**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**QUẢNG TRỊ**

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12**
**VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI QUỐC GIA**
**Khóa ngày 05 tháng 11 năm 2021**
**MÔN THI: TOÁN (Vòng 1)**
*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề*

**Câu 1.** *(5,0 điểm)* Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \dfrac{y+1}{\sqrt{y^2+2y+2}}. \end{cases}$$

**Câu 2.** *(5,0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ không cân nội tiếp đường tròn $(O)$, ngoại tiếp đường tròn $(I)$. Đường tròn $(I)$ tiếp xúc với các cạnh $BC, CA, AB$ lần lượt tại $D, E, F$. Đường thẳng $EF$ cắt đường tròn $(O)$ tại $P, Q$ và cắt đường thẳng $BC$ tại $N$.

a) Chứng minh rằng $NB.DC = NC.DB$.

b) Gọi $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh bốn điểm $D, M, P, Q$ cùng nằm trên một đường tròn và tâm của đường tròn này là trung điểm của đoạn thẳng nối $I$ với điểm chính giữa cung $BC$ chứa $A$ của đường tròn $(O)$.

**Câu 3.** *(5,0 điểm)* Với mỗi $n$ nguyên dương, kí hiệu $s_n$ là số tập con của tập $\{1, 2, ..., n\}$ mà không chứa hai số tự nhiên nào cách nhau 2 đơn vị.

a) Tính các giá trị $s_1$, $s_2$, $s_3$ và $s_4$.

b) Chứng minh rằng $s_n + s_{n+2} = F_{n+5}, \forall n \geq 1$.

($F_n$ là số hạng thứ $n$ của dãy số Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ \forall n \geq 1$.)

**Câu 4.** *(5,0 điểm)* Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

--------- **HẾT** ---------

*(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)*

| | |
|---|---|
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**<br>**QUẢNG TRỊ**<br><br>**ĐỀ THI CHÍNH THỨC** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12**<br>**VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI QUỐC GIA**<br>**Khóa ngày 05 tháng 11 năm 2021**<br>**MÔN THI: TOÁN (Vòng 2)**<br>*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề* |

**Câu 1.** *(5,0 điểm)* Cho dãy số $(x_n)$ được xác định bởi $x_1 = c$ và $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \forall n \geq 1$.

a) Với $c = \frac{1}{2}$, chứng minh dãy số $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn và hãy tìm giới hạn đó.

b) Với $c > 1$, chứng minh dãy số $(u_n)$ được xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1$$

có giới hạn hữu hạn.

**Câu 2.** *(5,0 điểm)* Với mỗi $n$ nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên $3x^2 - y^2 = 23^n$. Chứng minh rằng:

a) Nếu $n$ là số chẵn thì phương trình trên vô nghiệm.

b) Nếu $n$ là số lẻ thì phương trình trên có nghiệm.

**Câu 3.** *(5,0 điểm)* Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Các điểm $D, E$ thuộc đường thẳng $BC$ sao cho $AD \perp OB$ và $AE \perp OC$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm $AC, AB$; $G$ là giao điểm của $EM$ và $DN$; $S$ là giao điểm của $OG$ và $BC$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác $ACE$ đồng dạng với tam giác $BCA$.

b) Đường thẳng $SA$ là tiếp tuyến của đường tròn $(O)$.

**Câu 4.** *(5,0 điểm)* Trong một giải đấu bóng bàn nam có $n$ $(n \geq 3)$ vận động viên tham gia, hai vận động viên bất kỳ thi đấu với nhau đúng 1 trận (không có kết quả hòa). Kết thúc giải đấu, mỗi vận động viên sẽ viết ra tên những đối thủ thua mình và tên những vận động viên thua một trong các đối thủ đó. Một vận động viên được gọi là *vô địch tương đối* nếu anh ta viết được tên của tất cả $n-1$ vận động viên còn lại. Gọi $S_n$ là số vận động viên vô địch tương đối nhiều nhất có thể.

a) Tính $S_3$, $S_4$.

b) Chứng minh rằng $S_n = n$, với mọi $n \geq 5$.

------------------- **HẾT** -------------------

*(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)*