ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN DIỆN TÍCH THIẾT DIỆN VÀ TỈ SỐ ĐỘ DÀI

HÌNH HỌC 11

PHẦN I - ĐỀ BÀI

HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ SONG SONG

Dạng 1: Tính diện tích thiết diện, đoạn thẳng dựa vào hai ĐT song song

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6$, $CD=8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A. $\frac{31}{7}$. **B.** $\frac{18}{7}$. **C.** $\frac{24}{7}$. **D.** $\frac{15}{7}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $3a$, $SA=SD=3a$, $SB=SC=3a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SD, P là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AP=2a$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $\frac{9a^2\sqrt{139}}{4}$. **B.** $\frac{9a^2\sqrt{139}}{8}$. **C.** $\frac{9a^2\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\frac{9a^2\sqrt{139}}{16}$.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM=C'N=DP=\frac{a}{3}$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng $A'B'$ tại E. Tính độ dài đoạn thẳng $A'E$.

A. $A'E=5a/3$. **B.** $A'E=3a/4$. **C.** $A'E=5a/4$. **D.** $A'E=4a/3$..

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB=8a$, $SA=SB=SC=SD=8a$. Gọi N là trung điểm cạnh SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ABN).

A. $12a^2$. **B.** $6a^2\sqrt{11}$. **C.** $24a^2$. **D.** $12a^2\sqrt{11}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AC,BC,BD. Gọi tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP). Tìm diện tích thiết diện $MNPQ$ theo a.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, biết $AB=a$, $SAD=90°$ và tam giác SAB là tam giác đều. Gọi Dt là đường thẳng qua D và song song với SC, I là giao điểm của Dt với mặt phẳng (SAB). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (AIC) có diện tích là

A. $\frac{a^2\sqrt{5}}{16}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\frac{11a^2}{32}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SAD=90°$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC. Gọi I là giao điểm của Dx và (SAB). Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng của (AIC) và tính diện tích của thiết diện đó

A. $S=\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **B.** $S=\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. **C.** $S=\frac{a^2\sqrt{7}}{6}$. **D.** $S=\frac{a^2\sqrt{7}}{9}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm P sao cho $BP=2PD$. Gọi I là giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP). Tính tỷ số $\frac{IP}{IN}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Dạng 2: Bài toán tỉ số

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành; M là trung điểm của SD, E thuộc cạnh BC sao cho $BE=2EC$, mặt phẳng (AME) cắt SC tại F. Tính tỉ số diện tích 2 tam giác SFD và FCD.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) di động chứa AB và cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Biết K là giao điểm của AN và BM. Tính $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 12. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính $\frac{GA}{GA'}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ΔBCD và ΔACD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2 // (ABD)$. **B.** $G_1G_2 // (ABC)$.

C. BG_1, AG_2 và CD đồng qui. **D.** $G_1G_2=\frac{2}{3}AB$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết mặt phẳng (GJI) cắt SA và SB lần lượt ở E và F; $EF=IJ$. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A. $AB=\frac{1}{3}CD$. **B.** $AB=\frac{3}{2}CD$. **C.** $AB=3CD$. **D.** $AB=\frac{2}{3}CD$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỷ số $\frac{KS}{KD}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của SB và AD. Gọi I là trung điểm của NP và G là giao điểm của SI với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $T = \frac{IS}{IG}$.

A. $T = 2$. **B.** $T = \frac{3}{5}$. **C.** $T = \frac{3}{4}$. **D.** $T = 3$.

Câu 17. Cho hình chóp $SABC$. Bên trong tam giác ABC lấy một điểm O bất kỳ. Từ O dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) theo thứ tự lần lượt tại A', B', C'. Khi đó tổng tỉ số $T = \frac{OA'}{SA} + \frac{OB'}{SB} + \frac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu ?

A. $T = 3$. **B.** $T = \frac{3}{4}$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = \frac{1}{3}$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AB tại điểm I. Tính tỉ số $\frac{BI}{BA}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (IJK). Tính tỉ số $\frac{FA}{FD}$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{11}{5}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2}$. Độ dài đoạn MN thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **D.** $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M là trung điểm của cạnh AC, điểm N thuộc cạnh AD sao cho: $AN = 2ND$, điểm Q thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BQ$. Gọi I là giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD), J là giao điểm của đường thẳng BD và mặt phẳng (MNQ). Khi đó $\frac{JB}{JD} + \frac{JQ}{JI}$ bằng

A. $\frac{13}{20}$. **B.** $\frac{20}{11}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên các đoạn SO, SD sao cho $\frac{SM}{SO} = \frac{SN}{SD} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$. Điểm E là trung điểm của BC. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi $\text{mp}(MNE)$ đi qua trung điểm cạnh SA. Giá trị $m + n$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác lấy một điểm O bất kỳ. Từ O dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng $(SBC),(SCA),(SAB)$ theo thứ tự lần lượt tại A', B', C'. Khi đó tổng tỉ số $T=\dfrac{OA'}{SA}+\dfrac{OB'}{SB}+\dfrac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

A. $T=\dfrac{1}{3}$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=\dfrac{3}{4}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4$, $BC=AD=5$, $AC=BD=6$. M là điểm thay đổi trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với AD, BD, CD tương ứng cắt mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD) tại A', B', C'. Giá trị lớn nhất của $MA'.MB'.MC'$ là

A. $\dfrac{40}{9}$. **B.** $\dfrac{24}{9}$. **C.** $\dfrac{30}{9}$. **D.** $\dfrac{20}{9}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

Dạng 1: Tính diện tích thiết diện

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB=AC=4$, $BAC=30^0$. Mặt phẳng song song vơi (ABC) cắt đoạn thẳng SA tại M sao cho $SM=2MA$. Diện tích thiết diện của với hình chóp $S.ABC$ bằng.

A. $\frac{25}{9}$ **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D. 1.**

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=SB=SC=2a$. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng SB mà $SM=m$ $(0<m<2a)$. Mặt phẳng (α) qua M, song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện có chu vi là:

A. $4a-2m$. **B.** $4a$. **C.** $4a-m$. **D.** $2a+m$.

Câu 27. Bộ $c=-1$, $a=-1$, $b=4$ thỏa $A=a^2+b^2+c^2=18$ nên chọn đáp án **C** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

A. $\frac{3\sqrt{15}a^2}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}a^2}{16}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}a^2}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}a^2}{16}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, hai tam giác SAB, SAD vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua G và song song với SB, AD. Thiết diện tạo bởi $mp(\alpha)$ và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng

A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM=2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **B.** $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **C.** $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4a^2}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a$, $CD=b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB\perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) biết $IM=\frac{1}{3}IJ$.

A. ab. **B.** $\frac{ab}{9}$. **C.** $2ab$. **D.** $\frac{2ab}{9}$.

Câu 32. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. Gọi P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP=2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là:

A. $S=\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. **B.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **D.** $S=\dfrac{5a^2\sqrt{147}}{2}$.

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho $AJ=2JD$. (P) là mặt phẳng chứa IJ và song song với AB. Tính diện tích thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{3a^2\sqrt{51}}{144}$. **B.** $\dfrac{3a^2\sqrt{31}}{144}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{31}}{144}$. **D.** $\dfrac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD và $AB=a, CD=b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, điểm M thuộc đoạn IJ sao cho $IM=\dfrac{1}{3}IJ$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là

A. $\dfrac{2ab}{9}$. **B.** $\dfrac{4ab}{9}$. **C.** $\dfrac{2ab}{3}$. **D.** $\dfrac{3ab}{2}$.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a$, $CD=3a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB\perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) biết $IM=\dfrac{1}{3}IJ$.

A. $2a^2$. **B.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **C.** $4a^2$. **D.** $\dfrac{2a^2}{3}$.

Dạng 2: Bài toán tỉ số

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP). Tính $\dfrac{SH}{SC}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2 \,//\, (ABD)$. **B.** $G_1G_2 \,//\, (ABC)$.

C. BG_1, AG_2 và CD đồng qui. **D.** $G_1G_2=\dfrac{2}{3}AB$.

Câu 38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tại N. Tính tỉ số $k=\dfrac{MN}{A'C'}$.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với SB. Mặt phẳng (α) cắt SD tại E. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $SE=\dfrac{1}{3}ED$. **B.** $SE=\dfrac{1}{2}SD$. **C.** $SE=\dfrac{1}{3}SD$. **D.** $SE=2SD$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC. Gọi giao điểm của (MNP) với SA là K. Tỉ số $\dfrac{KS}{KA}$ là

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Chọn khẳng định sai?

A. $MN \,//\, (ABD)$. **B.** $MN = \frac{2}{3}AB$.

C. BM, AN, CD đồng quy. **D.** $MN \,//\, (ABC)$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD và mặt phẳng (OMG). Tính tỉ số $\frac{JA}{JD}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA' = 3$, $BB' = 5$, $CC' = 4$. Tính DD'.

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a, tam giác ACD vuông. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Biết rằng IJ song song với (BCD). Tính diện tích tam giác ACD.

A. $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $A'\dot{A} = \frac{1}{2}A'\dot{S}$. Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} - \frac{SC}{SC'}$.

A. $T = \frac{3}{2}$. **B.** $T = \frac{1}{3}$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = \frac{1}{2}$.

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N lần lượt là các điểm trên hai cạnh AB, CD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k > 0$ và (α) là mặt phẳng qua MN và song song với cạnh BC, gọi P là giao điểm của (α) với cạnh AC. Tìm k biết tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện của tứ diện được cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{1}{3}$.

A. $k \in \left(\frac{3}{10}; \frac{2}{5}\right)$. **B.** $k \in \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. **C.** $k \in \left(\frac{1}{5}; \frac{3}{10}\right)$. **D.** $k \in \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SD, N là trọng tâm tam giác SAB. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (SBC) tại điểm I. Tính tỷ số $\frac{IN}{IM}$.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 48. Cho t diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD, I là một điểm thuộc cạnh AD sao cho $IA=3ID$; (α) là mặt phẳng qua M, (α) song song với CI và BD; (α) cắt AD, AB, BC lần lượt tại N,P,Q. Gọi R là giao điểm của MP và NQ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\dfrac{RP}{RM}=\dfrac{7}{4}$. **B.** $\dfrac{PN}{QM}=\dfrac{7}{4}$. **C.** $\dfrac{RN}{RQ}=\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{PN}{BD}=\dfrac{7}{8}$.

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $B'M=\dfrac{2}{3}B'C'$, N là trung điểm cạnh CC'. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ANMA'$ và K thuộc cạnh BC sao cho $KG\parallel(ABB'A')$. Biết $BK=\dfrac{a}{b}BC$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a.b$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 84.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

★ Dạng 1: Tính diện tích thiết diện cắt bởi MP song song với MP khác

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Câu 51. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho $AM=2MB$. Tính diện tích thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AC và CD.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA; (α) là mặt phẳng qua M và song song với (ABC). (α) lần lượt cắt các cạnh SB, SC tại N và P. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC và MNP. Tính $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 53. Cho hình chóp $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng x. Gọi I là trung điểm AB, qua I dựng $mp(P)$ song song với (BCD). Diện tích thiết diện của hình chóp và $mp(P)$ là

A. $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{x^2\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{x^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{x^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 54. Cho tứ diện có các cạnh bằng $4a$. Lấy M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM=a$. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD).

A. $3a^2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 55. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SBD) cắt hình chóp theo thiết diện có diện tích bằng

A. $\frac{a^2}{6}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang; $AB=2CD$, $AB\,//\,CD$. M là trung điểm của cạnh AD; mặt phẳng (α) qua M và song song với mp(SAB) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là hình (H). Biết $S_{(H)}=xS_{\Delta SAB}$. Giá trị của x là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{27}{64}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{9}{16}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=3$, hai đáy $AB=8$, $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều. Gọi M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM = x, x \in (0;a)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SAB) lần lượt cắt các cạnh CB, CS, SD tại N, P, Q. Khi diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$ thì x bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi Mlà trung điểm SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua Mvà vuông góc với AC.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $\frac{a^2}{8}$. **C.** a^2. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6, CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3\,SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4, BAC = 30^0$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$bằng bao nhiêu?

A. $\frac{25}{9}$. **B.** 1. **C.** $\frac{14}{9}$ **D.** $\frac{16}{9}$.

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$, biết tam giác BCD có diện tích bằng 16. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của AB và song song với mặt phẳng (BCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích bằng

A. 12. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 64. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 4. Điểm M là trung điểm của đoạn BC, điểm E nằm trên đoạn BM sao cho E không trùng B, M. Mặt phẳng (P) đi qua E và song song với mặt phẳng (AMD). Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Tính độ dài đoạn BE bằng ?

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}; SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{4a^2}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Câu 66. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M,N,P theo thứ tự đó thuộc các cạnh $BB', C'D', DA$ sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $S = \frac{17\sqrt{3}a^2}{18}$. **B.** $S = \frac{5\sqrt{3}a^2}{18}$. **C.** $S = \frac{13\sqrt{3}a^2}{18}$. **D.** $S = \frac{11\sqrt{3}a^2}{18}$.

Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = \sqrt{5}$, hai đáy $AB = 6, CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3\,SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{9}$.

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = 7a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G, I, J thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, SAD và trung điểm của CD. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (GIJ) bằng

A. $\frac{93a^2}{40}$. **B.** $\frac{23a^2}{60}$. **C.** $\frac{31\sqrt{33}a^2}{45}$. **D.** $\frac{3\sqrt{33}a^2}{8}$.

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{18}$. **B.** $\frac{5a^2\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 70. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD'). Gọi $S = S_{\Delta ACD'}$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình hộp có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu theo diện tích tam giác ACD'.

A. $\frac{S}{2}$. **B.** S. **C.** $\frac{3S}{2}$. **D.** $2S$.

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Trên cạnh BC, CD lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{2}{3}$. Trên trung tuyến AH của tam giác ABD lấy điểm P sao cho $\frac{PA}{PH} = \frac{4}{5}$. Diện tích thiết diện khi cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) là

A. $\frac{5a^2\sqrt{11}}{12}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{11}}{12}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{12}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

★ Dạng 1: Thiết diện, tính diện tích thiết diện

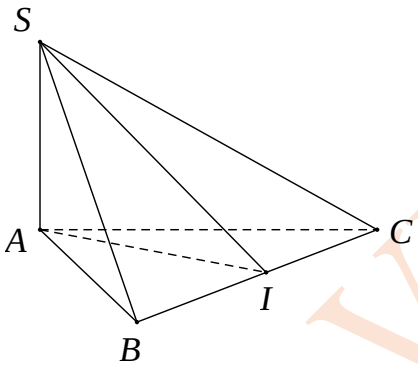
Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a, SA=a\sqrt{3}$ và $SA\perp(ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM=x(0<x<a)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB. Giả sử thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α) là tứ giác $MNPQ$. Tìm x để thiết diện $MNPQ$ lớn nhất.

A. $x=\frac{a}{2}$. **B.** $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $x=\frac{3a}{2}$. **D.** $x=a$.

Câu 73. Cho hình chóp tam giác đều, các cạnh bên có độ dài bằng $a\sqrt{3}$ và tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích S của đáy hình chóp là

A. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $S=\frac{27a^2\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S=\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. **D.** $S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA=a$, $SA\perp ABC$, I là trung điểm của BC. Gọi P là mặt phẳng qua A và vuông góc với SI.



Diện tích thiết diện của mặt phẳng P và hình chóp $S.ABC$ được tính theo a bằng

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{12}}{7}$. **D.** $\frac{2a^2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA=4a$. Biết đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=3a, AD=a$. Gọi M trung điểm cạnh AB và (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là đa giác có diện tích bằng:

A. $\frac{5a^2}{2}$. **B.** $\frac{7a^2}{2}$. **C.** $7a^2$. **D.** $5a^2$.

Câu 76. Cho tứ diện đều $ABCD$. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ và mặt phẳng trung trực của cạnh BC là

A. hình thang. **B.** tam giác vuông. **C.** hình bình hành. **D.** tam giác cân.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA\perp(ABCD)$, $SA=AB=a$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua SA và vuông góc với (SBD). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (Q) là

A. tam giác vuông. **B.** tam giác đều.
C. tam giác vuông cân. **D.** hình bình hành.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 78. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6 và hình bình hành $CDIS$ không nằm trên cùng một mặt phẳng. Biết tam giác SAC cân tại S, $SB=12$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ACI) có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $18\sqrt{2}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Câu 79. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM=2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (P).

A. $\dfrac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB=6, CD=3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM=2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tai M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{a^2}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2}{4}$.

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng:

A. $\dfrac{11a^2\sqrt{3}}{64}$. **B.** $\dfrac{33a^2\sqrt{3}}{64}$. **C.** $\dfrac{33a^2}{64}$. **D.** $\dfrac{33a^2}{16}$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=8$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC-x.BC$ $0<x<1$. Mặt phẳng qua M, song song với AB, CD và lần lượt cắt DB, AD, AC tại N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu?

A. 32. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 16.

Câu 86. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$; $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{4a^2}{3}$ **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $a^2\sqrt{2}$

Câu 88. Cho tứ diện $S.ABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên AB sao cho $AM=b\ (0<b<a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $S.ABC$ có diện tích bằng?

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}(a-b)^2$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$ **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}(a-b)^2$

Câu 89. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN}=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **B.** $S_{\Delta AMN}=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

C. $S_{\Delta AMN}=\dfrac{4a^2\sqrt{21}}{49}$. **D.** $S_{\Delta AMN}=\dfrac{a^2\sqrt{21}}{7}$.

Câu 90. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4$, $CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng P đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

A. 5. **B.** 6. **C.** $\dfrac{17}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

Câu 91. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN}=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$ **B.** $\boldsymbol{S_{\Delta AMN}=\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{7}}$

C. $\boldsymbol{S_{\Delta AMN}=\dfrac{4a^2\sqrt{21}}{49}}$ **D.** $S_{\Delta AMN}=\dfrac{a^2\sqrt{21}}{7}$

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD=8$, đáy nhỏ $BC=6$, SA vuông góc với đáy, $SA=6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng

A. 20. **B.** 16. **C.** 30. **D.** 15.

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{20}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{5}$.

Câu 94. Cho tứ diện đều $ABCD$, mặt phẳng (α) qua trung điểm của cạnh AB, song song AC và BD cắt tứ diện theo thiết diện là

A. Hình tam giác đều. **B.** Hình vuông.

C. Hình tam giác vuông cân. **D.** Hình thang cân.

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45^0. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $ABC=60^0$, $SC=a$, $SC\perp(ABC)$. Kẻ $CD\perp SA$ tại D. Thiết diện qua $M\in AD$ và vuông góc với AD là

A. Tam giá **B.** Hình bình hành.
C. Hình vuông. **D.** Hình thang vuông.

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=2a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD, mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{3\sqrt{5}a^2}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{15}a^2}{16}$. **C.** $\frac{15\sqrt{3}a^2}{16}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}a^2}{16}$.

Câu 98. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}, SA=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, α là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng α.

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4a^2}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB=a$, $BC=2a$. Điểm H thuộc cạnh AC sao cho $CH=\frac{1}{3}CA$, SH là đường cao hình chóp $S.ABC$ và $SH=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I là trung điểm BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

A. $\frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{6}$.

Câu 100. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$ và $SA=2a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α).

A. $\frac{3a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{10}$.

Câu 101. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC(0<x<1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 102. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM=2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **C.** 48. **D.** $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, hai tam giác SAB và SAD vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua G và song song với SB và AD. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng

A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD, AB=2a)$, $BC=CD=DA=a$, điểm S cách đều 4 đỉnh A,B,C,D đồng thời tam giác SAB đều. Gọi M,N và G lần lượt là trung điểm của AD,CB và trọng tâm tam giác SAB. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(MNG) bằng

A. $\frac{9a^2}{16}$. **B.** $\frac{15a^2\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{15a^2\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{85a^2\sqrt{3}}{144}$.

Câu 105. Cho tứ diện $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại B, $AB=a$, $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. M là điểm tùy ý trên cạnh AB sao cho $AM=x$ $(0<x<a)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB. Diện tích thiết diện tạo bởi tứ diện $S.ABC$ và mặt phẳng (α) có giá trị lớn nhất khi x bằng

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 106. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, đường cao $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AH của tam giác ABC. Xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc với AH. Đặt $AM=x$. Tìm x để thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x=\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Câu 107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC và cắt SC tại C', cắt SB, SD lần lượt tại B' và D'. Tính diện tích thiết diện của (α) và hình chóp.

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 108. Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM=b$ $(0<b<a)$. (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG

★ Dạng 1: Thiết diện, diện tích thiết diện

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB vuông góc với (SCD), (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang vuông.
C. Hình thang không vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 110. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = 4a$, $AA' = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Diện tích của thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng $(MB'C')$ bằng

A. $2\sqrt{10}\,a^2$. **B.** $3\sqrt{10}\,a^2$. **C.** $4\sqrt{10}\,a^2$. **D.** $6\sqrt{10}\,a^2$.

Câu 111. Cho tứ diện $ABCD$, biết tam giác BCD có diện tích bằng 16. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của AB và song song mới mặt phẳng (BCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích bằng

A. 12. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 112. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. **B.** 40. **C.** $36\sqrt{3}$. **D.** 36.

Câu 113. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(P).

A. $\dfrac{\sqrt{5}a^2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}a^2}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}a^2}{\sqrt{3}}$.

Câu 114. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AB. Tính diện tích thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. **D.** $\frac{9}{8}a^2$.

Câu 115. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng α đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để α cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Câu 116. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2a$. M là trung điểm của AB. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng $(A'C'M)$. Diện tích của thiết diện là

A. $3\sqrt{7}a^2$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{7}a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $6\sqrt{2}a^2$.

Câu 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng α đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi α với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Câu 118. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Diện tích thiết diện là

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=a^2$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 119. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHẦN II - HƯỚNG DẪN GIẢI

HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ SONG SONG

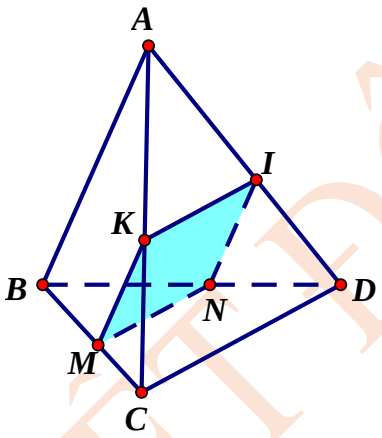
★ Dạng 1: Tính diện tích thiết diện, đoạn thẳng dựa vào hai ĐT song song

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6$, $CD=8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng

A. $\frac{31}{7}$. **B.** $\frac{18}{7}$. **C.** $\frac{24}{7}$. **D.** $\frac{15}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử một mặt phẳng song song với AB và CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình thoi $MNIK$ như hình vẽ trên. Khi đó ta có: $\begin{cases} MK // AB // IN \\ MN // CD // IK \\ MK = KI \end{cases}$.

Cách 1: Theo định lí Ta – lét ta có: $\begin{cases} \frac{MK}{AB}=\frac{CK}{AC} \\ \frac{KI}{CD}=\frac{AK}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{MK}{6}=\frac{AC-AK}{AC} \\ \frac{KI}{8}=\frac{AK}{AC} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{MK}{6}=1-\frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{MK}{6}=1-\frac{KI}{8} \Rightarrow \frac{MK}{6}=1-\frac{MK}{8} \Leftrightarrow \frac{7}{24}MK=1 \Leftrightarrow MK=\frac{24}{7}$.

Vậy hình thoi có cạnh bằng $\frac{24}{7}$.

Cách 2: Theo định lí Ta – lét ta có: $\begin{cases} \frac{MK}{AB}=\frac{CK}{AC} \\ \frac{KI}{CD}=\frac{AK}{AC} \end{cases} \Rightarrow \frac{MK}{AB}+\frac{MK}{CD}=\frac{CK}{AC}+\frac{AK}{AC}$

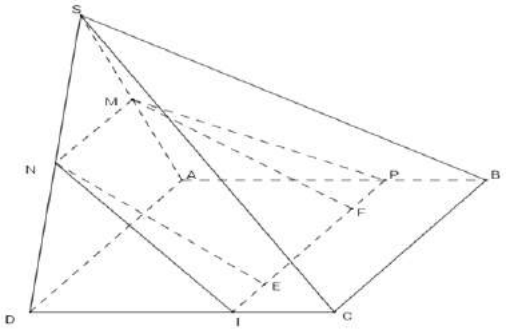
$\Rightarrow \frac{MK}{6}+\frac{MK}{8}=\frac{AK+KC}{AC} \Rightarrow \frac{7MK}{24}=\frac{AC}{AC}=1 \Rightarrow MK=\frac{24}{7}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $3a$, $SA=SD=3a$, $SB=SC=3a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SD, P là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AP=2a$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $\frac{9a^2\sqrt{139}}{4}$. **B.** $\frac{9a^2\sqrt{139}}{8}$. **C.** $\frac{9a^2\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\frac{9a^2\sqrt{139}}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Do $MN//AD \Rightarrow MN//BC$. Vậy (MNP) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến đi qua P, song song BC và cắt DC tại điểm I. Thiết diện của khối chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP) chính là hình thang $MNIP$.

Do $\Delta NDI = \Delta MAP$ nên $MP = NI$. Từ đó suy ra $MNIP$ là hình thang cân.

Trong tam giác SAB, ta có

$$\cos SAB = \frac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2.SA.AB} = \frac{9a^2 + 9a^2 - 27a^2}{2.3a.3a} = -\frac{9a^2}{18a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Trong tam giác, MAP, ta có

$$MP^2 = MA^2 + AP^2 - 2MA.AP.\cos MAP = \frac{9a^2}{4} + 4a^2 + \frac{3a}{2}\cdot 2a = \frac{37a^2}{4} \Rightarrow MP = \frac{a\sqrt{37}}{2}.$$

Từ M kẻ $MF \perp PI$, từ N kẻ $NE \perp PI$. Dễ thấy, tứ giác $MNEF$ là hình chữ nhật và từ đó suy ra $MN = EF = \frac{3a}{2} \Rightarrow PF = EI = \frac{3a}{4}$.

Xét tam giác vuông MFP, ta có $MF = \sqrt{MP^2 - FP^2} = \sqrt{\frac{37a^2}{4} - \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{139}}{4}$.

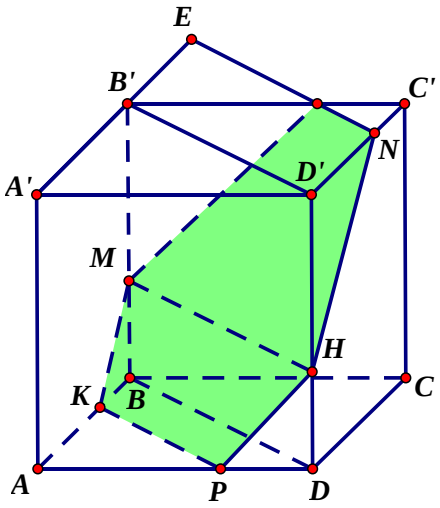
Ta có $S_{MNIP} = \frac{(MN + IP).MF}{2} = \frac{\left(\frac{3a}{2} + 3a\right)\cdot\frac{a\sqrt{139}}{4}}{2} = \frac{9a^2\sqrt{139}}{4}$.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng $A'B'$ tại E. Tính độ dài đoạn thẳng $A'E$.

A. $A'E = 5a/3$. **B.** $A'E = 3a/4$. **C.** $A'E = 5a/4$. **D.** $A'E = 4a/3$..

Lời giải

Chọn A



Lấy H, K thuộc đoạn DD', AB sao cho $DH = BK = \frac{a}{3}$.

Nhận xét $KP//BD$ và $MH//BD$ nên $KP// MH$, suy ra 4 điểm M,K,P,H đồng phẳng.

Tương tự: $MK//AB'$, $DC'//AB'$; $DC'//HN$ nên $MK//HN$ suy ra 4 điểm M,K,H,N đồng phẳng.

Vậy mặt phẳng (MNP) chứa các điểm H, K đồng thời mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (BDC'). Suy ra mặt phẳng (MNP) song song với $B'D'$.

Xét mặt phẳng $(A'B'C'D')$, qua N kẻ $NE//B'D'$ cắt $A'B'$ tại E là điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

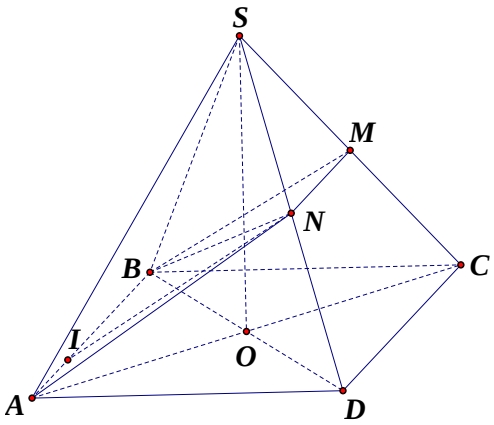
Ta có $B'EDN$ là hình bình hành nên $B'E = \frac{2a}{3}$ suy ra $A'E = A'B' + B'E = \frac{5a}{3}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $AB = 8a$, $SA = SB = SC = SD = 8a$. Gọi N là trung điểm cạnh SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ABN).

A. $12a^2$. **B.** $6a^2\sqrt{11}$. **C.** $24a^2$. **D.** $12a^2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng (ABN) chứa $AB//CD$ nên cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến $NM//CD$ và M cũng là trung điểm của SC. Suy ra thiết diện cần tìm là hình thang cân $ABMN$.

Hạ $NI \perp AB$. Ta có $NI^2 = AN^2 - AI^2$ với $AN = \frac{8a\sqrt{3}}{2} = 4a\sqrt{3}$.

$2AI = AB - MN = 8a - 4a = 4a \Rightarrow AI = 2a$. Từ đó suy ra $NI = 2a\sqrt{11}$.

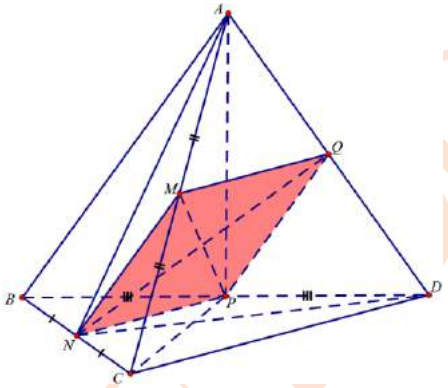
Vậy $S_{ABMN} = \frac{1}{2}(AB + MN).NI = \frac{1}{2}(8a + 4a)2a\sqrt{11} = 12a^2\sqrt{11}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD. Gọi tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP). Tìm diện tích thiết diện $MNPQ$ theo a.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MN, NP lần lượt là đường trung bình của ΔABC và $\Delta BCD \Rightarrow \begin{cases} MN//AB \\ NP//CD \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} MN//AB \\ AB \subset (ABD) \\ MN \subset (MNP) \\ P \in (ABD) \cap (MNP) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABD) \cap (MNP) = Px, Px//MN, Px//AB$. Trong (ABD), $Px \cap AD = Q$. Trong ΔABD, vì P là trung điểm của BD và $PQ//AB$ (do $Px//AB$) nên Q là trung điểm của AD do đó PQ là đường trung bình của ΔABD. Vậy $MN//PQ$ và $MN = PQ$ nên $MNPQ$ là hình bình hành. Mà $MN = NP = \frac{a}{2}\left(= \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}\right)$ nên $MNPQ$ là hình thoi.

Ta có

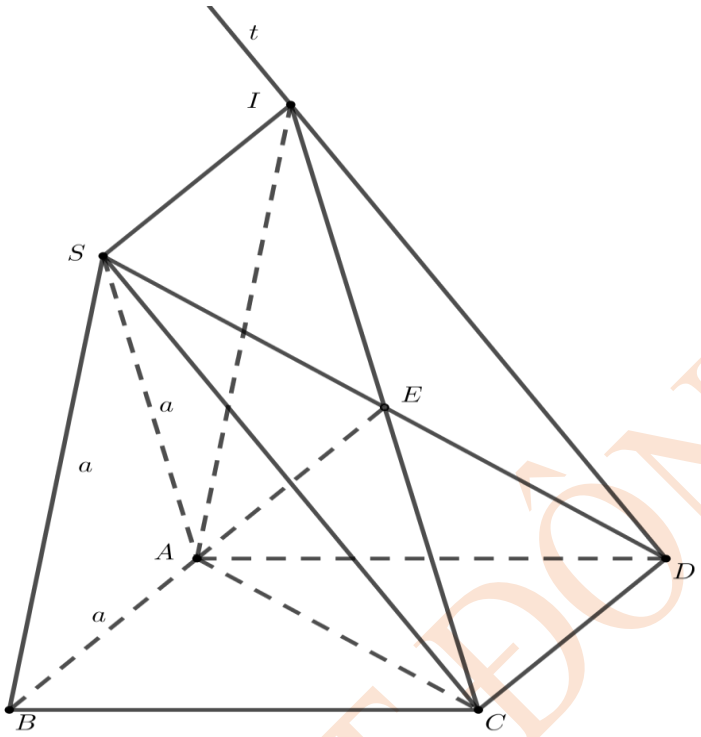
$AC = AD = a; NA = ND = PA = PC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta AND = \Delta APC\,(c-c-c) \Rightarrow MP = NQ$. Vậy $MNPQ$ là hình vuông. Do đó $S_{MNPQ} = MN^2 = \frac{a^2}{4}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, biết $AB = a$, $SAD = 90°$ và tam giác SAB là tam giác đều. Gọi Dt là đường thẳng qua D và song song với SC, I là giao điểm của Dt với mặt phẳng (SAB). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (AIC) có diện tích là

A. $\frac{a^2\sqrt{5}}{16}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **D.** $\frac{11a^2}{32}$.

Lời giải

Chọn C



Do $Dt//SC$ nên hai đường thẳng này cùng nằm trong mặt phẳng (SCD).

Lại có, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có D là điểm chung, $AB//CD$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi qua S và song song với AB.

Mà I là giao điểm của Dt với mặt phẳng (SAB) nên I thuộc giao tuyến này.

Gọi E là giao điểm của SD và IC. Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AIC) là tam giác ACE.

Tứ giác $SIDC$ có: $\begin{cases} DI//SC \\ CD//SI \end{cases}$ nên nó là hình bình hành $\Rightarrow SI=CD \Rightarrow SI=AB=a$ và E là trung điểm của SD, CI.

Mặt khác, $AC=SD=a\sqrt{2} \Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác IAC có : $CI^2=2\left(AC^2+AI^2\right)-4AE^2=4a^2 \Rightarrow CI=2a \Rightarrow CE=a$.

Ta có : $\cos CAE=\dfrac{AE^2+AC^2-CE^2}{2AC.AE}=\dfrac{\dfrac{a^2}{2}+2a^2-a^2}{2a^2}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \sin CAE=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

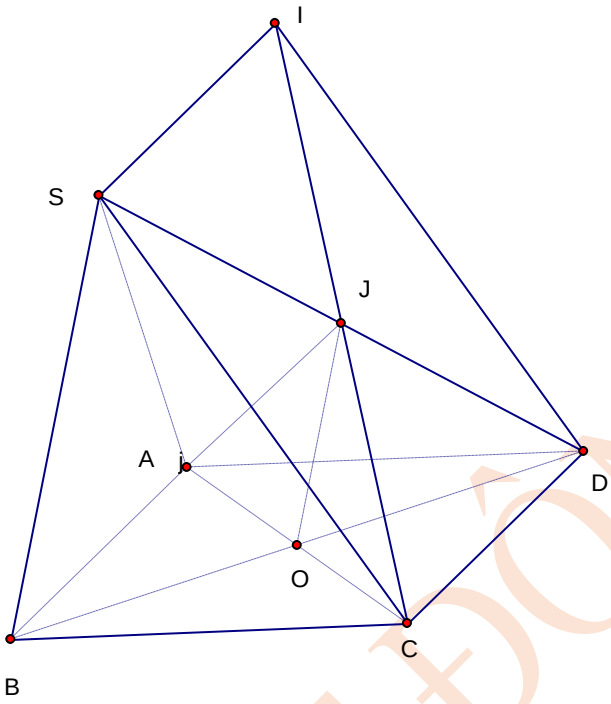
Diện tích thiết diện là : $S=\dfrac{1}{2}AC.AE.\sin CAE=\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$ (đvdt).

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều, $SAD=90°$. Gọi Dx là đường thẳng qua D và song song với SC. Gọi I là giao điểm của Dx và (SAB). Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng của (AIC) và tính diện tích của thiết diện đó

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{8}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{6}$. **D.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{7}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



+ Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S, song song với AB và CD, đường thẳng này cắt Dx tại I thì $I = Dx \cap (SAB)$.

+ Gọi J là giao điểm của SD và CI, ta có thiết diện là tam giác ACJ.

+ Dễ thấy JO là đường trung bình của tam giác $SBD \Rightarrow JO = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$.

+ Tam giác SAD vuông tại A, nên $AJ = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = a\sqrt{2}$.

+ Xét tam giác ACJ có JO là đường trung tuyến ta có

$$JO^2 = \frac{JA^2 + JC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{\frac{a^2}{2} + JC^2}{2} - \frac{2a^2}{4} \Rightarrow JC = a.$$

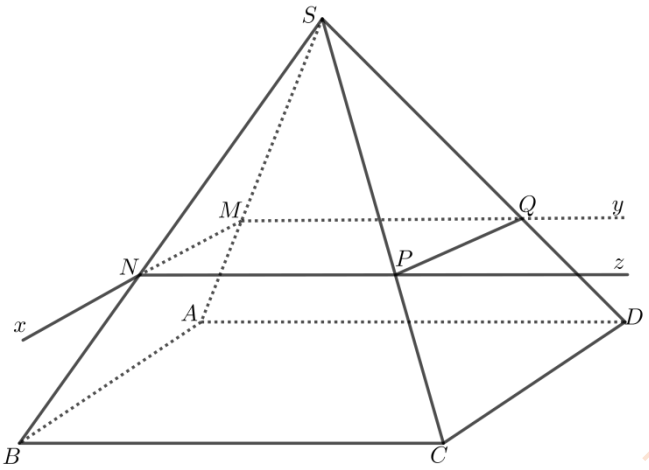
+Áp dụng CT Hê rông, diện tích thiết diện là $S = \sqrt{p(p-AC)(p-JA)(p-JC)} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}$.

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Có: $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ (\alpha) \parallel AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = Mx \parallel AB$. Trong mặt phẳng (SAB) gọi N là giao điểm của Mx và $SB \Rightarrow MN \parallel AB$ và $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}AB = \frac{20}{3}$.

Có: $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = My \parallel AD$. Trong mặt phẳng (SAD) gọi Q là giao điểm của My và $SD \Rightarrow MQ \parallel AD$ và $\frac{MQ}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MQ = \frac{2}{3}AD = \frac{20}{3}$.

Có: $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) \parallel BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = Nz \parallel BC$. Trong mặt phẳng (SBC) gọi P là giao điểm của Nz và $SC \Rightarrow NP \parallel BC$ và $\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow NP = \frac{2}{3}BC = \frac{20}{3}$.

Ta có: $(\alpha) \cap (SCD) = PQ$. Vì $\frac{SQ}{SD} = \frac{SP}{SC} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ \parallel CD$ và $PQ = \frac{2}{3}CD = \frac{20}{3}$.

Vậy mặt phẳng (α) cắt các mặt $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$ theo các giao tuyến MN, NP, PQ và QM, do đó thiết diện mà (α) cắt hình chóp đã cho là tứ giác $MNPQ$.

Theo cách dựng trên thì ta có tứ giác $MNPQ$ là hình thoi. Mặt khác vì $AB \perp BC$ nên $MN \perp NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình vuông có cạnh bằng $\frac{20}{3}$ nên diện tích của $MNPQ$ là:

$S_{MNPQ} = MN^2 = \frac{400}{9}$.

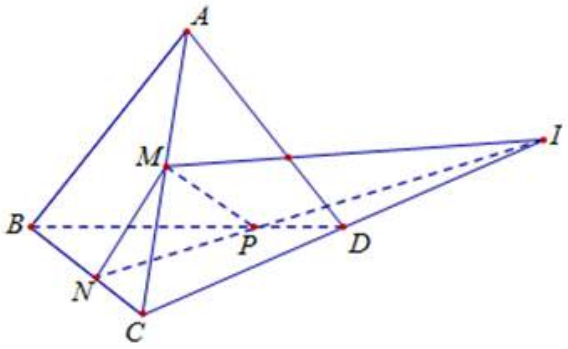
★ Dạng 2: Bài toán tỉ số

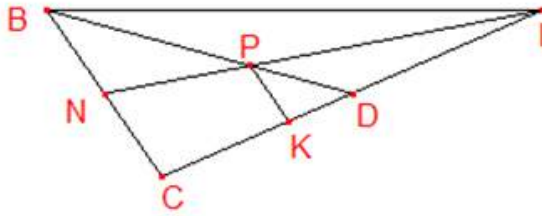
Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Gọi I là giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP). Tính tỷ số $\frac{IP}{IN}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B





Gọi $I = NP \cap CD$. Vì $\begin{cases} I \in NP \subset (MNP) \\ I \in CD \end{cases} \Rightarrow I = CD \cap (MNP)$.

Trong tam giác BCD kẻ $PK // NC,\ K \in IC$.

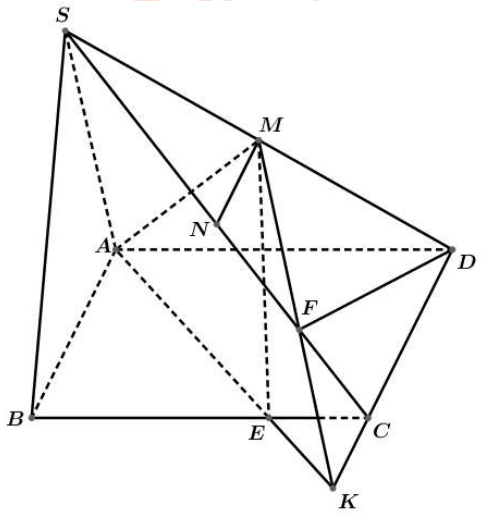
Ta có $\dfrac{PK}{BC} = \dfrac{DP}{DB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{PK}{NC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{IP}{IN} = \dfrac{PK}{NC} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành; M là trung điểm của SD, E thuộc cạnh BC sao cho $BE = 2EC$, mặt phẳng (AME) cắt SC tại F. Tính tỉ số diện tích 2 tam giác SFD và FCD.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi K là giao điểm của AE và CD, trong mặt phẳng (SCD) ta có $F = MK \cap SC$.

Khi đó: $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{CK}{AB} = \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{1}{2}$.

Gọi N là trung điểm SC, ta có: $\dfrac{CF}{FN} = \dfrac{CK}{MN} = 1$ suy ra F là trung điểm NC.

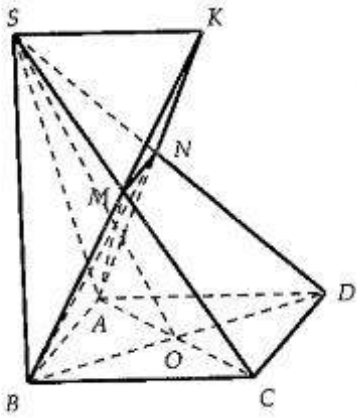
Vậy $\dfrac{S_{SFD}}{S_{FCD}} = \dfrac{SF}{FC} = 3$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) di động chứa AB và cắt SC, SD lần lượt tại M, N. Biết K là giao điểm của AN và BM. Tính $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(SCD)=MN\\ AB\subset(\alpha)\\ CD\subset(SCD)\\ AB\,//\,CD\end{array}\right\}\Rightarrow MN\,//\,AB.$$

Do $MN\,//\,AB$ nên $\frac{AB}{MN}=\frac{BK}{MK}$ (1).

$$\left.\begin{array}{l}SK=(SAN)\cap(SBM)\\ AD\subset(SAN)\\ BC\subset(SBM)\\ AD\,//\,BC\end{array}\right\}\Rightarrow SK\,//\,AD\,//\,BC.$$

Do $SK\,//\,BC$ nên $\frac{BC}{SK}=\frac{MB}{MK}$ (2).

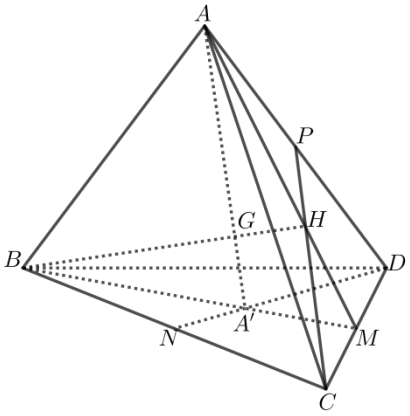
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AB}{MN}-\frac{BC}{SK}=\frac{BK}{MK}-\frac{MB}{MK}=\frac{MK}{MK}=1.$

Câu 12. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính $\frac{GA}{GA'}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của CD,BC và AD ; H là trọng tâm của tam giác ACD.

Gọi G là giao điểm của AA' và BH. Suy ra G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

Xét ΔMAB ta có $\frac{MH}{MA}=\frac{MA'}{MB}=\frac{1}{3}\Rightarrow A'H\,||\,AB\Rightarrow\frac{A'H}{AB}=\frac{1}{3}$.

Theo Thalets ta có : $\frac{A'H}{AB}=\frac{A'G}{AG}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{GA}{GA'}=3$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ΔBCD và ΔACD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2//(ABD)$.

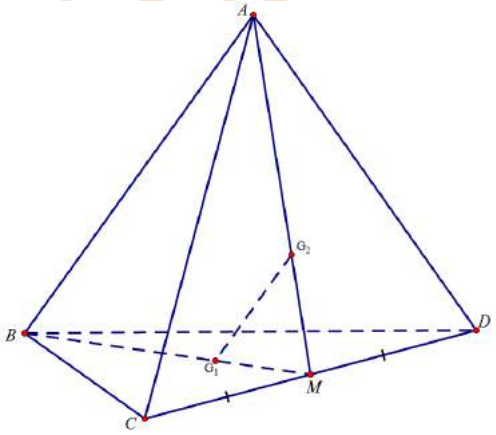
B. $G_1G_2//(ABC)$.

C. BG_1,AG_2 và CD đồng qui.

D. $G_1G_2=\frac{2}{3}AB$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có B,G_1,M thẳng hàng và A,G_2,M thẳng hàng.

Trong (ABM), ta có $\frac{MG_1}{MB}=\frac{1}{3}$ (G_1 là trọng tâm của các tam giác ΔBCD) và $\frac{MG_2}{MA}=\frac{1}{3}$ (G_2 là trọng tâm của các tam giác ΔACD) nên $\frac{MG_1}{MB}=\frac{MG_2}{MA}\Rightarrow G_1G_2//AB$ (Thalet đảo trong ΔABM)

$\Rightarrow\begin{cases}G_1G_2//(ABD)\\G_1G_2//(ABC)\end{cases}$ nên phương án A và B đúng. Đồng thời theo định lý Thalet ta có $\frac{G_1G_2}{AB}=\frac{MG_2}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow G_1G_2=\frac{1}{3}AB$ nên phương án D sai.

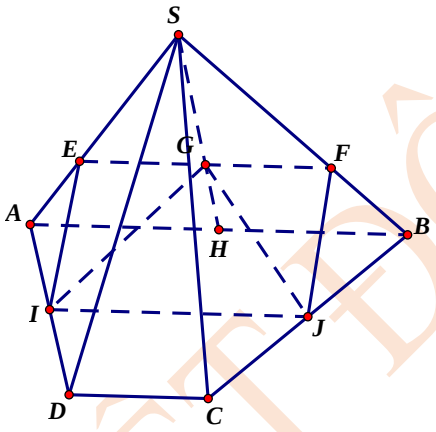
Rõ ràng BG_1, AG_2 và CD đồng qui tại M nên phương án C đúng.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết mặt phẳng (GJI) cắt SA và SB lần lượt ở E và F; $EF = IJ$. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A. $AB = \frac{1}{3}CD$. **B.** $AB = \frac{3}{2}CD$. **C.** $AB = 3CD$. **D.** $AB = \frac{2}{3}CD$.

Lời giải

Chọn C



Ta có hai mặt phẳng (GJI) và (SAB) có điểm chung là G.

$AB // JI$; $AB \subset (SAB)$; $JI \subset (GJI)$; $(GJI) \cap (SAB) = EF$

$\Rightarrow EF // AB$ và EF đi qua trọng tâm G.

Vì G là trọng tâm tam giác $SAB \Leftrightarrow SG = \frac{2}{3}GH \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}AB$.

Vì JI là đường trung bình hình thang $ABCD$ nên $IJ = \frac{AB + CD}{2}$.

Mà $EF = IJ \Rightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{AB + CD}{2}$

$\Leftrightarrow 4AB = 3AB + 3CD$

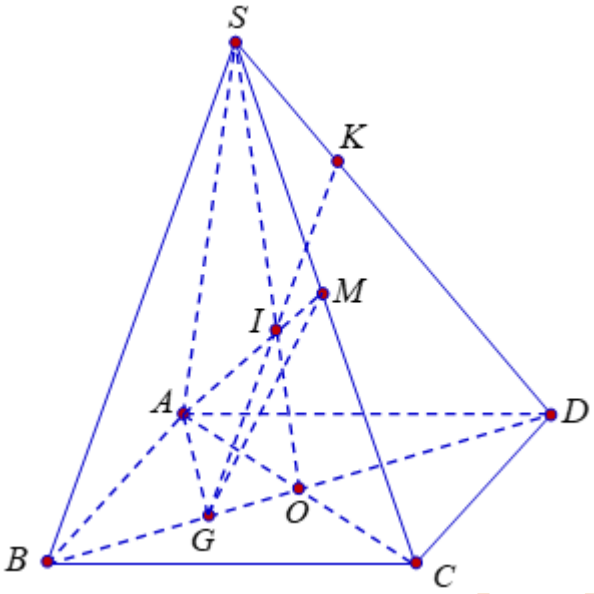
$\Leftrightarrow AB = 3CD$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm SC. Gọi K là giao điểm của SD với mặt phẳng (AGM). Tính tỷ số $\frac{KS}{KD}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn A



Cách 1: Gọi $O=AC\cap BD$, $I=AM\cap SO$.

Trong mặt phẳng (SBD), kéo dài GI cắt SD tại $K\Rightarrow K=SD\cap(AMG)$.

Trong tam giác SAC, có SO, AM là hai đường trung tuyến. Suy ra I là trọng tâm tam giác $SAC\Rightarrow\dfrac{OI}{OS}=\dfrac{1}{3}$, ta lại có $\dfrac{OG}{OB}=\dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow\dfrac{OI}{OS}=\dfrac{OG}{OB}\Rightarrow GI\ //\ SB\Rightarrow GK\ //\ SB\Rightarrow\dfrac{KD}{KS}=\dfrac{GD}{GB}$.

Ta có $DO=BO=3GO\Rightarrow GD=4GO$, $GB=2GO$.

Vậy $\dfrac{KD}{KS}=\dfrac{GD}{GB}=\dfrac{4GO}{2GO}=2\Rightarrow\dfrac{KS}{KD}=\dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Trong tam giác SAC, vì $I=AM\cap SO$ nên I là trọng tâm $\Rightarrow\dfrac{SI}{OI}=2$.

Áp dụng định lí Mê lê na uýt trong tam giác SOD ta có

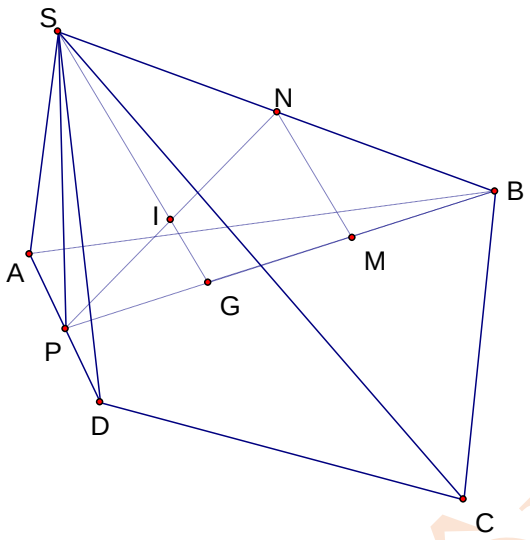
$\dfrac{IS}{IO}.\dfrac{GO}{GD}.\dfrac{KD}{KS}=1\Leftrightarrow 2.\dfrac{1}{4}.\dfrac{KD}{KS}=1\Rightarrow\dfrac{KS}{KD}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi N,P lần lượt là trung điểm của SB và AD. Gọi I là trung điểm của NP và G là giao điểm của SI với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $T=\dfrac{IS}{IG}$.

A. $T=2$. **B.** $T=\dfrac{3}{5}$. **C.** $T=\dfrac{3}{4}$. **D.** $T=3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BG, ta có MN là đường trung bình của tam giác SGB

$\Rightarrow \begin{cases} MN//IG & (1) \\ SG = 2MN & (2) \end{cases}$.

Mà I là trung điểm PN nên ta có IG là đường trung bình của tam giác $PMN \Rightarrow MN = 2IG$ (3).

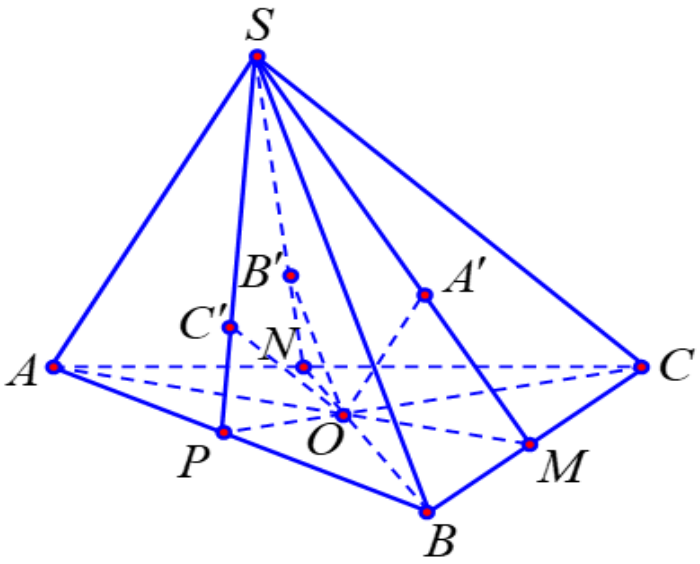
Từ (2) và (3) ta có $SG = 4IG \Rightarrow \dfrac{IS}{IG} = 3.$

Câu 17. Cho hình chóp $SABC$. Bên trong tam giác ABC lấy một điểm O bất kỳ. Từ O dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng (SBC), (SCA), (SAB) theo thứ tự lần lượt tại A', B', C'. Khi đó tổng tỉ số $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu ?

A. $T = 3.$ **B.** $T = \dfrac{3}{4}.$ **C.** $T = 1.$ **D.** $T = \dfrac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn C



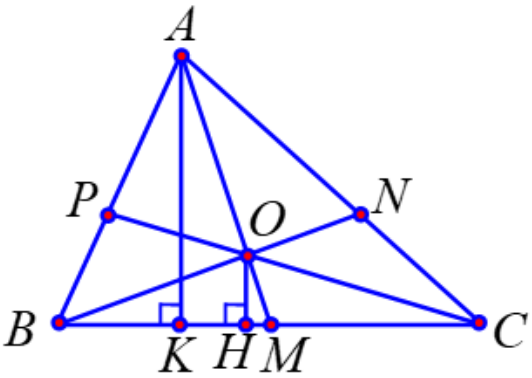
Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AO, BO, CO với BC, CA, AB.

Từ O dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các đường thẳng SM, SN, SP lần lượt tại A', B', C'.

Áp dụng định lý Talet trong các tam giác SAM, SBN, SCP ta có:

$\frac{OA'}{SA}=\frac{MO}{MA}$; $\frac{OB'}{SB}=\frac{NO}{NB}$; $\frac{OC'}{SC}=\frac{PO}{PC}$.

Khi đó $T=\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=\frac{MO}{MA}+\frac{NO}{NB}+\frac{PO}{PC}$



Gọi S_1, S_2, S_3 S lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OCA, OAB, ABC. Dựng $OH\perp BC$, $AK\perp BC$ nên $OH//AK$.

Khi đó áp dụng định lý Talet trong tam giác AKM và tỉ số diện tích ta có $\frac{MO}{MA}=\frac{OH}{AK}=\frac{S_1}{S}$.

Tương tự: $\frac{NO}{NB}=\frac{S_2}{S}$ và $\frac{PO}{PC}=\frac{S_3}{S}$.

Vậy $T=\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=\frac{S_1}{S}+\frac{S_2}{S}+\frac{S_3}{S}=\frac{S}{S}=1$.

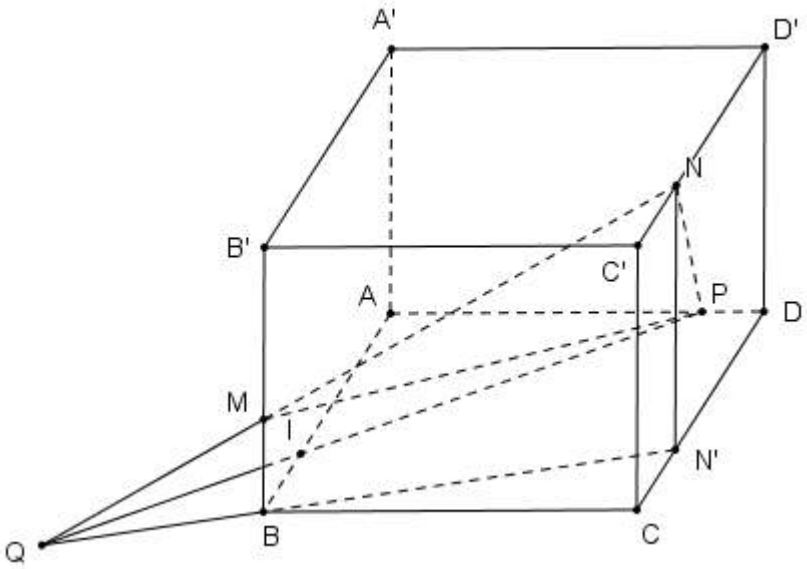
Cách giải nhanh: Đặc biệt hóa bài toán với O là trọng tâm tam giác ABC sẽ nhanh chóng tìm ra đáp án.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh BB', $C'D'$, DA sao cho $BM=C'N=DP=\frac{a}{3}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt cạnh AB tại điểm I. Tính tỉ số $\frac{BI}{BA}$.

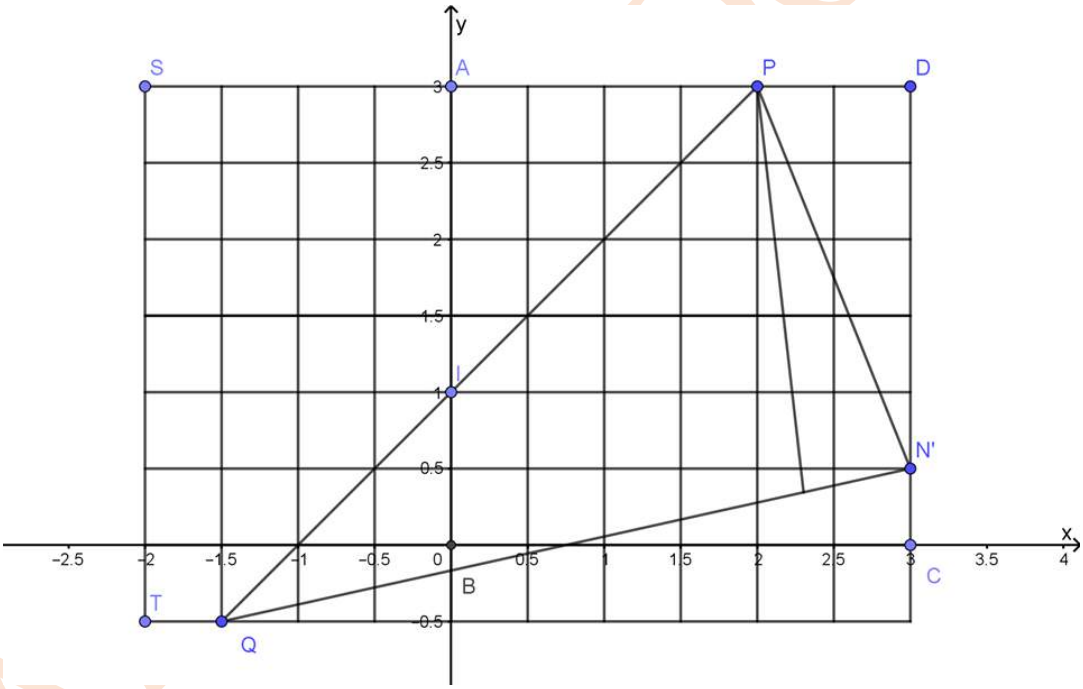
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N' là hình chiếu của N trên CD, Q là giao điểm của MN và BN', I là giao điểm của PQ và AB. I chính là điểm mà ta đề cập.



Đặt $ABCD$ vào (Oxy) như hình vẽ sẽ thấy $Q(-1,5;-0,5)$, $P(2;3)$. Tức $I(0;1)$.

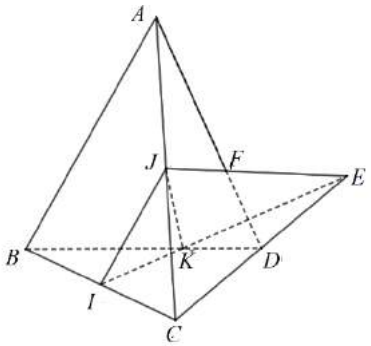
Vậy $\dfrac{BI}{BA}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK=2KD$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{FA}{FD}$.

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** 2. **C.** $\dfrac{11}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



+ Cho $AD \subset (ACD)$

Trong mặt phẳng (BCD) hai đường thẳng IK, CD không song song nên gọi E là giao điểm của hai đường thẳng IK và CD. Khi đó $E \in (ACD)$.

+ Ta thấy $(ACD) \cap (IJK) = EJ$

+ Trong (ACD): $EJ \cap AD = F$. Khi đó $(IJK) \cap AD = F$.

Xét tam giác BCD, áp dụng định lí Menelaus có :

$$\frac{IB}{IC}.\frac{EC}{ED}.\frac{KD}{KB} = 1 \Rightarrow 1.\frac{EC}{ED}.\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \frac{EC}{ED} = 2$$

Xét tam giác ACD, áp dụng định lí Menelaus có :

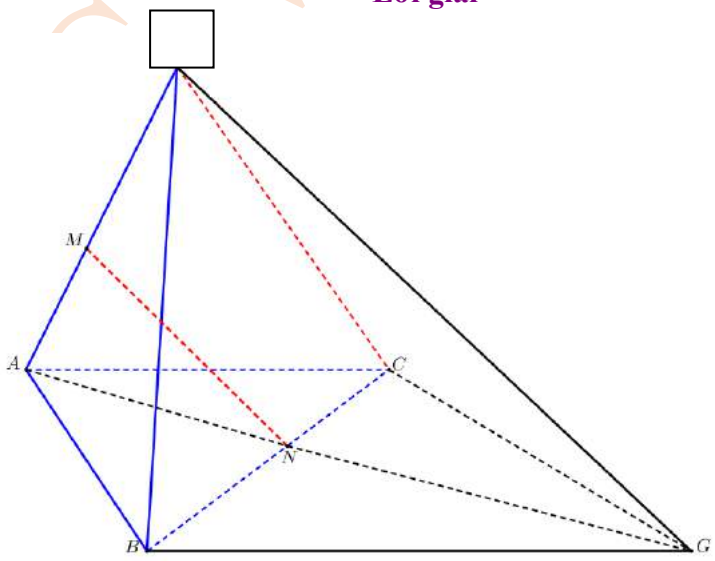
$$\frac{EC}{ED}.\frac{FD}{FA}.\frac{JA}{JC} = 1 \Rightarrow 2.\frac{FD}{FA}.1 = 1 \Rightarrow \frac{FD}{FA} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{FA}{FD} = 2$.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2}$. Độ dài đoạn MN thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **D.** $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải



Cách 1

Gọi d là đường thẳng đi qua B và song song với AC. Trong mặt phẳng (ABC), $d \cap AN = G$.

Do $\begin{cases} \frac{MA}{MD} = \frac{1}{2} \\ \frac{NA}{NG} = \frac{NC}{NB} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{NA}{NG} \Rightarrow MN // DG.$

Ta có $\frac{AC}{BG}=\frac{NC}{NB}=\frac{1}{2}\Rightarrow BG=2.$

Tam giác BCG có $CG^2=BC^2+BG^2-2BC.BG.cos\widehat{CBG}=1+4-2=3.$

Ta có $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AC}=0$ nên $DB\perp AC\Rightarrow DB\perp BG.$

Tam giác DBG vuông tại $B\Rightarrow DG^2=DB^2+BG^2=1+4=5\Rightarrow DG=\sqrt{5}.$

Tam giác DAG có $MN//DG$ và$\frac{MA}{MD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AM}{AD}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{MN}{DG}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{1}{3}DG\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Vậy độ dài đoạn MN thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right).$

Cách 2

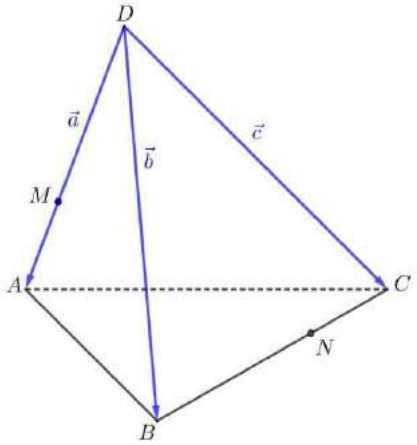
Do M thuộc cạnh AD và $\frac{MA}{MD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow AM^2=\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{9}AD^2=\frac{1}{9}.$

Do N thuộc cạnh BC và $\frac{NC}{NB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow AN^2=\overrightarrow{AN}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}AB^2+\frac{4}{9}AC^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{7}{9}.$

Ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right).\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{1}{6}.$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\Rightarrow MN^2=\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}\right)^2=AN^2+AM^2-2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}=\frac{7}{9}+\frac{1}{9}-2.\frac{1}{6}=\frac{5}{9}\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Vậy độ dài đoạn MN thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right).$

Cách 3



Đặt $\begin{cases}\overrightarrow{DA}=\vec{a}\\ \overrightarrow{DB}=\vec{b}\\ \overrightarrow{DC}=\vec{c}\end{cases}$. Ta có $\begin{cases}|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1\\ \vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=1.1.cos\,60^0=\frac{1}{2}\end{cases}.$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=-\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}.$

$$MN^2=\frac{1}{9}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)^2=\frac{1}{9}\left(4\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{c}^2-4\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}.\vec{c}-8\vec{c}.\vec{a}\right)$$
$$=\frac{1}{9}\left(4+1+4-4.\frac{1}{2}+4.\frac{1}{2}-8.\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

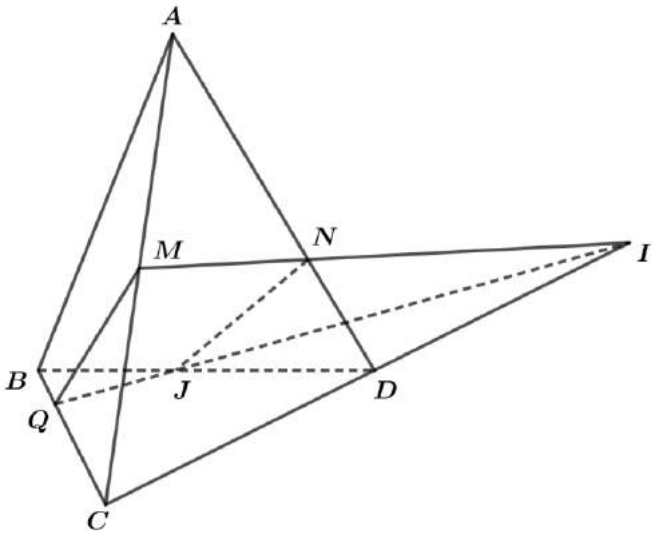
Vậy độ dài đoạn MN thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right).$

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M là trung điểm của cạnh AC, điểm N thuộc cạnh AD sao cho: $AN=2ND$, điểm Q thuộc cạnh BC sao cho $BC=4BQ$. Gọi I là giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD), J là giao điểm của đường thẳng BD và mặt phẳng (MNQ). Khi đó $\frac{JB}{JD}+\frac{JQ}{JI}$ bằng

A. $\frac{13}{20}$. **B.** $\frac{20}{11}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{11}{12}$.

Lời giải

Chọn D



+) $\frac{ID}{IC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AN}{ND}=1\Rightarrow\frac{ID}{IC}=\frac{1}{2}$.

+) $\frac{ID}{IC}.\frac{CQ}{BQ}.\frac{BJ}{JD}=1\Rightarrow\frac{BJ}{JD}=\frac{2}{3}$.

+) $\frac{BQ}{BC}.\frac{CD}{DI}.\frac{IJ}{JQ}=1\Rightarrow\frac{IJ}{JQ}=4\Rightarrow\frac{JQ}{JI}=\frac{1}{4}$.

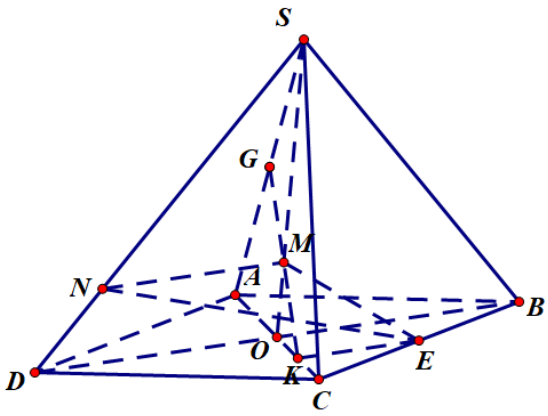
$\Rightarrow\frac{JB}{JD}+\frac{JQ}{JI}=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Hai điểm M,N lần lượt nằm trên các đoạn SO,SD sao cho $\frac{SM}{SO}=\frac{SN}{SD}=\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Điểm E là trung điểm của BC. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(MNE) đi qua trung điểm cạnh SA. Giá trị $m+n$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



Ta có $MN//OD$ nên mặt phẳng (MNE) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến đi qua E và song song với DO, cắt AC tại K.

Vì E là trung điểm của BC nên K là trung điểm của OC.

Gọi $G=MK\cap SA$ thì $G=SA\cap(MNE)$. Theo giả thiết thì G là trung điểm SA.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAO ta có:

$\frac{MS}{MO}.\frac{KO}{KA}.\frac{GA}{GS}=1\Rightarrow\frac{MS}{MO}.\frac{1}{3}.1=1\Rightarrow\frac{MS}{MO}=3$. Từ đó suy ra $\frac{m}{n}=\frac{SM}{SO}=\frac{3}{4}$.

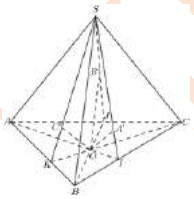
Vậy $m+n=7$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$. Bên trong tam giác lấy một điểm O bất kỳ. Từ O dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA,SB,SC và cắt các mặt phẳng $(SBC),(SCA),(SAB)$ theo thứ tự lần lượt tại A',B',C'. Khi đó tổng tỉ số $T=\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

A. $T=\frac{1}{3}$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

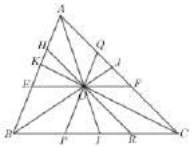


$(SAO)\cap(SBC)=SI\,(I=AO\cap BC)$. Dựng OA' song song với SA và cắt SI tại A'.

$(SBO)\cap(SAC)=SJ\,(J=BO\cap AC)$. Dựng OB' song song với SB và cắt SJ tại B'.

$(SCO)\cap(SAB)=SK\,(K=CO\cap AB)$. Dựng OC' song song với SC và cắt SK tại C'.

Ta có: $\frac{OA'}{SA}=\frac{IO}{IA};\frac{OB'}{SB}=\frac{JO}{JB};\frac{OC'}{SC}=\frac{KO}{KC}$.



Từ O dựng $PQ//AB,EF//BC,HR//AC$. Khi đó:

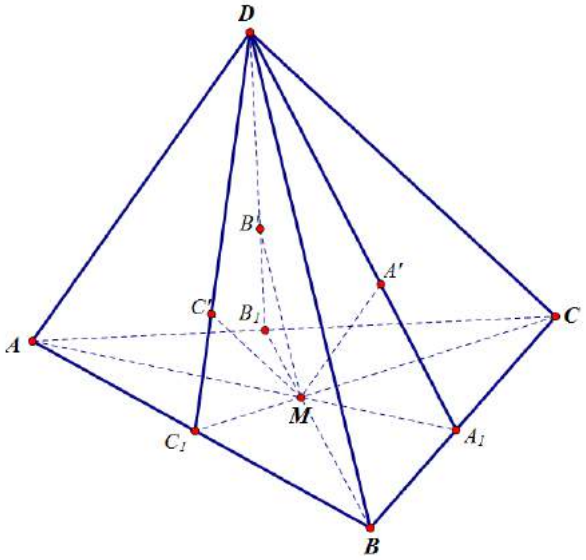
$$T=\frac{OA'}{SA}+\frac{OB'}{SB}+\frac{OC'}{SC}=\frac{IO}{IA}+\frac{JO}{JB}+\frac{KO}{KC}=\frac{OP}{AB}+\frac{OQ}{AB}+\frac{OH}{AC}=\frac{PQ}{AB}+\frac{AQ}{AC}=\frac{CQ}{AC}+\frac{AQ}{AC}=\frac{AC}{AC}=1$$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4,\ BC=AD=5,\ AC=BD=6$. M là điểm thay đổi trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với $AD,\ BD,\ CD$ tương ứng cắt mặt phẳng $(BCD),\ (ACD),\ (ABD)$ tại $A',\ B',\ C'$. Giá trị lớn nhất của $MA'.MB'.MC'$ là

A. $\frac{40}{9}$. **B.** $\frac{24}{9}$. **C.** $\frac{30}{9}$. **D.** $\frac{20}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi (α) là mặt phẳng chứa 2 đường thẳng MA' và AD, (β) là mặt phẳng chứa 2 đường thẳng MB' và BD, (γ) là mặt phẳng chứa 2 đường thẳng MC' và CD.

Gọi $A_1=(\alpha)\cap BC,\ B_1=(\beta)\cap AC,\ C_1=(\gamma)\cap AB$.

Xét các tam giác $A_1AD,\ B_1BD,\ C_1CD$ ta có:

Vì $MA'//AD\Rightarrow \frac{MA'}{AD}=\frac{MA_1}{AA_1}\Rightarrow \frac{MA'}{5}=\frac{MA_1}{AA_1}(1)$.

Vì $MB'//BD\Rightarrow \frac{MB'}{BD}=\frac{MB_1}{BB_1}\Rightarrow \frac{MB'}{6}=\frac{MB_1}{BB_1}(2)$.

Vì $MC'//CD\Rightarrow \frac{MC'}{CD}=\frac{MC_1}{CC_1}\Rightarrow \frac{MC'}{4}=\frac{MC_1}{CC_1}(3)$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{MA'.MB'.MC'}{120}=\frac{MA_1.MB_1.MC_1}{AA_1.BB_1.CC_1}=T$.

Ta có $\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}$ và $\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$.

Suy ra $\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}+\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}=1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 3 số, ta có:

$$1=\frac{MA_1}{AA_1}+\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MC_1}{CC_1}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA_1.MB_1.MC_1}{AA_1.BB_1.CC_1}}=3.\sqrt[3]{T}$$

$\Rightarrow 3\sqrt[3]{T} \le 1 \Leftrightarrow T \le \frac{1}{27} \Rightarrow \frac{MA'.MB'.MC'}{120} \le \frac{1}{27} \Rightarrow MA'.MB'.MC' \le \frac{40}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA'.MB'.MC'$ bằng $\frac{40}{9}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

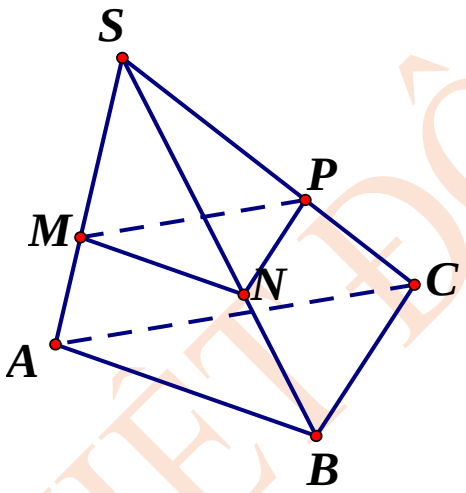
★ Dạng 1: Tính diện tích thiết diện

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB=AC=4$, $BAC=30^0$. Mặt phẳng song song vơi (ABC) cắt đoạn thẳng SA tại M sao cho $SM=2MA$. Diện tích thiết diện của với hình chóp $S.ABC$ bằng.

A. $\frac{25}{9}$ **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{16}{9}$. **D.** **1.**

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng song song với mp(ABC) cắt đoạn thẳng SA tại M sao cho $SM=2MA$, nên cắt SB và SC lần lượt tại N và P sao cho $SN=2NB$; $SP=2PC$.Do đó thiết diện của mp với hình chóp $S.ABC$ là tam giác MNP

Ta có $MN=\frac{2}{3}AB=\frac{8}{3}; MP=\frac{2}{3}AC=\frac{8}{3}$ và $NMP=NMP=30^0$

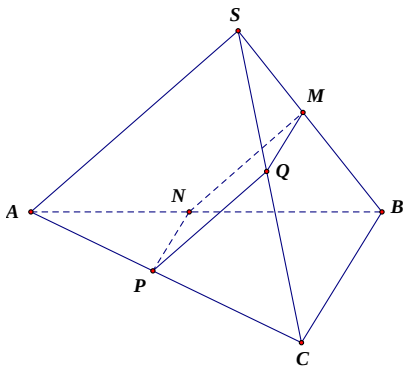
Diện tích $\Delta MNP=\frac{1}{2}.MN.MP.SinNMP=\frac{1}{2}.\frac{8}{3}.\frac{8}{3}.Sin30^0=\frac{16}{9}$

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=SB=SC=2a$. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng SB mà $SM=m$ $(0<m<2a)$. Mặt phẳng (α) qua M, song song với SA và BC cắt hình chóp theo thiết diện có chu vi là:

A. $4a-2m$. **B.** $4a$. **C.** $4a-m$. **D.** $2a+m$.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (α) qua M, song song với SA nên (α) cắt (SAB) theo giao tuyến MN với $MN // SA$ và $N \in AB$. Tương tự (α) cắt mp(ABC) theo giao tuyến NP với $NP // BC$ và $P \in AC$; (α) cắt mp(SAC) theo giao tuyến PQ với $PQ // SA$ và $Q \in SC$; (α) cắt mp(SAB) theo giao tuyến QM. Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABC$ là hình bình hành $MNPQ$.

Xét $\triangle SAB$, vì $MN // SA$ nên $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{BM}{BS} \Rightarrow MN = SA.\dfrac{BM}{SB} = 2a - m$.

Xét $\triangle SBC$, vì $MQ // BC$ nên $\dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{SM}{SB} \Rightarrow MQ = BC.\dfrac{SM}{SB} = a.\dfrac{m}{2a} = \dfrac{m}{2}$.

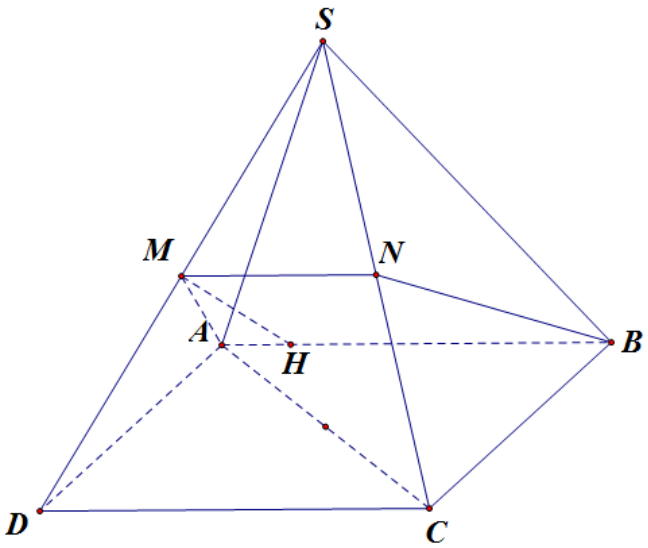
Vậy chu vi thiết diện là $2.(2a - m) + 2.\dfrac{m}{2} = 4a - m$.

Câu 27. Bộ $c = -1$, $a = -1$, $b = 4$ thỏa $A = a^2 + b^2 + c^2 = 18$ nên chọn đáp án **C** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (ABM).

A. $\dfrac{3\sqrt{15}a^2}{16}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}a^2}{16}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{5}a^2}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi Δ là giao tuyến của mặt phẳng (ABM) với mặt phẳng (SDC).

Ta có AB song song với (SDC) nên suy ra AB song song với Δ.

Gọi N là trung điểm SC, ta có $N \in \Delta$.

Do đó thiết diện là hình thang cân $ABNM$.

Kẻ $MH \perp AB$ tại H, $H \in AB$. Do $AB = CD$ và $MN < CD$ nên H thuộc đoạn AB.

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có

$$AM = \sqrt{\frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{2a^2}{4}} = a.$$

Mặt khác $AH = \frac{AB - MN}{2} = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$ nên $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

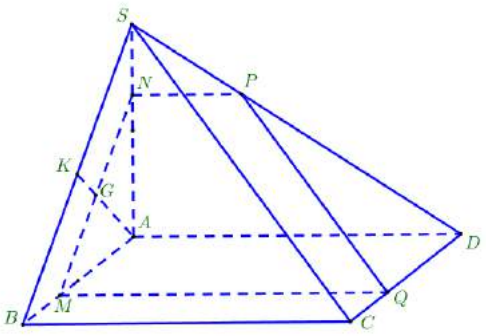
Suy ra $S_{ABNM} = \frac{MH.(MN + AB)}{2} = \frac{3\sqrt{15}a^2}{16}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, hai tam giác SAB, SAD vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua G và song song với SB, AD. Thiết diện tạo bởi $mp(\alpha)$ và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng

A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong mặt phẳng (SAB) dựng đường thẳng qua G và song song với SB và cắt AB, SA lần lượt tại M, N.

Trong (SAD) dựng đường thẳng qua N và song song với AD và cắt SD tại P.

Trong $(ABCD)$ dựng đường thẳng qua M và song song với AD và cắt CD tại Q.

Khi đó thiết diện tạo bởi $mp(\alpha)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $PN // MQ // AD$.

Hơn nữa, $\begin{cases} BC \perp SB\,(BC \perp SA, BC \perp AB) \\ MQ // BC \\ MN // SB \end{cases} \Rightarrow MQ \perp MN$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M.

$MN = \frac{2}{3}SB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $NP = \frac{1}{3}AD = \frac{a}{3}$, $MQ = AD = a$.

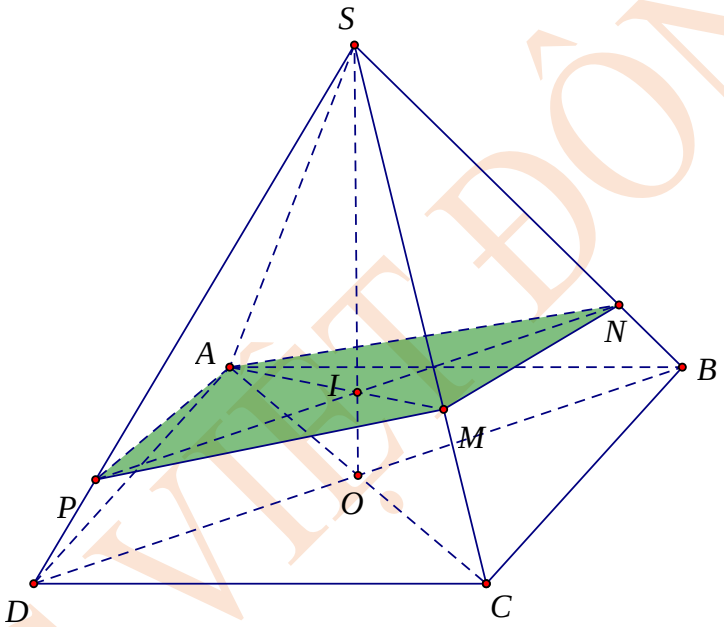
Do đó $S_{ABCD}=\dfrac{(NP+MQ)MN}{2}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{3}+a\right)\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}}{2}=\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 29. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM=2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O=AC\cap BD$, $I=AM\cap SO$.

Trong (SBD) từ I kẻ đường thẳng Δ song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại N, P.

Suy ra thiết diện là tứ giác $ANMP$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp SO\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

$\Rightarrow BD\perp AM$.

Mặt khác: $BD//NP$.

$\Rightarrow AM\perp NP$.

$\Rightarrow S_{ANMP}=\dfrac{1}{2}NP.AM$.

+ Tính AM:

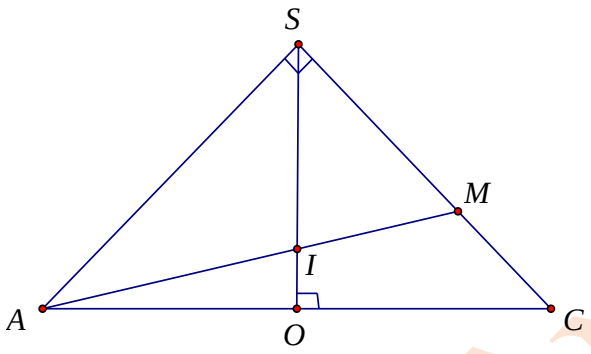
Ta có: $\begin{cases}SA=SC=a\\ AC=a\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại S.

$\Rightarrow AM=\sqrt{SA^2+SM^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

+ Tính AM:

Ta có: $NP//BD \Rightarrow \dfrac{NP}{BD}=\dfrac{SI}{SO} \Rightarrow NP=\dfrac{SI.BD}{SO}$.

•Tính $\dfrac{SI}{SO}$:



Gọi $\dfrac{SI}{SO}=k$.

Ta có: $\dot{AI}=\dot{AS}+\dot{SI}=-\dot{SA}+k\dot{SO}$.

$\dot{AM}=\dot{AS}+\dot{SM}=-\overrightarrow{SA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SC}$.

A, I, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=l\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -\dot{SA}+k\dot{SO}=-l\dot{SA}+\dfrac{2}{3}l\dot{SC}$

$\Leftrightarrow -\dot{SA}+\dfrac{k}{2}\left(\dot{SA}+\dot{SC}\right)=-l\dot{SA}+\dfrac{2}{3}l\dot{SC} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{2}k+l=1\\ \dfrac{1}{2}k-\dfrac{2}{3}l=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{4}{5}\\ l=\dfrac{3}{5}\end{cases}$.

$\Rightarrow \dfrac{SI}{SO}=\dfrac{4}{5} \Rightarrow NP=\dfrac{4}{5}BD=\dfrac{4a\sqrt{2}}{5}$.

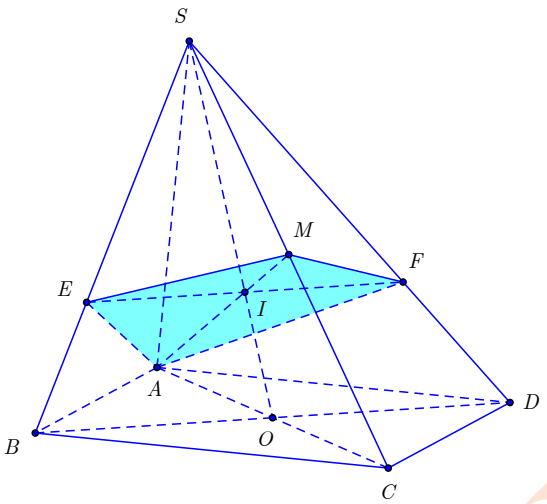
$\Rightarrow S_{ANMP}=\dfrac{1}{2}NP.AM=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4a\sqrt{2}}{5}.\dfrac{a\sqrt{13}}{3}=\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O=AC\cap BD$, $I=SO\cap AM$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF//BD$, khi đó ta có $(AEMF)\equiv(\alpha)$ là mặt phẳng chứa AM và song song với BD. Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AEMF$.

Ta có: $\begin{cases} FE // BD \\ BD\perp(SAC) \end{cases} \Rightarrow FE\perp(SAC)\Rightarrow FE\perp AM$.

Mặt khác ta có:

* $AC=2a=SA$ nên tam giác SAC vuông cân tại A, suy ra $AM=a\sqrt{2}$.

* I là trọng tâm tam giác SAC, mà $EF // BD$ nên tính được $EF=\frac{2}{3}BD=\frac{4a}{3}$.

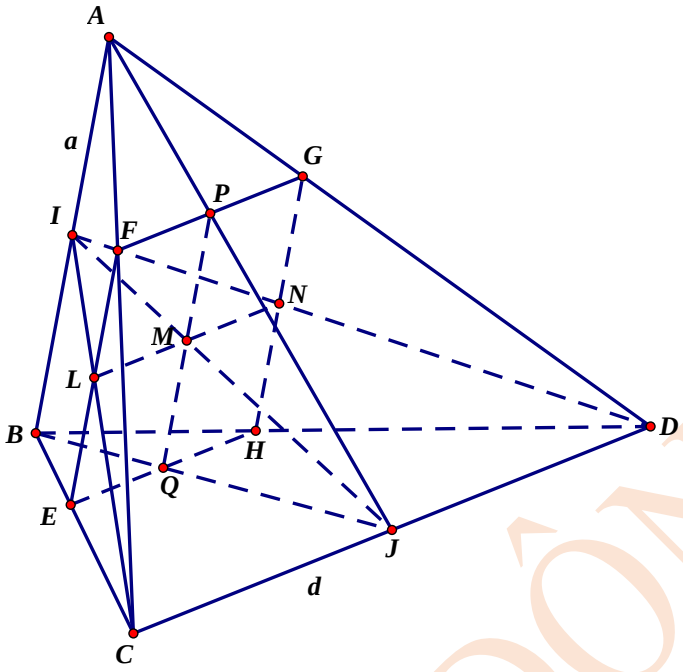
Tứ giác $AEMF$ có hai đường chéo $FE\perp AM$ nên $S_{AEMF}=\frac{1}{2}FE.AM=\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a$, $CD=b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB\perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) biết $IM=\frac{1}{3}IJ$.

A. ab. **B.** $\frac{ab}{9}$. **C.** $2ab$. **D.** $\frac{2ab}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,CD\\ CD\subset(ICD)\\ M\in(\alpha)\cap(ICD)\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ICD) là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N.

$\begin{cases}(\alpha)\,//\,AB\\ AB\subset(JAB)\\ M\in(\alpha)\cap(JAB)\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (JAB) là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q.

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,AB\\ AB\subset(ABC)\\ L\in(\alpha)\cap(ABC)\end{cases}\Rightarrow EF\,//\,AB$ (1)

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\,//\,AB\\ AB\subset(ABD)\\ N\in(\alpha)\cap(ABD)\end{cases}\Rightarrow HG\,//\,AB$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF\,//\,HG\,//\,AB$ (3)

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,CD\\ CD\subset(ACD)\\ P\in(\alpha)\cap(ACD)\end{cases}\Rightarrow FG\,//\,CD$ (4)

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\,//\,CD\\ CD\subset(BCD)\\ Q\in(\alpha)\cap(BCD)\end{cases}\Rightarrow EH\,//\,CD$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow FG\,//\,EH\,//\,CD$ (6).

Từ (3) và (6), suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB\perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét tam giác ICD có: $LN // CD \Rightarrow \frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$.

Xét tam giác ICD có: $MN // JD \Rightarrow \frac{IN}{ID} = \frac{IM}{IJ}$.

Do đó $\frac{LN}{CD} = \frac{IM}{IJ} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN = \frac{1}{3}CD = \frac{b}{3}$.

Tương tự $\frac{PQ}{AB} = \frac{JM}{JI} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$.

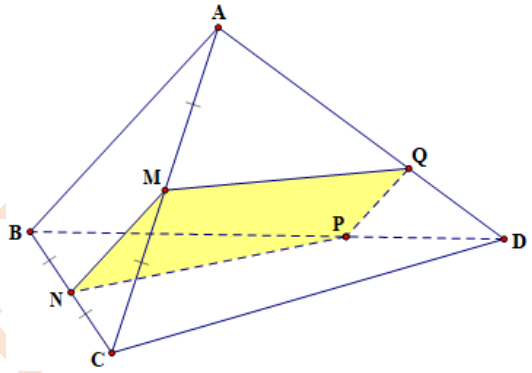
Vậy $S_{EFGH} = PQ.LN = \frac{2ab}{9}$.

Câu 32. Cho hình tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $6a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB. Gọi P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$. Diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là:

A. $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{2}$. **B.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{4}$. **C.** $S = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$. **D.** $S = \frac{5a^2\sqrt{147}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



M, N lần lượt là trung điểm của CA, CB nên $MN // AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB = 3a$.

$MN // AB \Rightarrow (MNP) // AB$.

Gọi $Q = (MNP) \cap AD$. Thì $PQ = (MNP) \cap (ABD) \Rightarrow PQ // AB$.

$MNPQ$ chính là thiết diện của tứ diện $ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Trong tam giác ABD, có $PQ // AB$ và $BP = 2PD$. Suy ra,

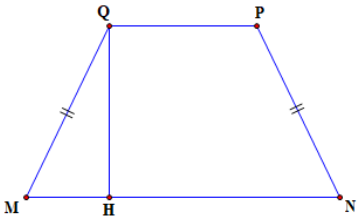
$\frac{PQ}{AB} = \frac{DP}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow QP = \frac{1}{3}.6a = 2a$.

Theo giả thiết, ta có ΔACD và ΔBCD là các tam giác đều.

Xét ΔAMQ và ΔBNP có: $\begin{cases} AM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.6a = \frac{1}{2}BC = BN = 3a \\ AQ = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3}.6a = \frac{2}{3}DB = BP = 4a \\ MAQ = NBP = 60^\circ \end{cases}$

Vậy $MQ = NP = \sqrt{AQ^2 + AM^2 - 2.AQ.AM.\cos 60°} = \sqrt{9a^2 + 16a^2 - 2.3a.4a.\frac{1}{2}} = \sqrt{13}a$.

$MNPQ$ là hình thang cân.



Dễ thấy, $MH = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{a}{2}$.

$\Rightarrow QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{13a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{51}}{2}$.

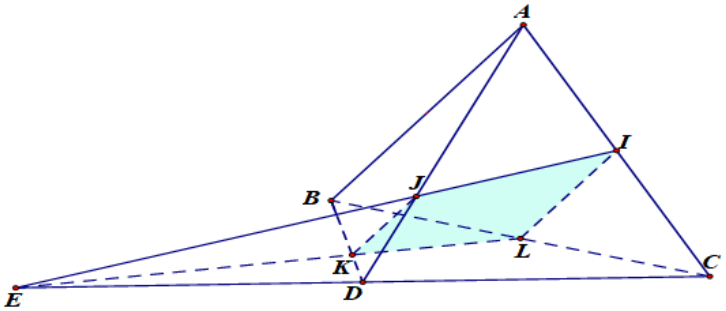
$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}QH\left(MN + PQ\right) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{51}}{2}.\left(3a + 2a\right) = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}$.

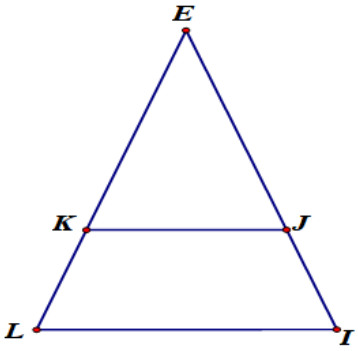
Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho $AJ = 2JD$. (P) là mặt phẳng chứa IJ và song song với AB. Tính diện tích thiết diện khi cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{3a^2\sqrt{51}}{144}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{31}}{144}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{31}}{144}$. **D.** $\frac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

Lời giải

Chọn D





Gọi $K = (P) \cap BD$, $L = (P) \cap BC$, $E = (P) \cap CD$.

Vì $(P) // AB$ nên $IL // AB$, $JK // AB$. Do đó thiết diện là hình thang $IJKL$ và L là trung điểm cạnh BC, nên ta có $\frac{KD}{KB} = \frac{JD}{JA} = \frac{1}{2}$.

Xét tam giác ACD có I, J, E thẳng hàng. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uýt ta có:

$\frac{ED}{EC}.\frac{IC}{IA}.\frac{JA}{JD} = 1 \Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow D$ là trung điểm EC.

Dễ thấy hai tam giác ECI và ECL bằng nhau theo trường hợp c-g-c.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ICE ta có:

$EI^2 = EC^2 + IC^2 - 2EC.IC.\cos 60° = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow EL = EI = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

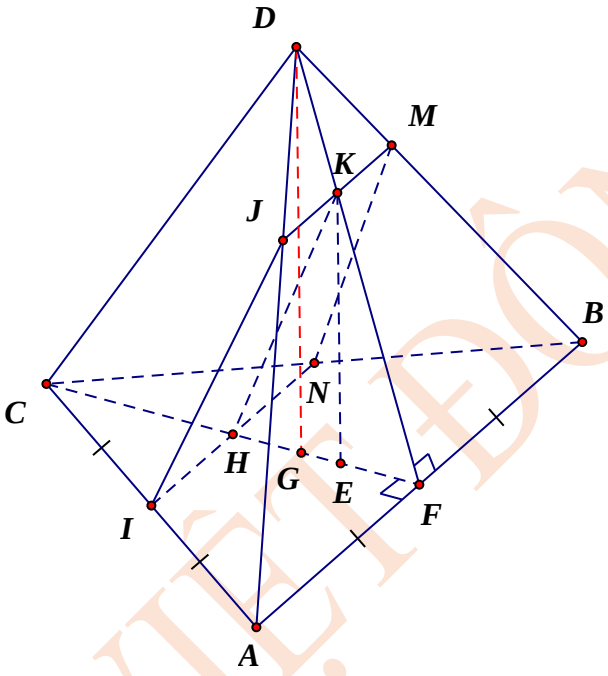
Áp dụng công thức Hê-rông cho tam giác ELI ta có: $S_{ELI} = \sqrt{p\left(p - x\right)^2\left(p - y\right)} = \frac{\sqrt{51}}{16}a^2$

Với $p=\dfrac{EI+EL+IL}{2}=\dfrac{2\sqrt{13}+1}{4}a$, $x=EI=EL=\dfrac{\sqrt{13}}{2}a$, $y=IL=\dfrac{a}{2}$.

Hai tam giác ELI và tam giác EKJ đồng dạng với nhau theo tỉ số $k=\dfrac{2}{3}$ nên

Do đó: $S_{IJKL}=S_{ELI}-S_{EKJ}=S_{ELI}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 S_{ELI}=\dfrac{5\sqrt{51}}{144}a^2$.

Cách giải khác:



$\begin{cases}(P)\cap(ABC)=d_1\\ AB\subset(ABC);AB\ //\ (P)\Rightarrow \text{Giao tuyến } d_1 \text{ qua } I \text{ và song song với } AB\\ I\in(P);I\in(ABC)\end{cases}$

Cách dựng: Trong (ABC): Qua I kẻ đường thẳng $d_1 // AB$ cắt BC tại N

$\Rightarrow (P)\cap(ABC)=IN$

$\begin{cases}(P)\cap(ABD)=d_2\\ AB\subset(ABC);AB\ //\ (P)\Rightarrow \text{Giao tuyến } d_2 \text{ qua } J \text{ và song song với } AB\\ J\in(P);J\in(ABC)\end{cases}$

Cách dựng: Trong (ABD): Qua J kẻ đường thẳng $d_2 // AB$ cắt BD tại M

$\Rightarrow (P)\cap(ABD)=JM$

Lại có: $\begin{cases}(P)\cap(BCD)=MN\\ (P)\cap(ACD)=IJ\end{cases}$

Từ đó ta có: Mặt phẳng (P) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNIJ$

Gọi F là trung điểm của $AB\Rightarrow\begin{cases}DF\perp AB\\ CF\perp AB\end{cases}\Rightarrow AB\perp(CDF)$

Gọi K,H lần lượt là giao điểm của JM với DF và IN với CF

Ta có: $\begin{cases} IN \,//\, AB \\ AB \perp (CDF) \Rightarrow IN \perp KH \\ KH \subset (CDF) \end{cases}$

Chứng minh tương tự: $JM \perp KH$. Từ đó suy ra: KH là đường cao của hình thang $MNIJ$

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \begin{cases} G \in CF \\ DG \perp (ABC) \end{cases}$

Trong (CDF): Dựng $KE \,//\, DG (E \in CF)$

mà $DG \perp (ABC) \Rightarrow KE \perp (ABC)$

$$JM \,//\, AB \Rightarrow \frac{DJ}{DA} = \frac{DK}{DF} = \frac{JM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow JM = \frac{1}{3}AB = \frac{a}{3}$$

$$KE \,//\, DG \Rightarrow \frac{KF}{DF} = \frac{EF}{GF} = \frac{KE}{DG} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} EF = \frac{2}{3}GF = \frac{2}{3}.\frac{1}{3}CF = \frac{2}{9}CF \\ KE = \frac{2}{3}DG \end{cases}$$

Xét ΔDGF: $DG = \sqrt{DF^2 - GF^2} = \sqrt{DF^2 - \left(\frac{1}{3}CF\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$\Rightarrow KE = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$$

$$IN \,//\, AB \Rightarrow \frac{IC}{AC} = \frac{NC}{BC} = \frac{CH}{CF} = \frac{IN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} IN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \\ HF = \frac{1}{2}CF \end{cases}$$

Suy ra: $HE = HF - EF = \frac{1}{2}CF - \frac{2}{9}CF = \frac{5}{18}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{5a\sqrt{3}}{36}$

Xét $\Delta KHE: KH = \sqrt{KE^2 + HE^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{6}}{9}\right)^2 + \left(\frac{5a\sqrt{3}}{36}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{12}$

Diện tích thiết diện $MNIJ$ là:

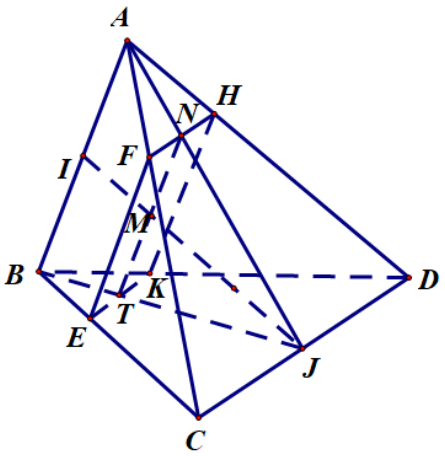
$$S_{MNIJ} = \frac{(MJ + IN)HK}{2} = \frac{\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{2}\right)\frac{a\sqrt{51}}{12}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{144} (đvdt)$$

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD và $AB = a, CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, điểm M thuộc đoạn IJ sao cho $IM = \frac{1}{3}IJ$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là

A. $\frac{2ab}{9}$. **B.** $\frac{4ab}{9}$. **C.** $\frac{2ab}{3}$. **D.** $\frac{3ab}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Vì $(\alpha)//AB \Rightarrow (\alpha)$ cắt (ABJ) theo giao tuyến qua M và song song với AB.

Gọi $NT = (\alpha) \cap (ABJ), N \in AJ, T \in BJ$.

Mặt khác $(\alpha)//CD \Rightarrow (\alpha)$ cắt các mặt phẳng $(ACD),(BCD)$ lần lượt theo các giao tuyến qua N,T và song song với CD.

Gọi $\begin{cases} FH = (\alpha) \cap (ACD), F \in AC, H \in AD \\ EK = (\alpha) \cap (BCD), E \in BC, K \in BD \end{cases}$.

Suy ra thiết diện là hình bình hành $EFHK$.

Do $AB \perp CD \Rightarrow EF \perp EK$ nên $EFHK$ là hình chữ nhật.

$S_{EFHK} = EF.EK$.

Ta có $\frac{JM}{JI} = \frac{MT}{BI} = \frac{JT}{JB} = \frac{CE}{CB} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$.

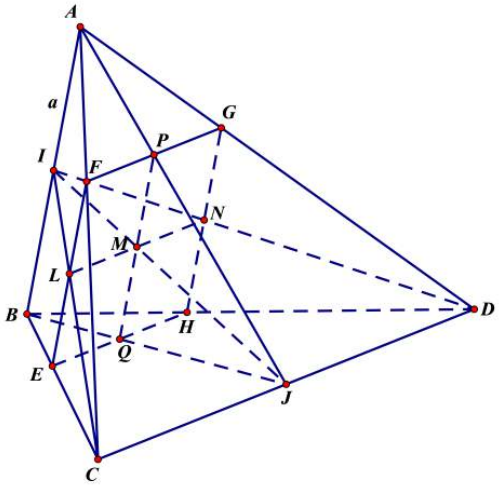
Tương tự $EK = \frac{b}{3}$. Suy ra $S_{EFHK} = \frac{2ab}{9}$.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = 3a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) biết $IM = \frac{1}{3}IJ$.

A. $2a^2$. **B.** $\frac{3a^2}{2}$. **C.** $4a^2$. **D.** $\frac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,CD\\ CD\subset(ICD)\\ M\in(\alpha)\cap(ICD)\end{cases}$

$\Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ICD) là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N.

$\begin{cases}(\alpha)\,//\,AB\\ AB\subset(JAB)\\ M\in(\alpha)\cap(JAB)\end{cases}$

$\Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (JAB) là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q.

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,AB\\ AB\subset(ABC)\\ L\in(\alpha)\cap(ABC)\end{cases}\Rightarrow EF\,//\,AB\,(1).$

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\,//\,AB\\ AB\subset(ABD)\\ N\in(\alpha)\cap(ABD)\end{cases}\Rightarrow HG\,//\,AB\,(2).$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EF\,//\,HG\,//\,AB\,(3).$

Ta có $\begin{cases}(\alpha)\,//\,CD\\ CD\subset(ACD)\\ P\in(\alpha)\cap(ACD)\end{cases}\Rightarrow FG\,//\,CD\,(4).$

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\,//\,CD\\ CD\subset(BCD)\\ Q\in(\alpha)\cap(BCD)\end{cases}\Rightarrow EH\,//\,CD\,(5).$

Từ (4) và (5) $\Rightarrow FG\,//\,EH\,//\,CD\,(6).$

Từ (3) và (6), suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB\perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét tam giác ICD có: $LN // CD \Rightarrow \dfrac{LN}{CD} = \dfrac{IN}{ID}$.

Xét tam giác ICD có: $MN // JD \Rightarrow \dfrac{IN}{ID} = \dfrac{IM}{IJ}$.

Do đó $\dfrac{LN}{CD} = \dfrac{IM}{IJ} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow LN = \dfrac{1}{3}CD = a$.

Tương tự $\dfrac{PQ}{AB} = \dfrac{JM}{JI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $S_{EFGH} = PQ.LN = \dfrac{2a^2}{3}$.

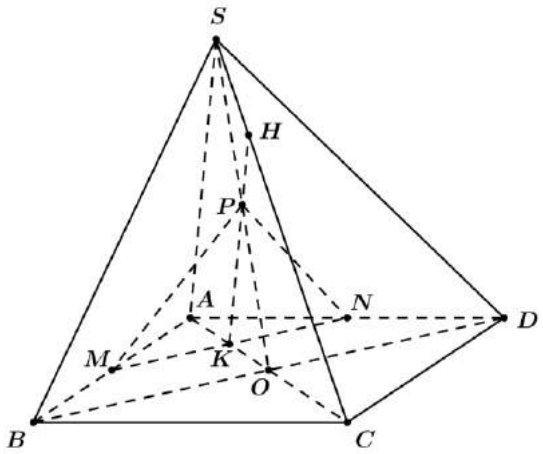
★ Dạng 2: Bài toán tỉ số

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO. Gọi H là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP). Tính $\dfrac{SH}{SC}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $\{K\} = AC \cap MN \Rightarrow K$ là trung điểm của AO.

Gọi $\{H\} = KP \cap SC \Rightarrow \{H\} = (MNP) \cap SC$ và $KH // SA \Rightarrow \dfrac{SH}{SC} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{1}{4}$.

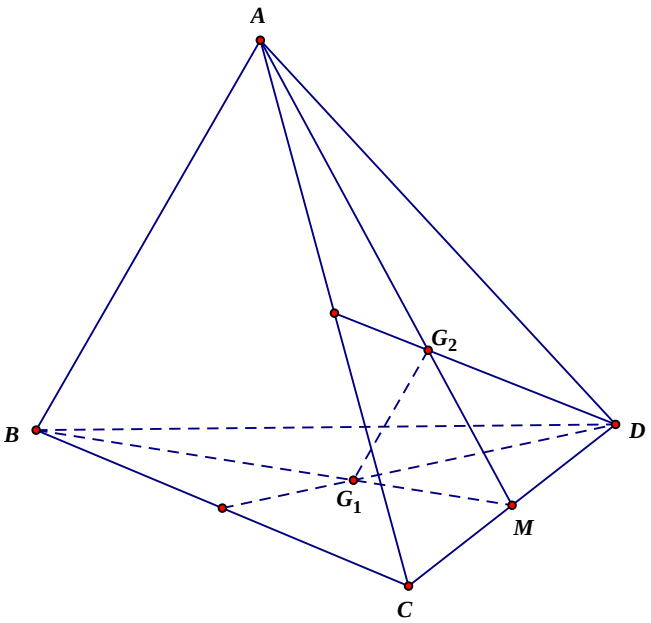
Câu 37. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2 // (ABD)$. **B.** $G_1G_2 // (ABC)$.

C. BG_1, AG_2 và CD đồng qui. **D.** $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của CD.

Theo bài ra ta có: $\frac{MG_2}{MA}=\frac{1}{3}$, $\frac{MG_1}{MB}=\frac{1}{3}$ do đó $G_1G_2 // AB$ và $\frac{G_1G_2}{AB}=\frac{1}{3}$ hay $G_1G_2=\frac{1}{3}AB$.

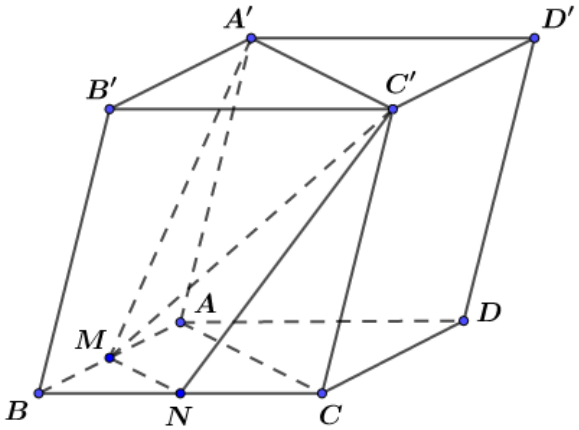
Vậy D sai.

Câu 38. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tại N. Tính tỉ số $k=\frac{MN}{A'C'}$.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=\frac{1}{2}$. **D.** $k=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AC // A'C'$ nên $(MA'C') // AC$.

$(MA'C') \cap (ABCD)=MN$ do đó $MN // AC \Rightarrow N$ là trung điểm của BC.

MN là đường trung bình của ΔABC.

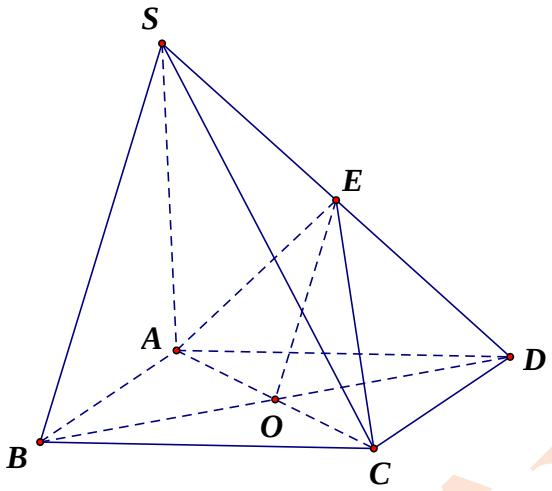
$k=\frac{MN}{A'C'}=\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với SB. Mặt phẳng (α) cắt SD tại E. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $SE=\frac{1}{3}ED$. **B.** $SE=\frac{1}{2}SD$. **C.** $SE=\frac{1}{3}SD$. **D.** $SE=2SD$.

Lời giải

Chọn B



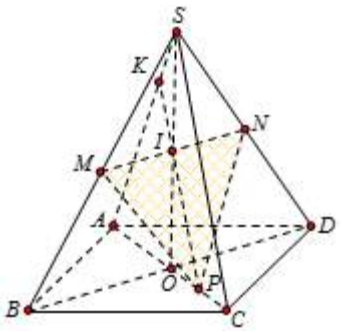
Gọi E là trung điểm SD. Ta có $OE//SB$ nên (EAC) là mặt phẳng chứa AC và song song SB. Suy ra $SE=\frac{1}{2}SD$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC. Gọi giao điểm của (MNP) với SA là K. Tỉ số $\frac{KS}{KA}$ là

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (SBD), gọi I là giao điểm của MN và SO

Ta có $SA\subset(SAC)$; $(MNP)\cap(SAC)=PI$

Trong mặt phẳng (SAC), PI cắt SA tại $K\Rightarrow K$ là giao điểm của SA và (MNP)

Mặt khác:

MN là đường trung bình của tam giác SBD nên MN cắt SO tại trung điểm I

$\Rightarrow PI$ là đường trung bình của tam giác $SOC\Rightarrow PI//SC$ hay $PK//SC$

$$\Rightarrow\frac{KS}{KA}=\frac{PC}{PA}=\frac{\frac{1}{4}AC}{\frac{3}{4}AC}=\frac{1}{3}.$$

Lưu ý :Giải nhanh bằng trắc nghiệm ta dùng công thức

$$\frac{SA}{SK}+\frac{SC}{SC}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}\Rightarrow\frac{SA}{SK}=3\Rightarrow\frac{SK}{SA}=\frac{1}{3}.$$

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Chọn khẳng định sai?

A. $MN \parallel (ABD)$.

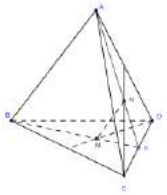
B. $MN = \frac{2}{3}AB$.

C. BM, AN, CD đồng quy.

D. $MN \parallel (ABC)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm cạnh CD. Ta có M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD nên: $\frac{EM}{EB} = \frac{EN}{EA} = \frac{1}{3}$. Suy ra $MN \parallel AB$ và $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$. Do đó:

A đúng vì $MN \parallel AB$, $MN \not\subset (ABD)$, $AB \subset (ABD)$ nên $MN \parallel (ABD)$.

B sai vì $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$ hay $MN = \frac{1}{3}AB$.

C đúng vì BM, AN, CD đồng quy tại E.

D đúng vì $MN \parallel AB$, $MN \not\subset (ABC)$, $AB \subset (ABC)$ nên $MN \parallel (ABC)$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD và mặt phẳng (OMG). Tính tỉ số $\frac{JA}{JD}$.

A. 2.

B. 1.

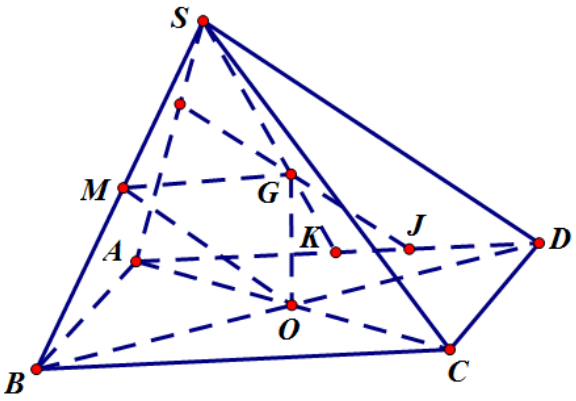
C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



+ Mặt phẳng (OMG) cắt mặt phẳng (SAD) theo giả thiết là đường thẳng Δ qua G và song song với SD. Gọi $J=\Delta\cap AD$ Suy ra $J=(OMG)\cap AD$.

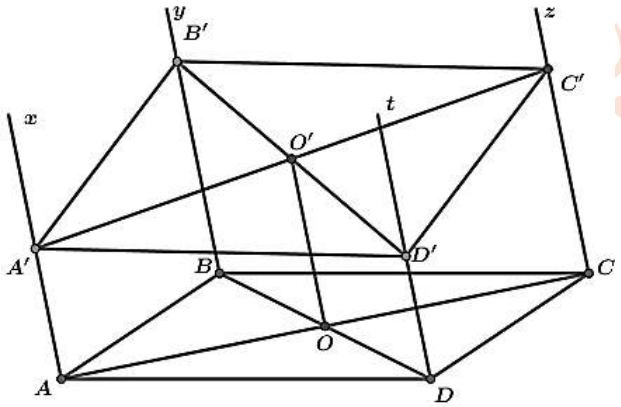
+ Ta có: $GJ//SD$ Suy ra: $\dfrac{KJ}{KD}=\dfrac{KG}{KS}=\dfrac{1}{3}$. Vậy $JA=2JD$.

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA'=3$, $BB'=5$, $CC'=4$. Tính DD'.

A. 4. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C



Do (P) cắt mặt phẳng (Ax,By) theo giao tuyến $A'B'$; cắt mặt phẳng (Cz,Dt) theo giao tuyến $C'D'$, mà hai mặt phẳng (Ax,By) và (Cz,Dt) song song nên $A'B'//C'D'$.

Tương tự có $A'D'//B'C'$ nên $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Gọi O, O' lần lượt là tâm $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Dễ dàng có OO' là đường trung bình của hai hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ nên $OO'=\dfrac{AA'+CC'}{2}=\dfrac{BB'+DD'}{2}$.

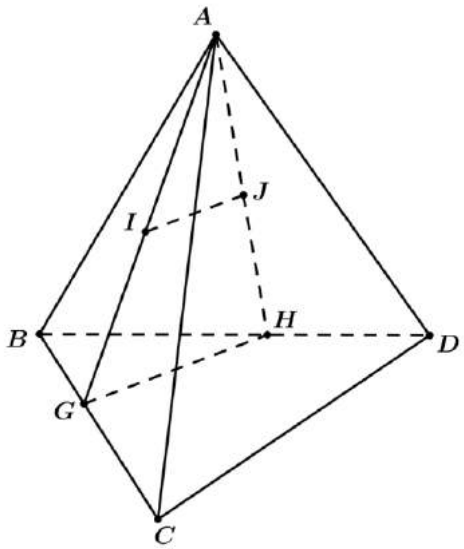
Từ đó ta có $DD'=2$.

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a, tam giác ACD vuông. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Biết rằng IJ song song với (BCD). Tính diện tích tam giác ACD.

A. $\dfrac{a^2}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn A



Ta chứng minh bài toán phụ: Cho tứ diện $ABCD$, gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Điều kiện cần và đủ để $JI \parallel (BCD)$ là $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BA+CA}{BA+DA}$.

Thật vậy: Gọi $AI \cap BC = G, AJ \cap BD = H$. $JI \parallel (BCD) \Leftrightarrow JI \parallel GH \Leftrightarrow \dfrac{AI}{IG} = \dfrac{JA}{JH}$.

Mà $\begin{cases} \dfrac{BA}{BG} = \dfrac{CA}{CG} = \dfrac{BA+CA}{BG+CG} = \dfrac{BA+CA}{BC} \\ \dfrac{DA}{DH} = \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BA+DA}{DH+BH} = \dfrac{BA+DA}{BD} \end{cases}$. Như vậy $\dfrac{BA+CA}{BC} = \dfrac{BA+DA}{BD}$.

Áp dụng bài toán trên ta có $BC = BD = CD = a \Rightarrow BA+CA = BA+DA$

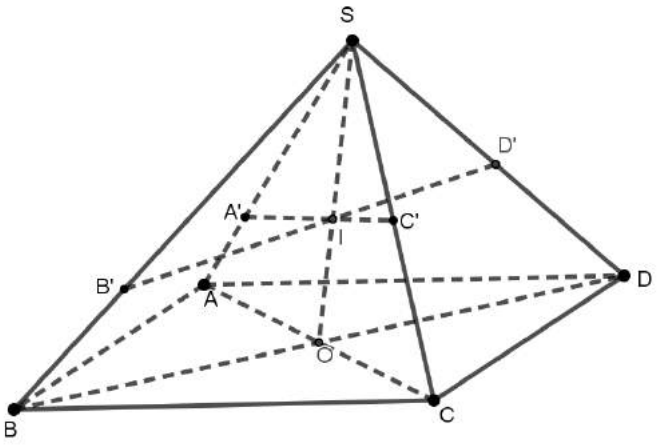
$\Rightarrow CA = DA \Rightarrow \Delta ACD$ vuông cân tại $A \Rightarrow AC = AD = \dfrac{CD}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ACD} = \dfrac{1}{2}.AC^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $A'A = \dfrac{1}{2}A'S$. Mặt phẳng (α) qua A' cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} - \dfrac{SC}{SC'}$.

A. $T = \dfrac{3}{2}$. **B.** $T = \dfrac{1}{3}$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là giao của AC và BD. Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AC, BD.
Các đoạn thẳng $SO, A'C'$, $B'D'$ đồng quy tại I.

Ta có: $S_{SA'I}+S_{SC'I}=S_{SA'C'} \Leftrightarrow \dfrac{S_{SA'I}}{S_{SAC}}+\dfrac{S_{SC'I}}{S_{SAC}}=\dfrac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \Leftrightarrow \dfrac{S_{SA'I}}{2S_{SAO}}+\dfrac{S_{SC'I}}{2S_{SCO}}=\dfrac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{SA'}{2SA}.\dfrac{SI}{SO}+\dfrac{SC'}{2SC}.\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \dfrac{SI}{2SO}\left(\dfrac{SA'}{SA}+\dfrac{SC'}{SC}\right)=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SC}{SC'}=2.\dfrac{SO}{SI}$.

Tương tự: $\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}=2.\dfrac{SO}{SI}$

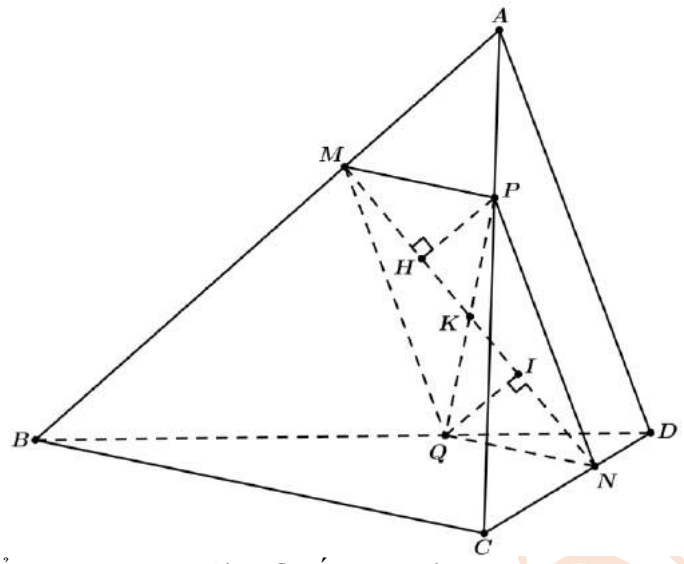
Suy ra: $\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}-\dfrac{SC}{SC'}=\dfrac{SA}{SA'}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 46. Cho tứ diện $ABCD$ và M, N lần lượt là các điểm trên hai cạnh AB, CD sao cho $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{CN}{ND}=k>0$ và (α) là mặt phẳng qua MN và song song với cạnh BC, gọi P là giao điểm của (α) với cạnh AC. Tìm k biết tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện của tứ diện được cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\dfrac{1}{3}$.

A. $k\in\left(\dfrac{3}{10};\dfrac{2}{5}\right)$. **B.** $k\in\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$. **C.** $k\in\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{10}\right)$. **D.** $k\in\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Từ N kẻ đường thẳng song song với BC cắt BD tại Q.

Từ M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại P.

Thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của Q, P trên MN. $K = MN \cap PQ$.

Ta có $\dfrac{S_{MNQ}}{S_{MNP}} = \dfrac{QI}{PH} = \dfrac{QK}{PK}$.

$$\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{MNP}} = \dfrac{S_{MNP} + S_{MNQ}}{S_{MNP}} = 1 + \dfrac{S_{MNQ}}{S_{MNP}} = 1 + \dfrac{QK}{PK} = \dfrac{PK + QK}{PK} = \dfrac{PQ}{PK} \Rightarrow \dfrac{S_{MNP}}{S_{MNPQ}} = \dfrac{PK}{PQ}.$$

Do $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được $\dfrac{PK}{KQ} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND} = k$.

$$\Rightarrow \dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{PK}{PK + KQ} = \dfrac{\dfrac{PK}{KQ}}{\dfrac{PK}{KQ} + 1} = \dfrac{k}{k+1}.$$

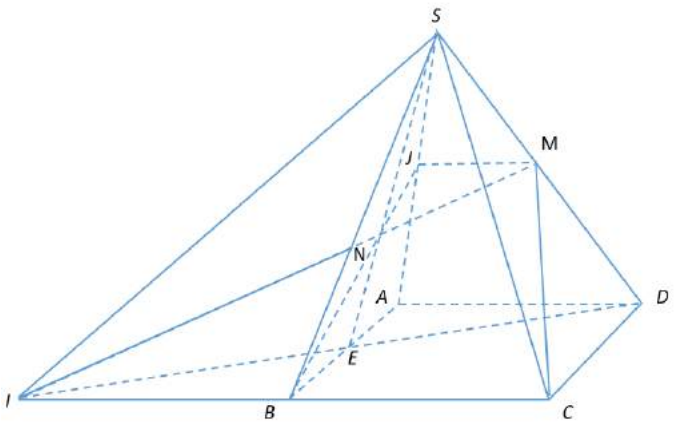
Suy ra $\dfrac{S_{MNP}}{S_{MNPQ}} = \dfrac{k}{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} = \dfrac{k}{k+1} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SD, N là trọng tâm tam giác SAB. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (SBC) tại điểm I. Tính tỷ số $\dfrac{IN}{IM}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Chọn D



Gọi $J;E$ lần lượt là trung điểm $SA;AB$.

Trong mặt phẳng $(BCMJ)$ gọi $I=MN\cap BC$.

•Ta có: IM là đường trung tuyến của tam giác SID.

•Trong tam giác ICD ta có BE song song và bằng $\frac{1}{2}CD$ nên suy ra BE là đường trung bình của tam giác $ICD\Rightarrow E$ là trung điểm $ID\Rightarrow SE$ là đường trung tuyến của tam giác SID.

Ta có: $N=IM\cap SE\Rightarrow N$ là trọng tâm tam giác $SID\Rightarrow \frac{IN}{IM}=\frac{2}{3}$.

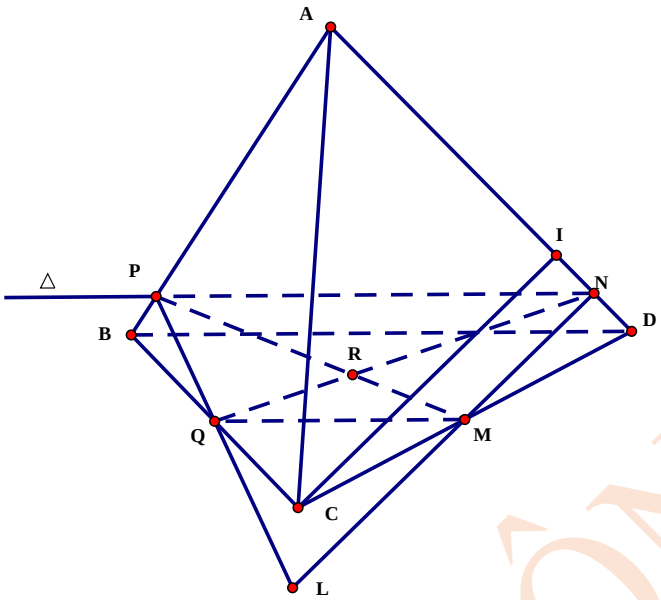
Câu 48. Cho t diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD, I là một điểm thuộc cạnh AD sao cho $IA=3ID$; (α) là mặt phẳng qua M, (α) song song với CI và BD; (α) cắt AD, AB, BC lần lượt tại N,P,Q. Gọi R là giao điểm của MP và NQ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

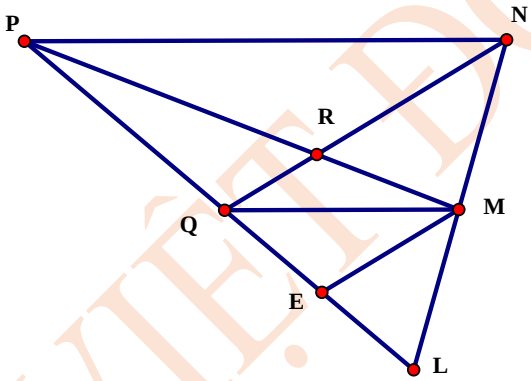
A. $\frac{RP}{RM}=\frac{7}{4}$. **B.** $\frac{PN}{QM}=\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{RN}{RQ}=\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{PN}{BD}=\frac{7}{8}$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG





Từ M kẻ $MQ//BD, Q \in BC$ và $MN//CI, N \in AD$, khi đó mặt phẳng (α) cần dựng là mặt phẳng (MQN).

Giao tuyến của hai mặt phẳng (MQN) và (ABD) là đường thẳng Δ qua N và song song với BD khi đó $AB \cap (MQN) = AB \cap \Delta = P$.

Áp dụng định lý Talet vào hai tam giác ABD và CBD ta đượcc:

$\frac{PN}{BD} = \frac{AN}{AD} = \frac{7}{8} \Rightarrow PN = \frac{7}{8} BD\,(1). \Rightarrow$ **D đúng.**

$\frac{MQ}{BD} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow MQ = \frac{1}{2} BD\,(2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MQ}{NP} = \frac{4}{7} \Rightarrow$ **B đúng.**

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $L = PQ \cap MN$, kẻ $ME//QN$ với $E \in PQ$.

Ta có $\frac{LE}{LQ} = \frac{LM}{LN} = \frac{LQ}{LP} = \frac{MQ}{NP} = \frac{4}{7}$

Vì $\begin{cases} \frac{LE}{LQ} = \frac{4}{7} \\ \frac{LQ}{LP} = \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} QE = \frac{3}{7} QL \\ PQ = \frac{3}{4} QL \end{cases} \Rightarrow \frac{PQ}{QE} = \frac{7}{4}.$

Mặt khá $\frac{RP}{RM}=\frac{PQ}{QE}\Rightarrow\frac{RP}{RM}=\frac{7}{4}\Rightarrow$ **A đúng.**

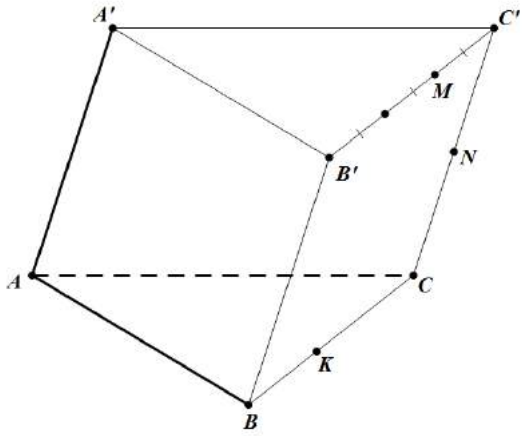
Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được $\frac{RN}{RQ}=\frac{7}{4}\Rightarrow$ **C sai.**

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $B'M=\frac{2}{3}B'C'$, N là trung điểm cạnh CC'. Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ANMA'$ và K thuộc cạnh BC sao cho $KG\parallel(ABB'A')$. Biết $BK=\frac{a}{b}BC$ với $a,b\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a.b$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 60. **D.** 84.

Lời giải

Chọn C



Giả sử gọi $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

Đặt $\overrightarrow{BK}=m\overrightarrow{BC}$.

Ta có:

$\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}-m\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{b}-m\left(\vec{c}-\overrightarrow{b}\right)=(m-1)\overrightarrow{b}-m\overrightarrow{c}$.

$\overrightarrow{KN}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=(m-1)\overrightarrow{b}-m\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+(m-1)\overrightarrow{b}+(1-m)\overrightarrow{c}$.

$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'M}-\overrightarrow{BK}=\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)-m\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\vec{a}+\left(m-\frac{2}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-m\right)\vec{c}$.

Do G là trọng tâm của tứ diện $ANMA'$ nên ta có $4\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KA'}$

Suy ra $4\overrightarrow{KG}=\frac{3}{2}\vec{a}+\left(3m-\frac{8}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{5}{3}-4m\right)\vec{c}$.

Mặt khác $KG\parallel(ABB'A')\Leftrightarrow\frac{5}{3}-4m=0\Leftrightarrow m=\frac{12}{5}$.

Do đó $ab=12.5=60$.

HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

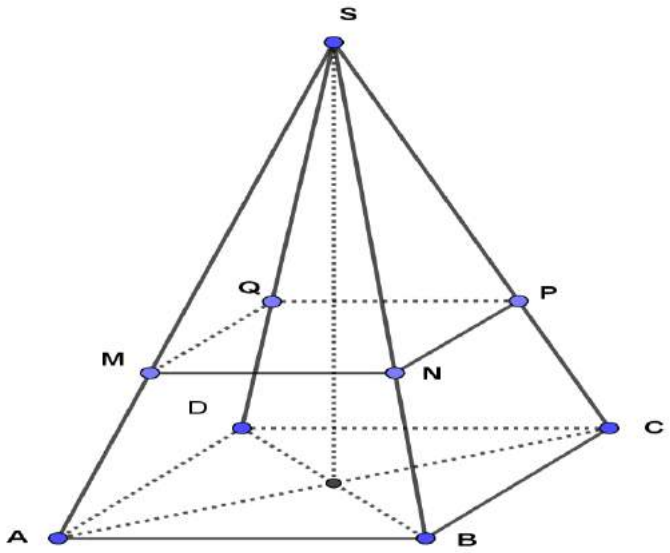
★ Dạng 1: Tính diện tích thiết diện cắt bởi MP song song với MP khác

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{400}{9}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD nên mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Vậy thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp đều $S.ABCD$ là hình vuông $MNPQ$.

Ta có: $\frac{MQ}{AD}=\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}\Rightarrow MQ=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}.10=\frac{20}{3}$.

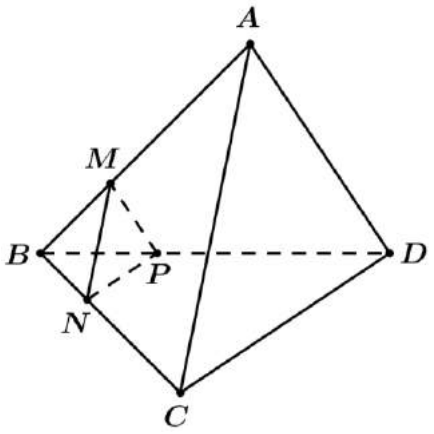
Diện tích của thiết diện là: $S_{MNPQ}=MQ^2=\left(\frac{20}{3}\right)^2=\frac{400}{9}$.

Câu 51. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho $AM=2MB$. Tính diện tích thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AC và CD.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải

Chọn B



Vì thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AC và CD. Nên từ M kẻ đường thẳng song song với AC cắt BC tại N. Và từ N kẻ đường thẳng song song với CD cắt BD tại P. $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác MNP.

Mặt khác $(MNP)//(ACD)$, và ΔACD đều. Nên ΔMNP đều.

Ta có $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{AC}=\frac{MN}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{1}{3}.AC=\frac{a}{3}$.

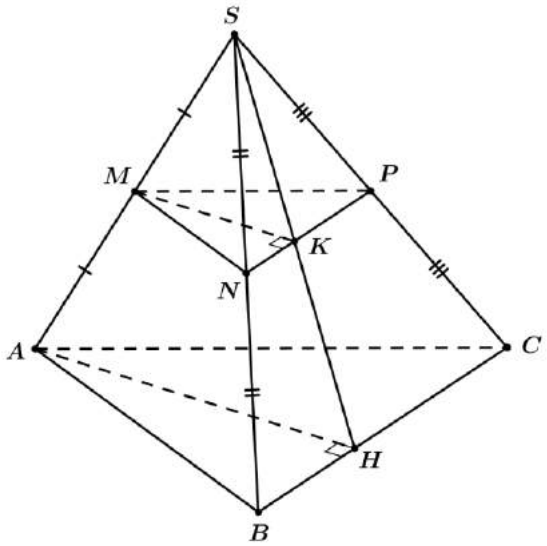
Vậy $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}.MN.MP.\sin 60^0=\frac{1}{2}.\frac{a}{3}.\frac{a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{36}$.

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA; (α) là mặt phẳng qua M và song song với (ABC). (α) lần lượt cắt các cạnh SB, SC tại N và P. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác ABC và MNP. Tính $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B



Vì (α) đi qua M và song song với (ABC), cắt SB, SC lần lượt tại N và P nên ta có $MN//AB$, $NP//BC$ $\Rightarrow N$, P lần lượt là trung điểm của SB, SC.

Dựng các đường cao AH, MK của ΔABC và ΔMNP (xem hình vẽ). Khi đó $MK//AH$.

Theo tính chất đường trung bình, ta có: $BC=2NP$, $AH=2MK$

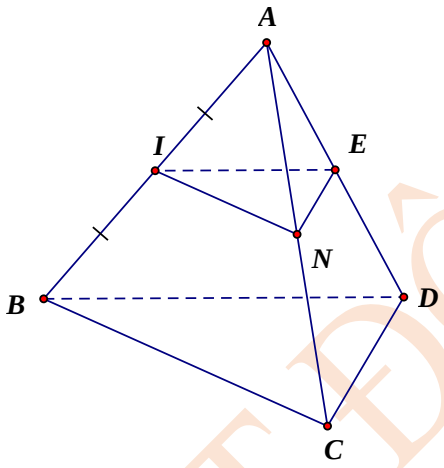
$\Rightarrow S_1 = 4S_2$ hay $\dfrac{S_1}{S_2} = 4$.

Câu 53. Cho hình chóp *ABCD* có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng *x*. Gọi *I* là trung điểm *AB*, qua *I* dựng *mp(P)* song song với *(BCD)*. Diện tích thiết diện của hình chóp và *mp(P)* là

A. $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $(P) \,//\, (BCD) \Rightarrow \begin{cases} BC \,//\, (P) \\ CD \,//\, (P) \\ BD \,//\, (P) \end{cases}$

$\begin{cases} (P) \cap (ABC) = d_1 \\ BC \subset (ABC); BC \,//\, (P) \Rightarrow d_1 \,//\, BC. \\ I \in (P), I \in (ABC) \end{cases}$

Cách dựng: Trong (ABC): Qua *I* dựng đường thẳng d_1 song song với *BC* cắt *AC* tại *N*

$\Rightarrow (P) \cap (ABC) = IN \,(1)$

$\begin{cases} (P) \cap (ADC) = d_2 \\ DC \subset (ADC); DC \,//\, (P) \Rightarrow d_2 \,//\, DC. \\ N \in (P), N \in (ADC) \end{cases}$

Cách dựng: Trong (ADC): Qua *N* dựng đường thẳng d_2 song song với *DC* cắt *AD* tại *E*

$\Rightarrow (P) \cap (ADC) = NE \,(2)$

Trong (ABD): Nối $IE \Rightarrow (P) \cap (ABD) = IE \,(3)$

Từ (1),(2) và (3) suy ra: $mp(P)$ cắt hình chóp *ABCD* theo thiết diện là tam giác *INE*.

Theo cách dựng ta có:

Xét ΔABC: $\begin{cases} IN \,//\, BC \\ IB = IC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AN = NC \\ IN = \dfrac{1}{2} BC = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Xét $\Delta ADC: \begin{cases} NE \,//\, DC \\ AN = NC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AE = ED \\ NE = \frac{1}{2}DC = \frac{x}{2} \end{cases}$

Xét $\Delta ABD: \begin{cases} AI = IB \\ AE = ED \end{cases} \Rightarrow IE = \frac{1}{2}BD = \frac{x}{2}$

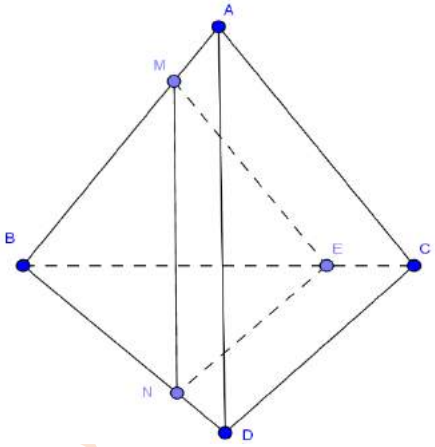
Suy ra: ΔINE là tam giác đều cạnh $\frac{x}{2} \Rightarrow S_{\Delta INE} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{16}\,(dvdt)$

Câu 54. Cho tứ diện có các cạnh bằng $4a$. Lấy M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = a$. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD).

A. $3a^2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có thiết diện cần tìm là mặt phẳng (MNE).

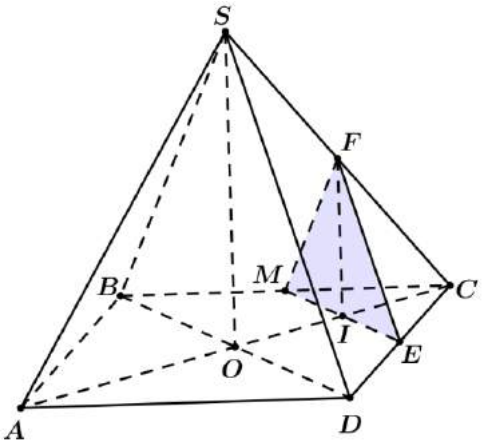
Mà $S_{\Delta ACD} = 4a^2\sqrt{3}, MA = \frac{1}{4}AB \Rightarrow S_{\Delta MNE} = \frac{3}{4}S_{\Delta ACD} = 3a^2\sqrt{3}$.

Câu 55. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SBD) cắt hình chóp theo thiết diện có diện tích bằng

A. $\frac{a^2}{6}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD$.

Gọi E là trung điểm của CD, F là trung điểm của SC. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ ME cắt OC tại I. Khi đó ta có ME // BD và MF // SB. Suy ra thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác MEF có đường cao là FI và cạnh đáy là ME.

Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh cạnh $2a$ suy ra $BD = 2a\sqrt{2} \Rightarrow ME = a\sqrt{2}$.

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$ suy ra $FI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

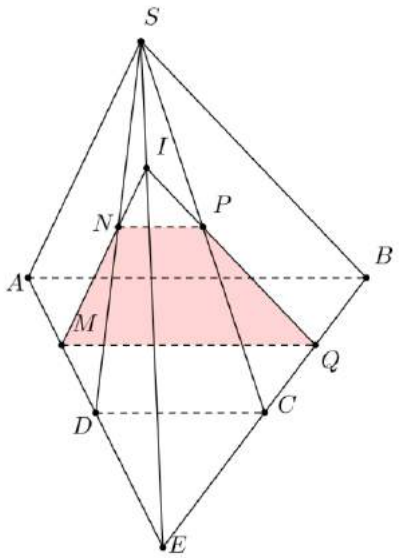
Vậy diện tích thiết diện cần tìm là $S_{\Delta MEF} = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

Câu 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang; $AB = 2CD$, $AB \,//\, CD$. M là trung điểm của cạnh AD; mặt phẳng (α) qua M và song song với mp(SAB) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là hình (H). Biết $S_{(H)} = xS_{\Delta SAB}$. Giá trị của x là:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{27}{64}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh SD, SC, BC.

Gọi $E = AD \cap BC, I = MN \cap PQ$ ta có S, I, E thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (SAD) và (SBC).

Thiết diện là hình thang $MNPQ$ (vì $NP \,//\, AB \,//\, MQ$).

Ta có $S_{MNPQ}=S_{\Delta IMQ}-S_{\Delta INP}$, mà $\frac{NP}{DC}=\frac{1}{2},\frac{DC}{MQ}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{NP}{MQ}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{\Delta INP}=\frac{1}{9}S_{\Delta IMQ}$

$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{\Delta IMQ}-\frac{1}{9}S_{\Delta IMQ}=\frac{8}{9}S_{\Delta IMQ}$.

Ta có M là trung điểm AD, D là trung điểm của AE nên $\frac{MI}{SA}=\frac{3}{4}\Rightarrow S_{\Delta IMQ}=\frac{9}{16}S_{\Delta SAB}$

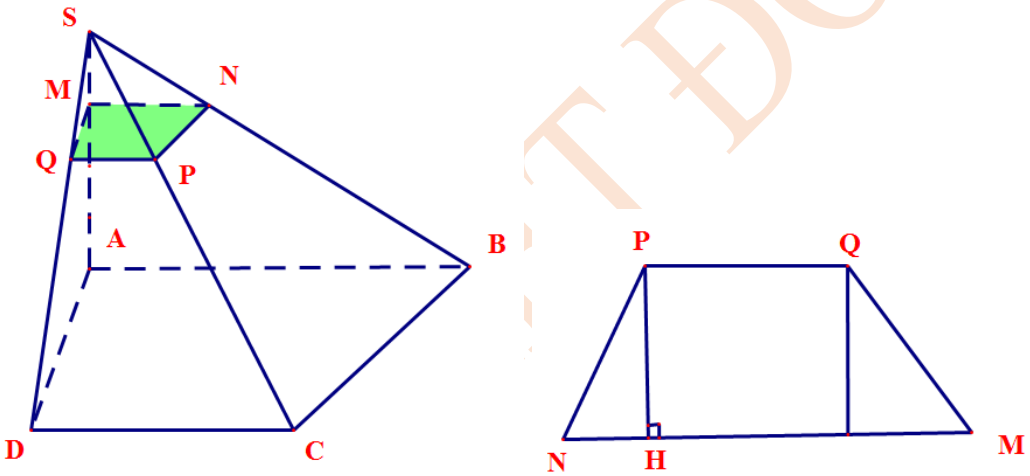
$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{8}{9}.\frac{9}{16}S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}S_{\Delta SAB}$.

Câu 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=3$, hai đáy $AB=8, CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi giao điểm của (P) với các cạnh SB,SC và SD là N,P,Q ta có tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân với hai đáy là MN và PQ.

Có $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{8}{3}$, $PQ=\frac{4}{3}$, $NP=MQ=1$.

Ta có $PH=\sqrt{NP^2-NH^2}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

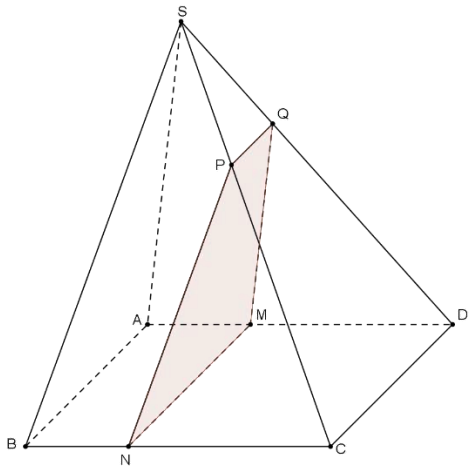
$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{1}{2}.PH\left(MN+PQ\right)=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

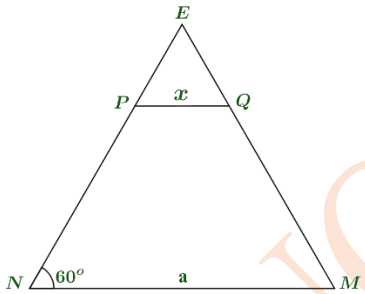
Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều. Gọi M là điểm trên cạnh AD sao cho $AM=x, x\in(0;a)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SAB) lần lượt cắt các cạnh CB,CS,SD tại N,P,Q. Khi diện tích tứ giác $MNPQ$ bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$ thì x bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn C





Kẻ đường thẳng qua M và song song với AB, cắt BC tại N.
Kẻ đường thẳng qua N và song song với SB, cắt SC tại P.
Kẻ đường thẳng qua M và song song với SA, cắt SD tại Q.
Suy ra tứ giác $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (α).

Có $\begin{cases}(\alpha)\cap(SCD)=PQ\\(SCD)\cap(ABCD)=CD\\(ABCD)\cap(\alpha)=MN\end{cases}$

$\Rightarrow PQ,CD,MN$ hoặc đôi một song song, hoặc đồng quy.

Mà $CD//\text{MN}\Rightarrow PQ//CD.(PQ<CD)$ (1)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$.

Ta có: $SA=SB\Rightarrow HA=HB$. Suy ra H thuộc đường trung trực đoạn AB.

$\Rightarrow HC=HD\Rightarrow SC=SD\Rightarrow \Delta SBC=\Delta SAD\ (c-c-c)$

$\Rightarrow PCN=QDM\Rightarrow \Delta PCN=\Delta QDM\ (c-g-c)\Rightarrow PN=QM$ (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác $MNPQ$ là hình thang cân.

Ta có: $\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}=\dfrac{AM}{AD}\Rightarrow PQ=AM=x.$

Gọi $E=PN\cap QM\Rightarrow \Delta ENM$ cân tại E.

Mà $(PN,NM)=(SB,AB)=60^o$

$\Rightarrow \Delta ENM$ là tam giác đều cạnh a và ΔEPQ là tam giác đều cạnh x.

$\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{\Delta EMN}-S_{\Delta EPQ}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

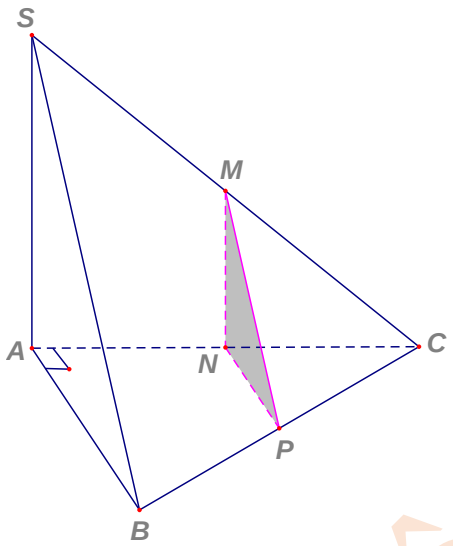
Ta có: $S_{MNPQ}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}-\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow x=\dfrac{a}{3}.$

Câu 59. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA=a$. Gọi Mlà trung điểm SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua Mvà vuông góc với AC.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $\frac{a^2}{8}$. **C.** a^2. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn B



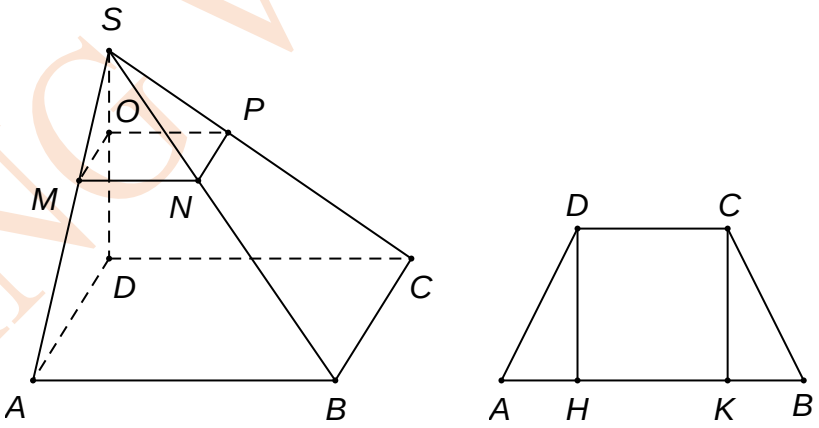
Xét trong mặt phẳng (SAC), từ M kẻ $MN \parallel SA, N \in AC \Rightarrow MN \perp AC(1)$.
Xét trong mặt phẳng (ABC), từ N kẻ $NP \parallel AB, P \in BC \Rightarrow NP \perp AC(2)$.
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (MNP)$.
Khi đó thiết diện cần tìm là tam giác MNP vuông tại N có $MN = NP = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$.
Vậy $S_{td} = S_{MNP} = \frac{1}{2}MN.NP = \frac{a^2}{8}$.

Câu 60. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6,\ CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3\,SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** 2. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



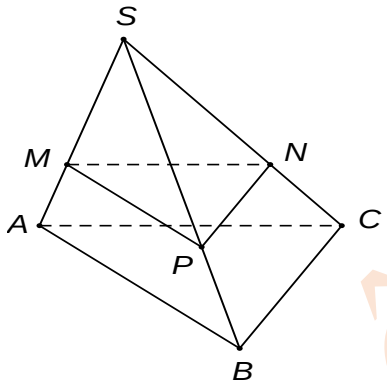
Gọi $H,\ K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $D,\ C$ trên AB.
$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK;\ \ CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow\ BK = 1$.
Tam giác BCK vuông tại K, có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.
Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK.\frac{AB+CD}{2} = \sqrt{3}.\frac{4+6}{2} = 5\sqrt{3}$.
Gọi $N,\ P,\ Q$ lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh $SB,\ SC,\ SD$.
Vì $(P)//(ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3}$.
Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$. **B.** $\frac{14}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30^0 = 4$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC.

Vì $(P)//(ABC)$ nên theoo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP} = k^2.S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.4 = \frac{16}{9}$.

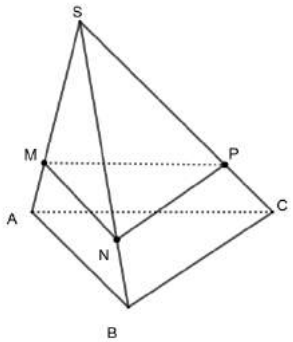
Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4, BAC = 30^0$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{25}{9}$. **B.** 1. **C.** $\frac{14}{9}$ **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải

Chọn D

(P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M và cắt đoạn SB, SC tại N, P như hình vẽ. $SM = 2MA \Rightarrow SM = \frac{2}{3}SA$



Tương tự ta cũng có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$ và $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = \frac{2}{3}$ $(theo\ Talet)$

Suy ra $\Delta ABC \sim \Delta MNP \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNP}} = \frac{9}{4}$ mà

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.sinBAC = \frac{1}{2}.4.4.sin30^0 = 4$

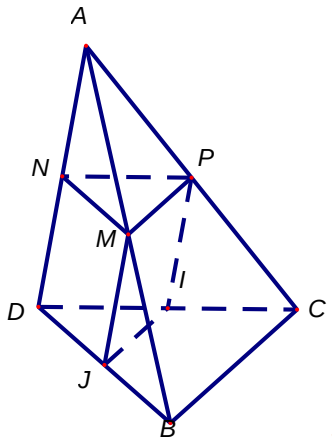
Vậy $S_{\Delta MNP} = \frac{16}{9}$

Câu 63. Cho tứ diện $ABCD$, biết tam giác BCD có diện tích bằng 16. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của AB và song song với mặt phẳng (BCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích bằng

A. 12. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB.

Gọi $MN=(P)\cap(ABD)$ $(N\in AD)$, do $(P)//(BCD)\Rightarrow MN//BD\Rightarrow N$ là trung điểm của AD.

Gọi $MP=(P)\cap(ABC)$ $(P\in AC)$, do $(P)//(BCD)\Rightarrow MP//BC\Rightarrow P$ là trung điểm của AC.

Thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là ΔMNP.

Cách 1:

Gọi I,J lần lượt là trung điểm của CD và BD.

Ta chứng minh được $\Delta MNP=\Delta JDI$ (c – c – c).

Ta có $S_{\Delta MNP}=S_{\Delta DIJ}=\frac{1}{2}DI.DJ.\sin JDI=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}DB.DC.\sin BDC=\frac{1}{4}.S_{\Delta DBC}=\frac{1}{4}.16=4.$

Vậy $S_{\Delta MNP}=4.$

Cách 2:

Ta có $MN=\frac{1}{2}BD,\ NP=\frac{1}{2}CD,\ MP=\frac{1}{2}BC\Rightarrow\Delta MNP$ và ΔBCD đồng dạng theo tỉ số $k=\frac{1}{2}.$

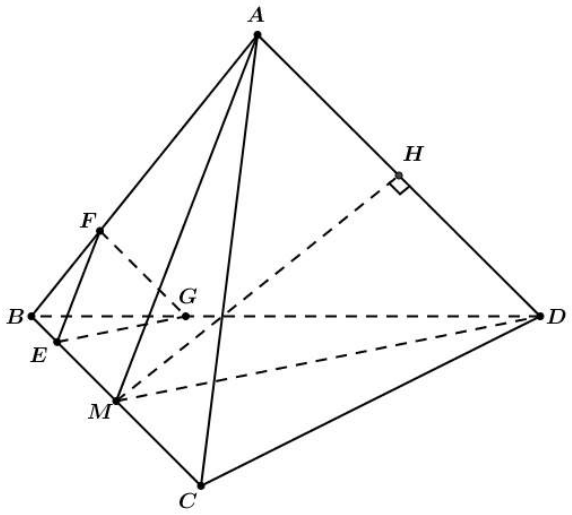
$\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\left(\frac{1}{2}\right)^2.S_{\Delta BCD}=\frac{1}{4}.16=4.$

Câu 64. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 4. Điểm M là trung điểm của đoạn BC, điểm E nằm trên đoạn BM sao cho E không trùng B,M. Mặt phẳng (P) đi qua E và song song với mặt phẳng (AMD). Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Tính độ dài đoạn BE bằng ?

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



□Vì tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên : $AM = MD = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AD, khi đó MH là trung tuyến và là đường cao tam giác AMD.

$MH \quad \sqrt{MD^2 - HD^2} \quad \sqrt{2\sqrt{3}^{\,2} - 2^2} \quad 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow S_{\Delta AMD} = \dfrac{1}{2}MH.AD = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}.4 = 4\sqrt{2}$.

□Vì mặt phẳng (P) đi qua E và song song với mặt phẳng (AMD) nên :

-(P) cắt mặt phẳng (ABC) là đường thẳng qua E và song song AM cắt AB tại F.

-(P) cắt mặt phẳng (ABD) là đường thẳng qua F và song song AD cắt BD tại G.

Vậy thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) là tam giác EFG có các cặp cạnh tương ứng song song với tam giác AMD.

□Đặt $\dfrac{BE}{BM} = x \;\; 0 < x < 1$.

Khi đó : $\dfrac{BE}{BM} = \dfrac{\mathrm{EF}}{AM} = \dfrac{FG}{AD} = x$.

Mà ta có: $\dfrac{S_{\Delta \mathrm{EF}G}}{S_{\Delta AMD}} = \dfrac{\mathrm{EF}}{AM}.\dfrac{FG}{AD} = x^2 = \dfrac{\dfrac{4\sqrt{2}}{9}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

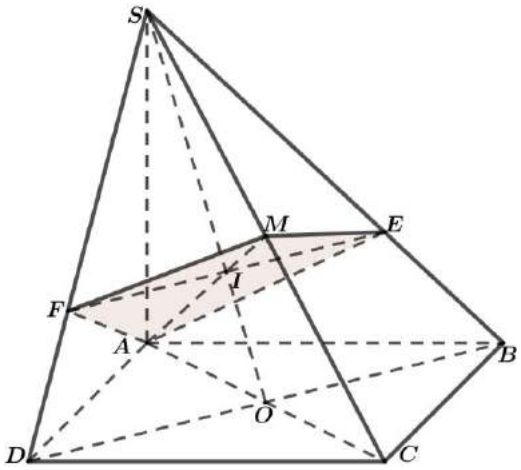
Vậy $BE = \dfrac{1}{3}BM = \dfrac{2}{3}$.

Câu 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}; SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = AM \cap SO$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF // BD$ với $E \in SB, F \in SD$, khi đó $(AEMF) \equiv (\alpha)$ là mặt phẳng chứa đi qua A, M và song song với BD. Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là tứ giác $AEMF$.

Ta có:

$$\begin{cases} FE // BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow FE \perp (SAC) \Rightarrow FE \perp AM$$

$$\Rightarrow S_{AEMF} = \frac{1}{2} FE.AM$$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a = SA$, do đó ΔSAC vuông cân tại#A.

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{2} 2a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$$

Ta có I là trọng tâm ΔSAC nên $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{FE}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow FE = \frac{2}{3} BD = \frac{4a}{3}.$$

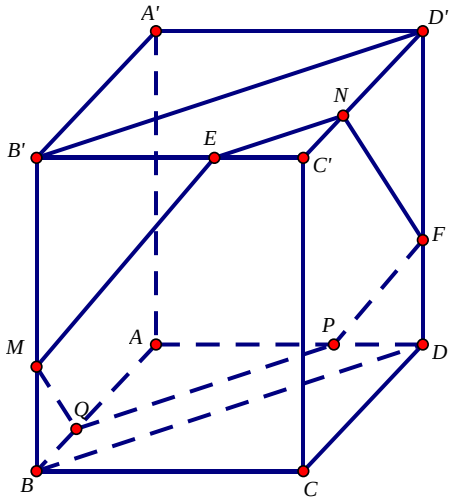
Vậy $S_{AEMF} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 66. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P theo thứ tự đó thuộc các cạnh $BB', C'D', DA$ sao cho $BM = C'N = DP = \frac{a}{3}$. Tìm diện tích thiết diện S của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

A. $S = \frac{17\sqrt{3}a^2}{18}$. **B.** $S = \frac{5\sqrt{3}a^2}{18}$. **C.** $S = \frac{13\sqrt{3}a^2}{18}$. **D.** $S = \frac{11\sqrt{3}a^2}{18}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\frac{BM}{C'N}=\frac{MB'}{ND'}=\frac{BB'}{C'D'}=1$, do đó theo định lý ta-let trong không gian thì BC', MN, $B'D'$ lần lượt cùng song song với một mặt phẳng. Mà $B'D'//(BC'D)$ và $BC'\subset(BC'D)$ nên ta có $MN//(BC'D)$. Chứng minh tương tự ta có $NP//(BC'D)$. Do đó $(MNP)//(BC'D)$.

Qua P, kẻ $PQ//BD, Q\in AB$. Qua N, kẻ $NF//C'D, F\in D'D$.

Qua M, kẻ $ME//BC', E\in B'C'$.

Khi đó ta có thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương là lục giác $MENFPQ$.

Dễ thấy $EN=PF=MQ=\frac{a\sqrt{2}}{3}$, $NF=PQ=ME=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ và tam giác $BC'D$ là tam giác đều vì $BC'=BD=DC'=a\sqrt{2}$. Do đó $ENF=NFP=FPQ=PQM=QME=MEN=60°$

Suy ra: $EF^2=EN^2+NF^2-2.EN.NF.\cos 60°=\frac{2}{3}a^2\Rightarrow EF=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Tương tự thì $FQ=QE=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

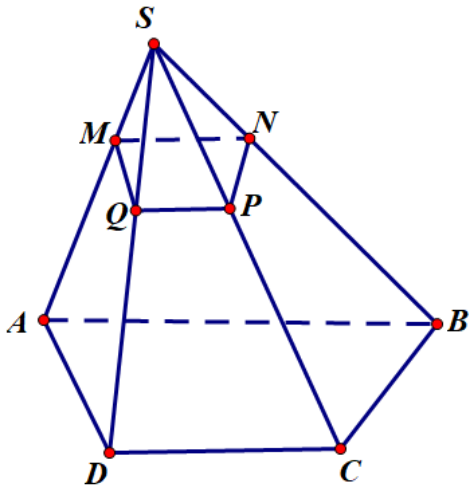
Ta có $S_{MENFPQ}=3.S_{ENF}+S_{EFQ}=3.\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{2a^2}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{18}a^2$.

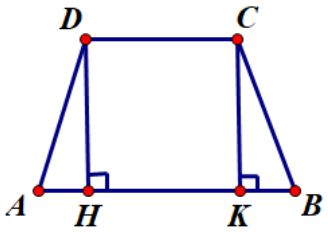
Câu 67. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=\sqrt{5}$, hai đáy $AB=6, CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3\,SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{7\sqrt{5}}{9}$.

Lời giải

Chọn A





Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK; \quad CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1.$

Tam giác BCK vuông tại K, có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{\sqrt{5}^2 - 1^2} = 2.$

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK.\frac{AB+CD}{2} = 2.\frac{4+6}{2} = 5.$

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD.

Vì $(P)\ //\ (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{AD} = \frac{1}{3} = k.$

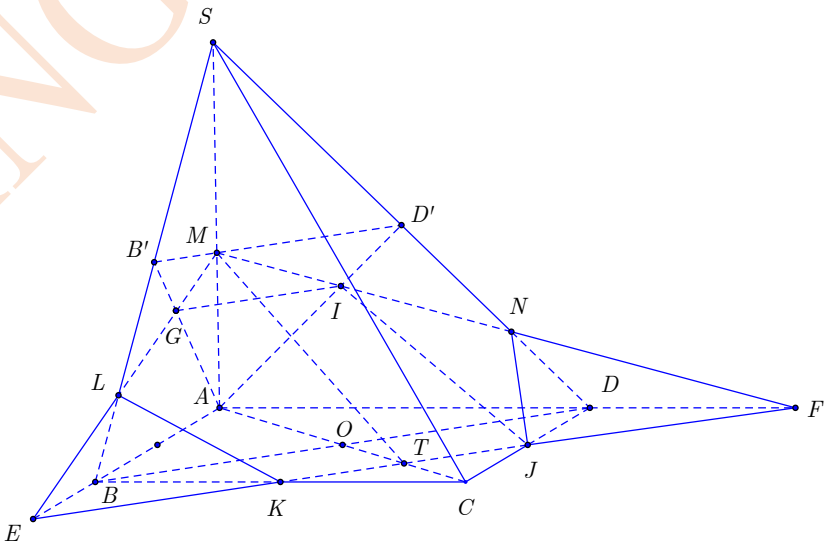
Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \frac{5}{9}.$

Câu 68. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = 7a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G, I, J thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, SAD và trung điểm của CD. Diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (GIJ) bằng

A. $\frac{93a^2}{40}$. **B.** $\frac{23a^2}{60}$. **C.** $\frac{31\sqrt{33}a^2}{45}$. **D.** $\frac{3\sqrt{33}a^2}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $GI\ //\ B'D'$ nên $GI\ //\ BD$ (với B', D' lần lượt là trung điểm của SB và SD).

Suy ra (GIJ) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng d đi qua J và song song với BD.

Trong $(ABCD)$ có d cắt BC tại K, cắt AD tại F, cắt AB tại E.

Do J là trung điểm của CD nên K là trung điểm của BC và $\frac{EB}{EA}=\frac{FD}{FA}=\frac{1}{3}$.

Trong (SAB): đường thẳng EG cắt SA tại M, cắt SB tại L.

Định lí mê nê la uyt cho tam giác $B'AB$ và cát tuyến $\overline{G,L,E}$ ta được $\frac{LB'}{LB}=\frac{2}{3}$.

Định lí mê nê la uyt cho tam giác $B'AS$ và cát tuyến $\overline{G,L,M}$ ta được $\frac{MS}{MA}=\frac{4}{3}$.

Tương tự ta có FI đi qua M và cắt SD tại N thỏa mãn $\frac{DN}{DS}=\frac{1}{5}$.

Định lí mê nê la uyt cho tam giác MAF và cát tuyến $\overline{D,N,S}$ ta được $\frac{MN}{NF}=\frac{8}{7}$.

Thiết diện cần tìm là $MNJKL$.

Gọi $S=S_{MEF}$. Ta có $\frac{S_{FNJ}}{S_{FME}}=\frac{FN}{FM}\cdot\frac{FJ}{FE}=\frac{7}{45}\Rightarrow S_{FNJ}=\frac{7}{45}S$.

Tương tự suy ra $S_{ELK}=\frac{7}{45}S$. Do đó $S_{MNJKL}=\frac{31}{45}S$.

Gọi $T=AC\cap KJ\Rightarrow AT=\frac{3}{4}AC=\frac{3\sqrt{2}a}{4}$. Suy ra $MT=\sqrt{AM^2+AT^2}=\frac{9a}{2\sqrt{2}}$.

Suy ra $S_{MEF}=\frac{1}{2}MT.EF=\frac{1}{2}\cdot\frac{9a}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{2}=\frac{27a^2}{8}$.

Vậy diện tích thiết diện bằng $\frac{93}{40}a^2$.

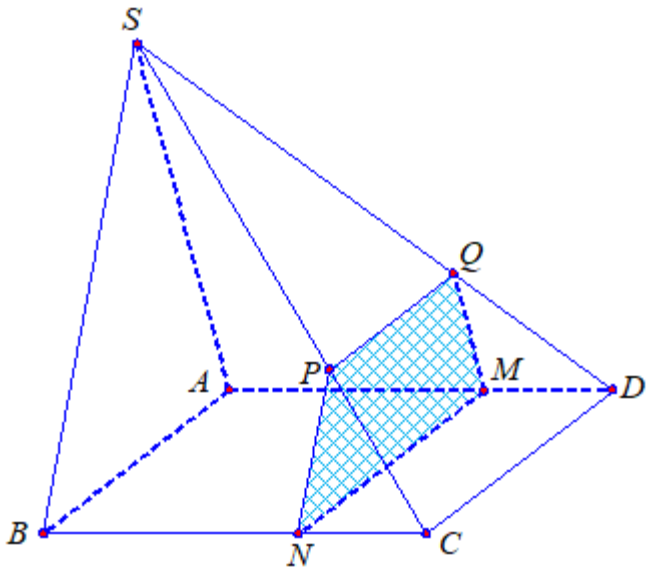
Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A, $SA=a\sqrt{3}$, $SB=2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM=2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{5a^2\sqrt{3}}{18}$. **B.** $\frac{5a^2\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có:

❍ $\begin{cases}(P)\,//\,(SAB)\\ M\in AD, M\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(P)\cap(ABCD)=MN\\ (P)\cap(SCD)=PQ\end{cases}$ và $MN//PQ//AB$ (1)

❍ $\begin{cases}(P)\,//\,(SAB)\\ M\in AD, M\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(P)\cap(SAD)=MQ\\ (P)\cap(SBC)=NP\end{cases}$ và $\begin{cases}MQ//SA\\ NP//SB\end{cases}$

Mà tam giác SAB vuông tại A nên $SA\perp AB\Rightarrow MN\perp MQ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông tại M và Q.

Mặt khác

❍ $MQ//SA\Rightarrow\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{DQ}{DS}\Rightarrow MQ=\dfrac{1}{3}SA$ và $\dfrac{DQ}{DS}=\dfrac{1}{3}$.

❍ $PQ//CD\Rightarrow\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}\Rightarrow PQ=\dfrac{2}{3}AB$, với $AB=\sqrt{SB^2-SA^2}=a$

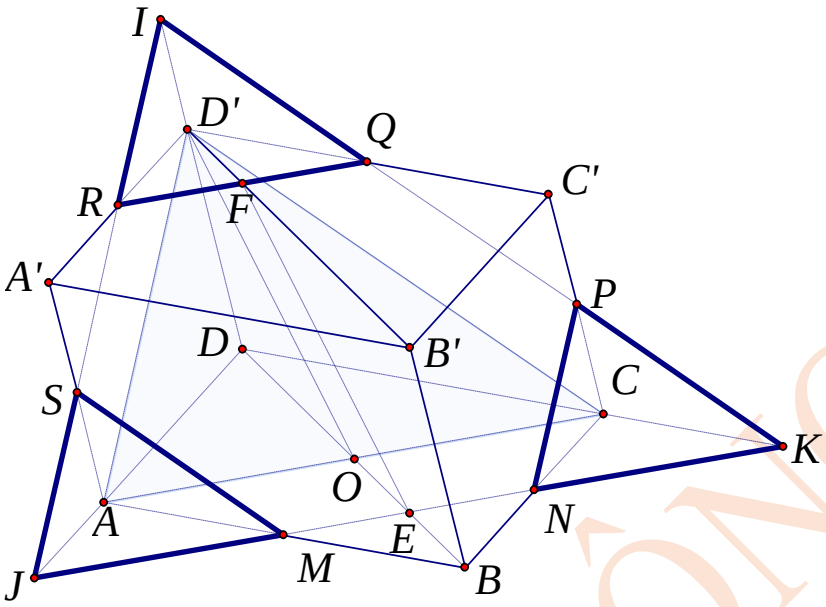
Khi đó $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MQ.(PQ+MN)\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}\dfrac{SA}{3}.\left(\dfrac{2AB}{3}+AB\right)\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{18}$.

Câu 70. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ Trên cạnh AB lấy điểm M khác A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ACD'). Gọi $S=S_{\Delta ACD'}$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình hộp có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu theo diện tích tam giác ACD'.

A. $\dfrac{S}{2}$. **B.** S. **C.** $\dfrac{3S}{2}$. **D.** $2S$.

Lời giải

Chọn C



Trong mp$(ABCD)$, qua M vẽ đường thẳng song song với AC cắt DB, BC lần lượt tại E, N.

Trong mp$(BDD'B')$, qua E vẽ đường thẳng song song với $D'O$ $(O=AC\cap BD)$ cắt $B'D'$ tại F.

Trong mp$(A'B'C'D')$, qua F vẽ đường thẳng song song với AC cắt $A'D'$, $D'C'$ lần lượt tại R, Q.

Trong mp$(AA'D'D)$, qua R vẽ đường thẳng song song với AD' cắt AA' tại S.

Trong mp$(CC'D'D)$, qua Q vẽ đường thẳng song song với CD' cắt CC' tại P.

Thiết diện là lục giác $MNPQRS$.

Do các mặt đối diên của hình hộp song song nên các cạnh đối của lục giác thiết diên $MNPQRS$ song song và 3 cặp cạnh đó lần lượt song song với các cạnh tam giác ACD'.

$\Rightarrow$ Các tam giác JKI, ACD', RQI, JMS, NKP đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{MJ}{MN}=\frac{MA}{MB}=\frac{NC}{NB}=\frac{NK}{NM}=\frac{PC}{PC'}=\frac{PK}{PQ}=\frac{QD'}{QC'}=\frac{QI}{QP}\Rightarrow MJ=NK \text{ và } PK=QI$$

$\Rightarrow$ Các tam giác RQI, JMS, NKP bằng nhau (gọi diện tích của chúng là S_1 và gọi diện tích các tam giác JKI, ACD' lần lượt là S_2, S).

Đặt $\frac{AM}{AB}=k$; ta có điều kiện $0<k<1$ và có:

$$\frac{S_1}{S}=\left(\frac{JM}{AC}\right)^2=\left(\frac{AM}{DC}\right)^2=\left(\frac{AM}{AB}\right)^2=k^2\Rightarrow S_1=k^2S.$$

$$\frac{S_2}{S}=\left(\frac{JK}{AC}\right)^2=\left(\frac{JM+MK}{AC}\right)^2=\left(\frac{JM}{AC}+\frac{MK}{AC}\right)^2=(k+1)^2\Rightarrow S_2=\left(k^2+2k+1\right)S.$$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện: $S_{td}=S_2-3S_1$

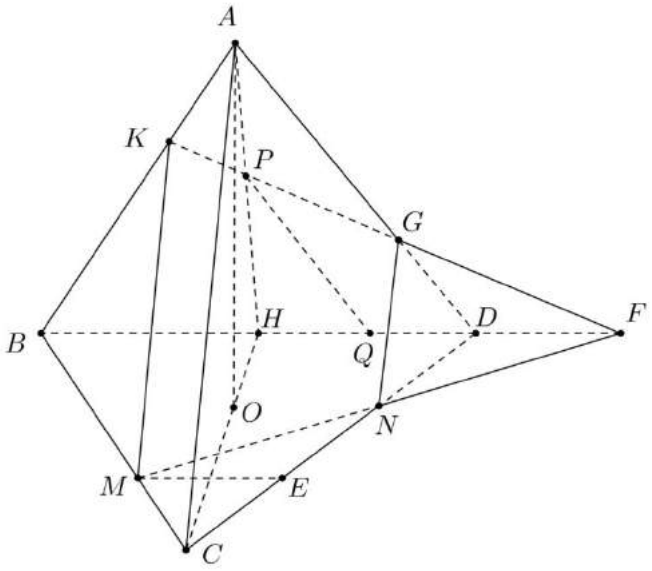
$$S_{td}=2S(-k^2+k+\frac{1}{2})=2S\left[\frac{3}{4}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right]\le\frac{3S}{2}\text{ (dấu bằng xảy ra }\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}).$$

Câu 71. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Trên cạnh BC, CD lần lượt lấy M, N sao cho $\frac{MC}{MB}=\frac{1}{2}$, $\frac{CN}{CD}=\frac{2}{3}$. Trên trung tuyến AH của tam giác ABD lấy điểm P sao cho $\frac{PA}{PH}=\frac{4}{5}$. Diện tích thiết diện khi cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) là

A. $\frac{5a^2\sqrt{11}}{12}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{11}}{12}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



+) Trong (BCD), gọi $F=MN\cap BD$;

+) Trong (ABD), gọi $G=FP\cap AD$ và $K=FP\cap AB$;

+) Suy ra, thiết diện khi cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNGK$.

+) Gọi E là trung điểm CN. Dễ thấy: $\Delta NEM=\Delta NDF$ (g – c – g)

Suy ra $FD=ME=\frac{1}{3}BD=\frac{a}{3}$.

+) Trong (ABD), kẻ $PQ//AD$ $(Q\in BD)$. Khi đó trong ΔHAD, theo định Thales ta có:

$\frac{PQ}{AD}=\frac{HP}{HA}=\frac{5}{9}\Leftrightarrow PQ=\frac{5}{9}AD=\frac{5a}{9}$

và $\frac{DQ}{DH}=\frac{AP}{AH}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow DQ=\frac{4}{9}DH=\frac{4}{9}\cdot\frac{a}{2}=\frac{2a}{9}$.

+) Trong ΔFQP, theo định Thales ta có:

$$\frac{DG}{PQ}=\frac{FD}{FQ}=\frac{FD}{FD+DQ}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}+\frac{2a}{9}}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow DG=\frac{3}{5}PQ=\frac{3}{5}\cdot\frac{5a}{9}=\frac{a}{3}$$

Suy ra $\frac{DG}{DA}=\frac{1}{3}$, mà $\frac{DN}{DC}=\frac{1}{3}$ (gt)

Nên $NG//CA$ (theo Thales đảo).

+) Xét hai mặt phẳng $(MNGK)$ và (ABC) có điểm chung là M và lần lượt chứa hai đường thẳng $NG//CA$ (chứng minh trên), nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng đi

qua M và song song với NG và CA (giao tuyến đó theo cách dựng bạn đầu thì chính là MK). Suy ra $MK//NG//CA$. Do đó thiết diện $MNGK$ là hình thang. (1)

+) ΔCMN có

$$MN=\sqrt{CM^2+CN^2-2CM.CN.\cos MCN}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2\frac{a}{3}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\cos 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

+) Dễ thấy $\Delta AKG=\Delta CMN$ (c – g – c) $\Rightarrow KG=MN=\frac{a}{\sqrt{3}}$. (2)

+) Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là hình thang cân có hai đáy $NG=\frac{a}{3}$, $MK=\frac{2a}{3}$ và hai cạnh bên $KG=MN=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Suy ra đường cao của hình thang cân này là:

$$h=\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{11}}{6}.$$

+) Vậy $S_{MNGK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{a\sqrt{11}}{6}=\frac{a^2\sqrt{11}}{12}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẲNG

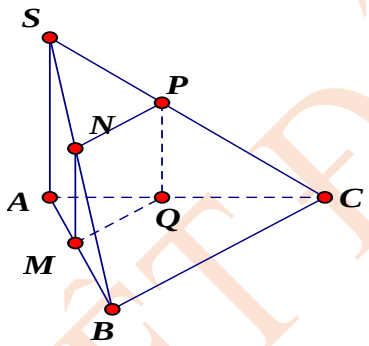
★ Dạng 1: Thiết diện, tính diện tích thiết diện

Câu 72. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a, SA=a\sqrt{3}$ và $SA\perp(ABC)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB và $AM=x(0<x<a)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AB. Giả sử thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với (α) là tứ giác $MNPQ$. Tìm x để thiết diện $MNPQ$ lớn nhất.

A. $x=\dfrac{a}{2}$. **B.** $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $x=\dfrac{3a}{2}$. **D.** $x=a$.

Lời giải

Chọn A



Ta tìm được $MNPQ$ là hình chữ nhật

$$MQ=AM=x,\frac{MN}{SA}=\frac{MB}{AB}\Rightarrow MN=\frac{(a-x)a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}(a-x)$$

$$S_{MNPQ}=MN.\mathrm{MQ}=\sqrt{3}(a-x)x=\sqrt{3}\left[\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]\le\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\max S_{MNPQ}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\text{ khi }x=\frac{a}{2}$$

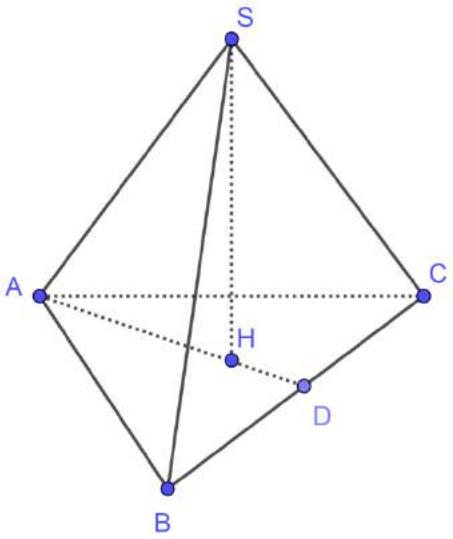
Câu 73. Cho hình chóp tam giác đều, các cạnh bên có độ dài bằng $a\sqrt{3}$ và tạo với đáy một góc $60°$. Diện tích S của đáy hình chóp là

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $S=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S=\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. **D.** $S=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Giả sử $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, các cạnh bên có độ dài bằng $a\sqrt{3}$ và tạo với đáy một góc $60°$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

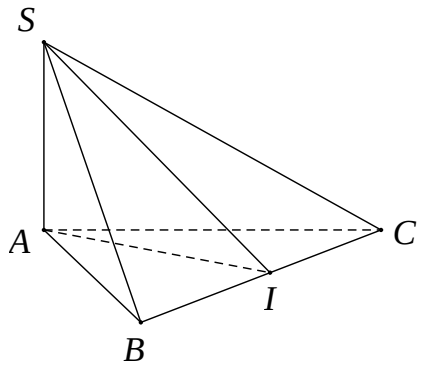
Ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC và $SAH = 60°$.

Do đó $AH = SA.\cos 60° = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $AD = \dfrac{3}{2}AH = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Suy ra $AB = \dfrac{2}{\sqrt{3}}AD = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{9}{4}.a^2 = \dfrac{9\sqrt{3}}{16}a^2$ (đvdt).

Câu 74. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = a$, $SA \perp ABC$, I là trung điểm của BC. Gọi P là mặt phẳng qua A và vuông góc với SI.

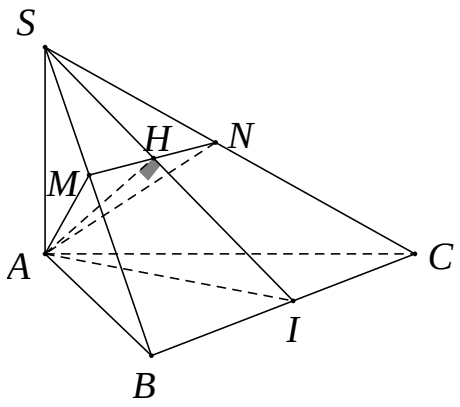


Diện tích thiết diện của mặt phẳng P và hình chóp $S.ABC$ được tính theo a bằng

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{12}}{7}$. **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh được $SI \perp BC$.

Kẻ $AH \perp SI$, Qua H kẻ MN song song với BC. Ta có $\begin{cases} SI \perp MN \\ SI \perp AH \end{cases} \Rightarrow SI \perp AMN$ hay thiết diện là tam giác AMN.

Tam giác ABC đều nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

AH là đường cao trong tam giác vuông SAI nên $AH = \dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ta có $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$; $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{7}}$.

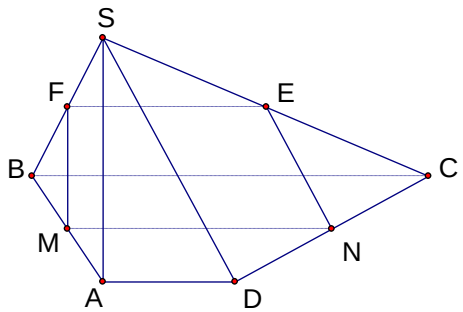
Áp dụng định lý Talét: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SH}{SI} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow MN = \dfrac{4a}{7}$.

Vậy $S_{AMN} = \dfrac{1}{2} AH.MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 75. Cho hình chóp $S.ABCD$có đường cao $SA = 4a$. Biết đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = 3a$, $AD = a$. Gọi M trung điểm cạnh AB và (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là đa giác có diện tích bằng:

A. $\frac{5a^2}{2}$. **B.** $\frac{7a^2}{2}$. **C.** $7a^2$. **D.** $5a^2$.

Lời giải



Chọn B

Gọi N, F lần lượt là trung điểm CD và $SB \Rightarrow \begin{cases} MN \perp AB \\ MF \perp AB \end{cases} \Rightarrow (MNF) \perp AB$

$\Rightarrow (MNF)$ là mặt phẳng (α)

Từ F kẻ $FE||MN$ cắt SC tại $E \Rightarrow$ thiết diện là hình thang $MNEF$ vuông tại M và F

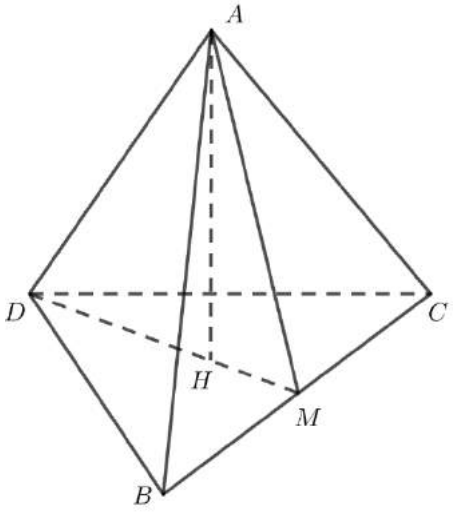
Ta có: $MF = \frac{SA}{2} = 2a$, $MN = \frac{AD+BC}{2} = 2a$, $EF = \frac{BC}{2} = \frac{3a}{2}$

Từ đây ta suy ra $S_{MNEF} = \frac{1}{2}MF.(MN+EF) = \frac{7a^2}{2}$.

Câu 76. Cho tứ diện đều $ABCD$. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ và mặt phẳng trung trực của cạnh BC là

A. hình thang. **B.** tam giác vuông. **C.** hình bình hành. **D.** tam giác cân.

Lời giải



Chọn D

Gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là chân đường cao của tứ diện hạ từ A.

Ta có $\begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM)$.

Suy ra (ADM) là mặt phẳng trung trực của cạnh BC.

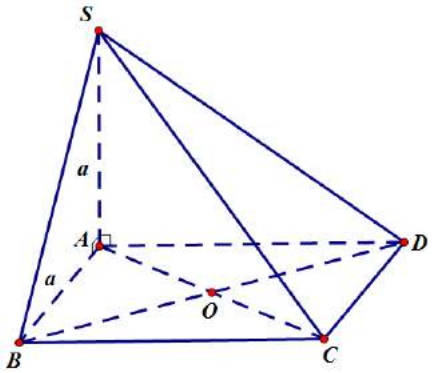
Thiết diện tạo bởi tứ diện $ABCD$ và (ADM) là tam giác ADM cân tại M.

Câu 77. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB = a$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua SA và vuông góc với (SBD). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (Q) là

A. tam giác vuông. **B.** tam giác đều.
C. tam giác vuông cân. **D.** hình bình hành.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do đó $(SAC) \perp (SBD)$.

Suy ra thiết diện cần tìm la tam giác SAC.

Tam giác SAC vuông tại A có $SA=a, AC=a\sqrt{2}$.

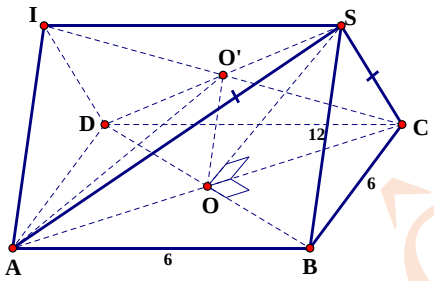
Vậy thiết diện cần tìm là tam giác vuông.

Câu 78. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6 và hình bình hành $CDIS$ không nằm trên cùng một mặt phẳng. Biết tam giác SAC cân tại S, $SB=12$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (ACI) có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** $18\sqrt{2}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và hình bình hành $CDIS$.

Ta thấy $OO'=\frac{1}{2}SB=6$ (đường trung bình của ΔSBD) và $mp(ACI)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là $\Delta ACO'$.

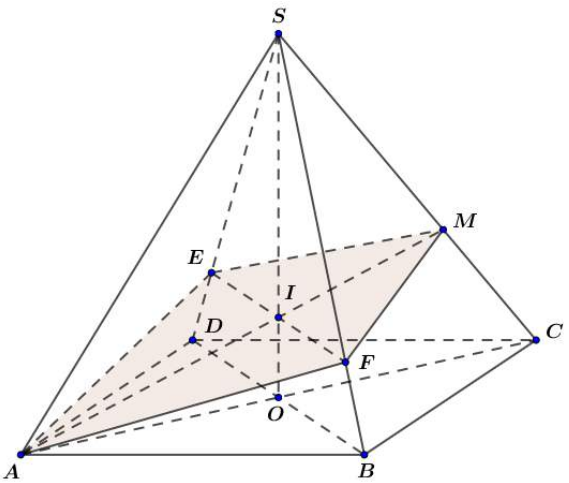
Theo giải thiết ΔSAC cân tại S và $ABCD$ là hình vuông nên $AC\perp SO$ và $AC\perp BD$, suy ra $AC\perp OO'$. Do đó $S_{\Delta ACO'}=\frac{1}{2}OO'.AC=\frac{1}{2}6.6\sqrt{2}=18\sqrt{2}$.

Câu 79. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM=2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải

Chọn C

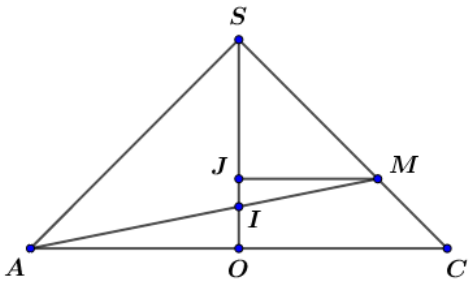


Gọi I là giao điểm của AM và SO. Dựng EF đi qua I và song song với BD.

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $AEMF$.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow EF \perp AM$. Nên $S_{AEMF} = \frac{1}{2} AM.EF$.

ΔSAM vuông tại S, nên $AM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.



Dựng $MJ // AC, J \in SO \Rightarrow \frac{MJ}{AO} = \frac{IJ}{IO} = \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow EF = \frac{4}{5} BD = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$

Vậy $S_{AEMF} = \frac{1}{2} AM.EF = \frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

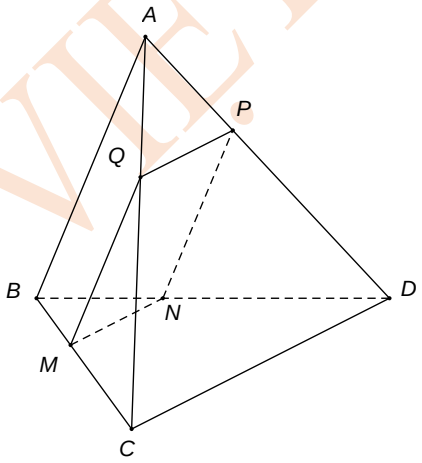
Câu 80. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$

Tương tự ta có $MN // CD,\ NP // AB,\ QP // CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN \perp MQ (do\ AB \perp CD)$.

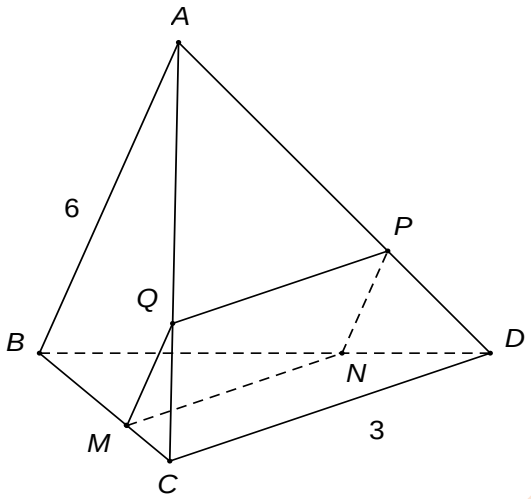
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 81. Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6, CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt BD, AD, AC lần lượt tai M, N, Q. Diện tích $MNPQ$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD.$

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{QM;MP}\right)=60^0$. Suy ra $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0$.

Ta có $\Delta CMQ\backsim\Delta CBA\Rightarrow\frac{CM}{CB}=\frac{MQ}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MQ=2.$

$$\Delta AQN\backsim\Delta ACD\Rightarrow\frac{AQ}{AC}=\frac{QN}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow QN=2.$$

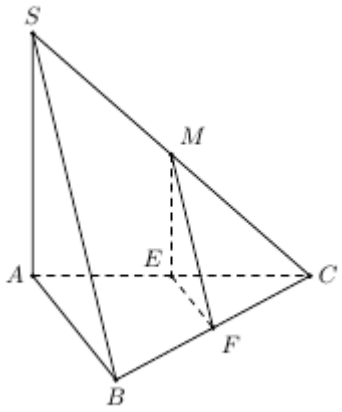
Vậy $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0=2.2.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 82. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $\frac{a^2}{8}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC.

Do đó $ME//SA$, $EF//AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác).

Mà $SA\perp(ABC)$ (gt) nên $ME\perp(ABC)$, suy ra $ME\perp EF$.

Dễ thấy $(MEF)\equiv(P)$, thiết diện là tam giác MEF vuông tại E.

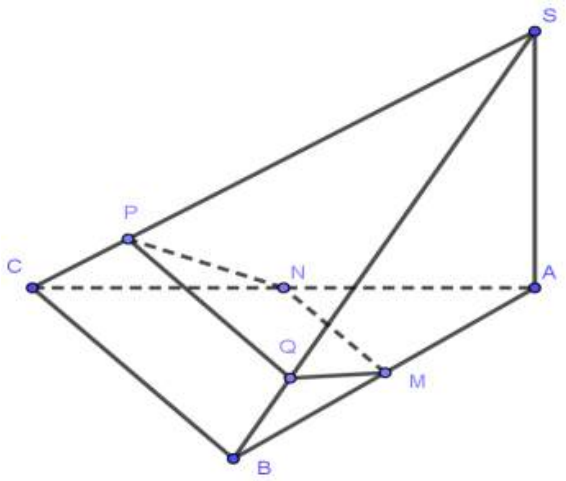
Diện tích thiết diện là $S=\frac{1}{2}ME.EF=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}SA.\frac{1}{2}AB=\frac{a^2}{8}$.

Câu 83. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC,SC,SB lần lượt tại N,P,Q. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng:

A. $\dfrac{11a^2\sqrt{3}}{64}$. **B.** $\dfrac{33a^2\sqrt{3}}{64}$. **C.** $\dfrac{33a^2}{64}$. **D.** $\dfrac{33a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



$BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$

Do Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC,SC,SB lần lượt tại N,P,Q nên $MN//PQ//BC$, do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M,Q.

$S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}(MN+PQ).MQ$

+ ΔABC có $MN//BC, MN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

+ $\Delta MQB\backsim\Delta SAB\Rightarrow\dfrac{MQ}{MB}=\dfrac{SA}{SB}\Rightarrow MQ=\dfrac{SA.MB}{SB}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a.2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$;

$QB=\sqrt{MB^2-MQ^2}=\dfrac{a}{4}\Rightarrow SQ=\dfrac{7a}{4}$.

Có: $MN//PQ//BC$ nên $\dfrac{PQ}{BC}=\dfrac{SQ}{SB}\Rightarrow PQ=\dfrac{SQ.BC}{SB}=\dfrac{7a\sqrt{3}}{8}$.

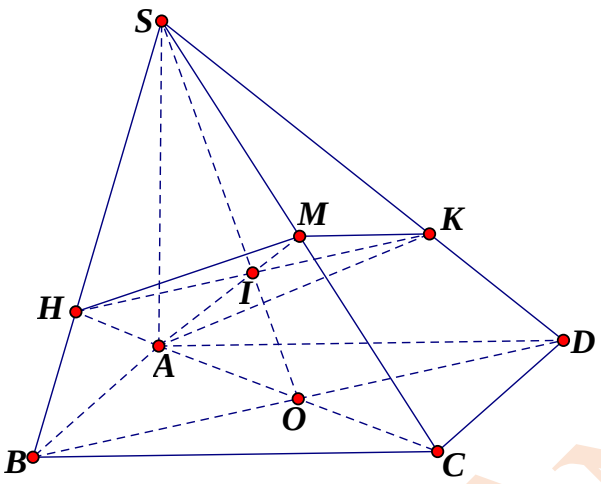
Vậy $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}(MN+PQ).MQ=\dfrac{33a^2}{64}$.

Câu 84. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A,M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC), gọi $I = SO \cap AM$.

Trong (SBD) kẻ đường thẳng qua I và song song với BD lần lượt cắt SB, SD tại H, K.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AMKH$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow HK \perp AM$.

Ta có $AM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}a = a\sqrt{2}$.

Và I là trọng tâm tam giác SAC nên $\frac{HK}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}a$.

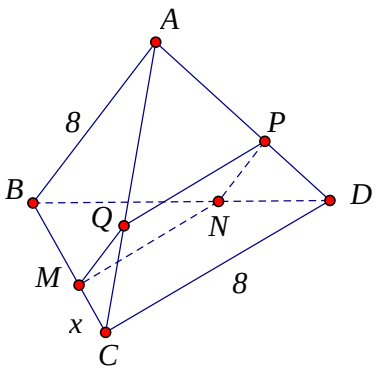
Vậy diện tích tứ giác $AHMK$ là $S_{AHMK} = \frac{1}{2}AM.HK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$.

Câu 85. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 8$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC - x.BC$ $0 < x < 1$. Mặt phẳng qua M, song song với AB, CD và lần lượt cắt DB, AD, AC tại N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu?

A. 32. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D



+) $MQ // AB$ và $NP // AB \Rightarrow MQ // PN$, tương tự $PQ // NM$ (vì cùng $// CD$), mà $AB \perp CD$ $\Rightarrow$Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

+) $\frac{MQ}{AB}=\frac{MC}{BC}=1-\frac{BM}{BC}=1-\frac{MN}{CD}\Rightarrow\frac{MQ}{AB}+\frac{MN}{CD}=1=\frac{MQ+MN}{8}\Rightarrow MQ+MN=8.$

+) $S_{MNPQ}=MQ.MN\le\frac{(MQ+MN)^2}{4}=16.$

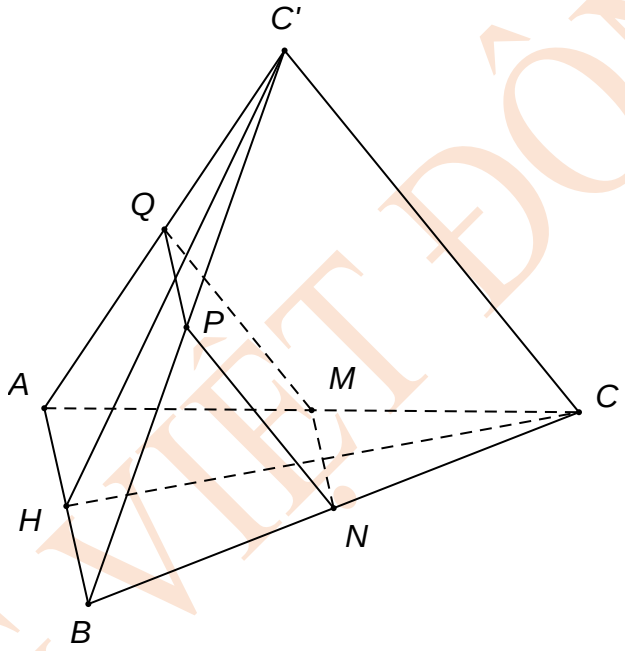
Suy ra diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng 16.

Câu 86. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC,CB,BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC,CB,BC' và $C'A$

$\Rightarrow\begin{cases}PQ=MN=\frac{1}{2}AB\\PQ//AB//MN\end{cases}\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases}CH\perp AB\\C'H\perp AB\end{cases}$.

Suy ra $AB\perp(CHC')$. Do đó $AB\perp CC'$.

Ta có $\begin{cases}PQ//AB\\PN//CC'\\AB\perp CC'\end{cases}\Rightarrow PQ\perp PN.$

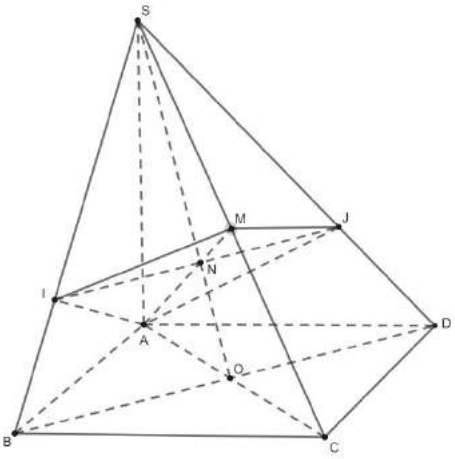
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$; $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A,M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{4a^2}{3}$ **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $a^2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A



+ Xác định mặt phẳng (α)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, N là giao điểm của SO và AM.

Trong mặt phẳng (SBD), qua N kẻ đường thẳng song song với BD, cắt SD, SB lần lượt tại I và J.

Ta có, (α) là mặt phẳng $(AIMJ)$.

Thật vậy, rõ ràng $(AIMJ)$ qu A, M Mặt khác, BD song song với IJ (theo cách dựng), nên BD song song với $(AIMJ)$.

+ Tính diện tích thiết diện

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM$

Mà $BD // IJ$ nên $IJ \perp AM$.

$S_{AIMJ} = \frac{1}{2}.IJ.AM$ (Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc).

Ta có: $AC = BD = 2a$.

SA vuông góc với đáy nên $SA \perp AC$.

Suy ra, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}$.

$AM = \frac{1}{2}SC = a\sqrt{2}$ (CT độ dài đường trung tuyến trong tam giác vuông).

N là trọng tâm của tam giác SAC. Suy ra, $\frac{IJ}{BD} = \frac{SN}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}.2a = \frac{4a}{3}$.

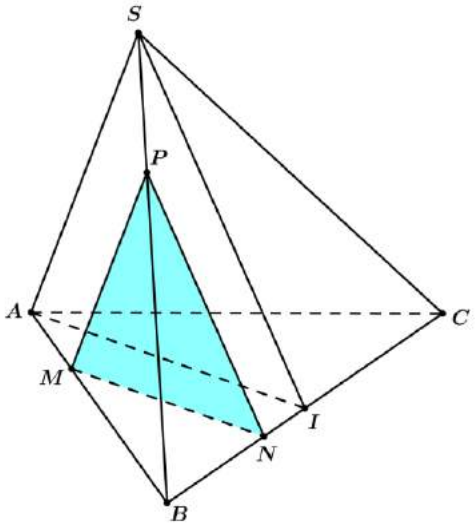
Vậy $S_{AIMJ} = \frac{1}{2}AM.IJ = \frac{1}{2}.\frac{4a}{3}.a\sqrt{2} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 88. Cho tứ diện $S.ABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên AB sao cho $AM = b\ (0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $S.ABC$ có diện tích bằng?

A. $\frac{3\sqrt{3}}{16}(a-b)^2$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$ **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$ **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}(a-b)^2$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có $SI \perp BC$ do ΔSBC đều. Ta có $AI \perp BC$ do ΔABC đều.Vậy $BC \perp (SAI)$.

Từ M kẻ $MN//AI$ $(N \in BC)$ và Từ N kẻ $NP//SI$ $(P \in SB)$.

Thiết diện cần tìm là ΔMNP.

Ta có $\Delta BMP \approx \Delta BAS$ nên $\frac{BM}{BA} = \frac{MP}{AS} \Leftrightarrow MP = \frac{BM}{BA}.AS \Leftrightarrow MP = \frac{a-b}{a}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$.

Tương tự ta có $MN = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$; $NP = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$.

Vậy ΔMNP đều có cạnh bằng $\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$. Suy ra diện tích $S = \frac{3\sqrt{3}(a-b)^2}{16}$.

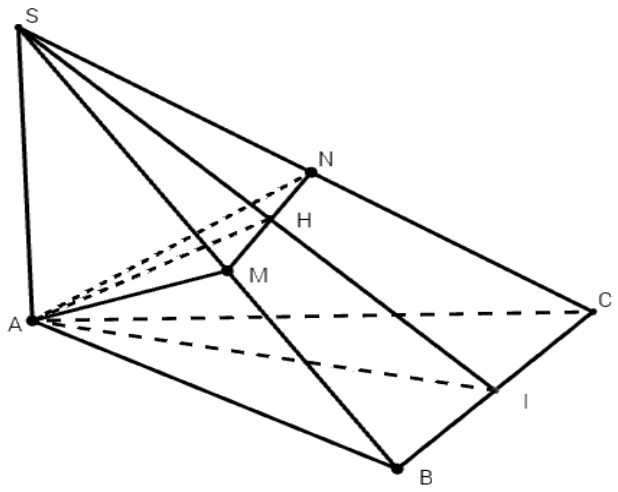
Câu 89. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **B.** $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

C. $S_{\Delta AMN} = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$. **D.** $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SI.
Kẻ đường thẳng MN qua H và song song với BC và cắt SB, SC lần lượt tại M, N.
Ta có: $SI \perp BC \Rightarrow SI \perp MN$ và $SI \perp AH$.
$\Rightarrow SI \perp (AMN)$.
Ta chứng minh được $BC \perp (SAI) \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp MN$.
Ta dễ dàng chứng minh được tam giác AMN cân.

$$AH = \sqrt{\frac{SA^2.AI^2}{SA^2+AI^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

Ta có: $SI = \sqrt{SA^2+AI^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$.

$$SA^2 = SI.SH \Rightarrow SH = \frac{2}{\sqrt{7}}a.$$

Do $MN // BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{SH}{SI} \Rightarrow MN = \frac{4}{7}a$.

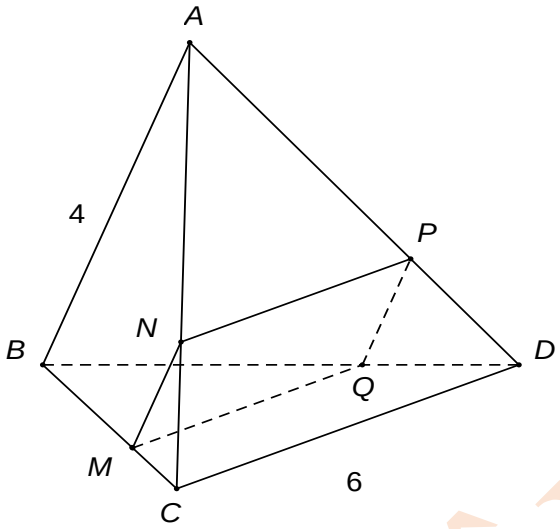
$$S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AH = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}.$$

Câu 90. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4$, $CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng P đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{17}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MN\end{cases}\Rightarrow MN//AB.$

Tương tự ta có $MQ//CD,\ NP//CD,\ QP//AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{MN;MQ}\right)=\widehat{NMQ}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\Delta CMN\backsim\Delta CBA\Rightarrow\frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3};$

$$\Delta ANP\backsim\Delta ACD\Rightarrow\frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4.$$

Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}$.

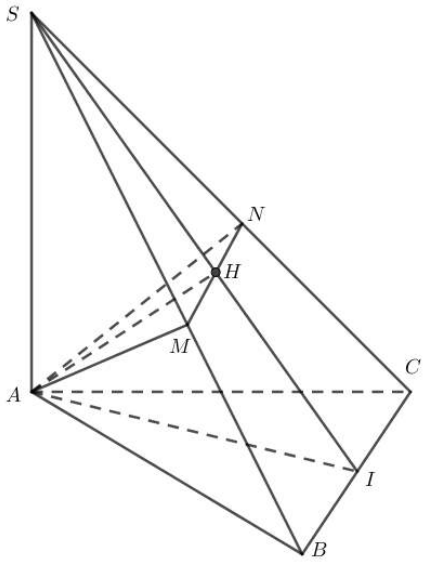
Câu 91. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN}=\frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$ **B.** $\boldsymbol{S_{\Delta AMN}=\frac{2a^2\sqrt{21}}{7}}$

C. $\boldsymbol{S_{\Delta AMN}=\frac{4a^2\sqrt{21}}{49}}$ **D.** $S_{\Delta AMN}=\frac{a^2\sqrt{21}}{7}$

Lời giải

Chọn A



Tam giác AMN cân tại A

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}$$

Suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{7} = \frac{4a^2}{7}$$

Suy ra $SH = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

$$SI = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}a}{2}$$

$$\frac{MN}{BC} = \frac{SH}{SI} = \frac{4}{7}$$

Suy ra $MN = \frac{4}{7}a$

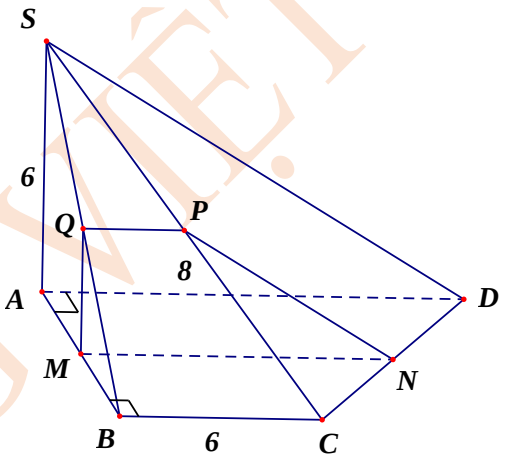
$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.\frac{4a}{7} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$$

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD=8$, đáy nhỏ $BC=6$, SA vuông góc với đáy, $SA=6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng

A. 20. **B.** 16. **C.** 30. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D



Gọi N, P và Q lần lượt là trung điểm của CD, SC và SB.

Ta có: $(P)\cap(SAB)=MQ$, $(P)\cap(ABCD)=MN$, $(P)\cap(SCD)=NP$.

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang vuông tại M, Q và $MQ=PQ=3$, $MN=7$.

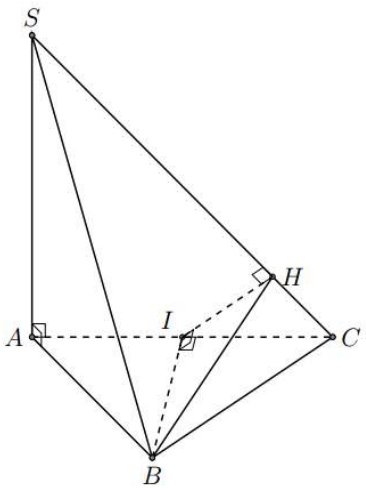
Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là: $S_{MNPQ} = \frac{MQ.(MN+PQ)}{2} = \frac{3.(7+3)}{2} = 15$.

Câu 93. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính diện tích thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC.

A. $\frac{a^2\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{20}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AC. Do ΔABC đều nên $BI \perp AC$.
Mặt khác $BI \perp SA$ (do $SA \perp (ABC)$ và $BI \subset (ABC)$).

Suy ra $BI \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BI$.

Kẻ IH vuông góc SC tại H.

$\Rightarrow SC \perp (IBH)$.

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là tam giác IBH.

Ta có $BI \perp (SAC)$ và $IH \subset (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$.

Suy ra tam giác IBH vuông tại I.

Ta có:

$BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$.

$\sin C = \dfrac{IH}{IC} = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow IH = \dfrac{IC.SA}{SC} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

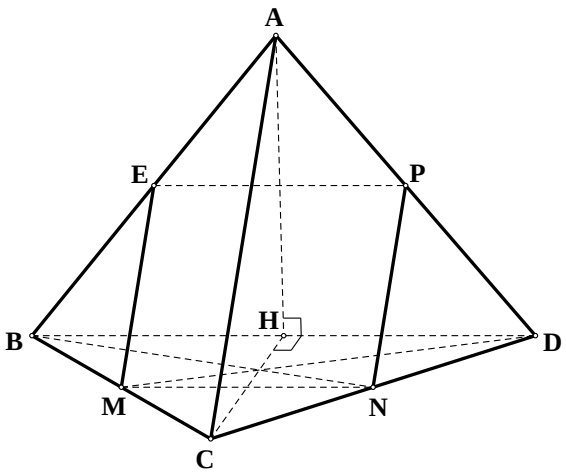
$S_{\Delta IBH} = \dfrac{1}{2} IB.IH = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{5} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Câu 94. Cho tứ diện đều $ABCD$, mặt phẳng (α) qua trung điểm của cạnh AB, song song AC và BD cắt tứ diện theo thiết diện là

A. Hình tam giác đều.
B. Hình vuông.
C. Hình tam giác vuông cân.
D. Hình thang cân.

Lời giải

Chọn B



Gọi E, M, N, P, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD và BD. Mặt phẳng (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện $EMNP$.

Dễ thấy $EM = MN = NP = PE$ (cùng bằng nữa độ dài cạnh tứ diện), (1).

Ta có $\begin{cases} AH \perp BD \\ CH \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACH) \Rightarrow BD \perp AC$.

Mà $\begin{cases} NP \,//\, AC \\ EP \,//\, BD \end{cases}$.

Suy ra $NP \perp EP$, (2).

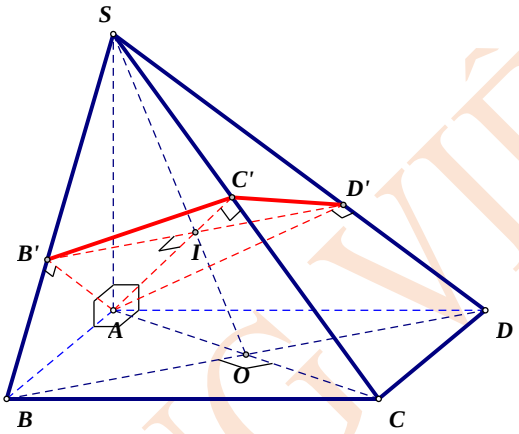
Từ (1) và (2) ta có $EMNP$ là hình vuông.

Câu 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB tạo với đáy góc 45^0. Một mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AB'C'D'$ có diện tích bằng:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Dễ thấy $SBA = 45°$. Ta có $B'D' \perp SC$ và $BD \perp SC$ và SC không vuông góc với mặt phẳng (SBD), suy ra $BD\,//\,B'D'$. Nên từ $I = SO \cap AC'$ nên từ I kẻ $B'D'\,//\,BD$ cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

Từ trên suy ra $B'D' \perp AC'$ và $\begin{cases} AB' \perp SC \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp SB$.

Suy ra $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} AC'.B'D'$. Mà $AC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2.a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B'D' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} AC'.B'D' = \dfrac{\sqrt{3}}{6} a^2$.

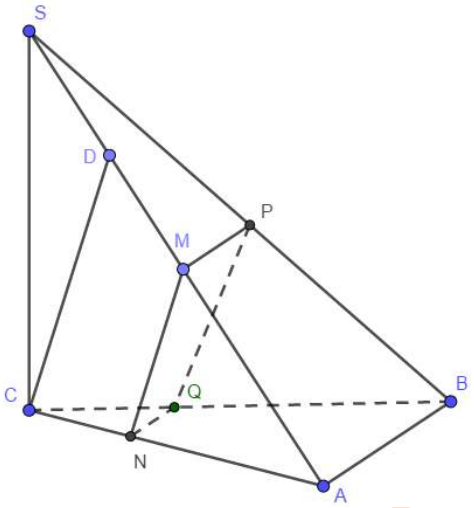
Câu 96. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $ABC = 60^0$, $SC = a$, $SC \perp (ABC)$. Kẻ $CD \perp SA$ tại D. Thiết diện qua $M \in AD$ và vuông góc với AD là

A. Tam giá **B.** Hình bình hành.

C. Hình vuông. **D.** Hình thang vuông.

Lời giải

Chọn D



Trong mp $(SAC): MN//CD \Rightarrow MN \perp AD.$

Trong mp $(SAB): MP//AB \Rightarrow MP \perp AD \Rightarrow (MNP) \perp AD$.

Mặt khác $MP//AB \Rightarrow MP//(ABC) \Rightarrow (MNP) \cap (ABC) = QN \Rightarrow QN//MP$.

Lại có $AB \perp MN \Rightarrow MP \perp MN$.

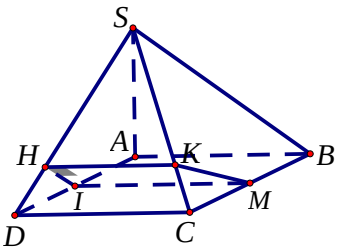
Vậy thiết diện cần tìm là hình thang vuông $MNQP$ tại M, N.

Câu 97. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a, SA = 2a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD, mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với SD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $\frac{3\sqrt{5}a^2}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{15}a^2}{16}$. **C.** $\frac{15\sqrt{3}a^2}{16}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}a^2}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $IM//CD$ với $M \in BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix} IM \perp SA \\ IM \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow IM \perp (SAD) \Rightarrow IM \perp SD \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = IM$.

- Kẻ $IH \perp SD$ với $H \in SD \Rightarrow (P) \cap (SAD) = IH$.
- Vì $\left.\begin{matrix} IM//CD \\ IM \subset (P) \\ CD \subset (SCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (P) \cap (SCD) = HK$ với $HK//IM\ (//CD)$ và $K \in SC$.
- $(P) \cap (SBC) = KM$.

Vì $IM \perp (SAD)$ nên $IM \perp IH$. Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang $IHKM$ vuông tại I và H.
Ta có $IM = AB = 2a$.

Xét ΔSAD có: $\tan SAD = \dfrac{SA}{AD} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{2a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60°$.

Xét ΔDHI có: $\sin HDI = \dfrac{HI}{ID} \Rightarrow HI = ID.\sin 60° = a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSAD có: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

Xét ΔDHI có: $HD = \sqrt{ID^2 - IH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow SH = SD - HD = 4a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{7a}{2}$.

Vì $HK // CD$ nên theo Talet ta có $\dfrac{HK}{CD} = \dfrac{SH}{SD} = \dfrac{\frac{7a}{2}}{4a} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow HK = \dfrac{7}{8}CD = \dfrac{7}{8}.2a = \dfrac{7a}{4}$.

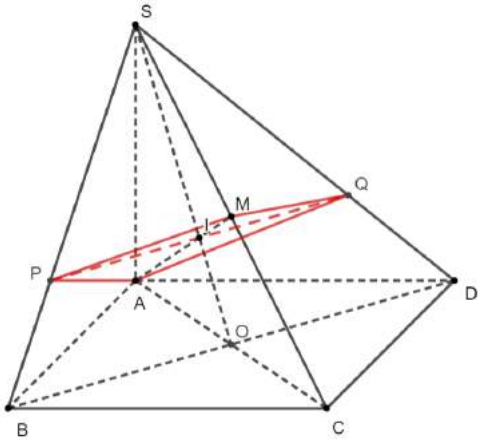
Do đó diện tích thiết diện là $S_{IHKM} = \dfrac{(IM + HK).IH}{2} = \dfrac{\left(2a + \dfrac{7a}{4}\right).\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}a^2}{16}$.

Câu 98. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}, SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Xác định mặt phẳng (α)

- Gọi $O = AC \cap BD$
- Xét mp(SAC) gọi $I = SO \cap AM$

Xét mp(SBD); do $(\alpha) // BD$ nên qua I kẻ $PQ // BD (P \in SB; Q \in SB)$

Như vậy $(\alpha) \cap (SBC) = PM$; $(\alpha) \cap (SCD) = QM$; $(\alpha) \cap (SAB) = PA$; $(\alpha) \cap (SAD) = QA$;

Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) là mp$(APMQ)$

- Tính diện tích thiết diện tứ giác $APMQ$

$\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp AM\,(AM \subset (SAC))$

$\Rightarrow PQ \perp AM\,(BD // PQ)$

$\Rightarrow S_{APMQ} = PQ.AM$

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow AC = BD = 2a$.

$\Rightarrow SAC$ là tam giác vuông cân tại $A, SD = 2\sqrt{2}a$; $SM = MC = \dfrac{SD}{2} = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow AM \perp SC \Rightarrow AM = \sqrt{AC^2 - MC^2} = a\sqrt{2}$

Xét $\Delta SBD; PQ // BD \Rightarrow \dfrac{PQ}{BD} = \dfrac{SP}{SB} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$ (I là trọng tâm ΔSAC).

$\Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}2a = \dfrac{4}{3}a$.

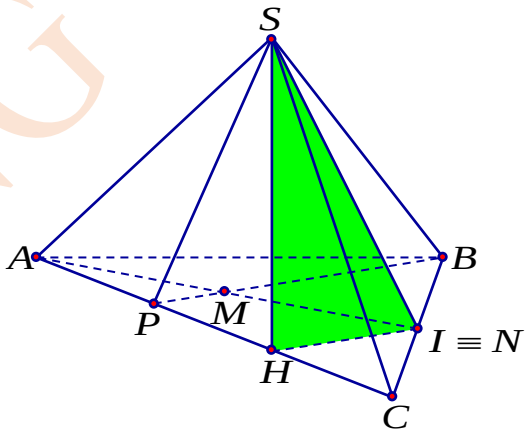
$\Rightarrow S_{APMQ} = PQ.AM = \dfrac{a^2 4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 99. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $BC = 2a$. Điểm H thuộc cạnh AC sao cho $CH = \dfrac{1}{3}CA$, SH là đường cao hình chóp $S.ABC$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi I là trung điểm BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Gọi (α) là mặt phẳng đi qua H và vuông góc với AI.

Vì $SH \perp (ABC)$, $AI \subset (ABC)$ nên $SH \subset (\alpha)$.

Ta có $AI = AB = BI = a$ nên ΔABI là tam giác đều. Gọi M là trung điểm AI, ta được $BM \perp AI\,(1)$. Từ đây suy ra $(\alpha) // BM$ (vì cùng vuông góc AI).

Trong (ABC) dựng $HN // BM$ với $N \in BC$, ta suy ra $(\alpha) \cap (ABC) = HN$.

Từ đó, thiết diện của mặt phẳng (α) và hình chóp là ΔSHN.

Xét ΔABP vuông có: $\begin{cases}\cos 30^\circ = \dfrac{AB}{BP} \\ \sin 30^\circ = \dfrac{AP}{BP}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}BP = \dfrac{AB}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \\ AP = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\end{cases}$.

Dễ thấy $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow CH = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy H là trung điểm của $CP \Rightarrow HN$ là đường trung bình của ΔCBP hay $N \equiv I \Rightarrow HN = \dfrac{1}{2}BP = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông $SHN\left(H = 90^\circ\right)$: $S_{SHN} = \dfrac{1}{2}HS.HN = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Cách 2: Tam giác ABI đều $\Rightarrow IAH = 30^\circ$.

Áp dụng định lí côsin trong ΔAHI có $IH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Vậy $\begin{cases}AH^2 = \dfrac{4a^2}{3} \\ HI^2 = \dfrac{a^2}{3} \\ AI^2 = a^2\end{cases}$ suy ra ΔAIH vuông đỉnh I hay $HI \perp AI$.

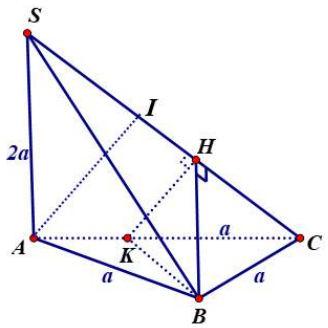
Phần tiếp theo giống cách 1.

Câu 100. Cho tứ diện $SABC$ có ΔABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích thiết diện của tứ diện $SABC$ với (α).

A. $\dfrac{3a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{10}$.

Lời giải

Chọn B



*) Xác định thiết diện:

+) Vì $(\alpha) \perp SC$ nên (α) cắt mp (SBC) theo giao tuyến qua B và vuông góc với SC. Trong mp (SBC), kẻ đường thẳng qua B và vuông góc với SC cắt SC tại H.

+) Vì $(\alpha) \perp SC$ nên (α) cắt mp (SAC) theo giao tuyến qua B và vuông góc với SC. Trong mp (SAC), kẻ đường thẳng qua H và vuông góc với SC cắt AC tại K.

+) Nối B với K ta được thiết diện của (α) và hình chóp là tam giác BHK.

*) Tính diện tích

+) Ta có $SC \perp (BHK)$ nên $SC \perp BK$.

+) $\begin{cases} BK \perp SC \\ BK \perp SA \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC) \Rightarrow BK \perp AC \,\&\, BK \perp HK$. Do đó K là trung điểm của AC và ΔBHK vuông tại K.

+) Ta có $S_{\Delta BKH} = \frac{1}{2} KB.KH$; $KB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

+) Ta có $SC^2 = SA^2 + AC^2 = a + (2a)^2 = 5a^2$. Gọi I là hình chiếu của A trên SC. Khi đó AI và HK cùng vuông góc với SC. Vì K là trung điểm của AC nên $HK = \frac{1}{2} AI$.

+) Ta có $AI.SC = AS.AC \Rightarrow AI = \frac{AS.AC}{SC} = \frac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Suy ra $HK = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

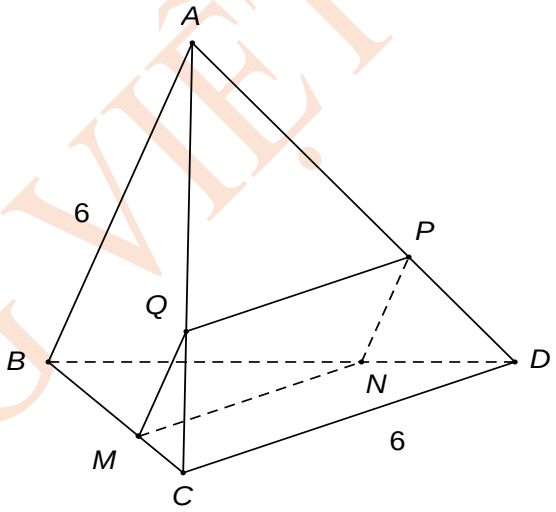
Vậy $S_{\Delta BHK} = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} . \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Câu 101. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC (0 < x < 1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1 - x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \le 36 \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9$.

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

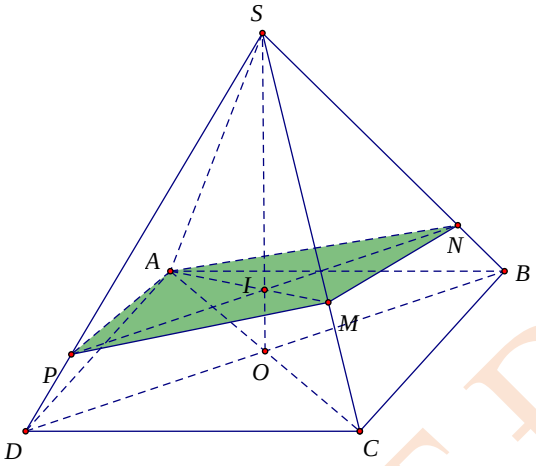
Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 102. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **C.** 48. **D.** $\dfrac{4\sqrt{26}a^2}{15}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = AM \cap SO$.

Trong (SBD) từ I kẻ đường thẳng Δ song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại N, P.

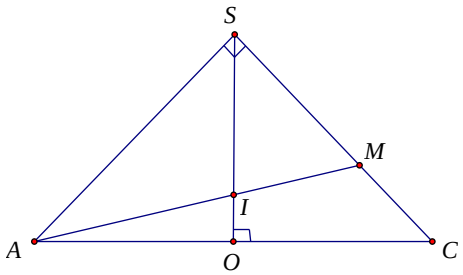
Suy ra thiết diện là tứ giác $ANMP$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM$.

Mặt khác: $BD // NP \Rightarrow AM \perp NP \Rightarrow S_{ANMP} = \dfrac{1}{2} NP.AM$.

Ta có: $\begin{cases} SA = SC = a \\ AC = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{2}{3}a\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$.

Ta có: $NP // BD \Rightarrow \dfrac{NP}{BD} = \dfrac{SI}{SO} \Rightarrow NP = \dfrac{SI.BD}{SO}$.



Gọi $\dfrac{SI}{SO} = k$.

Cách 1: Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SI} = -\overrightarrow{SA} + k\overrightarrow{SO}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SM} = -\overrightarrow{SA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SC}$.

$A,\ I,\ M$ thẳng hàng $\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AI}=l\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow -\overrightarrow{SA}+k\overrightarrow{SO}=-l\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}l\overrightarrow{SC}$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{SA}+\frac{k}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\right)=-l\overrightarrow{SA}+\frac{2}{3}l\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}k+l=1\\ \frac{1}{2}k-\frac{2}{3}l=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{4}{5}\\ l=\frac{3}{5}\end{cases}\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{4}{5}$$

Cách 2: Do $A,\ I,\ M$ thẳng hàng nên

$$\frac{SI}{IO}.\frac{AO}{AC}.\frac{MC}{MS}=1\Leftrightarrow\frac{SI}{IO}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow SI=4IO\Rightarrow SI=\frac{4}{5}SO$$

$$\Rightarrow NP=\frac{4}{5}BD=\frac{4a\sqrt{2}}{5}.$$

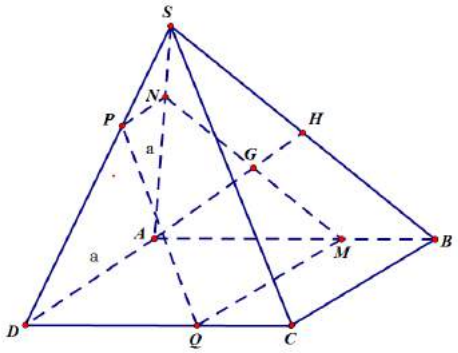
$$\Rightarrow S_{ANMP}=\frac{1}{2}NP.AM=\frac{1}{2}.\frac{4a\sqrt{2}}{5}.\frac{a\sqrt{13}}{3}=\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}.$$

Câu 103. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, hai tam giác SAB và SAD vuông cân tại A. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua G và song song với SB và AD. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ có diện tích bằng

A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



• Ta có: $\begin{cases}SA\perp AD\\ SA\perp AB\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

• Gọi H là trung điểm của SB. Mà G là trọng tâm của tam giác SAB.

Suy ra điểm $G\in AH$ và $\frac{AG}{AH}=\frac{2}{3}$.

• Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$:

+ Ta có: $\begin{cases}G\in(\alpha)\cap(SAB)\\ (\alpha)//SB\end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (α) là đường thẳng d_1 đi qua điểm G và song song với SB. Trong mặt phẳng (SAB), gọi M,N lần lượt là giao điểm của d_1với các cạnh AB,AS.

+ Ta có: $\begin{cases}N\in(\alpha)\cap(SAD)\\ (\alpha)//AD\end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (α) là đường thẳng d_2 đi qua điểm N và song song với AD. Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của d_2với cạnh SD.

+ Ta có: $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ABCD)\\ (\alpha)//AD\end{cases}$

$\Rightarrow$ Giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (α) là đường thẳng d_3 đi qua điểm M và song song với AD. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi Q là giao điểm của d_3với cạnh CD.

Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Mặt khác, ta lại có: $\begin{cases} AD \perp (SAB) \\ MQ \,//\, AD \,//\, PN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MQ \perp (SAB) \\ PN \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow MQ \perp MN, PN \perp MN.$

Do đó, tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M và N.

• Tính diện tích thiết diện.

+ Xét tam giác SAB có G là trọng tâm của tam giác SAB và $MN \,//\, SB$ suy ra:

$\frac{MN}{SB} = \frac{AG}{AH} = \frac{2}{3}, \frac{SN}{SA} = \frac{GH}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$

+ Xét tam giác SAD có $PN//AD$ suy ra: $\frac{PN}{AD} = \frac{SN}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow PN = \frac{1}{3}AD = \frac{a}{3}.$

+ Diện hình thang vuông $MNPQ$ tại M và Nlà:

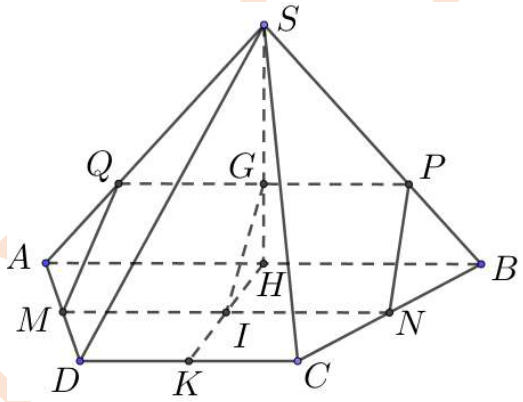
$S_{MNPQ} = \frac{MQ+PN}{2}.MN = \frac{a+\frac{a}{3}}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$ (đơn vị diện tích).

Câu 104. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD, AB = 2a)$, $BC = CD = DA = a$, điểm S cách đều 4 đỉnh A, B, C, D đồng thời tam giác SAB đều. Gọi M, N và G lần lượt là trung điểm của AD, CB và trọng tâm tam giác SAB. Diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(MNG) bằng

A. $\frac{9a^2}{16}$. **B.** $\frac{15a^2\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{15a^2\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{85a^2\sqrt{3}}{144}$.

Lời giải

Chọn D



+) Vì $MN // AB$ nên mp(MNG) cắt (SAB) theo giao tuyến qua G song song với AB, cắt SA, SB tại Q, P. Thiết diện là tứ giác $MNPQ$. Mặt khác: $MN // PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

+) Xét hình thang $MNPQ$, ta có: $MN = \frac{3a}{2}$, $PQ = \frac{2}{3}AB = \frac{4a}{3}$.

Tiếp theo, ta đi dựng và tính đường cao của hình thang.

+) Kẻ $SH \perp (ABCD)$. Ta có: $SA = SB = SC = SD \Rightarrow HA = HB = HC = HD$.

Vì tam giác SAB đều nên H là trung điểm của cạnh AB.

Gọi I, K là trung điểm của MN, CD. Khi đó: H, I, K thẳng hàng.

Có MN vuông góc với cả SH, HK nên $MN \perp GI$ hay GI là chiều cao của hình thang $MNPQ$.

Có SH và HK lần lượt là đường cao của hai tam giác đều SAB và HDC với cạnh lần lượt là $2a$ và a nên ta được: $SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, HK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác vuông HGI, ta có

$$GI^2 = GH^2 + HI^2 = \left(\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{3a^2}{16} = \frac{25a^2}{48} \Rightarrow GI = \frac{5a\sqrt{3}}{12}.$$

Vậy diện tích thiết diện bằng $\frac{1}{2}GI\left(MN+PQ\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5a\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)a=\frac{85a^2\sqrt{3}}{144}$.

Câu 105. Cho tứ diện $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại B, $AB=a$, $SA\perp\left(ABC\right)$ và $SA=a\sqrt{3}$. M là điểm tùy ý trên cạnh AB sao cho $AM=x$ $\left(0<x<a\right)$. Mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ đi qua M và vuông góc với AB. Diện tích thiết diện tạo bởi tứ diện $S.ABC$ và mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ có giá trị lớn nhất khi x bằng

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

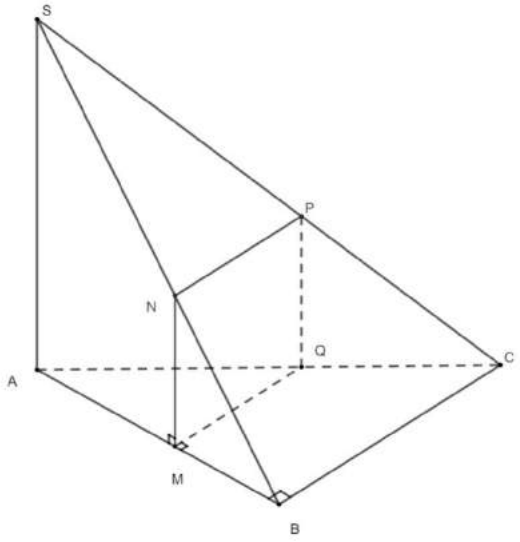
Chọn B

Dựng thiết diện bằng cách:

Trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ kẻ MQ song song BC (với $Q\in AC$).

Trên mặt phẳng $\left(SAB\right)$ kẻ MN song song SA (với $N\in SB$).

Trên mặt phẳng $\left(SAC\right)$ kẻ QP song song SA (với $P\in SC$).



Thiết diện thu được là hình bình hành $MNPQ$ lại có $MN\perp MQ$ vì $MN//SA$.

Thiết diện thu được là hình chữ nhật $MNPQ$ có $MQ=x$ (vì ΔAMQ vuông cân tại M).

$MN=\sqrt{3}\left(a-x\right)$ (vì ΔBMN đồng dạng với ΔBAS).

Ta có $S_{MNPQ}=\sqrt{3}\left(a-x\right)x\le\sqrt{3}\left(\frac{a-x+x}{2}\right)^2=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

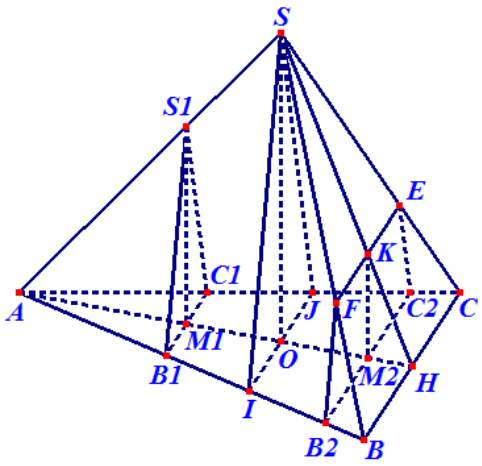
Vậy diện tích lớn nhất bằng $S_{MNPQ}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ khi và chỉ khi $a-x=x\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$.

Câu 106. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, đường cao $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đường cao AH của tam giác ABC. Xét mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm M và vuông góc với AH. Đặt $AM=x$. Tìm x để thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng $\left(P\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x=\frac{3a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Trường hợp 1: $x \le \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ thì thiết diện nhận được là tam giác cân $S_1B_1C_1$ (hình vẽ)

$S_{S_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}S_1H_1.B_1C_1 \le \dfrac{1}{2}SO.IJ = \dfrac{1}{2}2a.\dfrac{2a}{3} = \dfrac{2a^2}{3}$.

Trường hợp 1: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ thì thiết diện nhận được là hình thang cân B_2C_2EF (hình vẽ).

Ta có $B_2C_2 = BC.\dfrac{AM_2}{AH} = a.\dfrac{x}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$

$$EF = BC.\frac{SE}{SC} = BC.\frac{JC_2}{JC} = BC.\frac{OM_2}{OH} = a.\frac{x-\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}} = 2x\sqrt{3}-2a$$

$$KM_2 = SO.\frac{HM_2}{HO} = 2a.\frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-x}{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}} = 6a-4x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{B_2C_2EF} = \frac{1}{2}\left(B_2C_2+EF\right).KM_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2x\sqrt{3}}{3}+2x\sqrt{3}-2a\right)\left(6a-4x\sqrt{3}\right)$$

$$= \left(\frac{8x\sqrt{3}}{3}-2a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right) = \frac{4}{3}\left(2x\sqrt{3}-\frac{3}{2}a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right) \le \frac{4}{3}\frac{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}{4} = \frac{3a^2}{4} > \frac{2a^2}{3}.$$

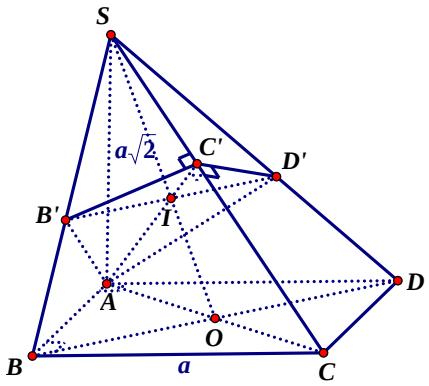
Vậy diện tích thiết diện lớn nhất bằng $\dfrac{3a^2}{4}$ khi $2x\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}a = 3a-2x\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Câu 107. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng (α) qua A vuông góc với SC và cắt SC tại C', cắt SB, SD lần lượt tại B' và D'. Tính diện tích thiết diện của (α) và hình chóp.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



+) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng (SAC), kẻ đường thẳng vuông góc với SC, cắt SC tại C'.

+) Gọi I là giao điểm của SO và AC'. Từ I, kẻ đường thẳng song song với BD, cắt SB, SD lần lượt tại B' và D'.

+) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

+) $\begin{cases} B'D' \,//\, BD \Rightarrow B'D' \perp SC \\ AC' \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AB'C'D')$. Vậy tứ giác $AB'C'D'$ là thiết diện cần tìm.

+) Vì $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên ΔSAC là tam giác cân tại A do đó AC' là là trung tuyến.

+) I là giao điểm của $B'D'$ và SO nên I là trọng tâm ΔSBD. Do đó

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

+)Tam giác SAC vuông cân tại A, có AC' là đường cao nên

$$AC' = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\sqrt{2a^2 + 2a^2} = a.$$

+) $\begin{cases} B'D' \,//\, BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (SAC) \Rightarrow B'D' \perp AC'$.

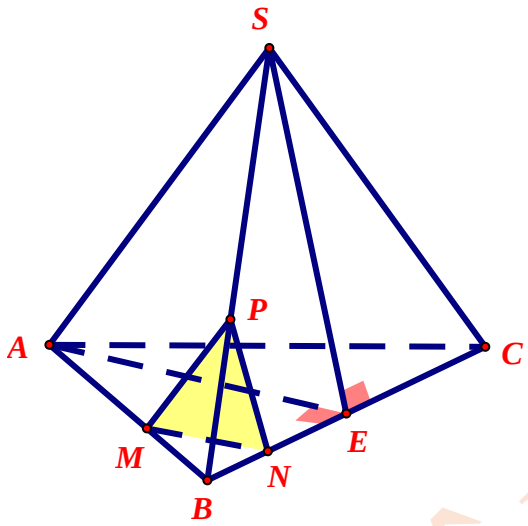
Vậy $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}.AC'.B'D' = \frac{1}{2}\frac{2a\sqrt{2}}{3}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 108. Cho tứ diện $SABC$ có hai mặt (ABC) và (SBC) là hai tam giác đều cạnh a, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = b\ (0 < b < a)$. (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với BC. Thiết diện của (P) và tứ diện $SABC$ có diện tích bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của BC.

Ta có: $\begin{cases} AE \perp BC \\ SE \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE)$.

Kẻ $MP//\text{SA}\ (M \in SB)$, $NP//\text{SE}\ (N \in BE)$.

Suy rA. $(MNP)//(SAE) \Rightarrow (MNP) \perp BC$.

Khi đó: Thiết diện tạo bởi (P) với tứ diện $SABC$ là ΔMNP.

Ta có : $SA = SE = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{MP}{SA} = \dfrac{NP}{SE} = \dfrac{MN}{AE} = \dfrac{MB}{AB} = \dfrac{a-b}{a}$.

Suy ra : $MP = NP = MN = \dfrac{a-b}{a}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó diện tích của ΔMNP: $S_{\Delta MNP} = \dfrac{\left(\dfrac{a-b}{a}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{16}\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG

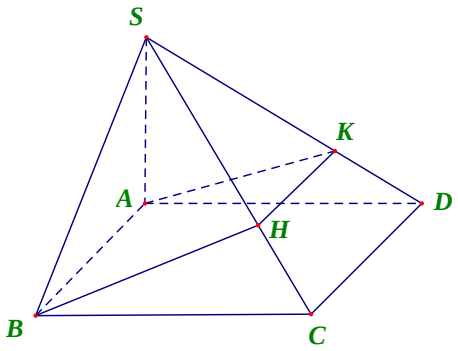
★ Dạng 1: Thiết diện, diện tích thiết diện

Câu 109. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB vuông góc với (SCD), (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang vuông.
C. Hình thang không vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



có $\begin{cases} (\alpha)\cap(ABCD)=AB \\ (\alpha)\cap(SBD)=BH \\ (\alpha)\cap(SCD)=HK \\ (\alpha)\cap(SAD)=KA \end{cases} \Rightarrow (\alpha)$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình tứ giác $ABHK$.

Ta lại có:

$\begin{cases} (ABHK)\cap(ABCD)=AB \\ (ABCD)\cap(SCD)=CD \\ (SCD)\cap(ABHK)=HK \\ AB//CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK//AB \\ HK//CD \end{cases} \Rightarrow$ Thiết diện $ABHK$ là hình thang.

$\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK \Rightarrow$ Thiết diện $ABHK$ là hình thang vuông.

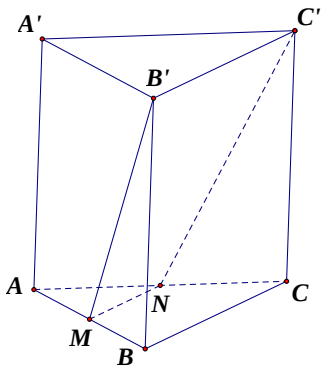
Vậy (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang vuông $ABHK$.

Câu 111. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $BC = 4a$, $AA' = 3a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Diện tích của thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng $(MB'C')$ bằng

A. $2\sqrt{10}\,a^2$. **B.** $3\sqrt{10}\,a^2$. **C.** $4\sqrt{10}\,a^2$. **D.** $6\sqrt{10}\,a^2$.

Lời giải

Chọn B



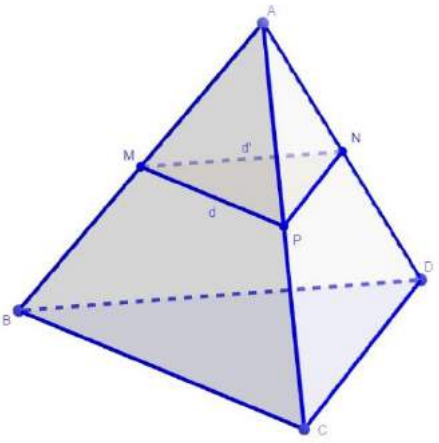
Do $BC//B'C'$ nên $BC//(MB'C') \Rightarrow (MB'C') \cap (ABC) = MN$ với $MN//BC$ và $N \in AC$.
Dễ thấy thiết diện là hình thang $MNC'B'$ vuông tại M và B'.
Diện tích thiết diện: $dt(MNC'B') = \frac{MN+B'C'}{2}.MB'$.
$MN = 2a; B'C' = 4a$; $MB' = \sqrt{MB^2 + BB'^2} = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$.
$dt(MNC'B') = \frac{MN+B'C'}{2}.MB' = 3a^2\sqrt{10}$.

Câu 112. Cho tứ diện $ABCD$, biết tam giác BCD có diện tích bằng 16. Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của AB và song song mới mặt phẳng (BCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích bằng

A. 12. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của AB.
$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và song song mới mặt phẳng (BCD)
Xét mặt phẳng (ABC) có: $(P)//(BCD), BC \subset (BCD)$ và điểm M là điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (ABC)
$\Rightarrow$ giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (ABC) là đường thẳng d đi qua điểm M và song song với đường thẳng BC
$\Rightarrow d \cap AC = \{P\} \Rightarrow MP//BC$
Xét mặt phẳng (ABD) có: $(P)//(BCD), BD \subset (BCD)$, và điểm M là điểm chung của 2 mặt phẳng (P) và (ABD)
$\Rightarrow$ giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (ABD) là đường thẳng d' đi qua điểm M và song song với đường thẳng BD

$\Rightarrow d' \cap AD = \{N\} \Rightarrow MN // BC$

Vậy thiết diện cắt bởi mặt phẳng (P) với hình chóp là mặt phẳng (MNP).

Xét tam giác ABC có: M là trung điểm của AB và $MP // BC$

$\Rightarrow P$ là trung điểm của AC

$\Rightarrow MP$ là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow \dfrac{MP}{BC} = \dfrac{1}{2}$

CMTT ta có: $\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{PN}{CD} = \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle BDC$ và $\dfrac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BDC}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \dfrac{1}{4} S_{\triangle BDC} = \dfrac{1}{4}.16 = 4$.

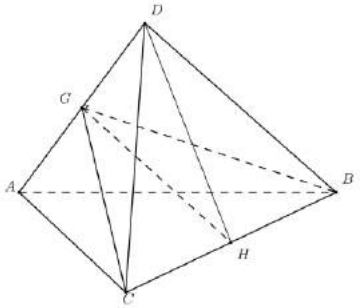
Vậy mặt phẳng (P) đi qua trung điểm của AB và song song mới mặt phẳng (BCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích bằng 4 (đvdt).

Câu 113. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $a = 12$, gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với AD. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng

A. $36\sqrt{2}$. **B.** 40. **C.** $36\sqrt{3}$. **D.** 36.

Lời giải

Chọn A



Gọi G là trung điểm AD, H là trung điểm BC.

Tam giác ACD, ABD là tam giác đều nên $\begin{cases} BG \perp AD \\ CG \perp AD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (BCG) \equiv (P)$.

Vậy thiết diện là ΔBCG và GH là đường cao trong tam giác GCB.

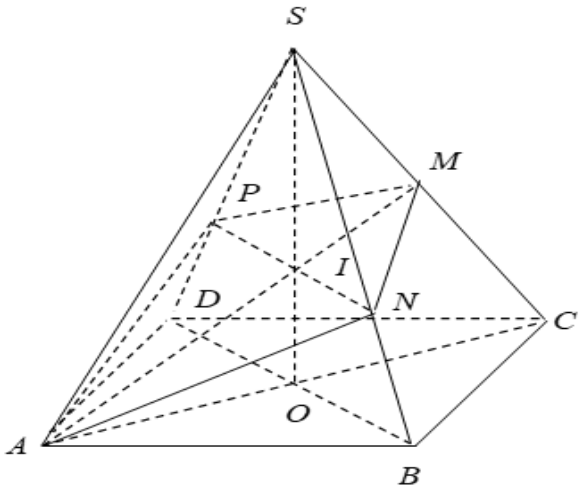
Ta có $\begin{cases} BG = CG = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \\ GH = \sqrt{BG^2 - BH^2} = 6\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\Delta BGC} = \dfrac{1}{2} GH.BC = \dfrac{1}{2}.6\sqrt{2}.12 = 36\sqrt{2}$.

Câu 114. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, điểm M là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mp(P).

A. $\dfrac{\sqrt{5}a^2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}a^2}{6}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}a^2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Trong mp (SAC), gọi I là giao điểm của AM và SO. Suy ra I là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (SBD), mà $(P)\,||\,BD$ nên trong mp (SBD) qua I kẻ giao tuyến PN song song với BD ($N\in SB; P\in SD$). Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $ANMP$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)\Rightarrow BD\perp SO$ (1)

Mặt khác $BD\perp AC$ (do đáy $ABCD$ là hình vuông) (2)

Từ (1) và (2) ta có: $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp AM$

Mà $PN\,||\,BD\Rightarrow PN\perp AM\Rightarrow S_{ANMP}=\frac{1}{2}AM.PN$

Trong tam giác SAC ta có: $AM^2=\frac{AS^2+AC^2}{2}-\frac{SC^2}{4}=\frac{a^2+2a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do I là trọng tâm của tam giác SAC nên $PN=\frac{2}{3}BD=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

Vậy $S_{ANMP}=\frac{1}{2}AM.PN=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{5}}{2}.\frac{2a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2\sqrt{10}}{6}$.

Câu 115. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AB. Tính diện tích thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{16}a^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. **D.** $\frac{9}{8}a^2$.

Lời giải

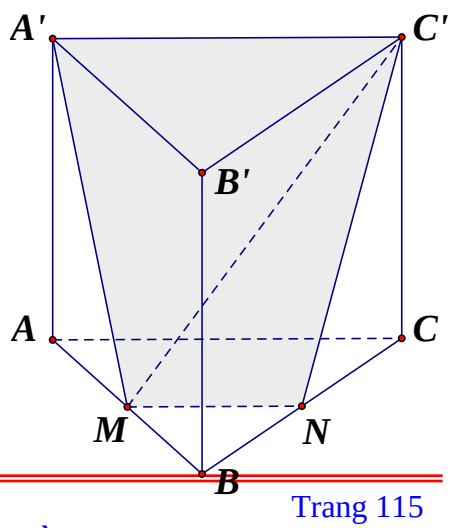
Chọn B

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA'\perp(ABC)$ và ΔABC đều cạnh a.

Gọi N là trung điểm BC suy ra $MN//AC//A'C'$ và $MN=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$.

Vì $MN//A'C'$ nên A',C',M,N đồng phẳng do đó thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là hình thang cân $NMA'C'$.

Lại có $C'N=A'M=\sqrt{A'A^2+AM^2}=\frac{3}{2}a$ nên đường cao của hình thang cân $NMA'C'$ là $h=\sqrt{A'M^2-\left(\frac{A'C'-MN}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{4}a$



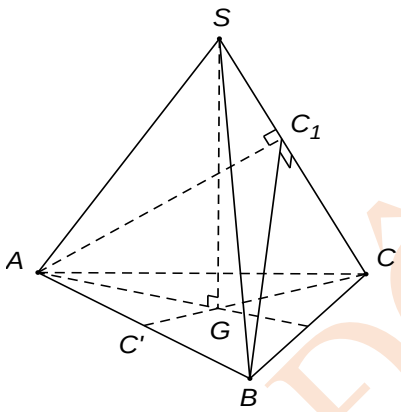
Do đó diện tích thiết diện là $S = \frac{1}{2}(A'C' + MN).h = \frac{3\sqrt{35}}{16}a^2$

Câu 116. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



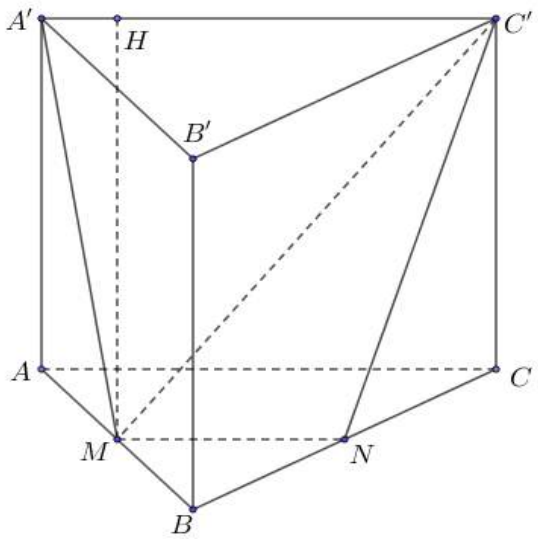
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.
Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.
Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$. (1)
Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.
Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC.
Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.
Suy ra $\cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \rightarrow a < b\sqrt{2}$.

Câu 117. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2a$. M là trung điểm của AB. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng $(A'C'M)$. Diện tích của thiết diện là

A. $3\sqrt{7}a^2$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}a^2}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $6\sqrt{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $M \in (ABC) \cap (A'C'M)$, $AC \,//\, A'C' \Rightarrow (ABC) \cap (A'C'M) = Mx \,//\, AC$. Gọi N là giao điểm của Mx với $BC \Rightarrow (ABC) \cap (A'C'M) = MN$. Thiết diện là hình thang $MNC'A'$.

$MN = \dfrac{AC}{2} = 2a$, $A'M = 2a\sqrt{2}$. Vẽ $MH \perp A'C' \ (H \in A'C') \Rightarrow MH = a\sqrt{7}$.

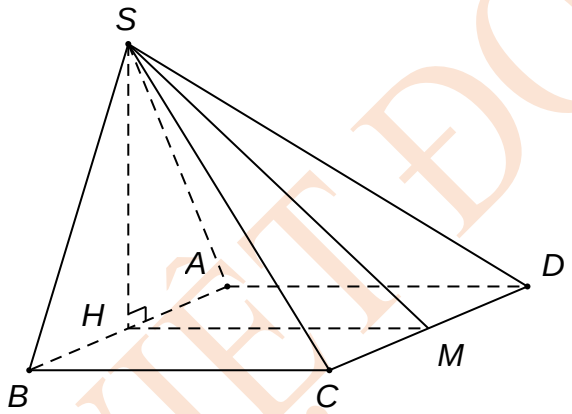
Vậy diện tích thiết diện $S_{MNC'A'} = \dfrac{1}{2}.MH.(MN + A'C') = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{7}.6a = 3\sqrt{7}a^2$.

Câu 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Suy ra:

• $SH \subset (\alpha)$.

• $SH \perp (ABCD)$(do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến)AB.

Kẻ $HM \perp AB (M \in CD) \Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

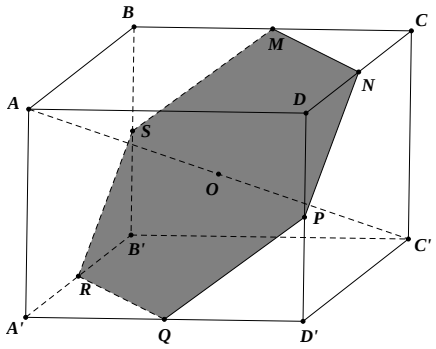
Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$. Vậy $S_{\Delta SHM} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 119. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Diện tích thiết diện là

A. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = a^2$. **C.** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O, M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC', BC, CD.DD', AD', A'B', BB'$.

Ta có: $MA = MC' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AC'.

Tương tự, ta chứng minh được N, P, Q, R, S cũng thuộc mặt phẳng trung trực của AC'.

Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực của AC' là đa giác $MNPQRS$.

Đây là lục giác đều cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên diện tích $S = 6.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

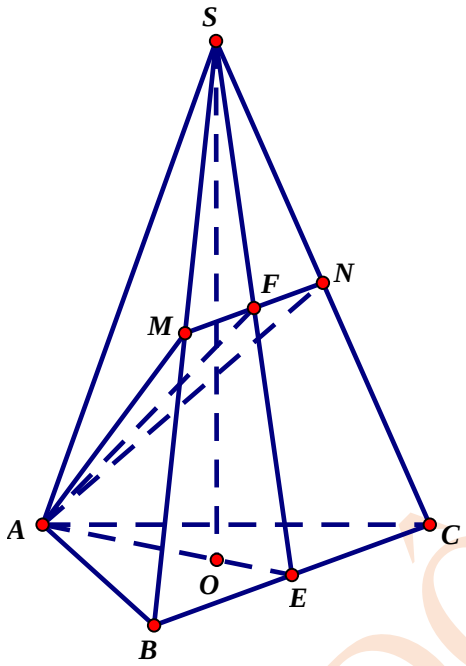
Câu 120. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên ABC là tam giác đều và hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC.

Gọi E là trung điểm của BC, $F = MN \cap SE$.

MN là đường trung bình tam giác $SBC \Rightarrow SNEM$ là hình bình hành

$\Rightarrow F$ là trung điểm MN và SE.

Vì $AM = AN$ (hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác bằng nhau SAB và SAC) nên tam giác AMN cân tại A, mà AF là đường trung tuyến

$\Rightarrow AF \perp MN$

$\Rightarrow AF \perp (SBC)$ (1) (vì $(AMN) \perp (SBC)$)

$\Rightarrow AF \perp SE$

Tam giác SAE có AF vừa là trung tuyến vừa là đường cao

$\Rightarrow SAE$ là tam giác cân tại A

$\Rightarrow AS = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

Tam giác SOA vuông tại O, $SE = \sqrt{SO^2 + EO^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{6}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $AF.SE = SO.AE \ (= 2S_{SAE})$

$\Rightarrow AF = \dfrac{SO.AE}{SE} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

$S_{\triangle AMN} = \dfrac{1}{2} AF.MN = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Câu 121. Bác Bình muốn làm một ngôi nhà mái lá cọ như trong hình với diện tích mặt nền nhà là $100\,m^2$, mỗi mặt phẳng mái nhà nghiêng so với mặt đất 30^0, để lợp một m^2 mái nhà cần

mua 100 nghìn đồng lá cọ. Hỏi số tiền bác Bình sử dụng mua lá cọ để lợp tất cả mái nhà gần nhất với số nào sau đây? .

A. 11,547 triệu đồng. **B.** 12,547 triệu đồng.

C. 18,547 triệu đồng. **D.** 19,547 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Ngôi nhà có hai mái đối xứng nhau và có diện tích bằng nhau, diện tích một nửa mặt nền nhà bằng $S = 50\,m^2$. Gọi S' là diện tích một mái, khi đó một mái nhà có hình chiếu vuông góc là một nửa mặt nền nhà. Ta có $\frac{S}{S'} = \cos 30^0 \Rightarrow S' = \frac{S}{\cos 30^0} = \frac{100}{\sqrt{3}} m^2$. Vậy tổng diện tích mái nhà là $\frac{200}{\sqrt{3}} m^2$.

Số tiền bác Bình cần là $\frac{200}{\sqrt{3}}.100 \approx 11547$ nghìn đồng $\approx 11,547$ triệu đồng.

---------- HẾT ----------

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG