

Khóa ngày:

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút

(Không kể thời gian phát đề)

**ĐỀ:**

(Đề thi có 01 trang/20 điểm)

**Bài 1:** Cho  $x, y$  là các số thực dương và  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$(x^n + y^n)(x + y)^{2n+1} \geq 2^{2n+1} x^n y^n (x^{n+1} + y^{n+1}).$$

**Bài 2:** Cho dãy số thực  $(x_n)$  được xác định bởi:

$$x_0 = 2021, x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{\sqrt{3x_n^2 - 1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Bài 3:** Tìm tất cả các đa thức hệ số nguyên  $P(x), Q(x)$  khác đa thức hằng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(i)  $P(1) = P(2) = Q(0)$ ;

(ii)  $P(Q(x)) = P(x)Q(x) - 4Q(x) + P(0), \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài 4:** Cho đường tròn  $(O)$  tâm  $O$  và đường tròn  $(O')$  tâm  $O'$  tiếp xúc trong tại  $M$ ,  $(O')$  nằm trong  $(O)$ . Gọi  $A$  là một điểm nằm trên  $(O)$  sao cho  $A, O, O'$  không thẳng hàng. Từ điểm  $A$  kẻ các tiếp tuyến  $AB, AC$  với đường tròn  $(O')$ , trong đó  $B, C$  là các tiếp điểm. Gọi  $E, F$  theo thứ tự là giao điểm thứ hai của  $AB, AC$  với đường tròn  $(O)$ .

1) Chứng minh rằng  $\frac{ME}{MF} = \frac{BE}{CF}$ .

2) Gọi  $N$  là giao điểm thứ hai của đường thẳng  $AO'$  và đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $BC, EF, MN$  đồng quy.

**Bài 5:** Cho số nguyên tố  $p > 3$ .

1) Giả sử  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{m}{n}$ , với  $m$  và  $n$  là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng  $m$  chia hết cho  $p$ .

2) Chứng minh rằng  $C_{5p-1}^{p-1} - 1$  chia hết cho  $p^3$ .