xác định bởi $\int_0^\pi f^2(\alpha)d\alpha$ khi α thay đổi từ $0\to\pi$ (ở đây tính cả bên trái lẫn bên phải)



Từ công thức trên hay xác định diện tích S phần cỏ mà con dê có thể ăn được.

A. $S=32\pi^3$ **B.** $S=18\pi^3$ **C.** $S=30\pi^3$ **D.** $S=28\pi^3$

Câu 77: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 xf(x)\left(x^2+f^2(x)\right)dx\ge\dfrac{2}{5}$ Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1\left(x^2+\dfrac{1}{2}f^2(x)\right)dx$ bằng?

A. $\dfrac{3}{10}$ **B.** $\dfrac{16}{45}$ **C.** $\dfrac{2}{5}$ **D.** $\dfrac{7}{20}$

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1)=0$, $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_1^3\left[f'(x)\right]^2dx$ bằng?

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x)\ge f(x)>0$, $\forall x\in[0;1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0).\int\limits_0^1\dfrac{1}{f(x)}dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\dfrac{e-1}{e}$. **C.** $\dfrac{e+1}{e}$. **D.** $e-1$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt hàm số $g(x)=1+\int_0^{x^2} f(t)dt$. Biết rằng $g(x)\geq 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. 1. **B.** $e-1$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f(x)\leq 2018+2\int_0^x f(t)dt$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ có dạng ae^2+b với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2020.

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\min\limits_{[1;3]} f(x)=\frac{1}{2}$ và biểu thức $S=\int_1^3 f(x)dx.\int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I=\int_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn với mọi x,y,α,β và $\alpha^2+\beta^2>0$ ta có $\alpha.f(x)+\beta.f(y)\geq(\alpha+\beta)f\left(\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha+\beta}\right)$. Biết $f(0)=0, \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=2$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 8 **B.** 4 **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 2

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ dương liên tục $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời điều kiện $f(x)\leq 2018+2\int_0^x f(t)dt, \forall x\geq 0; \int_0^1 f(x)dx=1009(e^2-1)$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}dx$?

A. $2018(e-1)$ **B.** $1009(e+1)$ **C.** $2018(e-2)$ **D.** $1009(e-1)$

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1;2]$. Biết $\ln 2f'(1)=f(1)=1, f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}}, \forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2 xf(x)dx$?

A. $\log_2 5+\frac{1}{2\ln 2}+1$ **B.** $3\log_2 5-\frac{3}{4\ln 2}-2$

C. $\log_2 5-\frac{3}{\ln 2}+2$ **D.** $2\log_2 5-\frac{3}{2\ln 2}-1$

Câu 86: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)=-1, f(4)=-8$ và đồng thời $[f'(x)]^2\sqrt{x^3}-f(x)=9\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-3x, \forall x\in[1;4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x)dx$ bằng

A. -7 **B.** $-\frac{89}{6}$ **C.** $-\frac{79}{6}$ **D.** -8

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2-[f(1)]^2=63;2[f(x)]^2+x^2[f'(x)]^2=27x^2,\forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2[f(x)]^2dx$

A. 15 **B.** 18 **C.** 21 **D.** 25

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}dx=\frac{27}{4};f(1)=2\sqrt{2},f(3)=4$. Tích phân $\int_1^3\frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}dx$ bằng

A. $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}-2$

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $e.f(1)=4f(0)=4$ và đồng thời $\int_0^1e^{2x}\left([f'(x)]^2-[f(x)]^2\right)dx+4\int_0^1e^x.f(x)dx=\frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1f(x)dx$?

A. $\frac{4(e-1)}{e}$ **B.** $\frac{3(e-1)}{e}$ **C.** $\frac{2(e+2)}{e}$ **D.** $\frac{5(e-2)}{e}$

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=\frac{1}{16};\int_0^1(x+1)^3f'(x)dx=-\frac{1}{8};\int_0^1\frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx=\frac{1}{64}$. Tính tích phân $\int_0^1f(x)dx$?

A. $\frac{1}{24}$ **B.** $\frac{1}{32}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa $f(0)=0,|f(x)-f(y)|=|\sin x-\sin y|$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((f(x))^2-f(x)\right)dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}+1$ **B.** $\frac{\pi}{8}$ **C.** $\frac{3\pi}{8}$ **D.** $1-\frac{\pi}{4}$

Câu 92: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=1;f'(0)=0;f''(x)-5f'(x)+6f(x)\geq 0,\forall x\in[0;+\infty);\int_0^{\ln 2}f(x)dx=\frac{-1}{6}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{\ln 2}f^2(x)dx$.

A. $\frac{15}{4}$ **B.** $\frac{35}{17}$ **C.** $\frac{27}{20}$ **D.** $\frac{24}{7}$

Câu 93: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $f(0)-2f(1)+f(2)=1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2[f''(x)]^2dx$ bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 94: Cho tích phân $I=\int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I. Tính $S=M+m$?

A. $54\sqrt{2}+108$ **B.** $36\sqrt{2}+108$ **C.** $6\sqrt{3}+54$ **D.** $6\sqrt{3}+36$

Câu 95: Cho tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $a\pi\left(\frac{1}{b}+\frac{\sqrt{c}}{d}\right)$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c+d$?

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Câu 96: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}, n\in\mathbb{N}^*$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{b}+\frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c+d$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Câu 97: Cho tích phân $I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx$, biết rằng giá trị lớn nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{be}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $S=a+b$

A. 13 **B.** 14 **C.** 14 **D.** 15

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, f(x)>0$ và đồng thời $f(x)\ln f(x)=xf'(x)\left[f(x)-1\right], \forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{3}$ **B.** $\frac{e-6}{6}$ **C.** 4 **D.** 1

Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(2018x+2017)=2018f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx$?

A. $\frac{4}{3}\left[f(-1)\right]^2$ **B.** $\frac{5}{3}\left[f(-1)\right]^2$ **C.** $\frac{7}{3}\left[f(-1)\right]^2$ **D.** $\frac{8}{3}\left[f(-1)\right]^2$

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{7}{3}$ và đồng thời $\frac{3x^3f(x)}{\left[f'(x)\right]^2+xf'(x)+x^2}=f'(x)-x, \forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. $\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$ **B.** $\frac{7\sqrt{7}+1}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{7}-1}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Câu 101: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=2$. Biết rằng $0\le f'(x)\le 2\sqrt{2x},\forall x\in[0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int\limits_0^1 (f'(x))^2dx$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(2;4)$ **B.** $\left(\frac{13}{3};\frac{14}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$ **D.** $(1;3)$

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x).\left[4(f'(x))^2+f(x).f''(x)\right]=e^x,\forall x\in\mathbb{R}$, biết $f(0)=0$. Khi đó $\int\limits_0^{5\ln 2} f^5(x)dx$ bằng?

A. $5\left(31-\frac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$ **B.** $\frac{1}{5}\left(31-\frac{355\ln 2}{2}\right)$

C. $\frac{1}{5}\left(31-\frac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$ **D.** $5\left(31-\frac{355\ln 2}{2}\right)$

Câu 103: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^2 f(x)dx=1$. Tính giới hạn của dãy số:

$$u_n=\frac{1}{n}\left[f(1)+\sqrt{\frac{n}{n+3}}f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right)+\sqrt{\frac{n}{n+6}}f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right)+\ldots+\sqrt{\frac{n}{4n-3}}f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right]$$

A. 2 **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** $\frac{4}{3}$

Câu 104: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1)=g(1)=1;f(2).g(2)=f(1)$ và đồng thời $1-f'(x)g'(x)=g(x)\left[f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)\right],\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)g'(x)dx$?

A. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **B.** $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **C.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 105: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=0$ và đồng thời điều kiện $\int_0^1|f'(x)|dx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ trên $[0;1]$?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 1

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn bất phương trình $\int_1^2 e^{kx}dx < \frac{2018.e^k - 2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

A. 7 **B.** 8 **C.** Vô số. **D.** 6

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 e^{kx}dx = \left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)\Big|_1^2 = \frac{e^{2k} - e^k}{k}$

$$\int_1^2 e^{kx}dx < \frac{2018.e^k - 2018}{k} \Leftrightarrow \frac{e^{2k} - e^k}{k} < \frac{2018.e^k - 2018}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^k\left(e^k - 1\right) < 2018\left(e^k - 1\right)(k > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(e^k - 1\right)\left(e^k - 2018\right) < 0 \Leftrightarrow 1 < e^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018 \approx 7.6$$

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k \in S$ (với $S = \{1;2;3;4;5;6;7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Chọn ý **A.**

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[1;+\infty)$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1;+\infty)$. Tìm số nguyên dương lớn nhất m sao cho $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) \geq m$ với mọi hàm số $y = f(x)$ thỏa điều kiện đề bài.

A. $m = 15$ **B.** $m = 20$ **C.** $m = 25$ **D.** $m = 30$

Lời giải

Ta có: $f'(x) \geq 3x^2 + 2x - 5$ trên $[1;+\infty)$

Do $3x^2 + 2x - 5 \geq 0$, $\forall x \in [1;+\infty)$ nên $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [1;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$. Suy ra $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) = f(3)$.

Ta lại có: $\int_1^3 f'(x)dx \geq \int_1^3 \left(3x^2 + 2x - 5\right)dx$

$$\Leftrightarrow f(x)\Big|_1^3 \geq \left(x^3 + x^2 - 5x\right)\Big|_1^3 \Leftrightarrow f(3) - f(1) \geq 24 \Leftrightarrow f(3) \geq 25$$

Vậy $\min\limits_{x\in[3;10]} f(x) \geq 25$. Hay $m = 25$.

Chọn ý **C.**

Câu 3: Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}}\right)dx = \frac{a}{b}\sqrt[3]{c}$, với a, b, c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c < a$. Tính $S = a + b + c$?

A. $S = 51$ **B.** $S = 67$ **C.** $S = 39$ **D.** $S = 75$

Lời giải

Ta có $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\int_1^2\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\left(1+\frac{2}{x^3}\right)dx$.

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}\Rightarrow t^3=x-\frac{1}{x^2}\Rightarrow 3t^2dt=\left(1+\frac{2}{x^3}\right)dx$.

Khi đó $\int_1^2\left(\sqrt[3]{x-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^{11}}}\right)dx=\int_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}3t^3dt=\frac{3}{4}t^4\Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{7}{4}}}=\frac{21}{32}\sqrt[3]{14}$.

Chọn ý **B.**

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in(0;+\infty)$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=-4$. Khi đó giá trị của $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$ **B.** $(5;6)$ **C.** $(12;13)$ **D.** $(11;12)$

Lời giải

Ta có:

$$f(x)=x(\sin x+f'(x))+\cos x\Rightarrow\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(\frac{1}{x}\cos x\right)'\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}\cos x+c\Rightarrow f(x)=\cos x+cx$$

Khi đó: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=-4\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\cos x+cx)\sin x\,dx=-4$

$\Leftrightarrow\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\sin x\,dx+c\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}x\sin x\,dx=-4\Leftrightarrow 0+c(-2)=-4\Leftrightarrow c=2$

$\Rightarrow f(x)=\cos x+2x\Rightarrow f(\pi)=2\pi-1\in(5;6)$.

Chọn ý **B.**

Câu 5: Cho $\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx=\frac{a^2\ln 2-bc\ln 3+c}{4}$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=13$ **B.** $T=15$ **C.** $T=17$ **D.** $T=11$

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+2)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x+2}\\v=\frac{x^2-4}{2}\end{cases}$.

Khi đó tích phân ban đầu trở thành

$$\int_0^1 x\left[\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]dx=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x-2}{2}dx+\int_0^1\frac{x}{x+2}dx$$

$$=\frac{-3}{2}\ln 3+2\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_0^1+\left(x-2\ln(x+2)\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{-3}{2}\ln 3+2\ln 2+\frac{3}{4}+1-2(\ln 3-\ln 2)=\frac{-14\ln 3+16\ln 2+7}{4}.$$

Suy ra: $\begin{cases}a=4\\ b=2\\ c=7\end{cases}$. Vậy $T=a+b+c=13$.

Chọn ý **A.**

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x).\left[f(x)\right]^{2018}=x.e^x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Hỏi phương trình $f(x)=-\frac{1}{e}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Ta có: $\int f'(x).\left[f(x)\right]^{2018}dx=\int x.e^x dx\Leftrightarrow\int\left[f(x)\right]^{2018}df(x)=(x-1).e^x+C$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2019}.\left[f(x)\right]^{2019}=(x-1).e^x+C\Leftrightarrow\left[f(x)\right]^{2019}=2019(x-1).e^x+2019C.$$

Do $f(1)=1$ nên $2019C=1$ hay $\left[f(x)\right]^{2019}=2019(x-1).e^x+1$.

Ta có: $f(x)=-\frac{1}{e}\Leftrightarrow\left[f(x)\right]^{2019}=-\frac{1}{e^{2019}}\Leftrightarrow 2019(x-1).e^x+1+\frac{1}{e^{2019}}=0$.

Xét hàm số $g(x)=2019(x-1).e^x+1+\frac{1}{e^{2019}}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}g'(x)=2019x.e^x;g'(x)=0\Leftrightarrow x=0;g(0)=-2019+1+\frac{1}{e^{2019}}<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1+\frac{1}{e^{2019}}>0\end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$1+e^{-2019}$	↘	$g(0)$	↗	$+\infty$

Do đó phương trình $f(x)=-\frac{1}{e}$ có đúng 2 nghiệm.

Chọn ý **D.**

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của tham số m nằm trong khoảng $(0;6\pi)$ thỏa mãn phương trình $\int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}dx = \frac{1}{2}$?

A. 6 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\frac{1}{2} = \int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x}dx = -\int_0^m \frac{1}{5+4\cos x}d(\cos x)$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^m \frac{1}{5+4\cos x}d(5+4\cos x) = -\frac{1}{4}\ln|5+4\cos x|\Big|_0^m$$

Mà $5+4\cos x \geq 5-4>0 \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\ln(5+4\cos x)\Big|_0^m = -\frac{1}{4}\ln\frac{5+4\cos m}{9}$

$$\Rightarrow \ln\frac{5+4\cos m}{9} = -2 \Leftrightarrow \frac{5+4\cos m}{9} = e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \cos m = \frac{9e^{-2}-5}{4} \Leftrightarrow m = \pm\arccos\frac{9e^{-2}-5}{4} + k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Theo đề bài $m\in(0;6\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \arccos\frac{9e^{-2}-5}{4}+k2\pi\in(0;6\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{array}\right. \\ -\arccos\frac{9e^{-2}-5}{4}+k2\pi\in(0;6\pi) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Với mỗi giá trị k trong hai trường hợp trên ta được một giá trị m thỏa mãn.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn ý **A.**

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5}+C$.

Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)}+C$ **B.** $\frac{x+3}{x^2+4}+C$ **C.** $\frac{2x+3}{4(x^2+1)}+C$ **D.** $\frac{2x+3}{8(x^2+1)}+C$

Lời giải

Theo giả thiết ta có :

$$\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5}+C \Leftrightarrow 2\int f(\sqrt{x+1})d(\sqrt{x+1}) = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1})^2+4}+C.$$

Hay $2\int f(t)dt=\frac{2(t+3)}{t^2+4}+C\Rightarrow\int f(t)dt=\frac{t+3}{t^2+4}+\frac{C}{2}$.

Suy ra $\int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+3}{(2x)^2+4}+\frac{C}{2}\right)=\frac{2x+3}{8x^2+8}+\frac{C}{4}$

Chọn ý **D.**

Câu 9: Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x.\cos mxdx=\frac{\pi-2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(\frac{7}{4};2\right)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$ **C.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{6};\frac{8}{7}\right)$

Lời giải

Áp dụng công thức tích phân từng phần, đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\cos mxdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=\frac{1}{m}\sin mx\end{cases}$

Tích phân ban đầ trở thành:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x.\cos mxdx=\frac{x}{m}\sin mx\Big|_0^{\frac{\pi}{2m}}-\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2m}}\sin mxdx=\frac{\pi}{2m^2}+\frac{1}{m^2}.\cos mx\Big|_0^{\frac{\pi}{2m}}=\left(\frac{\pi-2}{2}\right).\frac{1}{m^2}$$

Theo giả thiết ta có $\left(\frac{\pi-2}{2}\right).\frac{1}{m^2}=\frac{\pi-2}{2}\Leftrightarrow m=\pm1$

Vì m là số hữu tỷ dương nên $m=1\in\left(\frac{5}{6};\frac{8}{7}\right)$.

Chọn ý **D.**

Câu 10: Cho $I_n=\int\tan^n xdx$ với $n\in\mathbb{N}$. Khi đó $I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}$ bằng?

A. $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$ **B.** $\sum_{r=1}^{9}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$ **C.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^r}{r}+C$ **D.** $\sum_{r=1}^{10}\frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1}+C$

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có

$$I_n=\int\tan^{n-2}x.\tan^2 xdx=\int\tan^{n-2}x.\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}+C$$

$$=\int\tan^{n-2}x.(\tan x)'dx-I_{n-2}\Rightarrow I_n+I_{n-2}=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}+C.$$

Khi đó $I_0+I_1+2(I_2+I_3+...+I_8)+I_9+I_{10}=(I_{10}+I_8)+(I_9+I_7)+...+(I_3+I_1)+(I_2+I_0)$

$$=\frac{\tan^9 x}{9}+\frac{\tan^8 x}{8}+....+\frac{\tan^2 x}{2}+\tan x+C=\sum_{r=1}^{9}\frac{\tan^r x}{r}+C.$$

Chọn ý **A.**

Câu 11: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx$.

A. $J=1+\ln 4$ **B.** $J=4-\ln 2$ **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$ **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$

Lời giải

Cách 1: Ta có $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\int_1^2\frac{f'(x)}{x}dx-\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\frac{1}{x^2}dx\\ v=f(x)\end{cases}$

Khi đó tích phân ban đầu trở thành

$$J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx-\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}f(2)-f(1)+\left(2\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 4.$$

Cách 2: Ta có

$$J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{f(x)}{x}+2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 4.$$

Chọn ý **D.**

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}$, $f(0)=5$ và $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)$ bằng?

A. $S=\frac{31}{2}$ **B.** $S=\frac{9}{2}$ **C.** $S=\frac{5}{2}$ **D.** $f(0).f(2)=1$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}-2}=\frac{|e^x-1|}{\sqrt{e^x}}=\begin{cases}e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}} & \text{khi } x\ge 0\\ e^{-\frac{x}{2}}-e^{\frac{x}{2}} & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Do đó $f(x)=\begin{cases}2e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{2}}+C_1 & \text{khi } x\ge 0\\ -2e^{-\frac{x}{2}}-2e^{\frac{x}{2}}+C_2 & \text{khi } x<0\end{cases}$.

Theo giả thiết ta có:

$$f(0)=5 \text{ nên } 2e^0+2e^0+C_1=5\Leftrightarrow C_1=1\Rightarrow f(\ln 4)=2e^{\frac{\ln 4}{2}}+2e^{-\frac{\ln 4}{2}}+1=6$$

Tương tự ta có $f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=0$ nên $-2e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}-2e^{\frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{2}}+C_2=0 \Leftrightarrow C_2=5$

$\Rightarrow f(-\ln 16)=-2e^{-\frac{(-\ln 16)}{2}}-2e^{\frac{(-\ln 16)}{2}}+5=-\frac{7}{2}$

Vậy $S=f(-\ln 16)+f(\ln 4)=\frac{5}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn điều kiện $f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$. Tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ có kết quả dạng $\frac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6 **B.** -4 **C.** 4 **D.** -10

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f(x)-8x^3f(x^4)+\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow f(x)=8x^3f(x^4)-\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 8x^3f(x^4)dx-\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx \quad (1)$$

- Xét tích phân $\int_0^1 8x^3f(x^4)dx=\int_0^1 2f(x^4)d(x^4)=2\int_0^1 f(x)dx=2I$
- Xét tích phân $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow tdt=xdx$. Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Nên $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{(t^2-1)tdt}{t}=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Do đó $(1)\Rightarrow I=2I-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)\Rightarrow I=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$. Nên $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=6$.

Chọn ý **A.**

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx=2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m=2^{250}\sqrt{2^{500}-2}$ **B.** $m=\sqrt{2^{1000}+1}$ **C.** $m=2^{250}\sqrt{2^{500}+2}$ **D.** $m=\sqrt{2^{1000}-1}$

Lời giải

Ta có $\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{m^2+1}}te^tdt=(te^t-e^t)\Big|_1^{\sqrt{m^2+1}}=\left(\sqrt{m^2+1}-1\right)e^{\sqrt{m^2+1}}$

Theo giả thiết ta có

$$\int_0^m xe^{\sqrt{x^2+1}}dx = 2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500}.e^{\sqrt{m^2+1}} = \left(\sqrt{m^2+1}-1\right)e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500} = \sqrt{m^2+1}-1$$

$$\Leftrightarrow m^2+1 = \left(2^{500}+1\right)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2^{1000}+2^{501} = 2^{500}\left(2^{500}+2\right) \Rightarrow m = 2^{250}\sqrt{2^{500}+2}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x)=6x^2f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}$.

Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$..

A. 2 **B.** 4 **C.** –1 **D.** 6

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f(x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 6x^2f(x^3)dx - \int\limits_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}dx$$

Đặt $t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx$, đổi cận $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1 \Rightarrow t=1$.

Ta có: $\int\limits_0^1 6x^2f(x^3)dx = \int\limits_0^1 2f(t)dt = \int\limits_0^1 2f(x)dx$, $\int\limits_0^1 \dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}dx = 4$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 2f(x)dx - 4 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx = 4$

Chọn ý **B.**

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx$?

A. –4 **B.** $e-2$ **C.** 4 **D.** $2-e$

Lời giải

Ta có $g(x)f'(x)=x(x-2)e^x \Rightarrow g(0)=g(2)=0$ (vì $f'(0).f'(2)\neq 0$)

Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$I=\int\limits_0^2 f(x).g'(x)dx = \int\limits_0^2 f(x)dg(x)$$

$$=\left(f(x).g(x)\right)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 g(x).f'(x)dx = -\int\limits_0^2 \left(x^2-2x\right)e^x dx = 4.$$

Chọn ý **C.**

Câu 17: Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{\left(x^2+x\right)e^x}{x+e^{-x}}dx = a.e+b\ln(e+c)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$?

A. $P=1$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=-2$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}}dx=\int_0^1 \frac{(x+1)e^x xe^x}{xe^x+1}dx$.

Đặt $t=xe^x+1 \Rightarrow dt=(1+x)e^x dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=e+1$.

Khi đó: $I=\int_1^{e+1}\frac{t-1}{t}dt=\int_1^{e+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^{e+1}=e-\ln(e+1)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$. Vậy $P=a+2b-c=-2$.

Chọn ý **D.**

Câu 18: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trong khoảng $(0;\ 2018\pi)$?

A. $P=1$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=-2$

Lời giải

Ta có $F'(x)=f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} \Rightarrow F'(x)=0 \Leftrightarrow x\cos x-\sin x=0, (x\neq 0)$ (1)

Ta thấy $\cos x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên $(1)\Leftrightarrow x=\tan x$ (2)

Xét $g(x)=x-\tan x$ trên $(0;2018\pi)\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}^+\right\}$. Ta có:

$$g'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x\le 0, \forall x\in(0;2018\pi)\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}^+\right\}.$$

- Xét $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x)<g(0)=0$ nên phương trình $x=\tan x$ vô nghiệm.

  Vì hàm số $\tan x$ có chu kỳ tuần hoàn là π nên ta xét $g(x)=x-\tan x$, với $x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

  Do đó $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ và $g(\pi).g\left(\frac{23}{16}\pi\right)<0$ nên phương trình $x=\tan x$ có duy nhất một nghiệm x_0.

  Do đó, $\left(\frac{\pi}{2};\frac{4035}{2}\pi\right)$ có 2017 khoảng rời nhau có độ dài bằng π. Suy ra phương trình $x=\tan x$ có 2017 nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{2};\frac{4035}{2}\pi\right)$.

- Xét $x\in\left(\frac{4035\pi}{2};2018\pi\right)$, ta có $g(x)$ nghịch biến nên $g(x)>g(2018\pi)=2018\pi$ nên phương trình $x=\tan x$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $F'(x)=0$ có 2017 nghiệm trên $(0;2018\pi)$. Do đó đồ thị hàm số $y=F(x)$ có 2017 điểm cực trị trong khoảng $(0;2018\pi)$.

Chọn ý **C.**

Câu 19: Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}dx = \frac{1}{a} + b\ln\frac{3}{2}\ (a,b>0)$ tìm các giá trị thực của tham số k để $\int_8^{ab} dx < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

A. $k<0$ **B.** $k \ne 0$ **C.** $k>0$ **D.** $k \in \mathbb{R}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{3}{x+2}\right)dx = \left.\frac{1}{3}x^3+3\ln|x+2|\right|_0^1 = \frac{1}{3}+3\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab} dx = \int_8^9 dx = 1$$

Mặt khác ta lại có $\int_8^{ab} dx < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$

Mà $\lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

Vậy để $\int_8^{ab} dx < \lim_{x\to+\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$ thì $1 < k^2+1 \Rightarrow k^2>0 \Rightarrow k \ne 0$.

Chọn ý **B.**

Câu 20: Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (au^4+bu^2+c)du$, trong đó $u=\sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S=a+b+c$

A. $S=3$ **B.** $S=0$ **C.** $S=1$ **D.** $S=2$

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2=2x+1 \Rightarrow \begin{cases} udu=dx \\ x=\frac{u^2-1}{2} \end{cases}$

Khi đó tích phân cần tính trở thành

$$\int_0^4 \frac{2x^2+4x+1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2+4\left(\frac{u^2-1}{2}\right)+1}{u}u.du = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^4+2u^2-1).du$$

Vậy $S=a+b+c=1+2-1=2$.

Chọn ý **D.**

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$. **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e$.

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1$. **D.** $e^4f(4)-f(0)=3$.

Lời giải

Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'=\sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^xf(x)=\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

Vậy $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}$.

Chọn ý **A.**

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018x^{2017}e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1)=2018e^{-2018}$. **B.** $f(1)=2017e^{2018}$.

C. $f(1)=2018e^{2018}$. **D.** $f(1)=2019e^{2018}$.

Lời giải

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x}-2018f(x)e^{-2018x}=2018x^{2017}\Leftrightarrow\left[f(x)e^{-2018x}\right]'=2018x^{2017}$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x}=\int 2018x^{2017}dx=x^{2018}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=2018\Rightarrow f(x)=\left(x^{2018}+2018\right)e^{2018x}$

Vậy $f(1)=2019e^{2018}$.

Chọn ý **D.**

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x)+xf(x)=2xe^{-x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=e$. **B.** $f(1)=\frac{1}{e}$. **C.** $f(1)=\frac{2}{e}$. **D.** $f(1)=-\frac{2}{e}$.

Lời giải

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+f(x)xe^{\frac{x^2}{2}}=2xe^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C$.

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\Rightarrow f(x)=-2e^{-x^2}$

Vậy $f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$.

Chọn ý **D.**

Câu 24: Biết luôn có hai số a và b để $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}$ $(4a-b\neq 0)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ và thỏa mãn điều kiện $2f^2(x)=[F(x)-1]f'(x)$. Khẳng định nào dưới đây đúng và đầy đủ nhất?

A. $a=1, b=4$ **B.** $a=1, b=-1$ **C.** $a=1, b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$ **D.** $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

Lời giải

Ta có $F(x)=\frac{ax+b}{x+4}$ là nguyên hàm của $f(x)$ nên $f(x)=F'(x)=\frac{4a-b}{(x+4)^2}$ và $f'(x)=\frac{2b-8a}{(x+4)^3}$.

Do đó $2f^2(x)=(F(x)-1)f'(x)\Leftrightarrow \frac{2(4a-b)^2}{(x+4)^4}=\left(\frac{ax+b}{x+4}-1\right)\frac{2b-8a}{(x+4)^3}$

$$\Leftrightarrow 4a-b=-(ax+b-x-4)\Leftrightarrow (x+4)(1-a)=0\Leftrightarrow a=1\ \ (\text{do } x+4\neq 0)$$

Với $a=1$ mà $4a-b\neq 0$ nên $b\neq 4$.

Vậy $a=1$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Chọn ý **C.**

Câu 25: Cho $I=\int_0^m (2x-1)e^{2x}dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I<m$ là khoảng $(a;b)$. Tính $P=a-3b$.

A. $P=-3$ **B.** $P=-2$ **C.** $P=1$ **D.** $P=0$

Lời giải

Áp dụng phương pháp tính tích phân từng phần đặt $\begin{cases}u=2x-1\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2dx\\v=\frac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

Khi đó tích phân cần tính trở thành:

$$I=\int_0^m (2x-1)e^{2x}dx=\left.\frac{(2x-1)e^{2x}}{2}\right|_0^m-\int_0^m e^{2x}dx$$

$$=\frac{(2m-1)e^{2m}}{2}+\frac{1}{2}-\left.\frac{1}{2}e^{2x}\right|_0^m=me^m-e^{2m}+1$$

Theo giả thiết ta có $I<m\Leftrightarrow me^{2m}-e^{2m}+1<m\Leftrightarrow (m-1)(e^{2m}-1)<0\Leftrightarrow 0<m<1$.

Suy ra $a=0, b=1\Rightarrow a-3b=-3$.

Chọn ý **A.**

Câu 26: Giá trị $I=\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2\sin\left(\pi x^3\right)e^{\cos\left(\pi x^3\right)}dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây?

A. $0,046$ **B.** $0,036$ **C.** $0,037$ **D.** $0,038$

Lời giải

Đặt $u=\cos\left(\pi x^3\right)\Rightarrow du=-3\pi x^2\sin\left(\pi x^3\right)dx\Rightarrow x^2\sin\left(\pi x^3\right)dx=-\frac{1}{3\pi}du$.

- Khi $x=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$ thì $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Khi $x=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}$ thì $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $I=-\frac{1}{3\pi}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^u\,du=\frac{1}{3\pi}\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}e^u\,du=\frac{1}{3\pi}e^u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3\pi}\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx 0,037$.

Chọn ý **C.**

Câu 27: Biết $\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$ **B.** $T=2$ **C.** $T=1$ **D.** $T=3$

Lời giải

Biến đổi tích phân cần tính ta được:

$$I=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{2x+1}dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$$

$$=\int\limits_0^4\frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int\limits_0^4\frac{2dx}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int\limits_0^4\frac{dx}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}.$$

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow udu=dx$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\int\limits_1^3\frac{2udu}{u+2}-\int\limits_1^3\frac{udu}{u+1}=\int\limits_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)du-\int\limits_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du$

$$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$$

$\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1$.

Chọn ý **C.**

Câu 28: Cho tích phân $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1.(I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + ... + n(I_n + I_{n+1}) - n$. Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $L \in (-1;0)$ **B.** $L \in (-2;-1)$ **C.** $L \in (0;1)$ **D.** $L \in (1;2)$

Lời giải

Với $n \in \mathbb{N}$, biến đổi giả thiết ta có

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}.e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 e^{-nx}dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 e^{-nx}dx - I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx}dx - I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$$

Do đó $u_n = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-3}) + ... + (1 - e^{-n}) - n \Rightarrow u_n = -e^{-1} - e^{-2} - e^{-3} - ... - e^{-n}$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -e^{-1}$ và $q = \frac{1}{e}$,

nên $\lim u_n = \frac{-e^{-1}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow L = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow L \in (-1;0)$.

Chọn ý **A.**

Câu 29: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn tích phân

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1})dx = -2$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + nx^{n-1})dx = -2 \Leftrightarrow (x - n^2x + x^2 + x^3 + x^4 + ... + x^n)\Big|_0^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2n^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n = -2 \Leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = n^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2^n - n^2 - 2 = 0.$$

Thử với các giá trị $n \in \{1;2;3;4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 5$ ta chứng minh $2^n > n^2 + 2$ (1). Dễ thấy $n = 5$ thì (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 5$. Khi đó $2^k > k^2 + 2$.

Khi đó: $2^{k+1} > 2(k^2 + 2) = k^2 + k^2 + 2 + 2 > k^2 + 2k + 1 + 2 = (k+1)^2 + 2$.

Do đó (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n.

Chọn ý **C.**

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 tích phân $\int_0^1 f(2x)dx=2$ và $\int_0^2 f(6x)dx=14$. Tính tích phân $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx$.

A. 30 **B.** 32 **C.** 34 **D.** 36

Lời giải

- Xét tích phân thứ nhất $\int_0^1 f(2x)dx=2$.

  Đặt $u=2x \Rightarrow du=2dx$; $x=0 \Rightarrow u=0$; $x=1 \Rightarrow u=2$.

  Nên $2=\int_0^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)du \Rightarrow \int_0^2 f(u)du=4$.

- Xét tích phân thứ 2 $\int_0^2 f(6x)dx=14$.

  Đặt $v=6x \Rightarrow dv=6dx$; $x=0 \Rightarrow v=0$; $x=2 \Rightarrow v=12$.

  Nên $14=\int_0^2 f(6x)dx=\frac{1}{6}\int_0^{12} f(v)dv \Rightarrow \int_0^{12} f(v)dv=84$.

- Xét tích phân cần tính $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx=\int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx+\int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

1. Ta sẽ đi tính tích phân $I_1=\int_{-2}^0 f(5|x|+2)dx$.

   Đặt $t=5|x|+2$.

   Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2 \Rightarrow dt=-5dx$; $x=-2 \Rightarrow t=12$; $x=0 \Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow I_1=\frac{-1}{5}\int_{12}^2 f(t)dt=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16.$$

2. Tính tích phân $I_1=\int_0^2 f(5|x|+2)dx$.

   Đặt $t=5|x|+2$.

   Khi $0<x<2$, $t=5x+2 \Rightarrow dt=5dx$; $x=2 \Rightarrow t=12$; $x=0 \Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)dt=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)dt-\int_0^2 f(t)dt\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16.$$

Vậy $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)dx=32$.

Chọn ý **B.**

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm cấp hai thỏa mãn $x.f''(x) \geq e^x + x$ và $f'(2) = 2e$, $f(0) = e^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $f(2) \leq 4e - 1$. **B.** $f(2) \leq 2e + e^2$. **C.** $f(2) \leq e^2 - 2e$. **D.** $f(2) > 12$.

Lời giải

Từ giả thiết $x.f''(x) \geq e^x + x$ lấy tích phân cận từ 0 đến 2 ta có

$$\int_0^2 x.f''(x)dx \geq \int_0^2 (e^x + x)dx \ (1)$$

Áp dụng tích phân từng phần ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f'(x) \end{cases}$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 f'(x)dx \geq \left(e^x + \dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$

$$\Leftrightarrow x.f'(x)\Big|_0^2 - f(x)\Big|_0^2 \geq \left(e^x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 \Leftrightarrow \left[2.f'(2) - 0.f'(0)\right] - \left[f(2) - f(0)\right] \geq e^2 + 2 - 1$$

Mặt khác do $f'(2) = 2e$, $f(0) = e^2 \Rightarrow f(2) \leq 4e - 1$

Chọn ý **A.**

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$, đồng biến trên $[1;2]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = 2$ và $\int\limits_1^2 f(x).f'(x)dx = 1$. Tích phân $\int\limits_1^2 f(x)dx$ bằng?

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f'(x)\right]^2, f(x).f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $\left[f'(x) + \alpha f(x)\right]^2$. Nhưng khi khai triển thì vướng $\int\limits_1^2 \left[f(x)\right]^2 dx$ nên hướng này không khả thi. Ta có $1 = \int\limits_1^2 f(x).f'(x)dx = \dfrac{f^2(x)}{2}\Bigg|_1^2 = \dfrac{f^2(2) - f^2(1)}{2} = \dfrac{f^2(2) - 0}{2} \Rightarrow f(2) = \sqrt{2}$

Do đồng biến trên $[1;2]$ nên $f(2) \geq f(1) = 0$

Từ $f(1) = 0$ và $f(2) = \sqrt{2}$ ta nghĩ đến $\int\limits_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$

Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $\left[f'(x)\right]^2, f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với $\left[f'(x) + \alpha\right]^2$

Ta tìm được $\alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{2}x + C \xrightarrow{f(1)=0} C = -\sqrt{2}$

Vậy $f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \Rightarrow \int\limits_1^2 f(x)dx = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Chọn ý **A.**

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)dx=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)d(f(x))=\frac{4}{13}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=2$. **B.** $f(2)=\frac{251}{7}$. **C.** $f(2)=\frac{256}{7}$. **D.** $f(2)=\frac{261}{7}$.

Lời giải

Viết lại giả thiết ban đầu $\int_0^1 f'(x)d(f(x))=\frac{4}{13}\Leftrightarrow\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{4}{13}$

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^5f(x)dx=\frac{x^6}{6}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{6}\int_0^1 x^6f'(x)dx$

Kết hợp với giả thiết $f(1)=1$, ta suy ra $\int_0^1 x^6f'(x)dx=\frac{2}{13}$

Bây giờ giả thiết được đưa về $\begin{cases}\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{4}{13}\\ \int_0^1 x^6f'(x)dx=\frac{2}{13}\end{cases}$. Hàm dưới dấu tích phân bây giờ là $[f'(x)]^2, x^6f'(x)$ nên ta sẽ liên kết với bình phương $[f'(x)+\alpha x^6]^2$. Tương tự như bài trên ta tìm được $\alpha=-2\Rightarrow f'(x)=2x^6\Rightarrow f(x)=\frac{2}{7}x^7+C\xrightarrow{f(1)=1}C=\frac{5}{7}$

Vậy $f(x)=\frac{2}{7}x^7+\frac{5}{7}\Rightarrow f(2)=\frac{261}{7}$

Chọn ý **D.**

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn hệ thức $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. $P=-\frac{4}{9}$. **B.** $P=-\frac{2}{9}$. **C.** $P=\frac{7}{9}$. **D.** $P=\frac{14}{9}$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$\cos xf(x)+\sin xf'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow[\sin xf(x)]'=\frac{x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow\sin xf(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

- Với $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2\Rightarrow\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\ln 2+2C.$

- Với $x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2+C\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\ln 3-2\ln 2+2C$

$$\Rightarrow\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow P=a+b=-\frac{4}{9}$$

Chọn ý **A.**

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $af(b)+bf(a)=1$ với mọi a, $b\in[0;1]$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx.$

A. $I=\frac{1}{2}.$ **B.** $I=\frac{1}{4}.$ **C.** $I=\frac{\pi}{2}.$ **D.** $I=\frac{\pi}{4}.$

Lời giải

Đặt $a=\sin x,\ b=\cos x$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\sin x.f(\cos x)+\cos x.f(\sin x)=1$

$$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xf(\cos x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xf(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\ (1)$$

Ta có $\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f(\cos x)dx=-\int_1^0 f(t)dt\,(t=\cos x)=\int_0^1 f(x)dx\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(\sin x)dx=\int_0^1 f(t)dt\,(t=\sin x)=\int_0^1 f(x)dx\end{cases}$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{\pi}{4}.$

Chọn ý **D.**

Câu 36: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$, thỏa mãn $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(x)\neq-1\end{cases}$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân $I=\int_0^3\frac{xf'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx.$

A. $I=\frac{1}{2}.$ **B.** $I=1.$ **C.** $I=\frac{3}{2}.$ **D.** $I=\frac{5}{2}.$

Lời giải

Từ giả thiết $\begin{cases}f(3-x).f(x)=1\\ f(0)=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow f(3)=2$

Ta có $\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)=\left[1+f(x)\right]^2\left(f(3-x).f(x)=1\right)$

- Tính $I=\int_0^3\frac{xf'(x)}{\left[1+f(x)\right]^2}dx=-\int_0^3 xd\left(\frac{1}{1+f(x)}\right)=-\frac{x}{1+f(x)}\Big|_0^3+\int_0^3\frac{1}{1+f(x)}dx=-1+J$

- Tính $J=\int_0^3 \frac{1}{1+f(x)}dx \overset{t=3-x}{=} -\int_3^0 \frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int_0^3 \frac{1}{1+f(3-t)}dt=\int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)}dx$

$$\Rightarrow 2J=\int_0^3 \frac{1}{1+f(x)}dx+\int_0^3 \frac{1}{1+f(3-x)}dx=\int_0^3 dx\left(f(3-x).f(x)=1\right)=3\Rightarrow J=\frac{3}{2}$$

Vậy $I=\int_0^3 \frac{xf'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx=\frac{1}{2}$

Chọn ý **A.**

Câu 37: Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;4]$, thỏa mãn $\begin{cases} f(1)+g(1)=4 \\ g(x)=-xf'(x) \\ f(x)=-xg'(x) \end{cases}$ với mọi $x\in[1;4]$. Tính tích phân $I=\int_1^4 \left[f(x)+g(x)\right]dx$.

A. $I=3\ln 2$. **B.** $I=4\ln 2$. **C.** $I=6\ln 2$. **D.** $I=8\ln 2$.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có

$$f(x)+g(x)=-x.f'(x)-x.g'(x)\Leftrightarrow\left(f(x)+x.f'(x)\right)+\left(g(x)+x.g'(x)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x.f(x)\right)'+\left(x.g(x)\right)'=0\Rightarrow x.f(x)+x.g(x)=C\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{C}{x}$$

Mà $f(1)+g(1)=4\Rightarrow C=4\Rightarrow I=\int_1^4\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int_1^4\frac{4}{x}dx=8\ln 2$

Chọn ý **D.**

Câu 38: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$, thỏa mãn $f'(0).f'(2)\neq 0$ và $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x).g'(x)dx$.

A. $I=-4$. **B.** $I=4$. **C.** $I=e-2$. **D.** $I=2-e$.

Lời giải

Từ giả thiết $f'(0).f'(2)\neq 0\Rightarrow\begin{cases} f'(0)\neq 0 \\ f'(2)\neq 0\end{cases}$

Do đó từ $g(x).f'(x)=x(x-2)e^x\Rightarrow\begin{cases} g(2)=\dfrac{2(2-2)e^x}{f'(2)}=0 \\ g(0)=\dfrac{0(0-2)e^x}{f'(0)}=0\end{cases}$

Tích phân từng phần ta được $I=\left[f(x).g(x)\right]\Big|_0^2-\int_0^2 g(x).f'(x)dx$

$$=f(2).g(2)-f(0).g(0)-\int_0^2 x(x-2)e^x dx=-\int_0^2 x(x-2)e^x dx=4.$$

Chọn ý **B.**

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(0)=-1$ và $\begin{cases}[f'(x)]^2=f''(x)\\ f'(x)\neq 0\end{cases}$ với mọi $x\in[0;1]$. Đặt $P=f(1)-f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng

A. $-2\le P\le -1$. **B.** $-1\le P\le 0$. **C.** $0\le P\le 1$. **D.** $1\le P\le 2$.

Lời giải

Nhận thấy $P=f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)dx$ nên ta cần tìm $f'(x)$.

Biến đổi giả thiết ta có

$$\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}=1\Rightarrow\int\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}dx=\int dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f'(x)}=x+C\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+C}$$

Mà $f'(0)=-1\Rightarrow C=1\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x+1}$

Vậy $P=\int_0^1 f'(x)dx=-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=-\ln 2\approx-0,69$

Chọn ý **B.**

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x)+f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=-\frac{4}{5}$. **B.** $I=\frac{4}{5}$. **C.** $I=-\frac{5}{4}$. **D.** $I=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Đặt $u=f(x)$, ta thu được $u^3+u=x$. Suy ra $(3u^2+1)du=dx$.

Từ $u^3+u=x$, ta đổi cận $\begin{cases}x=0\to u=0\\ x=2\to u=1\end{cases}$. Khi đó $I=\int_0^1 u(3u^2+1)du=\frac{5}{4}$.

***Cách* 2.** Nếu bài toán cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục thì ta làm như sau:

Từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x\Rightarrow\begin{cases}f^3(0)+f(0)=0\\ f^3(2)+f(2)=2\end{cases}\to\begin{cases}f(0)=0\\ f(2)=1\end{cases}$

Cũng từ giả thiết $f^3(x)+f(x)=x$, ta có $f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)=x.f'(x)$.

Lấy tích phân hai vế $\int_0^2[f'(x).f^3(x)+f'(x).f(x)]dx=\int_0^2 x.f'(x)dx$

$$\Rightarrow\left.\left(\frac{[f(x)]^4}{4}+\frac{[f(x)]^2}{2}\right)\right|_0^2=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)dx\Rightarrow\int_0^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$$

Chọn ý **D.**

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f'(x)=f'(1-x)$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết rằng $f(0)=1$, $f(1)=41$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\sqrt{41}$. **B.** $I=21$. **C.** $I=41$. **D.** $I=42$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=f'(1-x)\Rightarrow f(x)=-f(1-x)+C\Rightarrow f(0)=-f(1)+C\Rightarrow C=42$

$$\Rightarrow f(x)=-f(1-x)+42\Rightarrow f(x)+f(1-x)=42\Rightarrow \int_0^1\left[f(x)+f(1-x)\right]dx=\int_0^1 42dx=42\ (1)$$

Vì $f'(x)=f'(1-x)\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(1-x)dx=21.$

Chọn ý **B.**

Câu 42: Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$ với m, n là số thực khác 0 và $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=\frac{1}{2}$. **C.** $m+n=1$. **D.** $m+n=2$.

Lời giải

Từ giả thiết $m.f(x)+n.f(1-x)=g(x)$, lấy tích phân hai vế ta được :

Do $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=1\Rightarrow \int_0^1\left[m.f(x)+n.f(1-x)\right]dx=\int_0^1 g(x)dx\Rightarrow m+n\int_0^1 f(1-x)dx=1(1)$

Xét tích phân $\int_0^1 f(1-x)dx$. Đặt $t=1-x$, suy ra $dt=-dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó $\int_0^1 f(1-x)dx=-\int_1^0 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx=1.\ (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $m+n=1$.

Chọn ý **C.**

Câu 43: Biết tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^x}dx=1+\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}+a\sqrt{a}-\sqrt{b}$ với a, $b\in\mathbb{Z}^+$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$

A. $P=-1$. **B.** $P=1$. **C.** $P=3$. **D.** $P=5$.

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta được

$$I=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}-e^{x}}dx=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\left(\sqrt{e^{2x}+1}+e^{x}\right)dx=\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}dx+\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}e^{x}dx$$

- Xét tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}e^{x}dx=e^{x}\Big|_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$
- Xét tích phân $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}dx$. Đặt $t=\sqrt{e^{2x}+1}\Leftrightarrow t^{2}=e^{2x}+1$

$\Rightarrow 2tdt=2e^{2x}dx\Leftrightarrow dx=\frac{tdt}{e^{2x}}=\frac{tdt}{t^{2}-1}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\ln\sqrt{3}\Rightarrow t=2\\ x=\ln\sqrt{8}\Rightarrow t=3\end{cases}$

Khi đó $\int_{\ln\sqrt{3}}^{\ln\sqrt{8}}\sqrt{e^{2x}+1}dx=\int_{2}^{3}\frac{t^{2}dt}{t^{2}-1}dt=\int_{2}^{3}\left(1+\frac{1}{t^{2}-1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_{2}^{3}=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

Vậy $I=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}\Rightarrow P=a+b=5$

Chọn ý **D.**

Câu 44: Biết $\int_{1}^{4}\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^{x}}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=a+e^{b}-e^{c}$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-5$. **B.** $P=-4$. **C.** $P=-3$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Biến đổi tích phân ban đầu ta có:

$$\int_{1}^{4}\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^{x}}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=\int_{1}^{4}\sqrt{\frac{e^{2x}+4x+4e^{x}\sqrt{x}}{4xe^{2x}}}dx=\int_{1}^{4}\sqrt{\frac{\left(e^{x}+2\sqrt{x}\right)^{2}}{\left(2e^{x}\sqrt{x}\right)^{2}}}dx$$

$$=\int_{1}^{4}\frac{e^{x}+2\sqrt{x}}{2e^{x}\sqrt{x}}dx=\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{e^{x}}\right)dx=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{e^{x}}\right)\Bigg|_{1}^{4}=1-\frac{1}{e^{4}}+\frac{1}{e}=1+e^{-1}-e^{-4}$$

Vậy ta được $\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=-4\end{cases}\Rightarrow P=a+b+c=-4.$

Chọn ý **B.**

Câu 45: Biết $\int_{0}^{2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}}dx=a\pi+b\sqrt{2}+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=-1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=3$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=2\cos u$ với $u\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $x=4\cos^{2}u\Rightarrow dx=-4\sin 2udu$.

Khi đó tích phân ban đầu trở thành:

$$I=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2+2\cos u}{2-2\cos u}}\sin 2u du=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}.\sin u.\cos u du$$

$$=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\frac{u}{2}.\cos u du=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos u).\cos u du=8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u du+4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du$$

$$=8\sin u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+(4x+2.\sin 2u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi-4\sqrt{2}+6\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-4\Rightarrow P=3\\ c=6\end{cases}$$

Chọn ý **C.**

Câu 46: Biết $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx=a+\frac{\pi^2}{b}+\frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $P=a-b+c.$

A. $P=-37.$ **B.** $P=-35.$ **C.** $P=35.$ **D.** $P=41.$

Lời giải

Ta có $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\cos x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x dx.$

Mặt khác $\displaystyle I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{x\cos x}{\sqrt{1+x^2}+x}dx\overset{x=-t}{=}\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{(-t)\cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t}d(-t)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}}\frac{t\cos t}{\sqrt{1+t^2}-t}dt$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\cos t dt=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x dx.$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\cos x dx-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\cos x dx$$

$$=-2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x dx\Rightarrow I=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}x^2\cos x dx$$

Tích phân từng phần hai lần ta được $I=2+\frac{\pi^2}{-36}+\frac{\sqrt{3}\pi}{-3}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-36\Rightarrow P=a-b+c=35\\ c=-3\end{cases}$

Chọn ý **C.**

Câu 47 : Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[\frac{1}{2};2\right]$, thỏa mãn điều kiện $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2$. Tính tích phân $I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Đặt $x=\frac{1}{t}$, suy ra $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Khi đó $I=\int_{2}^{\frac{1}{2}}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t^2}+1}.\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2+1}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx$

$$\Rightarrow 2I=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+2}{x^2+1}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=3\Rightarrow I=\frac{3}{2}$$

Chọn ý **A.**

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0,\forall x\ge 0$, $f'(0)=0;f(0)=1$ và đồng thời điều kiện $f''(x)f(x)-2\left[f'(x)\right]^2+xf^3(x)=0$. Tính giá trị của $f(1)$?

A. $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{6}{7}$ **D.** $\frac{7}{6}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\frac{f'(x)d\left(f'(x)\right)-f'(x)d\left(f^2(x)\right)}{f^4(x)}=-x\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-x^2}{2}+C\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{x^3}{6}+K\Rightarrow K=1\Rightarrow f(x)=\frac{6}{x^3+6}\Rightarrow f(1)=\frac{6}{7}$$

Chọn ý **C.**

Câu 49: Có bao nhiêu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\int_0^1\left(f(x)\right)^{2018}dx=\int_0^1\left(f(x)\right)^{2019}dx=\int_0^1\left(f(x)\right)^{2020}dx$$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Từ điều kiện ta suy ra $\int_0^1\left(f(x)\right)^{2018}\left(f(x)-1\right)^2dx=0\Rightarrow\left(f(x)\right)^{2018}\left(f(x)-1\right)^2=0$

Mà $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\left[\begin{array}{l}f(x)=1\\f(x)=0\end{array}\right.$. Vậy có 2 hàm thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn ý **C.**

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ có $f(1)=1; f(4)=3\ln\frac{5}{2}+1$ và thỏa mãn đồng thời $\int_1^4 \frac{f'(x)}{x+1}dx=\frac{9}{10}; \int_1^4 x(f'(x))^2 dx=9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10}$. Tính tích phân $\int_1^4 f(x)dx$

A. $5\ln\frac{5}{2}-6$ **B.** $5\ln\frac{5}{2}+6$ **C.** $15\ln\frac{5}{2}-6$ **D.** $15\ln\frac{5}{2}+6$

Lời giải

Ta viết lại $\int_1^4 \left(\sqrt{x}f'(x)\right)^2 dx=9\ln\frac{5}{2}-\frac{27}{10}=A$

Từ giả thiết ta suy ra $\int_1^4 f'(x)dx=f(4)-f(1)=3\ln\frac{5}{2} \Rightarrow \int_1^4 f'(x)dx-\int_1^4 \frac{f'(x)}{x+1}dx=3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10}$

Hay $\int_1^4 \frac{xf'(x)}{x+1}dx=3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10} \Rightarrow \int_1^4 \left(\sqrt{x}f'(x).\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)dx=3\ln\frac{5}{2}-\frac{9}{10}=B$

Ta dễ dàng tính được $\int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2 dx=\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{10}=C$

Ta xây dựng tích phân $\int_1^4 \left(\sqrt{x}f'(x)+\frac{m\sqrt{x}}{x+1}\right)dx=0 \Leftrightarrow A+2Bm+Cm^2=0 \Leftrightarrow m=-3$

Từ đó tìm được $f'(x)=\frac{3}{x+1} \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx=15\ln\frac{5}{2}-6$

Chọn ý **C.**

Câu 51: Cho tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{(2018+\cos x)^{1+\cos x}}{2018+\sin x}\right]dx=a\ln a-b\ln b-1$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng?

A. 2015 **B.** 4030 **C.** 4037 **D.** 2025

Lời giải

Sử dụng tính chất $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{(2018+\cos x)^{1+\cos x}}{2018+\sin x}\right]dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{(2018+\sin x)^{1+\sin x}}{2018+\cos x}\right]dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[(2018+\cos x)^{\cos x}(2018+\sin x)^{\sin x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ln(2018+\cos x)dx$$

$$=\int_0^1 \ln(2018+x)dx=2019\ln 2019-2018\ln 2018-1$$

Chọn ý **C.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$
2. Cho 2 số thực $a,b \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $a+b=\frac{\pi}{4};\int_a^b \ln(1+\tan x)dx=\frac{\pi\ln 2}{24}$. Tích tích phân $\int_a^b x\sin(12x)dx$

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)>0,\forall x\in[0;8]$ và $\int_0^8 f(x)dx=10$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ trên $(0;8]$ là?

A. $\frac{4}{5}$ **B.** 10 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** 8

Lời giải

Ta có $g'(x)=\frac{\left(\int_0^x f(t)dt\right)'.x-1\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}$

$\Rightarrow h'(x)=f(x)+xf'(x)-f(x)=xf'(x)>0,\forall x\in[0;8]\Rightarrow h(x)>h(0)=0$

$\Rightarrow g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}>0,\forall x\in(0;8]\Rightarrow \max\limits_{(0;8]} g(x)=g(8)=\frac{5}{4}$

Chọn ý **C.**

Câu 53: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$ đồng thời $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos x}dx=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin x.\tan x.f(x)]dx=2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)dx$ bằng?

A. 4 **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$ **D.** 6

Lời giải

Áp dụng công thức tính tích phân từng phần ta đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\cos xdx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Khi đó tích phân cần tính trở thành $I=\sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)dx=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1$.

Biến đổi giả thiết ta có

$$2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\sin x.\tan x.f(x)]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[(1-\cos^2 x).\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx.=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)dx=1-I_1.$$

$$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 54: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$.

Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$ **B.** $I=2\ln^2 2$ **C.** $I=\ln^2 2$ **D.** $I=2\ln 2$

Lời giải

Ta có $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left[\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]dx=\int_1^4\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx+\int_1^4\frac{\ln x}{x}dx$.

Xét tích phân $K=\int_1^4\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{x}}=dt$. $\Rightarrow K=\int_1^3 f(t)dt=\int_1^3 f(x)dx$.

Xét tích phân $M=\int_1^4\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^4\ln x\,d(\ln x)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx+2\ln^2 2\Rightarrow\int_3^4 f(x)dx=2\ln^2 2$.

Chọn ý **B.**

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, luôn dương trên $[0;3]$ và thỏa mãn điều kiện $I=\int_0^3 f(x)dx=4$. Khi đó giá trị của tích phân $K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx$ là?

A. $4+12e$ **B.** $12+4e$ **C.** $3e+14$ **D.** $14+3e$

Lời giải

Biến đổi tích phân cần tính ta có

$$K=\int_0^3\left(e^{1+\ln(f(x))}+4\right)dx=\int_0^3 e.e^{\ln(f(x))}dx+\int_0^3 4dx=e.\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 4dx=4e+4x\Big|_0^3=4e+12.$$

Vậy $K=4e+12$.

Chọn ý **B.**

Câu 56: Cho a là số thực dương. Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(\ln(ax)+\frac{1}{x}\right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{a}\right)=0$ và $F(2018)=e^{2018}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $a\in\left(\frac{1}{2018};1\right)$ **B.** $a\in\left(0;\frac{1}{2018}\right]$ **C.** $a\in[1;2018)$ **D.** $a\in[2018;+\infty)$

Lời giải

Xét nguyên hàm $I=\int e^x\left(\ln(ax)+\frac{1}{x}\right)dx=\int e^x\ln(ax)dx+\int\frac{e^x}{x}dx$ (1)

- Tính tích phân $\int e^x\ln(ax)dx$:

Đặt $\begin{cases}u=\ln(ax)\\ dv=e^xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int e^x\ln(ax)dx=e^x\ln(ax)-\int\frac{e^x}{x}dx$

Thay vào (1), ta được: $F(x)=e^x\ln(ax)+C$.

Với $\begin{cases}F\left(\frac{1}{a}\right)=0\\ F(2018)=e^{2018}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{\frac{1}{a}}.\ln 1+C=0\\ e^{2018}\ln(a.2018)+C=e^{2018}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=0\\ \ln(a.2018)=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{e}{2018}$.

Vậy $a\in\left(\frac{1}{2018};1\right)$.

Chọn ý **A.**

Câu 57: Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x)=\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m=-\frac{1}{2}$ **B.** $m=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$ **C.** $m=\frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$ **D.** $m=\frac{1}{2}$

Lời giải

Xét nguyên hàm sau:

$$\int f(x)dx=\int\frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}dx=\frac{2017}{2}\int(x^2+1)^{-2018}d(x^2+1)$$

$$=\frac{2017}{2}.\frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017}+C=-\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}+C=F(x)$$

Theo giả thiết ta có $F(1)=0\Rightarrow-\frac{1}{2.2^{2017}}+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x)=-\frac{1}{2.(x^2+1)^{2017}}+\frac{1}{2^{2018}}$ suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow(x^2+1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x=0$

Vậy $m=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2018}}=\frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Chọn ý **B.**

Câu 58: Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Xét tích phân $I_n = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = x\left(1-x^2\right)^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-\left(1-x^2\right)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$.

Khi đó $I_n = \left.\dfrac{-x\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 + \dfrac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} dx = \dfrac{1}{2(n+1)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} dx$

$\Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+2)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)\left(1-x^2\right)^{n+1} dx$

$\Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+2)}\left[\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} dx - \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^{n+1} dx\right]$

$\Rightarrow I_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+2)}\left[2(n+1)I_n - I_{n+1}\right] \Rightarrow \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = \dfrac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

Chọn ý **A.**

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị dương của m để $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\frac{10}{9}\right)$, với $f(x) = \ln x^{15}$.

A. $m = 20$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 3$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f(x) = \ln x^{15} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{15x^{14}}{x^{15}} = \dfrac{15}{x} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-15}{x^2} \Rightarrow f''\left(\dfrac{10}{9}\right) = \dfrac{-243}{20}$.

Tính tích phân $I = \int_0^3 x(3-x)^m dx$.

- Đặt $t = 3-x \Rightarrow x = 3-t$, $dx = -dt$, đổi cận $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3 \\ \hline t & 3 & 0 \end{array}$
- Do đó $I = \int_3^0 (3-t)t^m(-dt) = \int_0^3 \left(3t^m - t^{m+1}\right)dt = \left.\dfrac{3t^{m+1}}{m+1} - \dfrac{t^{m+2}}{m+2}\right|_0^3 = \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$

Ta có $\int_0^3 x(3-x)^m dx = -f''\left(\dfrac{10}{9}\right) \Leftrightarrow \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \dfrac{243}{20} \Leftrightarrow \dfrac{3^{m+2}}{(m+1)(m+2)} = \dfrac{3^5}{4.5}$

Thay lần lượt các giá trị m ở 4 đáp án, nhận giá trị $m = 3$.

Chọn ý **D.**

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f(0)=\sqrt{3}$ và $f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)}, \forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m=\frac{\sqrt{21}}{2}$, $M=2\sqrt{2}$.
B. $m=\frac{5}{2}$, $M=3$
C. $m=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $M=\sqrt{3}$.
D. $m=\sqrt{3}$, $M=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$f(x).f'(x)=\cos x.\sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}=\cos x \Rightarrow \int \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\sin x+C$$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2(x)} \Rightarrow t^2=1+f^2(x) \Rightarrow tdt=f(x)f'(x)dx$.

Thay vào ta được $\int dt=\sin x+C \Rightarrow t=\sin x+C \Rightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+C$.

Do $f(0)=\sqrt{3} \Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2(x)}=\sin x+2 \Rightarrow f^2(x)=\sin^2 x+4\sin x+3$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\sin^2 x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\le \sin x\le 1$, xét hàm số $g(t)=t^2+4t+3$ có hoành độ đỉnh $t=-2$ loại.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g(1)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]} g(t)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Chọn ý **A.**

Câu 61: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $\int_0^1 f(x)dx=4$, $\int_0^3 f(x)dx=6$. Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1} f(|2x+1|)dx$

A. $I=3$
B. $I=5$
C. $I=6$
D. $I=4$

Lời giải

Đặt $u=2x+1 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$. Khi $x=-1$ thì $u=-1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Nên $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}f(|u|)du=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0}f(|u|)du+\int\limits_{0}^{3}f(|u|)du\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0}f(-u)du+\int\limits_{0}^{3}f(u)du\right)$.

Xét tích phân $\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow dx=-du$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$. Nên $4=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx=-\int\limits_{0}^{-1}f(-u)du=\int\limits_{-1}^{0}f(-u)du$.

Ta có $\int\limits_{0}^{3}f(x)dx=6\Rightarrow\int\limits_{0}^{3}f(u)du=6$. Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^{0}f(-u)du+\int\limits_{0}^{3}f(u)du\right)=\frac{1}{2}(4+6)=5$.

Chọn ý **B.**

Câu 62: Biết $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P=2a+b$.

A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=6$ **D.** $P=12$

Lời giải

Xét tích phân $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

- Đặt $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$.
- Khi $x=0$ thì $t=\pi$.
- Khi $x=\pi$ thì $t=0$.

Ta có $I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^{2018}(\pi-t)}{\sin^{2018}(\pi-t)+\cos^{2018}(\pi-t)}dt=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$

$$=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx-I.$$

Suy ra $I=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

Xét tích phân $J=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

- Đặt $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow dx=-du$.
- Khi $x=\frac{\pi}{2}$ thì $u=0$.
- Khi $x=\pi$ thì $t=-\frac{\pi}{2}$.

Nên $J=-\int\limits_{0}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}du=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$.

Vì hàm số $f(x)=\dfrac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}$ là hàm số chẵn nên:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx$$

Từ đó ta có:

$$I=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}{\sin^{2018}x+\cos^{2018}x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

Như vậy $a=2$, $b=4$. Do đó $P=2a+b=2.2+4=8$.

Ngoài cách làm này các bạn có thể sử dụng các tính chất của phần tính tích phân bằng phương pháp đổi cận đổi biến.

Chọn ý **A.**

Câu 63: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0$ và $f(0)=1$. Tích phân $\int_{0}^{\sqrt{7}}x.f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ **B.** $\dfrac{15}{4}$ **C.** $\dfrac{45}{8}$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$

Lời giải

Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\dfrac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

Suy ra $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}+C$. Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int_{0}^{\sqrt{7}}x.f(x)dx=\int_{0}^{\sqrt{7}}x.\sqrt[3]{x^2+1}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{7}}\sqrt[3]{x^2+1}\,d(x^2+1)=\dfrac{3}{8}\Big[(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}\Big]\Big|_{0}^{\sqrt{7}}=\dfrac{45}{8}$.

Chọn ý **C.**

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời điều kiện $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$ ta được kết quả là?

A. $I=e+4$ **B.** $I=8$ **C.** $I=2$ **D.** $I=e+2$

Lời giải

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2 [3f(x)+f(2-x)]dx=\int_0^2\left[2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4\right]dx \ (*)$.

Ta tính $\int_0^2 f(2-x)dx=-\int_0^2 f(2-x)d(2-x)=\int_0^2 f(x)dx$.

Vì vậy $\int_0^2[3f(x)+f(2-x)]dx=4\int_0^2 f(x)dx$.

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}dx=\int_0^2 e^{x^2-2x+1}d(x^2-2x+1)=e^{x^2-2x+1}\Big|_0^2=0$ và $\int_0^2 4dx=8$.

Chọn ý **C.**

Câu 65: Tính tổng $T=\frac{C_{2018}^0}{3}-\frac{C_{2018}^1}{4}+\frac{C_{2018}^2}{5}-\frac{C_{2018}^3}{6}+\cdots-\frac{C_{2018}^{2017}}{2020}+\frac{C_{2018}^{2018}}{2021}$.

A. $\frac{1}{4121202989}$ **B.** $\frac{1}{4121202990}$ **C.** $\frac{1}{4121202992}$ **D.** $\frac{1}{4121202991}$

Lời giải

Xét khai triển $(1-x)^{2018}=C_{2018}^0-C_{2018}^1x+C_{2018}^2x^2+...+C_{2018}^{2018}x^{2018}$

$$\Rightarrow x^2(1-x)^{2018}=C_{2018}^0x^2-C_{2018}^1x^3+C_{2018}^2x^4+...+C_{2018}^{2018}x^{2020} \quad (1)$$

Ta tính $I=\int_0^1 x^2(1-x)^{2018}dx$, đặt $t=1-x$, $dt=-dx$, đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=0$

Khi đó $I=\int_0^1(1-t)^2t^{2018}dt=\int_0^1\left(t^{2018}-2t^{2019}+t^{2020}\right)dt=\left(\frac{t^{2019}}{2019}-2\frac{t^{2020}}{2020}+\frac{t^{2021}}{2021}\right)\Big|_0^1$

$$=\frac{1}{2019}-\frac{1}{1010}+\frac{1}{2021}=\frac{1}{4121202990}.$$

Lấy tích phân hai vế của (1) ta được:

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{2018}dx=\int_0^1\left(C_{2018}^0x^2-C_{2018}^1x^3+C_{2018}^2x^4+...+C_{2018}^{2018}x^{2020}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990}=\left(C_{2018}^0\frac{x^3}{3}-C_{2018}^1\frac{x^4}{4}+C_{2018}^2\frac{x^5}{5}+...+C_{2018}^{2018}\frac{x^{2021}}{2021}\right)\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4121202990}=C_{2018}^0\frac{1}{3}-C_{2018}^1\frac{1}{4}+C_{2018}^2\frac{1}{5}+...+C_{2018}^{2018}\frac{1}{2021}.$$

Vậy $T=\frac{C_{2018}^0}{3}-\frac{C_{2018}^1}{4}+\frac{C_{2018}^2}{5}-\frac{C_{2018}^3}{6}+\cdots-\frac{C_{2018}^{2017}}{2020}+\frac{C_{2018}^{2018}}{2021}=\frac{1}{4121202990}$.

Chọn ý **B.**

Câu 66: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (0;1)$. Biết rằng $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b$ và $x + xf'(x) = 2f(x) - 4$, $\forall x \in (0;1)$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)} dx$ theo a và b.

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$ **B.** $I = \frac{3b+a}{4ab}$ **C.** $I = \frac{3b-a}{4ab}$ **D.** $I = \frac{3a-b}{4ab}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$x + xf'(x) = 2f(x) - 4 \Leftrightarrow x + 4 = 2f(x) - xf'(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x = 2xf(x) - x^2 f'(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \frac{2xf(x) - x^2 f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{f^2(x)} = \left(\frac{x^2}{f(x)}\right)'.$$

Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 2\sin 2x}{f^2(\sin x)} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x.\cos x + 4\sin x.\cos x}{f^2(\sin x)} dx$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$, đổi cận $x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2+4t}{f^2(t)} dt = \left.\frac{t^2}{f(t)}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{4a} = \frac{3a-b}{4ab}$.

Chọn ý **D.**

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx$ bằng

A. $-\frac{\pi}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{\pi}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết, $f(0) = 0$ và $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.\cos x$ nên $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.f'(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xd[f(x)] = [xf(x)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \Rightarrow I = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Mặt khác, ta có:

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x\,dx=\frac{1}{2}$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{1}{4}$

Vậy $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=-\frac{1}{4}$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)>0,\ \forall x\in[1;2]$ và $\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx=\frac{7}{375}$. Biết $f(1)=1,\ f(2)=\frac{22}{15}$, tính $I=\int\limits_1^2 f(x)dx$.

A. $P=\frac{71}{60}$ **B.** $P=\frac{6}{5}$ **C.** $P=\frac{73}{60}$ **D.** $P=\frac{37}{30}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4}+\frac{x^2}{125}+\frac{x^2}{125}\geq 3\sqrt[3]{\frac{[f'(x)]^3}{x^4}.\frac{x^2}{125}.\frac{x^2}{125}}=\frac{3f'(x)}{25}$$

Lấy tích phân hai vế BĐT trên ta có: $\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx+2\int\limits_1^2\frac{x^2}{125}dx\geq\int\limits_1^2\frac{3f'(x)}{25}dx$

$$\Leftrightarrow\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx+2.\frac{7}{375}\geq\frac{3}{25}[f(2)-f(1)]\Leftrightarrow\int\limits_1^2\frac{[f'(x)]^3}{x^4}dx\geq\frac{7}{375}.$$

Kết hợp với giả thiết ta có dấu "$=$" của BĐT trên xảy ra

$$\frac{[f'(x)]^3}{x^4}=\frac{x^2}{125}\Leftrightarrow[f'(x)]^3=\frac{x^6}{125}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2}{5}\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{15}+C.$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{15}+C\Rightarrow C=\frac{14}{15}\Rightarrow f(1)=\frac{x^3+14}{15}$

Ta có $I=\int\limits_1^2\frac{x^3+14}{15}dx=\frac{71}{60}$.

Chọn ý **A.**

Câu 69: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)dx=c\ln 2-\frac{a}{b}$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=9$ **B.** $T=-11$ **C.** $T=5$ **D.** $T=7$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos 2x+3\sin 2x)\ln(\cos x+2\sin x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos x+2\sin x)(2\cos x-\sin x)\ln(\cos x+2\sin x)dx.$$

Đặt $t=\cos x+2\sin x \Rightarrow dt=(-\sin x+2\cos x)dx$.

- Với $x=0$ thì $t=1$.
- Với $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=2$.

Suy ra $I=\int_1^2 2t\ln t dt=\int_1^2 \ln t d(t^2)=(t^2.\ln t)\Big|_1^2-\int_1^2 tdt=4\ln 2-\frac{t^2}{2}\Big|_1^2=4\ln 2-\frac{3}{2}$.

Vậy $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow T=a+b+c=9$.

Chọn ý **A.**

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$ **B.** $T=9$ **C.** $T=\frac{1}{2}+9\ln 2$ **D.** $T=2-9\ln 2$

Lời giải

Ta có $9f''(x)+[f'(x)-x]^2=9 \Rightarrow 9(f''(x)-1)=-[f'(x)-x]^2 \Rightarrow -\frac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2}=\frac{1}{9}$.

Lấy nguyên hàm hai vế $-\int \frac{f''(x)-1}{[f'(x)-x]^2}dx=\int \frac{1}{9}dx \Rightarrow \frac{1}{f'(x)-x}=\frac{x}{9}+C$.

Do $f'(0)=9$ nên $C=\frac{1}{9}$ suy ra $f'(x)-x=\frac{9}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int_0^1\left(\frac{9}{x+1}+x\right)dx=\left(9\ln|x+1|+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=9\ln 2+\frac{1}{2}$.

Câu 71: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

$$\begin{cases} f(0)=f'(0)=1 \\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1, \forall x,y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Tính tích phân $\int_0^1 f(x-1)dx$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{7}{4}$

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế theo hàm số y ta được $f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0 \Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

Vậy $f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$ suy ra $f(x)=x^3+x+1$.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x-1)dx=\int_{-1}^0 f(x)dx=\int_{-1}^0 (x^3+x+1)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^0=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{4}.$$

Chọn ý **C.**

Câu 72: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện $\begin{cases} f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}, \\ f(0)=f'(0)=1, \\ x[f(x)]^2+[f'(x)]^2=f(x)f''(x),\forall x\in\mathbb{R}. \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{2}<\ln f(1)<1$ **B.** $0<\ln f(1)<\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{3}{2}<\ln f(1)<2$ **D.** $1<\ln f(1)<\frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có

$$x[f(x)]^2+[f'(x)]^2=f(x)f''(x)\Leftrightarrow\frac{f(x)f''(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}=x\Leftrightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=x\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+C.$$

Lại có $f(0)=f'(0)=1\Rightarrow C=1$.

Ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{2}+1\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+1\right)dx\Leftrightarrow\ln(f(x))\Big|_0^1=\frac{7}{6}\Leftrightarrow\ln f(1)=\frac{7}{6}$.

$\Rightarrow 1<\ln(f(1))<\frac{3}{2}$.

Chọn ý **D.**

Câu 73: Cho các số $a,b>2$ thỏa mãn $2\int_1^a\frac{e^{x^2}}{x}dx=\int_1^b\frac{e^x}{x}dx$. Khi đó, quan hệ giữa a,b là?

A. $a=2b$ **B.** $b=2a$ **C.** $a=b^2$ **D.** $b=a^2$

Lời giải

Ta có $2\int_1^a\frac{e^{x^2}}{x}dx=\int_1^a\frac{e^{x^2}}{x^2}2xdx=\int_1^a\frac{e^{x^2}}{x^2}d(x^2)=\int_1^{a^2}\frac{e^x}{x}dx$ nên $b=a^2$

Chọn ý **D.**

Câu 74: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ và $f^2(-x)=(x^2+2x+4)f(x+2)$ Biết rằng $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ tính tích phân $I=\int_0^2 xf''(x)dx$.

A. $I=-4$ **B.** $I=4$ **C.** $I=0$ **D.** $I=8$

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$I=\int_0^2 xf''(x)dx=f'(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f'(x)dx=f'(x)\Big|_0^2-f(x)\Big|_0^2=f'(2)-f'(0)-f(2)+f(0)$$

Trong giả thiết ta thay $x=0;x=2$ ta có:

$$\begin{cases} f^2(0)=4f(2) \\ f^2(2)=4f(0) \end{cases} \Rightarrow f^4(0)=16f^2(2)=64f(0) \Rightarrow \begin{cases} f(0)=4 \\ f(2)=4 \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế ta có $-2f'(-x).f(-x)=(2x+2)f(x+2)+(x^2+2x+4)f'(x+2)$

Lại thay $x=0$ và $x=-2$, ta có $\begin{cases} -2f'(0)=2+f'(2) \\ -2f'(2)=-2+f'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=-2 \\ f'(2)=2 \end{cases}$

Kết hợp lại ta được $I=2-(-2)-4+4=4$.

Câu 75: Trong giải tích, $I=\int x^m(ax^n+b)^p dx$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $m,n,p\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ được gọi là tính được (*có thể biểu diễn bởi các hàm như đa thức, hữu tỷ, lượng giác, logarit, ...*) khi một trong các số $p,\frac{m+1}{n},p+\frac{m+1}{n}$ là số nguyên. Xét nguyên hàm $I=\int \frac{x^a dx}{\left(\sqrt[a]{x^5+1}\right)^6}$, hỏi có bao nhiêu số $a\in\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ để I có thể tính được?

A. 5 **B.** 9 **C.** 4 **D.** 6

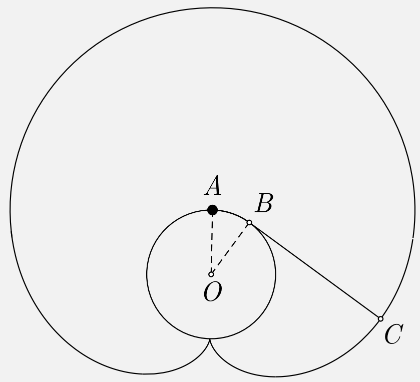
Lời giải

Ta viết lại nguyên hàm đã cho thành $I=\int x^a(x^5+1)^{-\frac{6}{a}}dx$ nên $m=a,n=5,p=-\frac{6}{a}$.

Theo đề bài ta chỉ cần có $-\frac{6}{a}\in\mathbb{Z},\frac{a+1}{5}\in\mathbb{Z},-\frac{6}{a}+\frac{a+1}{5}\in\mathbb{Z}$, suy ra $a\in\{2,3,4,5,6,9\}$

Chú ý. Đây là một bài toán về biến đổi lũy thừa, yếu tố nguyên hàm chỉ là phụ. Công thức trên có tên là định lý Chebyshev.

Câu 76 : Một con dê được buộc vào điểm A trên hàng rào về phía ngoài của khu vườn hình tròn tâm O bán kính 6m. Sợi dây buộc con dê có độ dài bằng nửa chu vi khu vườn. Hình bên mô tả phần cỏ bên ngoài vườn mà con dê có thể ăn được. Biết rằng với hàm số $f:[0;\pi]\to\mathbb{R}$ và điểm B thuộc (O) sao cho $AOB=\alpha>0$ thì đoạn BC là tiếp tuyến (O) có độ dại $f(\alpha)$ sẽ quét qua một phần mặt phẳng mà diện tích được xác định bởi $\int_0^\pi f^2(\alpha)d\alpha$ khi α thay đổi từ $0\to\pi$ (ở đây tính cả bên trái lẫn bên phải)



Từ công thức trên hay xác định diện tích S phần cỏ mà con dê có thể ăn được.

A. $S=32\pi^3$ **B.** $S=18\pi^3$ **C.** $S=30\pi^3$ **D.** $S=28\pi^3$

Lời giải

Ta thấy khi dê có thể di chuyển tự do về phía khu vườn (O), nhưng khi di chuyển về phía dưới thì chỉ có một phần của dây sẽ trải trên (O), phần dây còn lại nếu muốn đi xa nhất thì sẽ tạo thành tiếp tuyến với (O), tức là nằm trên biên của đường cong trong hình. Phần cỏ dê ăn được là sẽ phần bên trong đường biên và bên ngoài (O). Tiếp tuyến tại A của (O) chia phần có của dê thành trên và dưới với diện tích là S_1, S_2.

Phần trên là nửa hình tròn bán kính bằng độ dài sợi dây là 6π nên $S_1 = \frac{\pi}{2}\cdot(6\pi)^2 = 18\pi^3$

Để tính S_2 ta dùng công thức đã cho.

Độ dài cung AB là 6α nên $BC = 6\pi - 6\alpha\,(0 \le \alpha \le \pi)$. Suy ra

$$S_2 = \int_0^{\pi}(6\pi - 6\alpha)^2\,d\alpha = 12\pi^3 \Rightarrow S = S_1 + S_2 = 30\pi^3$$

Bài toán trên có tên gọi là "grazing goat problem", một bài toán rất thú vị của toán cao cấp. Công thức trên xuất phát từ tích phân 2 lớp, tọa độ cực nằm ngoài chương trình THPT nên đề bài đã cho sẵn dạng sơ cấp của nó để dễ áp dụng.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 xf(x)\left(x^2+f^2(x)\right)dx \ge \frac{2}{5}$ Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{2}f^2(x)\right)dx$ bằng?

A. $\frac{3}{10}$ **B.** $\frac{16}{45}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{7}{20}$

Lời giải

Để đơn giản ta coi $a = f(x)$ khi đó với $\begin{cases} A = \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}f^2(x)\right)^2 dx \\ B = \int_0^1 xf(x)\left(x^2+f^2(x)\right)dx \end{cases}$ ta có:

$A = \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}a^2\right)^2 dx; B = \int_0^1 xa\left(x^2+a^2\right)dx \ge \frac{2}{5}$ và từ đánh giá cùng bậc có

$$\left(a^2+3x^2\right)^2 - 4ax\left(a^2+x^2\right) - 8x^4 = (a-x)^4 \ge 0$$

$$\Rightarrow 9A = \int_0^1\left(a^2+3x^2\right)^2 dx \ge 4\int_0^1 ax\left(x^2+a^2\right)dx + 8\int_0^1 x^4 dx = 4B + \frac{8}{5} \ge \frac{16}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = f(x), \forall x \in [0;1]$.

Chọn ý **B.**

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[1;3]$ và $f(1)=0$, $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10}$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int\limits_1^3 [f'(x)]^2\,dx$ bằng?

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Nhận thấy rằng $\max\limits_{[1;3]}|f(x)|=\sqrt{10} \Rightarrow \exists x_0 \in [1;3]$ sao cho $|f(x_0)|=\sqrt{10}$

Ta có $f(1)=0 \Rightarrow \exists x_0 \in (1;3]$ sao cho $|f(x_0)|=\sqrt{10}$.

Theo bất đẳng thức Holder ta có:

$$\left(\int_1^{x_0} f'(x)dx\right)^2 \le \int_1^{x_0} 1^2dx.\int_1^{x_0}[f'(x)]^2\,dx=(x_0-1).\int_1^{x_0}[f'(x)]^2\,dx$$

Mặt khác ta lại có $\left(\int_1^{x_0} f'(x)dx\right)^2=\left(f(x)\Big|_1^{x_0}\right)^2=\left(f(x_0)-f(1)\right)^2=10$

$$\Rightarrow \int\limits_1^{x_0}[f'(x)]^2\,dx \ge \frac{10}{x_0-1} \Rightarrow \int\limits_1^{3}[f'(x)]^2\,dx \ge \int\limits_1^{x_0}[f'(x)]^2\,dx \ge \frac{10}{x_0-1} \ge \frac{10}{3-1}$$

Chọn ý **B.**

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa $f'(x)\ge f(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $f(0).\int\limits_0^1\frac{1}{f(x)}dx$ bằng?

A. 1. **B.** $\frac{e-1}{e}$. **C.** $\frac{e+1}{e}$. **D.** $e-1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f'(x)\ge f(x)>0, \forall x\in[0;1] \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}\ge 1, \forall x\in[0;1]$.

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến t ta được

$$\int\limits_0^t\frac{f'(x)}{f(x)}dx \ge \int\limits_0^t 1dx \Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_0^t \ge x\Big|_0^t \Leftrightarrow \ln f(t)-\ln f(0)\ge t \Leftrightarrow f(t)\ge f(0)e^t$$

Do đó $f(0).\int\limits_0^1\frac{1}{f(x)}dx \le \int\limits_0^1\frac{1}{e^x}dx=\frac{e-1}{e}$.

Chọn ý **B.**

Câu 80: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$. Đặt hàm số $g(x)=1+\int\limits_0^{x^2}f(t)dt$. Biết rằng $g(x)\ge 2xf(x^2)$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int\limits_0^1 g(x)dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. 1. **B.** $e-1$. **C.** 2. **D.** $e+1$.

Lời giải

Lấy đạo hàm 2 vế của giả thiết ta có $\begin{cases} g(0)=1 \\ g'(x)=2xf(x^2) \end{cases}$ và $g(x)>0,\ \forall x\in[0;1]$.

Theo giả thiết $g(x)\ge 2xf(x^2)\Rightarrow g(x)\ge g'(x)\Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)}\le 1$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 tới t ta được

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}dx\le \int_0^t 1dx\Leftrightarrow \ln g(x)\Big|_0^t\le x\Big|_0^t$$
$$\Leftrightarrow \ln g(t)-\ln g(0)\le t\Leftrightarrow \ln g(t)\le t\Leftrightarrow g(t)\le e^t$$

Do đó $\int_0^1 g(x)dx\le \int_0^1 e^x dx=e-1$

Chọn ý **B.**

Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f(x)\le 2018+2\int_0^x f(t)dt$ với mọi $x\in[0;1]$. Biết giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ có dạng ae^2+b với $a,\ b\in\mathbb{Z}$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 1009. **C.** 2018. **D.** 2020.

Lời giải

Đặt $g(x)=2018+2\int_0^x f(t)dt$, lấy đạo hàm 2 vế ta có $\begin{cases} g(0)=2018 \\ g'(x)=2f(x) \end{cases}$ và $g(x)>0,\forall x\in[0;1]$

Theo giả thiết $g(x)\ge f(x)\Rightarrow g(x)\ge \dfrac{g'(x)}{2}\Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)}\le 2$

Lấy tích phân 2 vế cận từ 0 đến t ta được

$$\int_0^t \frac{g'(x)}{g(x)}dx\le \int_0^t 2dx,\ \forall t\in[0;1]\Leftrightarrow \ln|g(x)|\Big|_0^t\le 2x\Big|_0^t$$
$$\Leftrightarrow \ln g(t)-\ln g(0)\le 2t\Leftrightarrow \ln g(t)\le 2t+\ln 2018\Leftrightarrow g(t)\le 2018.e^{2t}$$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx\le \int_0^1 g(x)dx\le 2018\int_0^1 e^{2x}dx=1009e^{2x}\Big|_0^t=1009e^2-1009$.

Chọn ý **A.**

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên $[0;1]$. Đặt hàm số $g(x)=1+\int_0^x f(t)dt$. Biết $g(x)\le\sqrt{f(x)}$ với mọi $x\in[0;1]$, tích phân $\int_0^1 \dfrac{1}{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

2. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn điều kiện $f^2(x) \le 1 + 3\int_0^x f(t)dt = g(x)$ với mọi $x \in [0;1]$, tích phân $\int_0^1 \sqrt{g(x)}dx$ có giá trị lớn nhất bằng?

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Chọn ý **B.**

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ dương và liên tục trên $[1;3]$, thỏa $\max_{[1;3]} f(x) = 2$, $\min_{[1;3]} f(x) = \frac{1}{2}$ và biểu thức $S = \int_1^3 f(x)dx.\int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx$ đạt giá trị lớn nhất, khi đó hãy tính $I = \int_1^3 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{2} \le f(x) \le 2$, suy ra $f(x) + \frac{1}{f(x)} \le \frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \int_1^3 \left[f(x) + \frac{1}{f(x)}\right]dx \le \int_1^3 \frac{5}{2}dx \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \le 5 \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \le 5 - \int_1^3 f(x)dx$$

Khi đó $S = \int_1^3 f(x)dx.\int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx \le \int_1^3 f(x)dx.\left(5 - \int_1^3 f(x)dx\right) = -\left(\int_1^3 f(x)dx - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \le \frac{25}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{2}$.

Chọn ý **D.**

Câu 83: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn với mọi x, y, α, β và $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ta có $\alpha.f(x) + \beta.f(y) \ge (\alpha + \beta) f\left(\frac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}\right)$. Biết $f(0) = 0$, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 8 **B.** 4 **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** 2

Lời giải

Áp dụng tính chất của tích phân ta có:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(1-x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f(x) + f(1-x)\right)dx \ge \frac{1}{2}\int_0^1 (1+1) f\left(\frac{1.x + 1(1-x)}{1+1}\right)dx = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Mặt khác ta lại có:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\left[f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx=2\int_0^1\left[(1-x)f(0)+xf\left(\frac{1}{2}\right)\right]dx$$

$$\geq 2\int_0^1(1-x+x)f\left(\frac{(1-x).0+x.\frac{1}{2}}{1-x+x}\right)dx=2\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=4\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=8$$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx\geq 8$, dấu "=" xảy ra chẳng hạn tại $f(x)=16x$.

Chọn ý **A.**

Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ dương liên tục $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời điều kiện $f(x)\leq 2018+2\int_0^x f(t)dt, \forall x\geq 0; \int_0^1 f(x)dx=1009\left(e^2-1\right)$. Tính tích phân $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx$?

A. $2018(e-1)$ **B.** $1009(e+1)$ **C.** $2018(e-2)$ **D.** $1009(e-1)$

Lời giải

Ta có $f(x)\leq 2018+2\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow f(x)-2018-2\int_0^x f(t)dt\leq 0(1)$

Đặt $g(x)=e^{ax}\left(\int_0^x f(t)dt+b\right); g'(x)=e^{ax}\left(a\int_0^x f(t)dt+f(x)+ab\right)$

Từ (1) ta thực hiện phép đồng nhất ta được $\begin{cases}a=-2\\ab=-2018\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1009\end{cases}$

Suy ra $g'(x)\leq 0, \forall x\geq 0 \Rightarrow g(x)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$.

$$\Rightarrow e^{-2x}\left(\int_0^x f(t)dt+1009\right)=g(x)\leq g(0)\Rightarrow 2\int_0^x f(t)dt+2018\leq 2018e^{2x}$$

Vậy $f(x)\leq 2018e^{2x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx\leq 1009e^2-1009$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2018e^{2x}\Rightarrow\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=2018(e-1)$

Chọn ý **A.**

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm khác 0 và liên tục đến cấp hai trên đoạn $[1;2]$. Biết $\ln 2f'(1)=f(1)=1, f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}}, \forall x\in[1;2]$. Tính tích phân $I=\int_1^2 xf(x)dx$?

A. $\log_2 5+\frac{1}{2\ln 2}+1$ **B.** $3\log_2 5-\frac{3}{4\ln 2}-2$

C. $\log_2 5-\frac{3}{\ln 2}+2$ **D.** $2\log_2 5-\frac{3}{2\ln 2}-1$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có:

$$f'(x)=\sqrt[3]{\frac{f'(x)-xf''(x)}{2^{f(x)-1}\ln^2 2}}\Leftrightarrow f'(x).2^{f(x)}\ln^2 2=\frac{2f'(x)-2xf''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(2^{f(x)}\ln 2\right)'=\left(\frac{2x}{f'(x)}\right)'\Leftrightarrow 2^{f(x)}\ln 2=\frac{2x}{f'(x)}+C_1$$

Vì $\ln 2f'(1)=f(1)=1\Rightarrow C_1=0$. Khi đó ta được

$$f'(x)2^{f(x)}\ln 2=2x\Leftrightarrow\left(2^{f(x)}\right)'=2x\Leftrightarrow 2^{f(x)}=\int 2xdx=x^2+C_2\Leftrightarrow f(x)=\log_2\left(x^2+C_2\right)$$

Vì $f(1)=1\Rightarrow C_2=1\Rightarrow f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)$. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I=\int_1^2 x\log_2\left(x^2+1\right)dx=\frac{1}{2}x^2\log_2\left(x^2+1\right)\Big|_1^2-\frac{1}{\ln 2}\int_1^2\frac{x^3}{x^2+1}dx$$

$$=2\log_2 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=2\log_2 5-\frac{1}{2}-\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_1^2\right]$$

$$=2\log_2 5-\frac{3}{\ln 2}-1$$

Chọn ý **D.**

Câu 86: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)=-1, f(4)=-8$ và đồng thời $\left[f'(x)\right]^2\sqrt{x^3}-f(x)=9\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-3x, \forall x\in[1;4]$. Tích phân $\int_1^4 f(x)dx$ bằng

A. -7 **B.** $-\frac{89}{6}$ **C.** $-\frac{79}{6}$ **D.** -8

Lời giải

Giả thiết đã cho tương đương $\left[f'(x)\right]^2-\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}=9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;4]$ ta được:

$$\int_1^4\left[f'(x)\right]^2dx-\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx=\int_1^4\left(9-\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=21-2\ln 2$$

Sử dụng tích phân từng phần ta được:

$$\int_1^4\frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}dx=\int_1^4 f(x)d\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}+a\right)\text{, a sẽ được xác định sau}$$

$$=\left(a-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)f(x)\Big|_1^4-\int_1^4\left(a-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)f'(x)dx=7a-6+2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{a}{2}\right)f'(x)dx$$

Từ đây ta có đẳng thức:

$$\int_1^1\left(f'(x)\right)^2dx+7a-6-2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{a}{2}\right)f'(x)dx=21-2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow\int_1^4\left(f'(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{a}{2}\right)^2dx-2\ln 2+9a-\frac{3a^2}{4}-6=21-2\ln 2$$

Ta dễ tìm được $a=3$ để $-2\ln 2+9a-\frac{3a^2}{4}-6=21-2\ln 2$, khi đó

$$f'(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{x}}-3,\forall x\in[1;4]\Rightarrow f(x)=2\sqrt{x}-3x$$

Vậy $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(2\sqrt{x}-3x\right)dx=-\frac{79}{6}$

Chọn ý **C.**

Câu 87: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện $2[f(2)]^2-[f(1)]^2=63;2[f(x)]^2+x^2[f'(x)]^2=27x^2,\forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của tích phân $\int_1^2[f(x)]^2dx$

A. 15 **B.** 18 **C.** 21 **D.** 25

Lời giải

Theo giả thiết ta có

$$\int_1^2[f(x)]^2dx+\int_1^2[f(x)]^2dx+\int_1^2x^2[f'(x)]^2dx=\int_1^2 27x^2dx=63\,(1)$$

Xét tích phân $I=\int_1^2[f(x)]^2dx$, đặt $\begin{cases}u=[f(x)]^2\\dv=dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2f'(x)f(x)\\v=x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=x[f(x)]^2\Big|_1^2-2\int_1^2xf'(x)f(x)dx=63-2\int_1^2xf'(x)f(x)dx$$

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\int_1^2[f(x)]^2dx-2\int_1^2xf'(x)f(x)dx+\int_1^2x^2[f'(x)]^2dx=0\Leftrightarrow\int_1^2[f(x)-xf'(x)]^2dx=0$$

Do đó $f(x)-xf'(x)=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow f(x)\equiv Cx$

Vậy $2(Cx)^2+x^2C^2=3C^2x^2=27x^2\Rightarrow C=3\Rightarrow\int_1^2[f(x)]^2dx=21$

Chọn ý **C.**

Trong bài toán này ta đã sử dụng tính chất sau của tích phân:

Nếu $\int_a^b[f(x)]^2dx=0$ thì ta suy ra $f(x)=0$

Câu 88: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3\frac{[f'(x)]^3}{f(x)}dx=\frac{27}{4};f(1)=2\sqrt{2},f(3)=4$. Tích phân $\int_1^3\frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}dx$ bằng

A. $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ **B.** $\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{5}-2$

Lời giải

Vì $f'(x)>0,\forall x\in[1;3]\Rightarrow f(x)\geq f(1)=2\sqrt{2}>0,\forall x\in[1;3]$

Ta có $\int_1^3 \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left[f(x)\right]^2}\Big|_1^3 = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{f^2(3)} - \sqrt[3]{f^2(1)}\right) = 3$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số thực dương ta có:

$$\frac{\left[f'(x)\right]^3}{f(x)} + \frac{27}{8} + \frac{27}{8} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\left[f'(x)\right]^3}{f(x)}.\frac{27}{8}.\frac{27}{8}} = \frac{27}{4}.\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;3]$ ta được:

$$\int_1^3\left(\frac{\left[f'(x)\right]^3}{f(x)} + \frac{27}{8} + \frac{27}{8}\right)dx \ge \int_1^3\left(\frac{27}{4}.\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 \frac{\left[f'(x)\right]^3}{f(x)}dx + \frac{27}{2} \ge \frac{81}{4} \Leftrightarrow \int_1^3 \frac{\left[f'(x)\right]^3}{f(x)}dx \ge \frac{27}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{\left[f'(x)\right]^3}{f(x)} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{f(x)}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left[f(x)\right]^2} = \frac{3}{2}x + C \Rightarrow f(x) = \sqrt{\left(x + \frac{2C}{3}\right)^3}$

Mặt khác $f(1) = 2\sqrt{2} \Rightarrow C = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{(x+1)^3} \Rightarrow \int_1^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}}dx = \sqrt{6} - \sqrt{5}$

Chọn ý **A.**

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $e.f(1) = 4f(0) = 4$ và đồng thời $\int_0^1 e^{2x}\left(\left[f'(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2\right)dx + 4\int_0^1 e^x.f(x)dx = \frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$?

A. $\frac{4(e-1)}{e}$ **B.** $\frac{3(e-1)}{e}$ **C.** $\frac{2(e+2)}{e}$ **D.** $\frac{5(e-2)}{e}$

Lời giải

Xét tích phân $K = \int_0^1 e^{2x}\left(\left[f'(x)\right]^2 - \left[f(x)\right]^2\right)dx + 4\int_0^1 e^x f(x)dx = \frac{8}{3}$

Đặt $u(x) = e^x f(x) \Rightarrow u' = e^x f(x) + e^x f'(x) \Rightarrow e^x f'(x) = u' - u$, khi đó ta được

$$K = \int_0^1\left[(u'-u)^2 - u^2 + 4u\right]dx = \int_0^1\left[(u')^2 - 2u.u' + 4u\right]dx\left(u(1) = 4, u(0) = 1\right)$$

Ta có $\int_0^1 u.u'dx = \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{15}{2}, \int_0^1 udx = xu\Big|_0^1 - \int_0^1 xu'dx = 4 - \int_0^1 xu'dx$.

Suy ra $K = \int_0^1\left[(u')^2 - 4xu'\right]dx = \frac{8}{3}$. Đến đây ta chọn $m \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\int_0^1\left[u' - 2x - m\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1\left[(u')^2 - 4xu\right]dx - 2m\int_0^1 u'dx + \int_0^1 (2x+m)^2 dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} - 6m + m^2 + 2m + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy ta được $\int_0^1\left[u' - 2x - 2\right]^2 dx = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x + 2$

$$\Leftrightarrow \left(e^x f(x)\right)' = 2x+2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2+2x+C}{e^x} \xrightarrow{f(0)=1} f(x) = \frac{x^2+2x+1}{e^x} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{5(e-2)}{e}$$

Chọn ý **D.**

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0) = \frac{1}{16}; \int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx = -\frac{1}{8}; \int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2}dx = \frac{1}{64}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$?

A. $\frac{1}{24}$ **B.** $\frac{1}{32}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx = (x+1)^3 f(x)\Big|_0^1 - 3\int_0^1 (x+1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{8} \Rightarrow \int_0^1 (x+1)^2 f(x)dx = \frac{1}{16}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$\frac{1}{16} = \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}} (x+1)^2 [f'(x)]^{\frac{2}{3}} \right| dx \le \left[\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 dx \right]^{\frac{1}{3}} \left[\int_0^0 \left[(x+1)^2 [f'(x)]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} dx \right]^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx \right]^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 (x+1)^3 f'(x)dx \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{16}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\frac{f(x)}{[f'(x)]^{\frac{2}{3}}} \right]^3 = k\left[(x+1)^2 [f'(x)]^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x)]^3} = \frac{1}{k(x+1)^3} (1)$

Ta có $\int_0^1 \frac{[f(x)]^3}{[f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{f(x)}{f'(x)} \right]^3 f'(x)dx = \int_0^1 k(x+1)^3 f'(x)dx = \frac{1}{64} \Rightarrow k = \frac{-1}{8}$

Khi đó ta được

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x+1} \Rightarrow \ln f(x) = -2\ln|x+1| + C \xrightarrow{f(0)=\frac{1}{16}} f(x) = \frac{1}{16(x+1)^2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{32}$$

Chọn ý **B.**

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa $f(0) = 0, |f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((f(x))^2 - f(x) \right) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4} + 1$ **B.** $\frac{\pi}{8}$ **C.** $\frac{3\pi}{8}$ **D.** $1 - \frac{\pi}{4}$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $|f(x)| = |f(x) - 0| = |f(x) - f(0)| \le |\sin x - \sin 0| = |\sin x|$

$$\Rightarrow [f(x)]^2 - f(x) \le \sin^2 x + \sin x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([f(x)]^2 - f(x)\right)dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \sin x)dx = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi $f(x) = -\sin x$.

Chọn ý **A.**

Câu 92: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $f(0)=1; f'(0)=0; f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge 0, \forall x\in[0;+\infty); \int_0^{\ln 2} f(x)dx = \frac{-1}{6}$. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{\ln 2} f^2(x)dx$.

A. $\frac{15}{4}$ **B.** $\frac{35}{17}$ **C.** $\frac{27}{20}$ **D.** $\frac{24}{7}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $f''(x)-5f'(x)+6f(x)\ge 0 \Leftrightarrow f''(x)-2f'(x)-3[f'(x)-2f(x)]\ge 0$

Đặt $g(x)=f'(x)-2f(x) \Rightarrow g'(x)-3g(x)\ge 0$

Xét hàm số $h(x)=e^{-3x}g(x) \Rightarrow h'(x) = -3e^{-3x}g(x)+e^{-3x}g'(x)=e^{-3x}(g'(x)-3g(x))\ge 0$

Suy ra $h(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow h(x)\ge h(0)=g(0)=f'(0)-2f(0)=-2$

$$\Rightarrow e^{-3x}g(x)\ge -2 \Leftrightarrow e^{-2x}(f'(x)-2f(x))+2e^x \ge 0$$

Xét hàm số $k(x)=e^{-2x}f(x)+2e^x \Rightarrow k'(x)=e^{-2x}(f'(x)-2f(x))+2e^x\ge 0$

Suy ra $k(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty) \Rightarrow k(x)\ge k(0)=f(0)+2=3$

$$\Rightarrow e^{-2x}f(x)+2e^x\ge 3 \Leftrightarrow f(x)\ge 3e^{2x}-2e^{3x} \Rightarrow \int_0^{\ln 2} f(x)dx \ge -\frac{1}{6}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=3e^{2x}-2e^{3x} \Rightarrow \int_0^{\ln 2}[f(x)]^2 dx = \frac{27}{20}$

Chọn ý **C.**

Câu 93: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp 2 trên $[0;2]$ thỏa mãn điều kiện $f(0)-2f(1)+f(2)=1$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_0^2 [f''(x)]^2 dx$ bằng

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_0^1 [f''(x)]^2 dx = 3\int_0^1 x^2 dx.\int_0^1 [f''(x)]^2 dx \ \ge 3\left(\int_0^1 x.f''(x)dx\right)^2$$

Ta đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow 3\left(\int_0^1 xf''(x)dx\right)^2 = 3[f'(1)+f(0)-f(1)]^2$

Sử dụng bất đẳng thức Holder một lần nữa ta được

$$\int_1^2 [f''(x)]^2 dx = 3\int_1^2 (x-2)^2 dx.\int_1^2 [f''(x)]^2 dx \ \ge 3\left(\int_1^2 (x-2).f''(x)dx\right)^2$$

Ta đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = f''(x)dx \end{cases} \Rightarrow 3\left(\int_1^2 (x-2)f''(x)dx\right)^2 = 3\left[-f'(1)+f(2)-f(1)\right]^2$

Suy ra $2\int\limits_0^2 \left[f''(x)\right]^2 dx \ge 3\left[f'(1)+f(0)-f(1)\right]^2 + 3\left[-f'(1)+f(2)-f(1)\right]^2$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có

$$3\left[f'(1)+f(0)-f(1)\right]^2 + 3\left[-f'(1)+f(2)-f(1)\right]^2 \ge 3.\frac{\left[f(0)-2f(1)+f(2)\right]^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Chọn ý **B.**

Câu 94: Cho tích phân $I = \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx$, gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I. Tính $S = M + m$?

A. $54\sqrt{2}+108$ **B.** $36\sqrt{2}+108$ **C.** $6\sqrt{3}+54$ **D.** $6\sqrt{3}+36$

Lời giải

Đặt $y = \sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$ với $x \in [-7;11]$. Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+7}} - \frac{1}{2\sqrt{11-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Nhận thấy y' không xác định tại $-7;11$, vẽ bảng biến thiên ta có $\sqrt{18} \le y \le 6$

$$\Rightarrow \int_{-7}^{11}\sqrt{18}dx \le \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le \int_{-7}^{11}6dx$$

$$\Leftrightarrow 54\sqrt{2} \le \int_{-7}^{11}\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)dx \le 108$$

Chọn ý **A.**

Câu 95: Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $a\pi\left(\frac{1}{b}+\frac{\sqrt{c}}{d}\right)$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S = a+b+c+d$?

A. 14 **B.** 15 **C.** 16 **D.** 17

Lời giải

Ta có $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \le x^3 \le x^2 \Rightarrow -x^2 \le -x^3 \le 0 \Rightarrow 4-2x^2 \le 4-x^2-x^3 \le 4-x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}} \ge \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \ge \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx}_{I} \le \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}}dx}_{J}$$

Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt \Rightarrow I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$

Đặt $x = \sqrt{2}\sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cos t dt \Rightarrow J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{4-2\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2}}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Vậy $\frac{\pi}{6} \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}}dx \le \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Chọn ý **D.**

Câu 96: Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}}, n\in\mathbb{N}^*$, biết rằng tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{b}+\frac{c}{d}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c+d$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 12

Lời giải

Ta có $x^{2n}\ge 0 \Rightarrow 1\le \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx \ge \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Ta thấy $n\in\mathbb{N}^*, x\in\left[0;\frac{1}{2}\right] \Rightarrow x^{2n}\le x^2 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}}dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Đặt $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos tdt \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos tdt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Chọn ý **B.**

Câu 97: Cho tích phân $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1}dx$, biết rằng giá trị lớn nhất của I được viết dưới dạng $\frac{a\pi}{be}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tổng $S=a+b$

A. 13 **B.** 14 **C.** 14 **D.** 15

Lời giải

Ta có với mọi $x\in\left[1;\sqrt{3}\right] \Rightarrow -x\le -1 \Rightarrow e^{-x}\le \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x}\sin x}{x^2+1} \le \frac{1}{e\left(x^2+1\right)} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}.\sin x}{x^2+1}dx \le \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e\left(x^2+1\right)}dx$$

Xét tích phân $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e\left(x^2+1\right)}dx$. Đặt $x=\tan t \Rightarrow dx=\left(\tan^2 t+1\right)dt$ ta được

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e\left(x^2+1\right)}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\tan^2 t+1\right)dt}{e\left(\tan^2 t+1\right)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{e} = \frac{\pi}{12e}$$

Vậy $I\le \frac{\pi}{12e}$.

Chọn ý **A.**

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, f(x)>0$ và đồng thời $f(x)\ln f(x)=xf'(x)[f(x)-1], \forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{e-1}{3}$ **B.** $\frac{e-6}{6}$ **C.** 4 **D.** 1

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$\Leftrightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=xf'(x)f(x)\Leftrightarrow \ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow (x\ln f(x))'=xf'(x)\Leftrightarrow x\ln f(x)\Big|_0^1=\int_0^1 xf'(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)dx$$

Vậy ta được $\int_0^1 f(x)dx=f(1)=1$

Chọn ý **D.**

Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $f(2018x+2017)=2018f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 [f(x)]^2 dx$?

A. $\frac{4}{3}[f(-1)]^2$ **B.** $\frac{5}{3}[f(-1)]^2$ **C.** $\frac{7}{3}[f(-1)]^2$ **D.** $\frac{8}{3}[f(-1)]^2$

Lời giải

Xét biểu thức $f(2018x+2017)=2018f(x)$. Lấy đạo hàm 2 vế ta được

$$2018f'(2018x+2017)=2018f'(x)$$

Thay x bởi $2018x+2017$, ta được $f'(x)=f'\left(\frac{\frac{x-2017}{2018}-2018+1}{2018}\right)=f'\left(\frac{x-2018^2+1}{2018^2}\right)$

Thay đến n lần và bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f'(x)=f'\left(\frac{x-2018^n+1}{2018^n}\right)=f'\left(\frac{x}{2018^n}-1+\frac{1}{2018^n}\right)$$

Khi $n\to+\infty\Rightarrow f'(x)=f'(-1)=f(x)=f'(-1)x+C(*)$

Thay $x=-1\Rightarrow f(-1)=2018f(-1)\Rightarrow f(-1)=0$

Thay $x=-1\Rightarrow(*):f(-1)=-f'(-1)+C=0\Leftrightarrow f'(-1)=C$

Vậy $f(x)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow\int_0^1[f(x)]^2dx=\frac{7}{3}[f(-1)]^2$

Chọn ý **C.**

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=\frac{7}{3}$ và đồng thời $\frac{3x^3f(x)}{[f'(x)]^2+xf'(x)+x^2}=f'(x)-x,\forall x\in[1;2]$. Tính giá trị của $f(2)$?

A. $\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$ **B.** $\frac{7\sqrt{7}+1}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{7}-1}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{7}+1}{3}$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$3x^3f(x)=(f'(x)-x)\left([f'(x)]^2+xf'(x)+x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3\Leftrightarrow x^3(3f(x)+1)=[f'(x)]^3\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}}=x$$

$$\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{3f(x)+1}}dx=\int_1^2xdx=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\int_1^2[3f(x)+1]^{-\frac{1}{3}}d(3f(x)+1)=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}.\frac{3}{2}[3f(x)+1]^{\frac{2}{3}}\Big|_1^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow[3f(2)+1]^{\frac{2}{3}}-[3f(1)+1]^{\frac{2}{3}}=3\Rightarrow f(2)=\frac{7\sqrt{7}-1}{3}$$

Chọn ý **A.**

Câu 101: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1)-f(0)=2$. Biết rằng $0\le f'(x)\le 2\sqrt{2x},\forall x\in[0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int_0^1(f'(x))^2dx$ thuộc khoảng nào sau đây.

A. $(2;4)$ **B.** $\left(\frac{13}{3};\frac{14}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta có $0\le f'(x)\le 2\sqrt{2x},\forall x\in[0;1]$

$$\Rightarrow 0\le[f'(x)]^2\le 8x,\forall x\in[0;1]\Rightarrow 0\le\int_0^1[f'(x)]^2dx\le\int_0^1 8xdx=4\,(1)$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz* ta có $\left(\int_0^1f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1[f'(x)]^2dx$

Mặt khác $\left(\int_0^1f'(x)dx\right)^2=\left(f(x)\Big|_0^1\right)^2=(f(1)-f(0))^2=4\Rightarrow\int_0^1[f'(x)]^2dx\ge 4\,(2)$

Từ $(1);(2)\Rightarrow\int_0^1[f'(x)]^2dx=4$.

Chọn ý **A.**

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(x).\left[4(f'(x))^2+f(x).f''(x)\right]=e^x, \forall x\in\mathbb{R}$, biết $f(0)=0$. Khi đó $\int\limits_0^{5\ln 2} f^5(x)dx$ bằng?

A. $5\left(31-\dfrac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$

B. $\dfrac{1}{5}\left(31-\dfrac{355\ln 2}{2}\right)$

C. $\dfrac{1}{5}\left(31-\dfrac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$

D. $5\left(31-\dfrac{355\ln 2}{2}\right)$

Lời giải

Giả thiết tương đương $\left(f^4(x).f'(x)\right)'=e^x \Rightarrow f^4(x)f'(x)=e^x+C$ mà $f(0)=0\Rightarrow C=-1$

$$\Rightarrow f^4(x)f'(x)=e^x-1\Rightarrow \int f^4(x)f'(x)dx=e^x-x+D\Rightarrow f^5(x)=5\left(e^x-x+D\right)$$

Mặt khác $f(0)=0\Rightarrow D=-1\Rightarrow f^5(x)=5\left(e^x-x-1\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{5\ln 2} f^5(x)dx=5\int_0^{5\ln 2}\left(e^x-x-1\right)dx=5\left(31-\frac{25\ln^2 2}{2}-5\ln 2\right)$$

Chọn ý **A.**

Câu 103: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^2 f(x)dx=1$. Tính giới hạn của dãy số:

$$u_n=\frac{1}{n}\left[f(1)+\sqrt{\frac{n}{n+3}}f\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}\right)+\sqrt{\frac{n}{n+6}}f\left(\sqrt{\frac{n+6}{n}}\right)+...+\sqrt{\frac{n}{4n-3}}f\left(\sqrt{\frac{4n-3}{n}}\right)\right]$$

A. 2 **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** 1 **D.** $\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Chú ý đây là một câu sử dụng định nghĩa tích phân bằng tổng Riemann không nằm trong phạm vi kiến thức THPT nên chỉ mang tính tham khảo, không đi sâu!

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\Rightarrow S=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{3}{n}\dfrac{f\left(\sqrt{1+\frac{3i}{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3i}{n}}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{3}{n}g\left(1+\dfrac{3i}{n}\right)$

Ta chia đoạn $[1;4]$ thành n phần bằng nhau bằng các điểm chia

$$x_i=1+i.\frac{4-1}{n}\left(i=\overline{0,n}\right)\left(x_0=1,...,x_n=4\right)$$

Mỗi đoạn con có độ dài là $x_{i+1}-x_i=\dfrac{4-1}{n}\Rightarrow S=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=0}^{n-1}g(x_i)(x_{i+1}-x_i)$

$$\Rightarrow \lim S=\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)dx=\frac{1}{3}\int_1^4\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}\int_1^4 2f\left(\sqrt{x}\right)d\left(\sqrt{x}\right)=\frac{2}{3}$$

Chọn ý **B.**

Câu 104: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $f'(1)=g(1)=1; f(2).g(2)=f(1)$ và đồng thời $1-f'(x)g'(x)=g(x)\left[f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)\right], \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)g'(x)dx$?

A. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **B.** $-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$ **C.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ **D.** $-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$

Lời giải

Biến đổi giả thiết tương đương

$$x-xf'(x)g'(x)=xg(x)f''(x)+g(x)f'(x)$$
$$\Leftrightarrow x=x\left[g'(x)f'(x)+g(x)f''(x)\right]+g(x)f'(x)$$
$$\Leftrightarrow x=\left(xf'(x)g(x)\right)'\Rightarrow xf'(x)g(x)=\frac{x^2}{2}+C$$
$$\Leftrightarrow f'(x)g(x)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}\xrightarrow{f'(1)=g(1)=1}f'(x)g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$$
$$\Leftrightarrow \int_1^2 f'(x)g(x)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$I=\int_1^2 f'(x)g(x)dx=g(x)f(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)g'(x)dx=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$
$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)g'(x)dx=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\ln 2$$

Chọn ý **D.**

Câu 105: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=0$ và đồng thời điều kiện $\int_0^1|f'(x)|dx=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ trên $[0;1]$?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 1

Lời giải

Ta có:

- Với $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow |f(x)|=\left|\int_0^x f'(t)dt\right|\le\int_0^x|f'(t)|dt\le\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(t)|dt$
- Với $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\Rightarrow |f(x)|=\left|\int_x^1 f'(t)dt\right|\le\int_x^1|f'(t)|dt\le\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(t)|dt$

$$\Rightarrow |f(x)|\le\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f'(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1|f'(t)|dt\right)=\frac{1}{2}\int_0^1|f'(t)|dt=\frac{1}{2}$$

Chọn ý **A.**

LỜI KẾT

Vậy là chúng ta đã đi đến trang cuối cùng của tuyển tập này, tuy bài viết chưa thực sự là hay nhưng hy vọng những kiến thức mà mình đưa vào trong bài viết có thể giúp ích được các bạn trong quá trình học tập. Ngoài ra có thể còn một vài thiếu xót trong tuyển tập này, các bạn có thể tham khảo thêm các tài liệu khác để học hỏi hơn. Giới đây là một vài tài liệu mình nghĩ sẽ giúp ích được cho các bạn.

[1] Vận dụng cao số phức tích phân

[2] Kho tài liệu nguyên hàm tích phân

[3] Các bài toán thực tế nguyên hàm tích phân – Hứa Lâm Phong

[4] Nâng Cao Kỹ Năng Giải Toán Trắc Nghiệm 100% Dạng Bài Nguyên Hàm – Tích Phân Và Ứng Dụng – Tô Thị Nga

Một lần nữa gửi lời cảm ơn đến những người có đóng góp cho bài viết này và chúc các bạn một mùa ôn thi thành công nhé!