SỞ GD & ĐT BÌNH DƯƠNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG QUỐC GIA
NĂM HỌC 2021 - 2022
Môn: **TOÁN – Ngày thi thứ nhất**
*Thời gian: **180 phút,** không kể thời gian phát đề*

Câu 1: (*5 điểm*).

Chứng minh rằng không tồn tại dãy số thực (x_n) thỏa mãn $x_1 = 2$ và

$$\frac{2x_n^2+2}{x_n+3} < x_{n+1} \le \frac{2x_n+2}{x_n+3} + 2021$$

với mọi số nguyên dương $n = 1, 2, 3, \ldots$

Câu 2: (*5 điểm*).

Với k là tham số thực, xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$2f(kxy + f(x+y)) = xf(y) + yf(x) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Giả sử tồn tại một hàm số f thỏa mãn điều kiện trên mà $f(0) \neq 0,$ xác định $k.$

b) Với $k = -\frac{1}{2},$ chứng minh rằng $f(-f(2)) = f(2).$

Câu 3: (*5 điểm*).

Cho tam giác ABC nhọn, không cân có các đường cao BE, CF cắt nhau tại $H.$ Lấy điểm X trên đường thẳng BH và điểm Y trên đường thẳng CH sao cho tứ giác $AXHY$ là hình bình hành. Gọi R là giao điểm của các đường thẳng XY, EF.

a) Chứng minh rằng AR song song với $BC.$

b) Chứng minh rằng AH là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác BHY và tam giác $CHX.$

Câu 4: (*5 điểm*).

Thầy chủ nhiệm đội tuyển đăng ký cho n học sinh tham gia các buổi học chuyên đề của viện Toán với tổng cộng m buổi. Kết thúc khóa học, các học sinh sẽ chia sẻ bài cho nhau cùng học. Biết rằng mỗi buổi, thầy đăng ký cho đúng 3 học sinh và không có 2 bạn nào học chung 2 buổi trở lên.

a) Giả sử $m = 7,$ tìm giá trị nhỏ nhất của $n.$

b) Giả sử $n = 15$ và khi đăng ký xong thì Ban tổ chức ra thông báo mới là tối đa 10 bạn được tham gia. Hỏi thầy có cách nào loại đi 5 học sinh nào đó (và giữ nguyên buổi đăng ký của các học sinh khác) mà đội tuyển vẫn có đầy đủ bài của tất cả các buổi học được hay không?

--------------**HẾT**--------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GD & ĐT BÌNH DƯƠNG **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG**	**ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG QUỐC GIA** **NĂM HỌC 2021 - 2022** Môn: **TOÁN – Ngày thi thứ hai** *Thời gian: **180 phút,** không kể thời gian phát đề*
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	

Câu 5: (*7 điểm*). Xét tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp trong đường tròn (O) có BC cố định và A di động trên (O). Gọi A' là hình chiếu của A lên BC, gọi H là trực tâm tam giác ABC và AE là đường kính của (O). Tia EH cắt lại (O) ở K và I là điểm đối xứng với K qua BC.

a) Chứng minh rằng khi A thay đổi thì IH luôn đi qua một điểm cố định, ký hiệu là F.

b) Ký hiệu (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Gọi T, J lần lượt là giao điểm của FO, AE với (ω) và tia TA' cắt lại (ω) ở R. Chứng minh rằng JR, BC, AT đồng quy.

Câu 6: (*7 điểm*). Gọi T là tập hợp các bộ có thứ tự các số thực không âm (a,b,c) và thỏa mãn

$$a^2+b^2+c^2=3.$$

a) Xét bộ $(a,b,c)\in T$ và giả sử rằng $|(a-b)(b-c)(c-a)|=1,$ tính giá trị của biểu thức

$$S=a+b+c.$$

b) Tìm hằng số thực k lớn nhất sao cho với mọi $(a,b,c)\in T$ thì ta đều có bất đẳng thức

$$a+b+c+k(1-abc)\le 3.$$

Câu 7: (*6 điểm*). Đa thức nguyên $f(n)$ được gọi là "đẹp" nếu như tồn tại vô hạn số nguyên dương n để $n!$ chia hết cho $f(n)$.

a) Chứng minh rằng các đa thức $f(n)=n^2-1$ và $f(n)=n^2+n+1$ đều là đẹp.

b) Chứng minh rằng mọi đa thức nguyên bậc nhất có dạng $f(n)=an+2021$ với a là số nguyên dương thì đều đẹp.

---------------**HẾT**---------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.