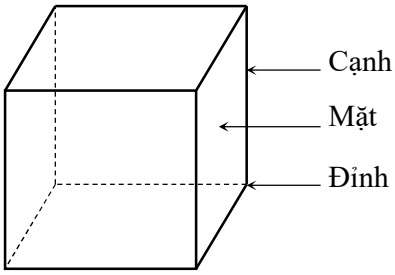
Chuyên đề 9 NHẬN DIỆN KHỐI ĐA DIỆN

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

1. **Hình đa diện** là hình tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:
   - Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
   - Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

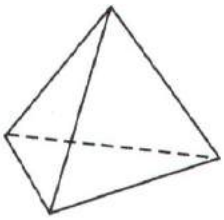
   Mỗi đa giác như thế gọi là một mặt của hình đa diện.

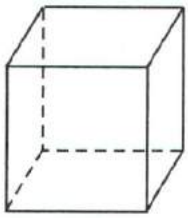


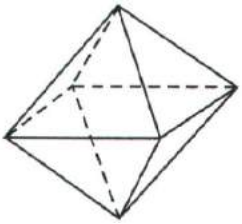
2. **Khái niệm về khối đa diện**: Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi 1 hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
3. **Khối đa diện lồi**: Khối đa diện (H) được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn luôn thuộc (H).
4. **Khối đa diện đều** là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:
   - Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
   - Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

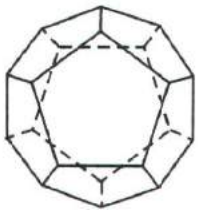
   Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{p;q\}$.

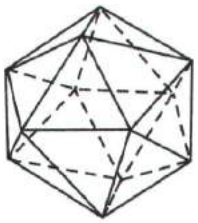
   Định lí: Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\}$, $\{4;3\}$, $\{3;4\}$, $\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.


Tứ diện đều


Lập phương


Bát diện đều


12 mặt đều


20 mặt đều

Đa diện đều cạnh a	Đỉnh	Cạnh	Mặt	Thể tích V	BK mặt cầu ngoại tiếp
Tứ diện đều $\{3;3\}$	4	6	4	$V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$R=\frac{a\sqrt{6}}{4}$
Lập phương $\{4;3\}$	8	12	6	$V=a^3$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$
Bát diện đều $\{3;4\}$	6	12	8	$V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$
Mười hai mặt đều $\{5;3\}$	20	30	12	$V=\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$R=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$
Hai mươi mặt đều $\{3;5\}$	12	30	20	$V=\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$	$R=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{4}a$

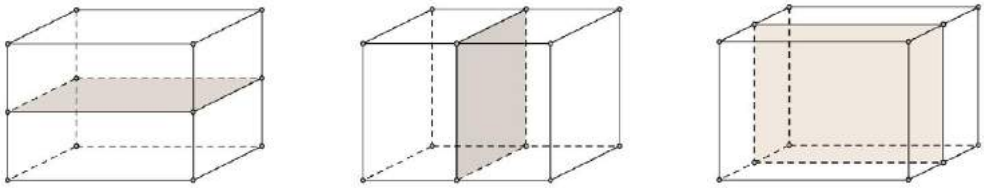
5. Phép đối xứng qua mặt phẳng

❒ Định nghĩa

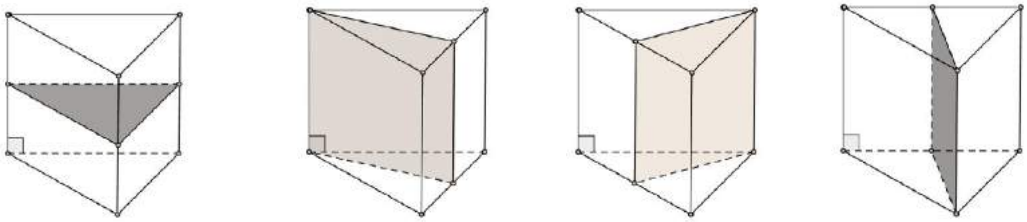
- Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình, biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MM'.
- Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình H thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của hình H.

❒ Mặt phẳng đối xứng của một số hình thường gặp

- **Hình hộp chữ nhật có 3 kích thước khác nhau**: có 3 mặt phẳng đối xứng.

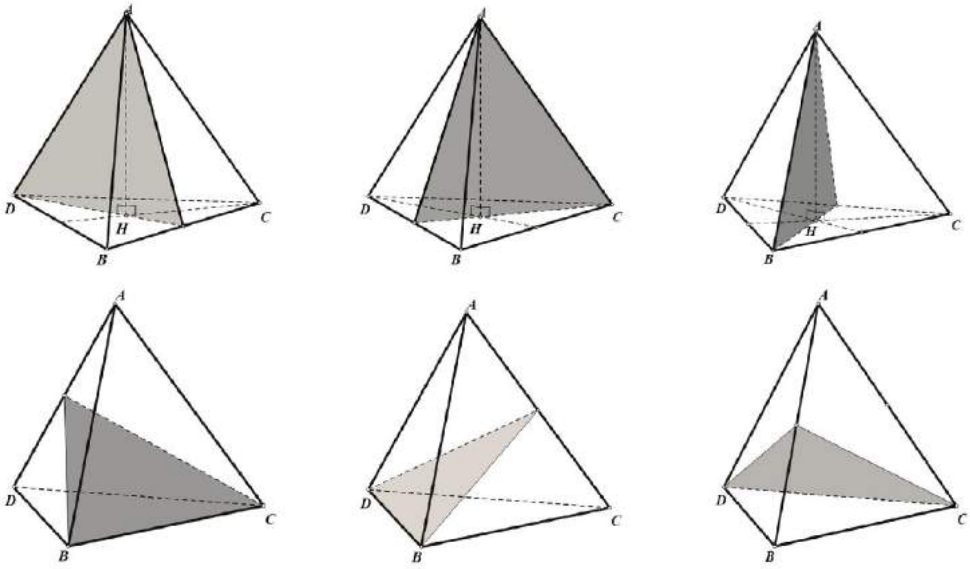


- **Hình lăng trụ tam giác đều**: có 4 mặt phẳng đối xứng.

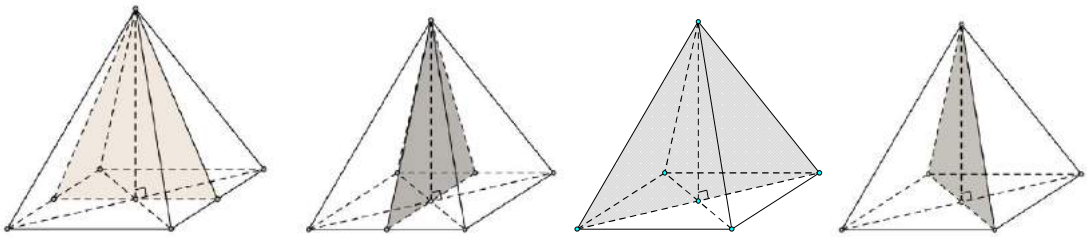


- **Hình chóp tam giác đều** (cạnh bên và cạnh đáy không bằng): có 3 mặt phẳng đối xứng.

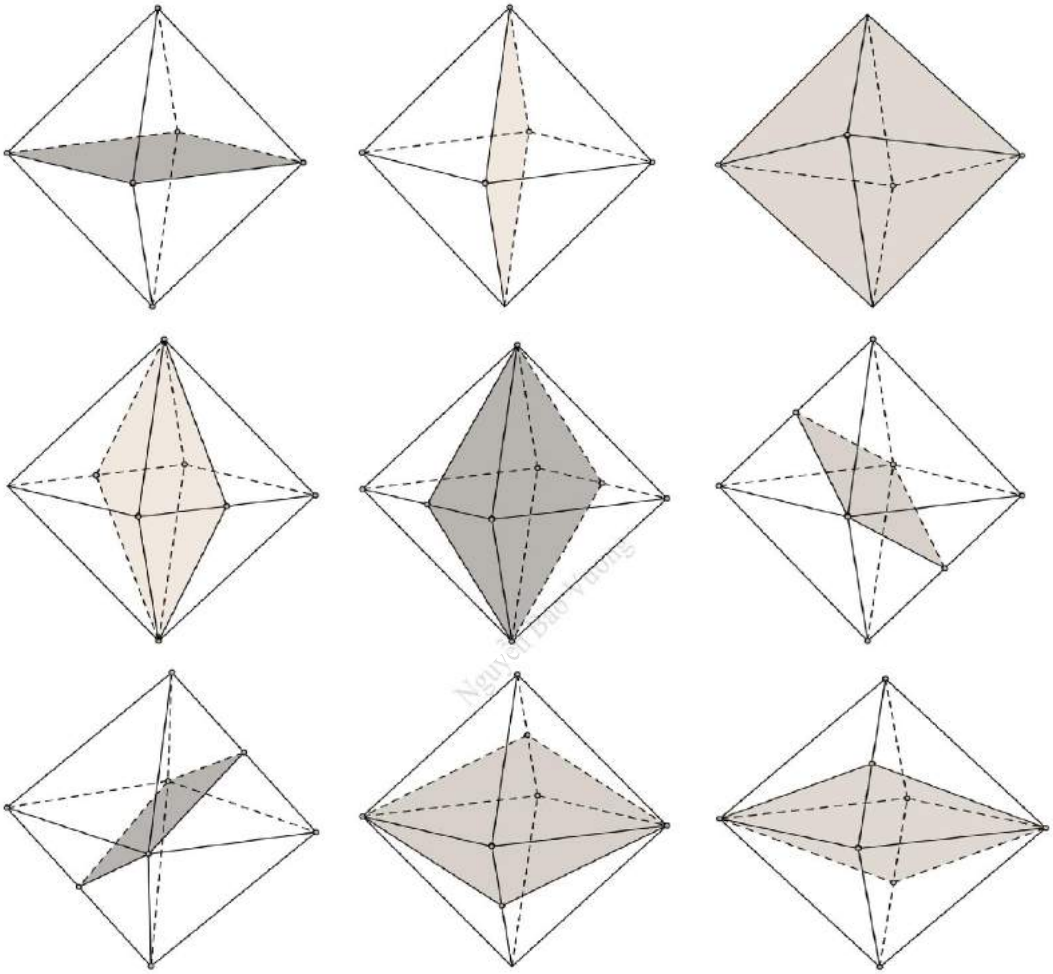
- **Tứ diện đều**: có 6 mặt phẳng đối xứng.



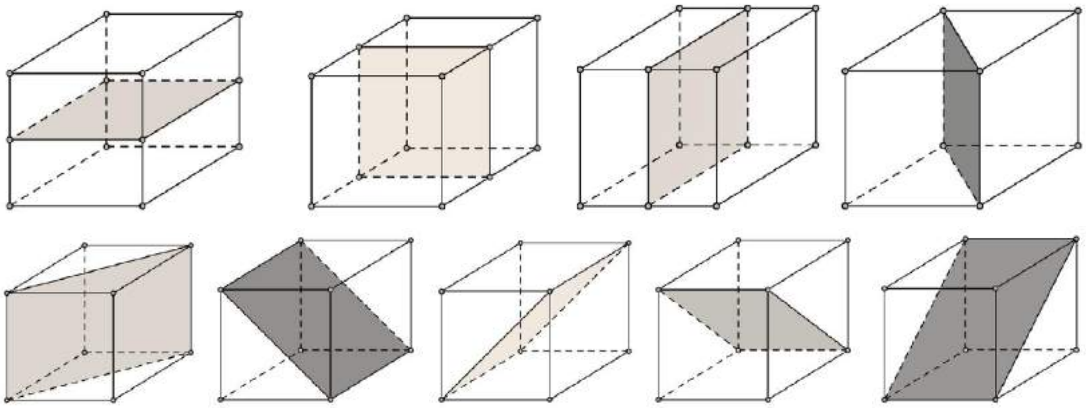
- **Hình chóp tam giác đều**: có 4 mặt phẳng đối xứng.



- **Hình bát diện đều**: có 9 mặt phẳng đối xứng.

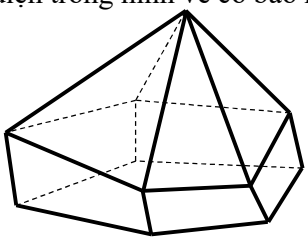


- **Hình lập phương**: có 9 mặt phẳng đối xứng.



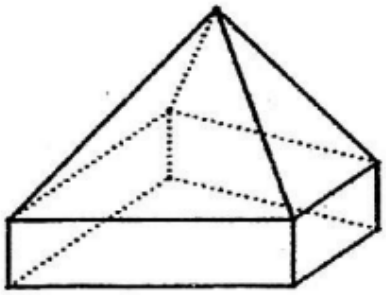
Dạng 1. Nhận dạng khối đa diện

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017) Hình đa diện trong hình vẽ có bao nhiêu mặt?



A. 12 **B.** 11 **C.** 6 **D.** 10

Câu 2. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Hình đa diện sau có bao nhiêu cạnh?



A. 15 **B.** 12 **C.** 20 **D.** 16

Câu 3. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Hình chóp ngũ giác có bao nhiêu mặt?

A. Bảy. **B.** Sáu. **C.** Năm. **D.** Mười.

Câu 4. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai cạnh bất kỳ có ít nhất một điểm chung

B. Ba mặt bất kì có ít nhất một đỉnh chung

C. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt

Câu 5. (Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

B. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

Câu 6. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Hình nào sau đây **không** phải là hình đa diện?

A. Hình lăng trụ. **B.** Hình chóp. **C.** Hình lập phương. **D.** Hình vuông.

Câu 7. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho các mệnh đề sau:

I/ Số cạnh của một khối đa diện lồi luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

II/ Số mặt của khối đa diện lồi luôn lớn hơn hoặc bằng 5.

III/ Số đỉnh của khối đa diện lồi luôn lớn hơn 4.

Trong các mệnh đề trên, những mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. II và III **B.** I và II **C.** Chỉ I **D.** Chỉ II

Câu 8. (Nhân Chính Hà Nội Năm 2019) Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Số đỉnh của khối lập phương bằng 8. **B.** Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4.

C. Khối bát diện đều là loại $\{4;3\}$. **D.** Số cạnh của khối bát diện đều bằng 12.

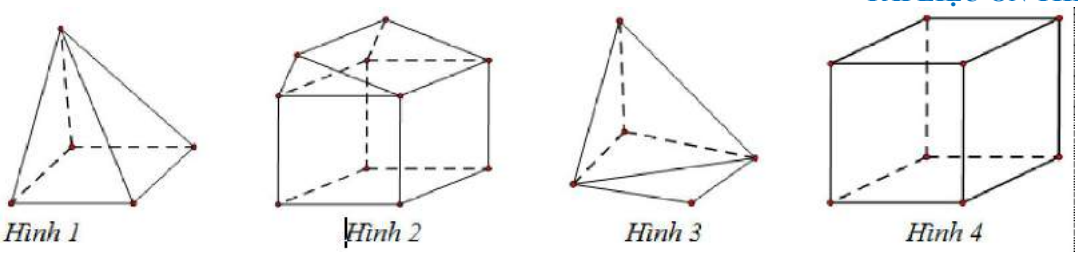
Câu 9. (THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019) Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Câu 10. (THPT Phan Đăng Lưu - Huế -2018) Số cạnh của hình 12 mặt đều là:

A. 20. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 12.

Câu 11. (THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2018) Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

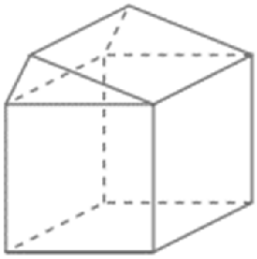


A. Hình 3. **B.** Hình 2. **C.** Hình 4. **D.** Hình 1.

Câu 12. (THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng - 2018) Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối

A. Hai mươi mặt đều. **B.** Tám mặt đều. **C.** Lập phương. **D.** Tứ diện đều.

Câu 13. (THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018) Hình vẽ bên dưới có bao nhiêu mặt



A. 7. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 14. (THPT Chuyên LHP – 2017) Biết (H) là đa diện đều loại $\{3;5\}$ với số đỉnh và số cạnh lần lượt là a và b. Tính $a-b$.

A. $a-b=18$. **B.** $a-b=-8$. **C.** $a-b=-18$. **D.** $a-b=10$.

Câu 15. (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018) Gọi n là số hình đa diện trong bốn hình trên. Tìm n.

A. $n=3$. **B.** $n=2$. **C.** $n=1$. **D.** $n=4$.

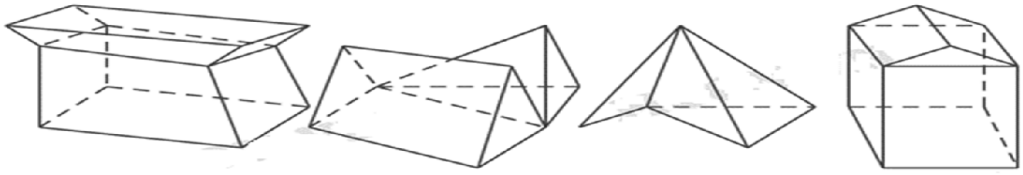
Câu 16. (SGD Bình Dương - 2018) Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

A. Khối tứ diện đều. **B.** Khối lập phương. **C.** Khối bát diện đều. **D.** Khối hộp chữ nhật.

Câu 17. (Chuyên Tuyên Quang – 2017) Khối đa diện đều nào sau đây có mặt không phải là tam giác đều ?

A. Tám mặt đều. **B.** Tứ diện đều. **C.** Mười hai mặt đều. **D.** Hai mươi mặt đều.

Câu 18. (THPT Đô Lương 4 - Nghệ An – 2018) Số hình đa diện lồi trong các hình dưới đây là

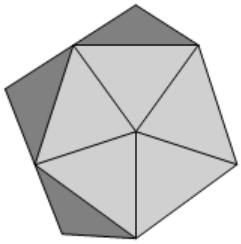


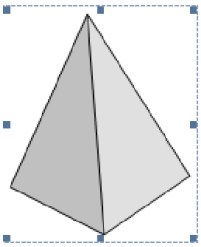
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

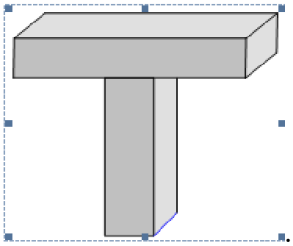
Câu 19. (THPT Thanh Miện - Hải Dương - 2018) Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh của khối đa diện bằng

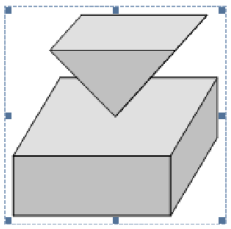
A. $324°$. **B.** $360°$. **C.** $180°$. **D.** $240°$.

Câu 20. (Chuyên Hưng Yên– 2017) Hình nào dưới đây không phải là một khối đa diện?

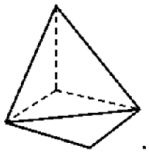
A.  .

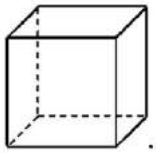
B.  .

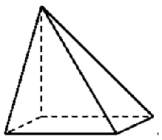
C.  .

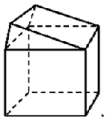
D.  .

Câu 21. **(THPT Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

A.  .

B.  .

C.  .

D.  .

Câu 22. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh 2018)** Khối đa diện 12 mặt đều có số đỉnh và số cạnh lần lượt là

A. 30 và 20. **B.** 12 và 20. **C.** 20 và 30. **D.** 12 và 30.

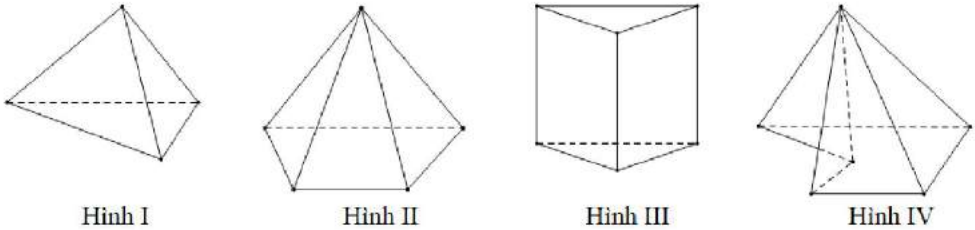
Câu 23. **(THPT Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018)** Khối hai mươi mặt đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{3;4\}$ **B.** $\{4;3\}$ **C.** $\{3;5\}$ **D.** $\{5;3\}$

Câu 24. **(THPT Kim Liên - HN - 2018)** Khối đa diện có mười hai mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là:

A. 30, 20, 12. **B.** 20, 12, 30. **C.** 12, 30, 20. **D.** 20, 30, 12.

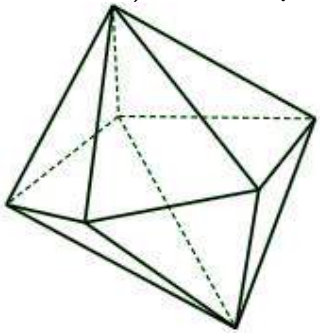
Câu 25. **(THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - 2018)** Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?



Hình I Hình II Hình III Hình IV

A. Hình (IV). **B.** Hình (III). **C.** Hình (II). **D.** Hình (I).

Câu 26. **(THPT Chuyên Hạ Long - QNinh - 2018)** Hình đa diện bên có bao nhiêu mặt?

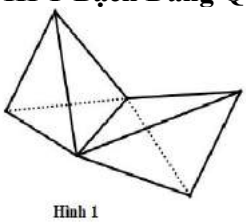


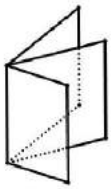
A. 7. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

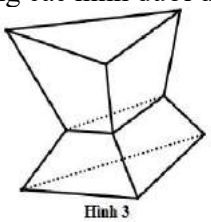
Câu 27. (THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019) Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

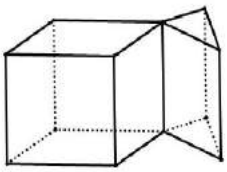
A. 33. **B.** 31. **C.** 30. **D.** 22.

Câu 28. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?


Hình 1


Hình 2


Hình 3

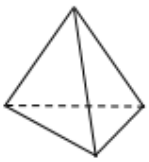

Hình 4

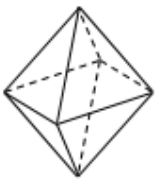
A. Hình 4. **B.** Hình 2. **C.** Hình 1. **D.** Hình 3.

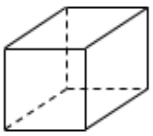
Câu 29. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Cho đa giác đều 16 đỉnh, Hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đều đó?

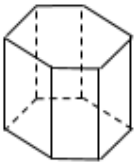
A. 560. **B.** 112. **C.** 121. **D.** 128.

Câu 30. (Đề Bộ Giáo Dục) Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?









A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều. **C.** Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Dạng 2. Tính chất đối xứng khối đa diện

Câu 31. (Mã 123 2017) Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6 mặt phẳng **B.** 9 mặt phẳng **C.** 3 mặt phẳng **D.** 4 mặt phẳng

Câu 32. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Hình tứ diện đều có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 33. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 1 mặt phẳng.

Câu 34. (SGD Bình Dương - 2018) Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng. **C.** 3 mặt phẳng. **D.** 9 mặt phẳng.

Câu 35. (Chuyên Quốc Học Huế -2018) Hình tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 36. (THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018) Hình nào sau đây không có trục đối xứng?

A. Hình hộp xiên. **B.** Tam giác đều. **C.** Hình tròn. **D.** Đường thẳng.

Câu 37. (Chuyên KHTN- 2017) Biết rằng một hình đa diện H có 6 mặt là 6 tam giác đều. Hãy chỉ ra mệnh đề nào dưới đây là **đúng?**

A. Không tồn tại hình H nào có mặt phẳng đối xứng.
B. Có tồn tại một hình H có đúng 4 mặt đối xứng.
C. Không tồn tại hình H nào có đúng 5 đỉnh.
D. Có tồn tại một hình H có hai tâm đối xứng phân biệt.

Câu 38. (Chuyên Thái Bình - 2018) Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 39. (Chuyên Quốc Học Huế - 2018) Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

A. Hình bát diện đều. **B.** Hình tứ diện đều. **C.** Hình lập phương **D.** Hình lăng trụ tứ giác đều.

Câu 40. (Chuyên Hạ Long - QNinh - 2018) Hình nào dưới nào dưới đây **không** có trục đối xứng?

A. Tam giác cân. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình elip. **D.** Hình bình hành.

Câu 41. (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An- 2018) Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 42. (Vĩnh Phúc - 2018) Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 8. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 43. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện nào sau đây?

A. $BCA'D'$ **B.** $BB'A'D'$ **C.** $B'BC'A'$ **D.** $BC'D'A'$

Dạng 3. Phân chia, lắp ghép khối đa diện

Câu 44. (Mã 110 2017) Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tứ giác.
B. Hai khối chóp tam giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
D. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

Câu 45. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cắt khối trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

A. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
B. Ba khối tứ diện.
C. Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
D. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác

Câu 46. (THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng - 2018) Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây?

A. $NACB$, $BCMN$, $ABND$, $MBND$. **B.** $MANC$, $BCDN$, $AMND$, $ABND$.
C. $MANC$, $BCMN$, $AMND$, $MBND$. **D.** $ABCN$, $ABND$, $AMND$, $MBND$.

Câu 47. (THPT An Lão 2017) Cắt khối trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

A. Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác. **B.** Ba khối tứ diện.
C. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác. **D.** Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Câu 48. (THPT Ngô Quyền- 2017) Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được những khối đa diện nào?

A. Ba khối tứ diện. **B.** Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.
C. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác. **D.** Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Câu 49. (THPT Yên Định - Thanh Hóa 2018) Có thể chia một khối lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện có thể tích bằng nhau mà các đỉnh của tứ diện cũng là đỉnh của hình lập phương?

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

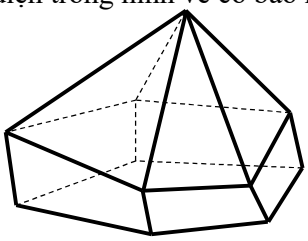
Câu 50. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho đa giác đều có 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho ?

A. C_{2018}^4. **B.** C_{1009}^4. **C.** C_{2018}^2. **D.** C_{1009}^2.

Chuyên đề 9 NHẬN DẠNG KHỐI ĐA DIỆN

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017) Hình đa diện trong hình vẽ có bao nhiêu mặt?



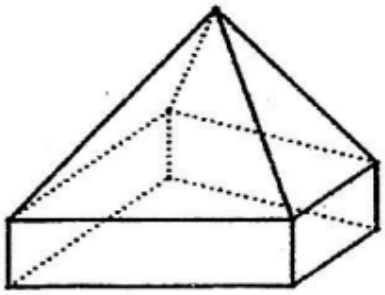
A. 12 **B.** 11 **C.** 6 **D.** 10

Lời giải

Chọn B

Đếm đáy hình chóp có 5 mặt tam giác và 5 mặt tứ giác và 1 mặt ngũ giác. Vậy có 11 mặt.

Câu 2. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Hình đa diện sau có bao nhiêu cạnh?



A. 15 **B.** 12 **C.** 20 **D.** 16

Lời giải

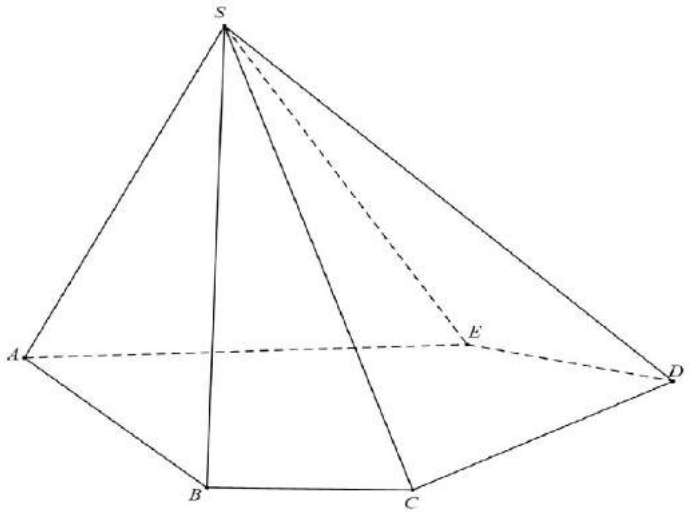
Chọn D

Lý thuyết

Câu 3. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Hình chóp ngũ giác có bao nhiêu mặt?

A. Bảy. **B.** Sáu. **C.** Năm. **D.** Mười.

Lời giải



Hình chóp ngũ giác có năm mặt bên và một mặt đáy, nên số mặt của nó là sáu mặt.

Câu 4. (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Trong một khối đa diện, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hai cạnh bất kỳ có ít nhất một điểm chung

B. Ba mặt bất kì có ít nhất một đỉnh chung

C. Hai mặt bất kì có ít nhất một điểm chung

D. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba mặt

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất khối đa diện sgk hình học 12.

Câu 5. (Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng?**

A. Tồn tại hình đa diện có số đỉnh và số mặt bằng nhau.

B. Số đỉnh và số mặt của một hình đa diện luôn bằng nhau.

C. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh và số mặt bằng nhau.

D. Tồn tại một hình đa diện có số cạnh bằng số đỉnh.

Lời giải

Hình tứ diện có số đỉnh bằng số mặt và bằng bốn.

Câu 6. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Hình nào sau đây **không** phải là hình đa diện?

A. Hình lăng trụ. **B.** Hình chóp. **C.** Hình lập phương. **D.** Hình vuông.

Lời giải

Chọn D.

Câu 7. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho các mệnh đề sau:

I/ Số cạnh của một khối đa diện lồi luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

II/ Số mặt của khối đa diện lồi luôn lớn hơn hoặc bằng 5.

III/ Số đỉnh của khối đa diện lồi luôn lớn hơn 4.

Trong các mệnh đề trên, những mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. II và III **B.** I và II **C.** Chỉ I **D.** Chỉ II

Lời giải

Mệnh đề II sai vì khối tứ diện là khối đa diện lồi có số mặt nhỏ hơn 5

Mệnh đề III sai vì khối tứ diện là khối đa diện lồi có 4 đỉnh

Câu 8. (Nhân Chính Hà Nội Năm 2019) Cho khối đa diện đều. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Số đỉnh của khối lập phương bằng 8. **B.** Số mặt của khối tứ diện đều bằng 4.

C. Khối bát diện đều là loại $\{4;3\}$. **D.** Số cạnh của khối bát diện đều bằng 12.

Lời giải

Chọn C

Khối bát diện đều là loại $\{3;4\}$.

Câu 9. (THPT Nghĩa Hưng Nam Định 2019) Có tất cả bao nhiêu khối đa diện đều

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Có tất cả 5 khối đa diện đều là: Khối tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều (hay khối tám mặt đều), khối mười hai mặt đều và khối hai mươi mặt đều.

Câu 10. (THPT Phan Đăng Lưu - Huế -2018) Số cạnh của hình 12 mặt đều là:

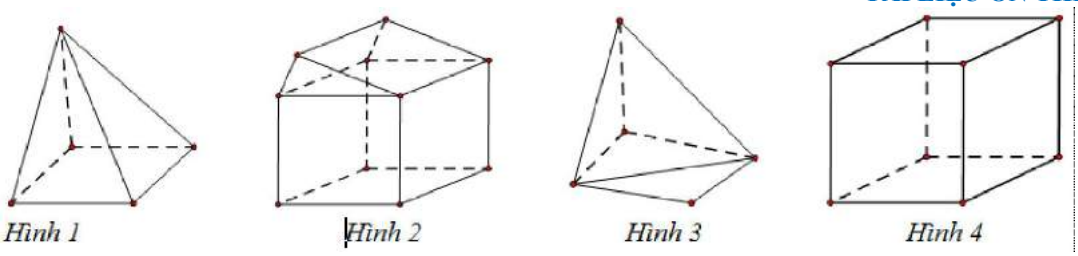
A. 20. **B.** 30. **C.** 16. **D.** 12.

Lời giải

Chọn B

Ta có số cạnh của hình mười hai mặt đều là 30.

Câu 11. (THPT Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2018) Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?



A. Hình 3. **B.** Hình 2. **C.** Hình 4. **D.** Hình 1.

Lời giải

Chọn A

Có một cạnh là cạnh chung của 3 mặt.

Câu 12. (THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng - 2018) Khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối

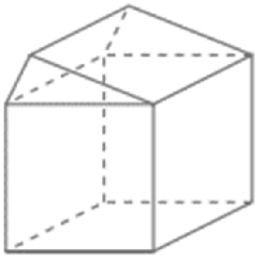
A. Hai mươi mặt đều. **B.** Tám mặt đều. **C.** Lập phương. **D.** Tứ diện đều.

Lời giải

Chọn A

Theo SGK Hình học 12 trang 17 thì khối đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều.

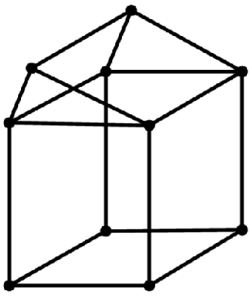
Câu 13. (THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018) Hình vẽ bên dưới có bao nhiêu mặt



A. 7. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B



Từ hình vẽ 1 suy ra có 9 mặt.

Câu 14. (THPT Chuyên LHP – 2017) Biết (H) là đa diện đều loại $\{3;5\}$ với số đỉnh và số cạnh lần lượt là a và b. Tính $a-b$.

A. $a-b=18$. **B.** $a-b=-8$. **C.** $a-b=-18$. **D.** $a-b=10$.

Lời giải

Chọn C

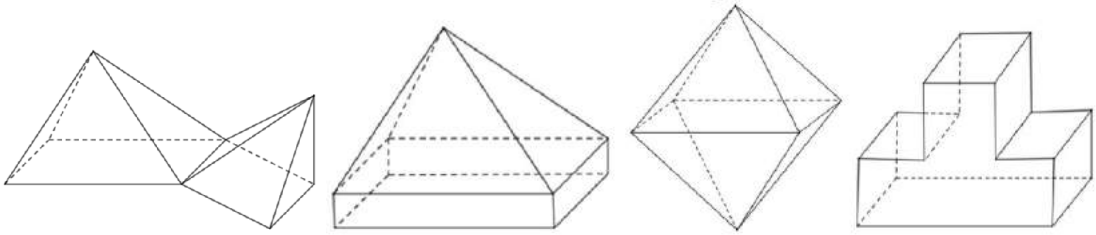
Đa diện đều loại $\{3;5\}$ là khối hai mươi mặt đều với số đỉnh $a=12$ và số cạnh $b=30$.

Do đó $a-b=-18$.

Câu 15. (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh - 2018) Gọi n là số hình đa diện trong bốn hình trên. Tìm n.

A. $n=3$. **B.** $n=2$. **C.** $n=1$. **D.** $n=4$.

Lời giải



Chọn A

Số hình đa diện là 3 vì hình đầu tiên không phải hình đa diện.

Câu 16. **(SGD Bình Dương - 2018)** Khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là:

A. Khối tứ diện đều. **B.** Khối lập phương. **C.** Khối bát diện đều. **D.** Khối hộp chữ nhật.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa khối đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối có: Mỗi mặt là 1 đa giác đều có 4 cạnh (hình vuông), mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng 3 mặt. Vậy nó là khối lập phương.

Theo bảng tóm tắt về năm loại khối đa diện đều

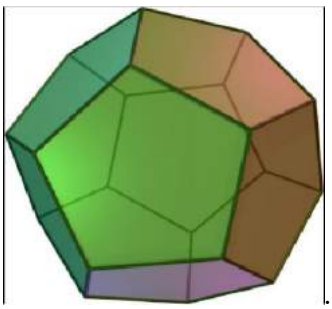
Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	8
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20

Câu 17. **(Chuyên Tuyên Quang – 2017)** Khối đa diện đều nào sau đây có mặt không phải là tam giác đều ?

A. Tám mặt đều. **B.** Tứ diện đều. **C.** Mười hai mặt đều. **D.** Hai mươi mặt đều.

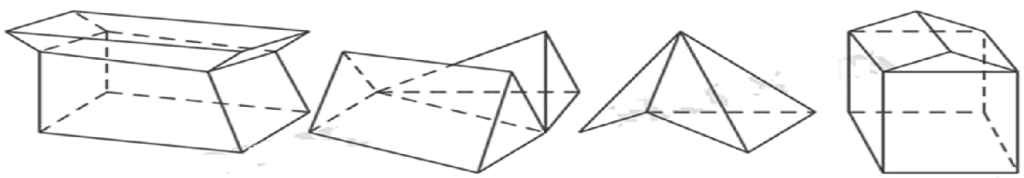
Lời giải

Chọn C



Hình khối 12 mặt đều.

Câu 18. **(THPT Đô Lương 4 - Nghệ An – 2018)** Số hình đa diện lồi trong các hình dưới đây là



A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Quan sát bốn hình trên ta thấy chỉ có một hình thứ tư từ trái qua là hình đa diện lồi vì lấy bất kỳ hai điểm nào thì đoạn thẳng nối hai điểm đó nằm trong khối đa diện.
Vậy chỉ có một đa diện lồi.

Câu 19. (THPT Thanh Miện - Hải Dương - 2018) Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại 1 đỉnh của khối đa diện bằng

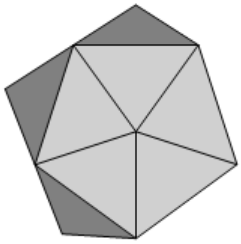
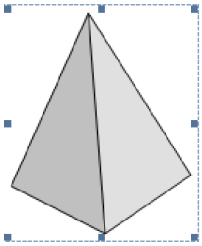
A. $324°$. **B.** $360°$. **C.** $180°$. **D.** $240°$.

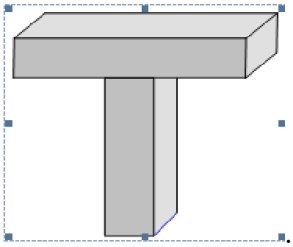
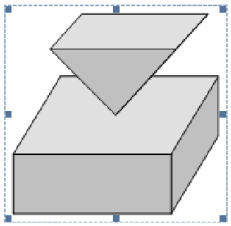
Lời giải

Chọn D

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối bát diện đều, mỗi mặt là một tam giác đều và tại mỗi đỉnh có 4 tam giác đều nên tổng các góc tại 1 đỉnh bằng $240°$.

Câu 20. (Chuyên Hưng Yên– 2017) Hình nào dưới đây không phải là một khối đa diện?

A.  **B.** 

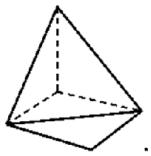
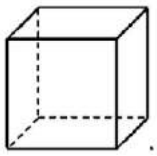
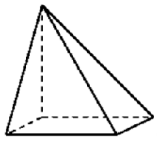
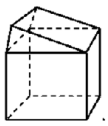
C.  **D.** 

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Câu 21. (THPT Xuân Trường - Nam Định - 2018) Hình nào dưới đây không phải là hình đa diện?

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

Lời giải

Chọn A

Câu 22. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh 2018) Khối đa diện 12 mặt đều có số đỉnh và số cạnh lần lượt là

A. 30 và 20. **B.** 12 và 20. **C.** 20 và 30. **D.** 12 và 30.

Lời giải

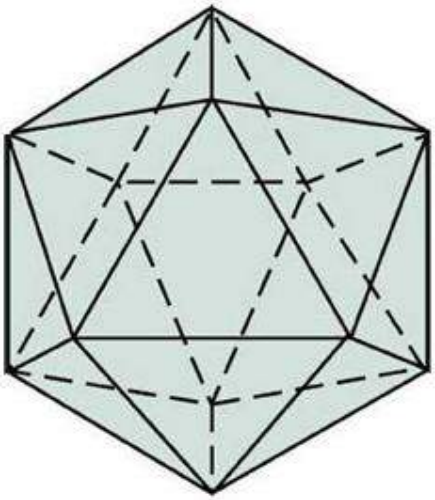
Chọn C

Câu 23. (THPT Lê Quý Đôn - Hải Phòng - 2018) Khối hai mươi mặt đều thuộc loại nào sau đây?

A. $\{3;4\}$ **B.** $\{4;3\}$ **C.** $\{3;5\}$ **D.** $\{5;3\}$

Lời giải

Chọn C



Khối hai mươi mặt đều có các mặt là tam giác nên thuộc loại $\{3;5\}$.

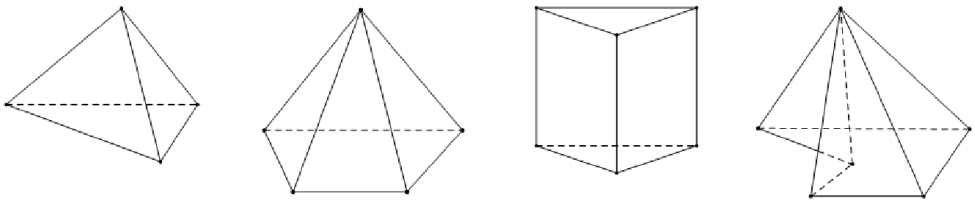
Câu 24. **(THPT Kim Liên - HN - 2018)** Khối đa diện có mười hai mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là:

A. $30, 20, 12$. **B.** $20, 12, 30$. **C.** $12, 30, 20$. **D.** $20, 30, 12$.

Lời giải

Chọn D

Câu 25. **(THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - 2018)** Trong các hình dưới đây hình nào không phải đa diện lồi?

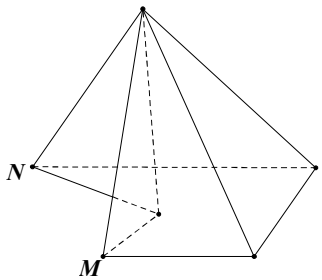


Hình I Hình II Hình III Hình IV

A. Hình (IV). **B.** Hình (III). **C.** Hình (II). **D.** Hình (I).

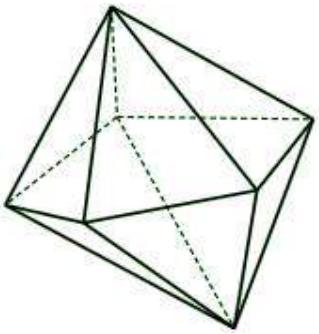
Lời giải

Chọn A



Ta có đường nối hai điểm MN không thuộc hình IV nên đây không phải là đa diện lồi.

Câu 26. **(THPT Chuyên Hạ Long - QNinh - 2018)** Hình đa diện bên có bao nhiêu mặt?



A. 7. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Hình đa diện bên có 10 mặt.

Câu 27. (THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019) Một hình lăng trụ có đúng 11 cạnh bên thì hình lăng trụ đó có tất cả bao nhiêu cạnh?

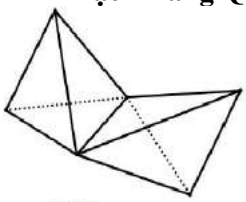
A. 33. **B.** 31. **C.** 30. **D.** 22.

Lời giải

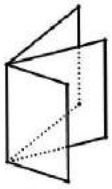
Chọn A

Hình lăng trụ có 11 cạnh thì đáy có 11 cạnh bên. Vậy hình lăng trụ có 33 cạnh.

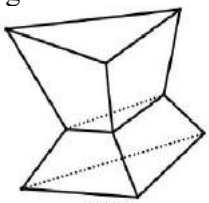
Câu 28. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019) Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?



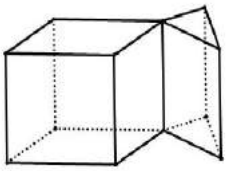
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 4. **B.** Hình 2. **C.** Hình 1. **D.** Hình 3.

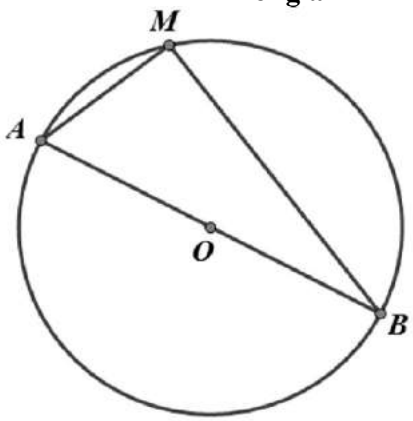
Lời giải

Hình 1, Hình 2, Hình 4 không phải hình đa diện vì nó vi phạm tính chất: " mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt".

Câu 29. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Cho đa giác đều 16 đỉnh, Hỏi có bao nhiêu tam giác vuông có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác đều đó?

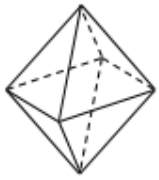
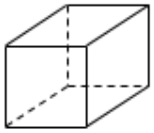
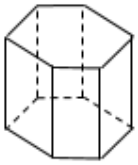
A. 560. **B.** 112. **C.** 121. **D.** 128.

Lời giải



Ta có đa giác đều có 16 đỉnh nên có 8 đường chéo qua tâm. Ứng với mỗi đường chéo qua tâm có 14 tam giác vuông. Vậy có $8.14 = 112$ tam giác.

Câu 30. (Đề Bộ Giáo Dục) Hình đa diện nào dưới đây **không** có tâm đối xứng?

A. Tứ diện đều. **B.** Bát diện đều. **C.** Hình lập phương. **D.** Lăng trụ lục giác đều.

Lời giải

Chọn A

Dễ dàng thấy hình bát diện đều, hình lập phương và hình lăng trục lục giác đều có tâm đối xứng. Còn tứ diện đều không có tâm đối xứng.

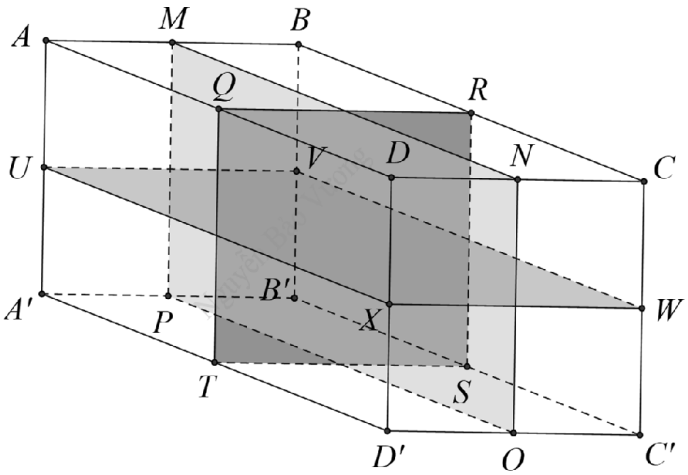
Dạng 2. Tính chất đối xứng khối đa diện

Câu 31. (Mã 123 2017) Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6 mặt phẳng **B.** 9 mặt phẳng **C.** 3 mặt phẳng **D.** 4 mặt phẳng

Lời giải

Chọn C



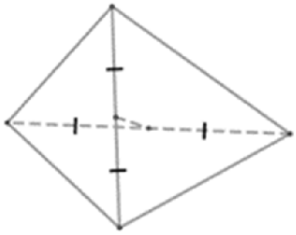
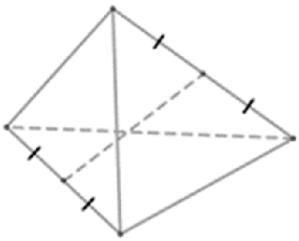
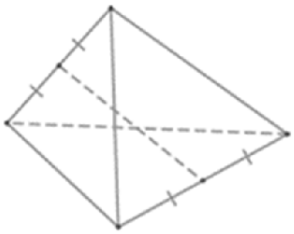
Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước đôi một khác nhau.
Khi đó có 3 mặt phẳng đối xứng là $MNOP, QRST, UVWX$.

Câu 32. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Hình tứ diện đều có bao nhiêu trục đối xứng?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

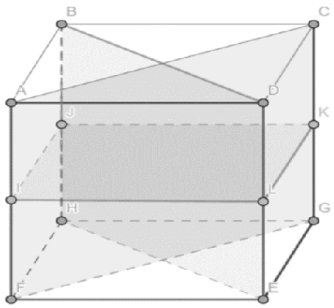




Gọi S là tập hợp các đỉnh của khối tứ diện đều $ABCD$. Giả sử d là trục đối xứng của tứ diện đã cho, phép đối xứng trục d biến S thành chính S nên d phải là trung trực của ít nhất một đoạn thẳng nối hai đỉnh bất kỳ của tứ diện.
Vậy tứ diện đều có 3 trục đối xứng là các đường thẳng nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện.

Câu 33. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 3 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 1 mặt phẳng.

Lời giải



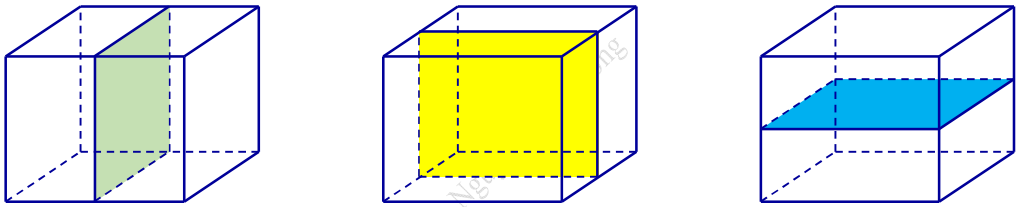
Hình hộp đứng có đáy là hình thoi có 3 mặt phẳng đối xứng trong đó bao gồm 2 mặt phẳng chứa từng cặp đường chéo song song của mỗi mặt đáy và 1 mặt phẳng cắt ngang tại trung điểm của chiều cao hình hộp. Cụ thể, theo hình vẽ trên là: $(BDEH)$, $(ACGF)$, $(IJKL)$.

Câu 34. **(SGD Bình Dương - 2018)** Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6 mặt phẳng. **B.** 4 mặt phẳng. **C.** 3 mặt phẳng. **D.** 9 mặt phẳng.

Lời giải

Chọn C

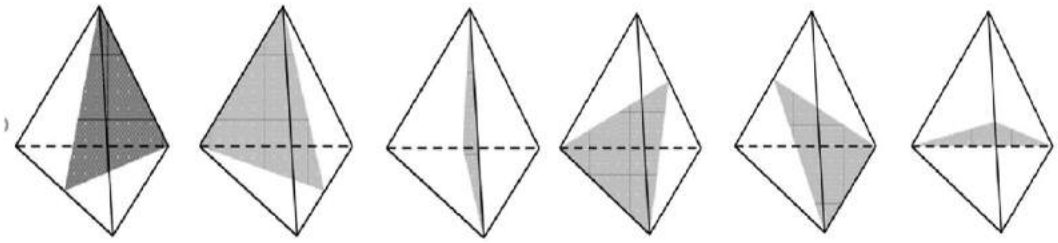


Câu 35. **(Chuyên Quốc Học Huế -2018)** Hình tứ diện đều có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



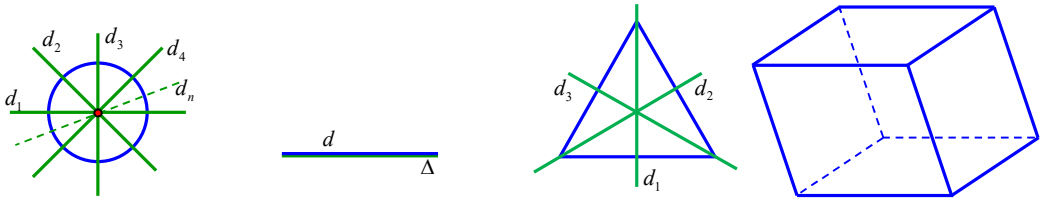
Hình tứ diện có tất cả 6 mặt phẳng đối xứng.

Câu 36. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Hình nào sau đây không có trục đối xứng?

A. Hình hộp xiên. **B.** Tam giác đều. **C.** Hình tròn. **D.** Đường thẳng.

Lời giải

Chọn A



❍ Đường tròn có vô số trục đối xứng, các trục này đi qua tâm đường tròn.
❍ Đường thẳng có 1 trục đối xứng trùng với nó.
❍ Tam giác đều có 3 trục đối xứng, các trục này đi qua trọng tâm của tam giác đều.
❍ Hình hộp xiên không có trục đối xứng.

Câu 37. (Chuyên KHTN- 2017) Biết rằng một hình đa diện H có 6 mặt là 6 tam giác đều. Hãy chỉ ra mệnh đề nào dưới đây là **đúng?**

A. Không tồn tại hình H nào có mặt phẳng đối xứng.
B. Có tồn tại một hình H có đúng 4 mặt đối xứng.
C. Không tồn tại hình H nào có đúng 5 đỉnh.
D. Có tồn tại một hình H có hai tâm đối xứng phân biệt.

Lời giải

Chọn B

Luôn tồn tại hình đa diện H có mặt phẳng đối xứng và có đúng 5 đỉnh, H không có tâm đối xứng.

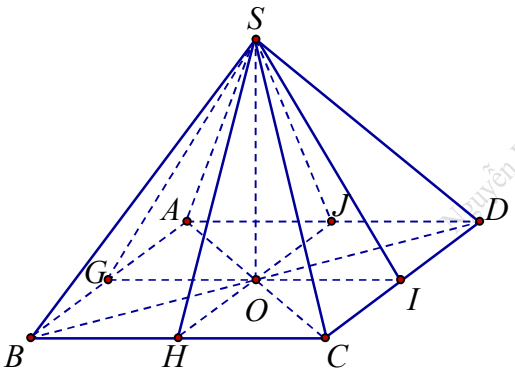
Câu 38. (Chuyên Thái Bình - 2018) Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đó là các mặt phẳng (SAC), (SBD), (SHJ), (SGI) với G, H, I, J là các trung điểm của các cạnh AB, CB, CD, AD (hình vẽ bên dưới).



Câu 39. (Chuyên Quốc Học Huế - 2018) Hình đa diện nào dưới đây không có tâm đối xứng?

A. Hình bát diện đều. **B.** Hình tứ diện đều. **C.** Hình lập phương **D.** Hình lăng trụ tứ giác đều.

Lời giải

Chọn B

Ta có phép đối xứng tâm I biến hình (H) thành chính nó. Khi đó hình (H) có tâm đối xứng là I suy ra hình lăng trụ tứ giác đều, hình bát diện đều và hình lập phương là các hình đa diện có tâm đối xứng.

Câu 40. (Chuyên Hạ Long - QNinh - 2018) Hình nào dưới nào dưới đây **không** có trục đối xứng?

A. Tam giác cân. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình elip. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

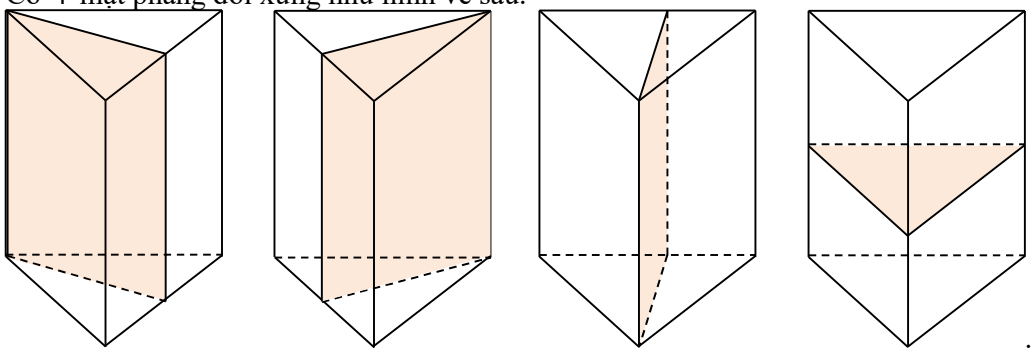
Câu 41. (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An- 2018) Hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Có 4 mặt phẳng đối xứng như hình vẽ sau.

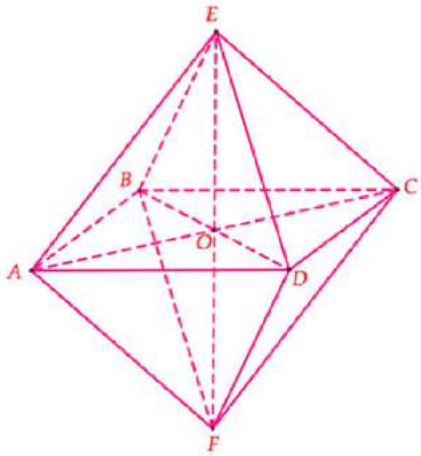


Câu 42. **(Vĩnh Phúc - 2018)** Khối bát diện đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 8. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C



Hình bát diện $ABCDEF$ có 9 mặt phẳng đối xứng: 3 mặt phẳng $(ABCD),(BEDF),(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là trung trực của hai cạnh song song.

Câu 43. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện nào sau đây?

A. $BCA'D'$ **B.** $BB'A'D'$ **C.** $B'BC'A'$ **D.** $BC'D'A'$

Lời giải

Phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến các điểm

$B \to B$

$C \to B'$

$D \to A'$

$D' \to D'$

Nên phép đối xứng qua mặt phẳng $(ABC'D')$ biến khối tứ diện $BCDD'$ thành khối tứ diện $BB'A'D'$

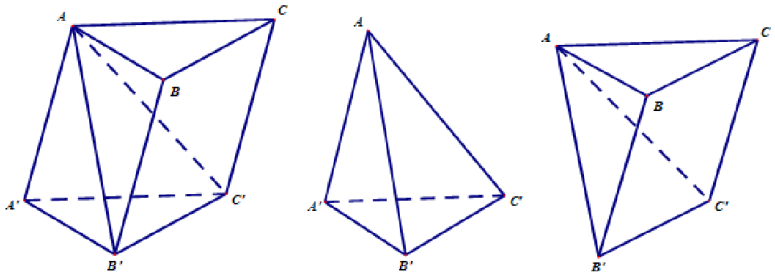
Dạng 3. Phân chia, lắp ghép khối đa diện

Câu 44. **(Mã 110 2017)** Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Hai khối chóp tứ giác.
B. Hai khối chóp tam giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
D. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối chóp

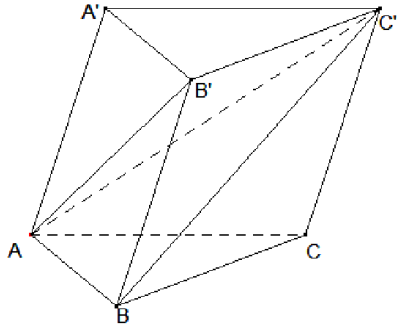
Chóp tam giác: $A.A'B'C'$ và chóp tứ giác: $A.BB'C'C$.

Câu 45. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cắt khối trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

A. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
B. Ba khối tứ diện.
C. Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác.
D. Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác

Lời giải

Chọn B



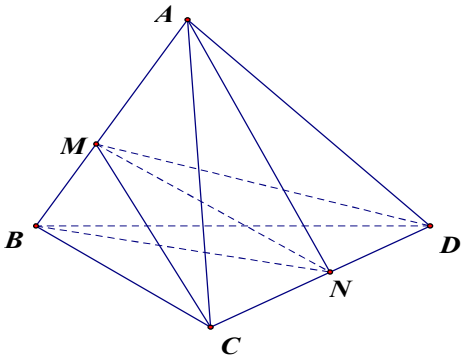
Ba khối tứ diện là $AA'B'C'$, $ABB'C'$, $ABCC'$.

Câu 46. (THPT Đoàn Thượng - Hải Phòng - 2018) Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây?

A. $NACB$, $BCMN$, $ABND$, $MBND$.
B. $MANC$, $BCDN$, $AMND$, $ABND$.
C. $MANC$, $BCMN$, $AMND$, $MBND$.
D. $ABCN$, $ABND$, $AMND$, $MBND$.

Lời giải

Chọn C



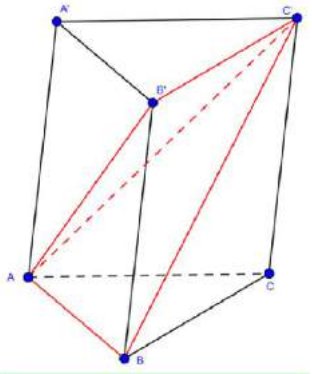
Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện: $MANC$, $BCMN$, $AMND$, $MBND$.

Câu 47. (THPT An Lão 2017) Cắt khối trụ $ABC.A'B'C'$ bởi các mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC') ta được những khối đa diện nào?

A. Một khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác. **B.** Ba khối tứ diện.
C. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác. **D.** Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Lời giải

Chọn B



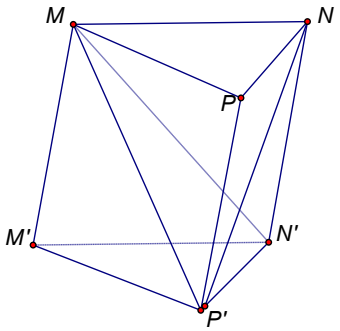
Ta có ba khối tứ diện là $A.A'B'C'; B'.ABC'; C'.ABC$.

Câu 48. (THPT Ngô Quyền- 2017) Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được những khối đa diện nào?

A. Ba khối tứ diện. **B.** Hai khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.
C. Hai khối tứ diện và hai khối chóp tứ giác. **D.** Một khối tứ diện và một khối chóp tứ giác.

Lời giải

Chọn A



Cắt khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$ bởi các mặt phẳng $(MN'P')$ và (MNP') ta được ba khối tứ diện là $P.MNP'$; $P.MNN'$; $M'.MN'P'$.

Câu 49. (THPT Yên Định - Thanh Hóa 2018) Có thể chia một khối lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện có thể tích bằng nhau mà các đỉnh của tứ diện cũng là đỉnh của hình lập phương?

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

+ Ta chia khối lập phương thành hai khối lăng trụ đứng;
+ Ứng với mỗi khối lăng trụ đứng ta có thể chia thành ba khối tứ diện đều mà các đỉnh của tứ diện cũng là đỉnh của hình lập phương.
Vậy có tất cả là 6 khối tứ diện có thể tích bằng nhau.

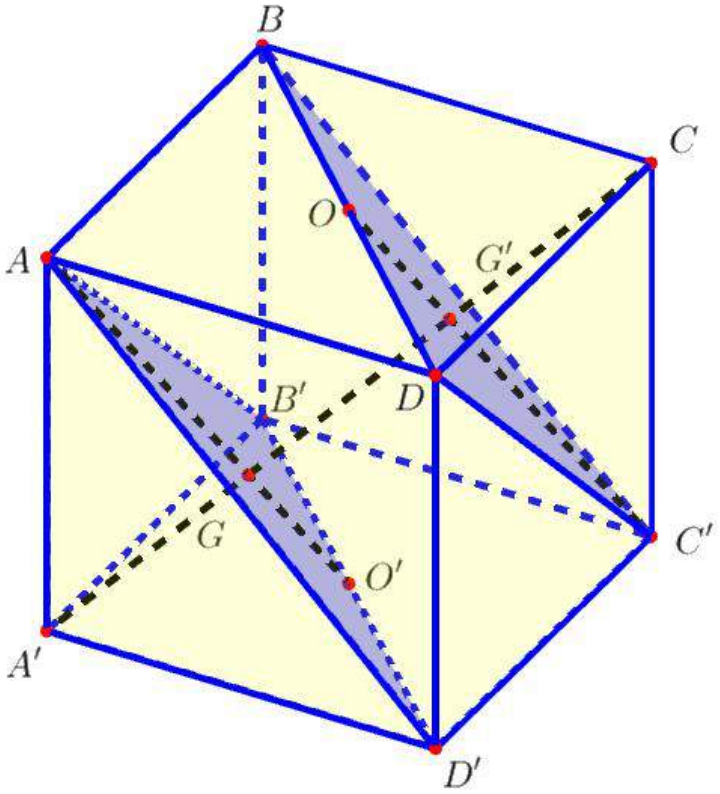
Câu 50. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho đa giác đều có 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho ?

A. C_{2018}^4. **B.** C_{1009}^4. **C.** C_{2018}^2. **D.** C_{1009}^2.

Lời giải

Số đường chéo đi qua tâm của đa giác đều 2018 đỉnh là : 1009.

Cứ hai đường chéo đi qua tâm tạo thành một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật có 4 đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho là : C_{1009}^2.



---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 10 THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

DẠNG CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

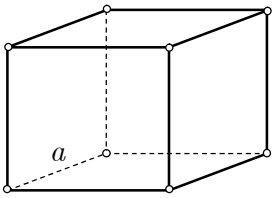
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

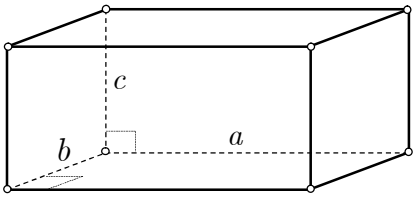
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

1. Thể tích khối chóp $\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}} = \boxed{\frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ d\left(\text{đỉnh; mặt phẳng đáy}\right)}$

2. Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$
- Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$

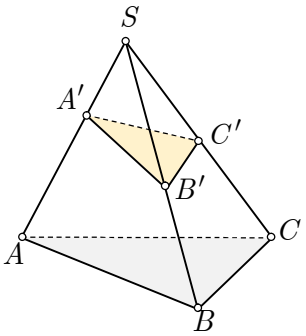




3. Tỉ số thể tích

- Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S. Khi đó ta luôn có tỉ số thể tích:

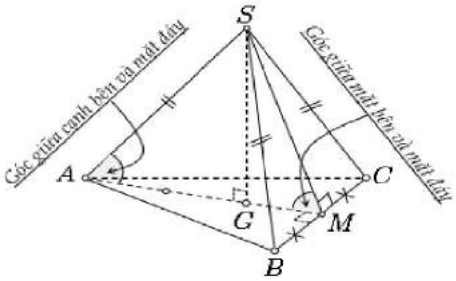
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}.$$

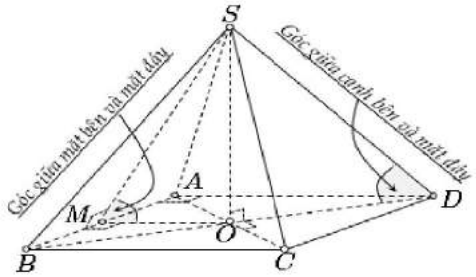


- Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.
- Ta thường dùng tỉ số thể tích khi điểm chia đoạn theo tỉ lệ.

4. Tính chất của hình chóp đều

- ***Đáy là đa giác đều*** (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ***Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy***
- ***Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.***
- ***Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.***
- ***Góc giữa các mặt bên*** và ***mặt đáy đều bằng nhau.***

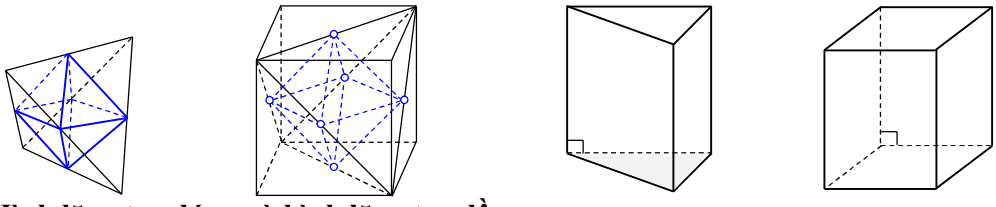




5. Tứ diện đều và bát diện đều:

- **Tứ diện đều** là hình chóp có tất cả các mặt là những tam giác đều bằng nhau.
- **Bát diện đều** là hình gồm hai hình chóp tứ giác đều ghép trùng khít hai đáy với nhau. Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của bốn tam giác đều. Tám mặt là các tam giác đều và bằng nhau.

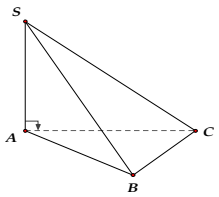
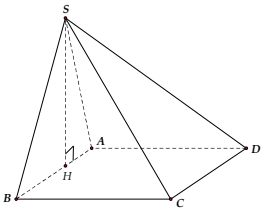
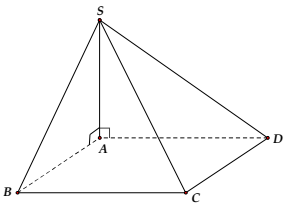
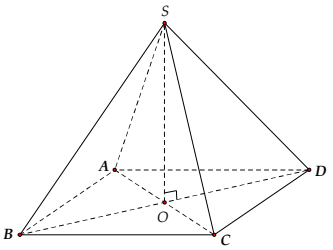
Nếu nối trung điểm của hình tứ diện đều hoặc tâm các mặt của hình lập phương ta sẽ thu được một hình bát diện đều.



Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

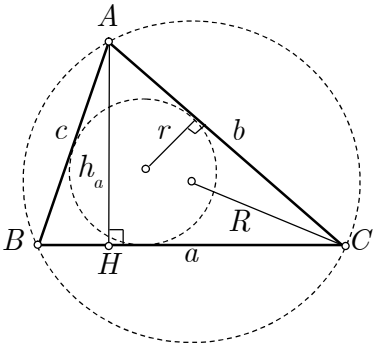
XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO THƯỜNG GẶP

a) Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA. 
b) Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB. 
c) **Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy**: Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SA. 
d) **Hình chóp đều:** Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.	**Ví dụ**: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO. 

DIỆN TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

Diện tích tam giác thường: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $S_{\Delta ABC} = \begin{cases} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{(Héron)} \end{cases}$



- $S_{\text{tam giác vuông}} = \dfrac{1}{2}\cdot$(tích hai cạnh góc vuông).
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \dfrac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}$.
- $S_{\text{tam giác đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}$.

☐ $S_{\text{hình chữ nhật}}$ = dài × rộng và $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.

☐ $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})\cdot(\text{chiều cao})}{2}$.

☐ $S_{\text{Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc}} = \dfrac{\text{Tích hai đường chéo}}{2} \Rightarrow S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{\text{Tích 2 đường chéo}}{2}$.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

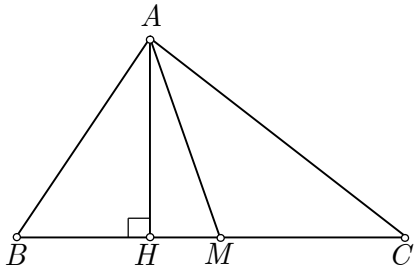
$*$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pitago), $AH.BC = AB.AC$.

$*$ $AB^2 = BH\cdot BC$ và $AC^2 = CH\cdot CB$.

$*$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB\cdot HC$.

$*$ $BC = 2AM$.

$*$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC$.

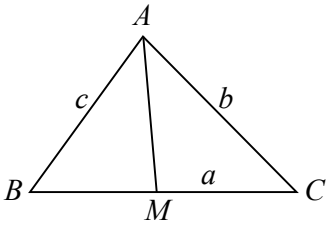


2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho ΔABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi). Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó:

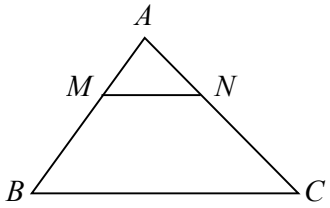
$*$ **Định lý hàm sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$*$ **Định lý hàm cos**:
$$\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}.$$



$*$ **Công thức trung tuyến**:
$$\begin{cases} \bullet\ AM^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ \bullet\ BN^2 = \dfrac{BA^2+BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \\ \bullet\ CK^2 = \dfrac{CA^2+CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}.$$

$*$ **Định lý Thales**:
$$\begin{cases} \bullet\ MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}.$$



Nguyễn Bảo Vương

Dạng 1. Cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 12.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$ và chiều cao $h=2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $V=\sqrt{2}a^3$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 6. **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=4$, $AB=6$, $BC=10$ và $CA=8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=32$ **B.** $V=192$ **C.** $V=40$ **D.** $V=24$

Câu 7. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $\sqrt{2}a^3$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 8. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\dfrac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 9. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3}{4}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$

Câu 10. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 11. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD=10, AB=10, BC=24$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

A. $V=1200$ **B.** $V=960$ **C.** $V=400$ **D.** $V=\dfrac{1300}{3}$

Câu 12. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SA=a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 13. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, AC=2a, SA\perp(ABC)$ và $SA=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 14. **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3a$ và $AD=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $12\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 15. **(Sở Cần Thơ 2019)** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và chiều cao bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** 1.

Câu 16. **(Sở Nam Định 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, độ dài cạnh $AB=BC=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 17. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $SA=AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 18. **(Nguyễn Khuyến HCM-2019)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Khi đó thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 19. **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy là $a^2\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 21. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABC)$, $SA=3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $V=a^3$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=\frac{1}{3}a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 22. **(THPT Hàm Rồng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp S.$ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 23. **(THPT Cộng Hiền - 2019)** Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}Bh$.

B. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V=Bh$.

C. Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.

D. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V=3Bh$.

Câu 24. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=AB=2a$, $BC=3a$. Tính thể tích của $S.ABC$ là

A. $3a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 25. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB=4a$, $BC=a$, cạnh bên $SD=2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $6a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $\frac{2}{3}a^3$.

Câu 26. **(Sở Điện Biên - 2019)** Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có SA là đường cao, đáy là tam giác BAC vuông cân tại A; $SA=AB=a$

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{9}$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT Lương Thế Vinh Hà 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 2. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 3. **(SGD Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $4a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp. Biết rằng $AB = a\sqrt{3}; AC = a$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

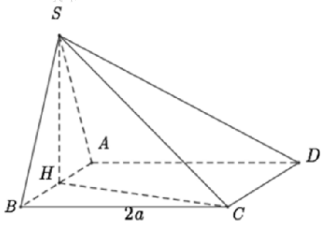
Câu 7. **(Chuyên ĐH Vinh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tich V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{a^3}{8}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt đáy, tính $\tan\alpha$.



A. $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

Câu 1. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. **(Mã 104 2017)** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{6}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{4}$ **C.** $V = \frac{\sqrt{13}a^3}{12}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Câu 3. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đó là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{12}$. **C.** $\frac{a^3}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 4. **(Dề Tham Khảo 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\frac{8a^3}{3}$ **C.** $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$ **D.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 5. **(Mã 123 2017)** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ **B.** $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$ **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Câu 6. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4\sqrt{5}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 7. **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A. $V=9a^3$ **B.** $V=2a^3$ **C.** $V=3a^3$ **D.** $V=6a^3$

Câu 8. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{10a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Xét khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2 lần chiều cao tam giác đáy. Tính thể tích khối chóp.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 11. **(SP Đồng Nai - 2019)** Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3.

A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 13. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối $SBCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 14. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a, các mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $\widehat{ASC}=90^\circ$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 17. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy góc 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{24}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 18. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Cho khối chóp có đáy hình thoi cạnh a $(a>0)$ các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với đáy góc 45°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{1}{3\sqrt{2}}a^3$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\frac{3a^3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}a^3$.

Câu 19. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

A. a^3. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\frac{1}{12}a^3$. **D.** $6a^3$.

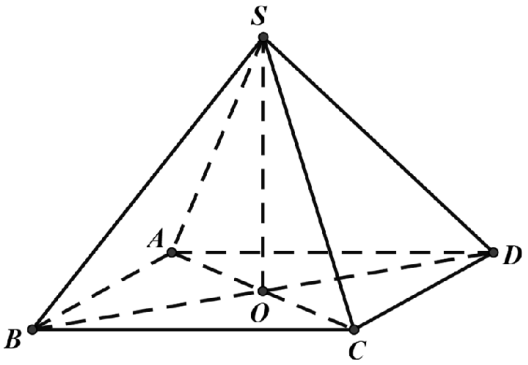
Câu 20. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 21. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 22. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.



A. $V=4\sqrt{7}a^3$. **B.** $V=\frac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **C.** $V=\frac{4a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Câu 23. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là $147\,\text{m}$, cạnh đáy là $230\,\text{m}$. Thể tích của nó là

A. $2592100\,\text{m}^3$. **B.** $2952100\,\text{m}^3$. **C.** $2529100\,\text{m}^3$. **D.** $2591200\,\text{m}^3$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 10 THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

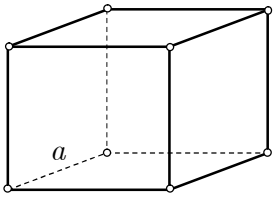
1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

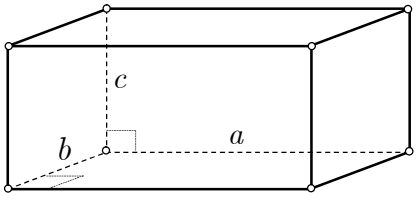
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

1. Thể tích khối chóp $\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}} = \boxed{\frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ d\left(\text{đỉnh; mặt phẳng đáy}\right)}$

2. Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}}$

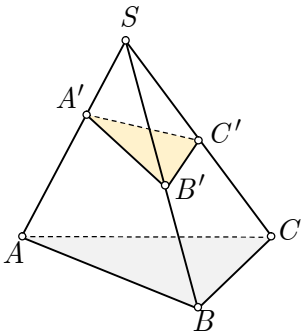
- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$
- Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$





3. Tỉ số thể tích

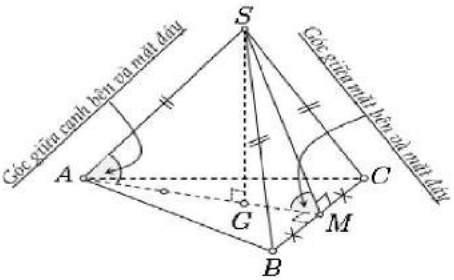
- Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S. Khi đó ta luôn có tỉ số thể tích: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}$.

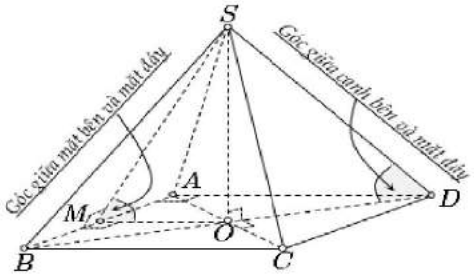


- Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.
- Ta thường dùng tỉ số thể tích khi điểm chia đoạn theo tỉ lệ.

4. Tính chất của hình chóp đều

- ***Đáy là đa giác đều*** (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ***Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy***
- ***Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.***
- ***Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.***
- ***Góc giữa các mặt bên và mặt đáy đều bằng nhau.***

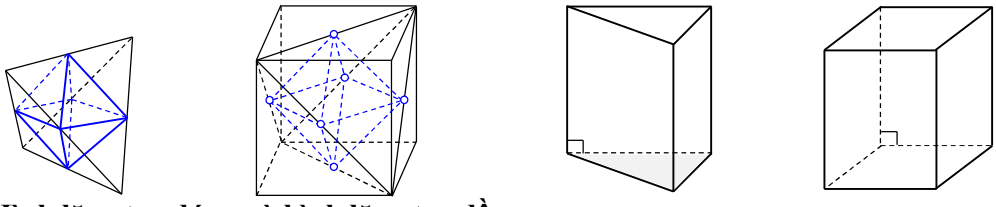




5. Tứ diện đều và bát diện đều:

- **Tứ diện đều** là hình chóp có tất cả các mặt là những tam giác đều bằng nhau.
- **Bát diện đều** là hình gồm hai hình chóp tứ giác đều ghép trùng khít hai đáy với nhau. Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của bốn tam giác đều. Tám mặt là các tam giác đều và bằng nhau.

Nếu nối trung điểm của hình tứ diện đều hoặc tâm các mặt của hình lập phương ta sẽ thu được một hình bát diện đều.



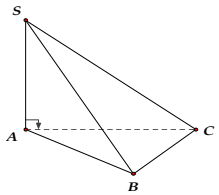
Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO THƯỜNG GẶP

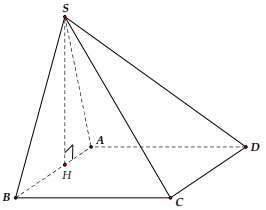
a) Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.



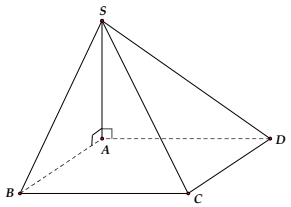
b) Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB.



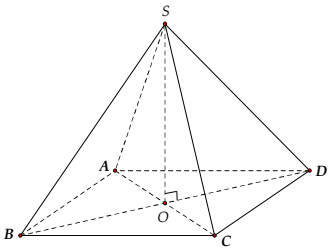
c) Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.



d) Hình chóp đều:
Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.

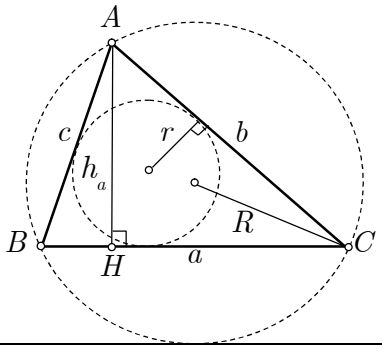
Ví dụ: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO.



DIỆN TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

Diện tích tam giác thường: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $S_{\Delta ABC} = \begin{cases} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{(Héron)} \end{cases}$



- $S_{\text{tam giác vuông}} = \dfrac{1}{2}\cdot$(tích hai cạnh góc vuông).
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \dfrac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}$.
- $S_{\text{tam giác đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}$.

☐ $S_{\text{hình chữ nhật}}$ = dài × rộng và $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.

☐ $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})\cdot(\text{chiều cao})}{2}$.

☐ $S_{\text{Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc}} = \dfrac{\text{Tích hai đường chéo}}{2} \Rightarrow S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{\text{Tích 2 đường chéo}}{2}$.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

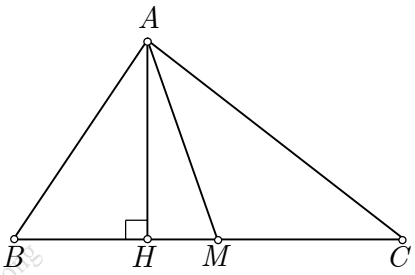
$*$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pitago), $AH.BC = AB.AC$.

$*$ $AB^2 = BH\cdot BC$ và $AC^2 = CH\cdot CB$.

$*$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB\cdot HC$.

$*$ $BC = 2AM$.

$*$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC$.



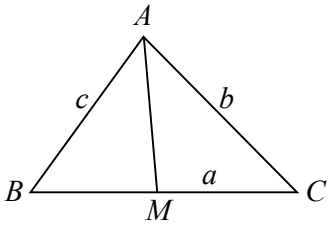
2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho ΔABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi).

Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó:

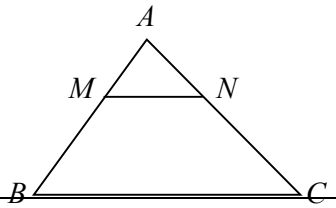
$*$ **Định lý hàm sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$*$ **Định lý hàm cos**:
$$\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}.$$



$*$ **Công thức trung tuyến**:
$$\begin{cases} \bullet\ AM^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ \bullet\ BN^2 = \dfrac{BA^2+BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \\ \bullet\ CK^2 = \dfrac{CA^2+CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}.$$

$*$ **Định lý Thales**:
$$\begin{cases} \bullet\ MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}.$$



Dạng 1. Cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\frac{a^3}{2}$

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$ **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\frac{a^3}{3}$

Câu 3. **(Mã 123 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB=4a, SB=6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{80}$

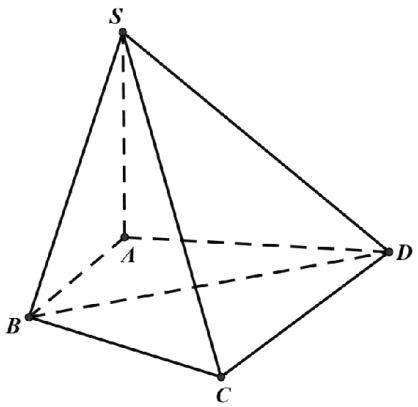
Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Câu 6. **(Lương Thế Vinh Hà Nội Năm 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 7. **(Hoàng Hoa Thám 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB=5\sqrt{3}, BC=3\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=90°$, $SA=9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



A. $\frac{20\sqrt{273}}{819}$. **B.** $\frac{\sqrt{91}}{9}$. **C.** $\frac{3\sqrt{273}}{20}$. **D.** $\frac{9\sqrt{91}}{9}$

Câu 8. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{8a^3}{9}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC = a\sqrt{3}$.

A. $V_{S.ABCD} = a^3$. **B.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB = 2a$, $AC = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120°$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 12. **(Bạc Liêu – Ninh Bình)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Câu 13. **(Cụm liên trường Hải Phòng- 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 15. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 16. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0, $AB=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

Dạng 2. Mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Câu 2. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 3. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{4}{3}a$ **B.** $h=\dfrac{3}{2}a$ **C.** $h=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$ **D.** $h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 4. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h=\dfrac{3}{4}a$ **B.** $h=\dfrac{2}{3}a$ **C.** $h=\dfrac{4}{3}a$ **D.** $h=\dfrac{8}{3}a$

Câu 5. **(Gia Bình 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{21}$. Hãy cho biết cạnh đáy bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{21}$ **B.** 21 **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** 7

Câu 6. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\dfrac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a.

A. $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 7. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB=a; AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc

giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d=\dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d=\dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 8. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 9. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=8\sqrt{6}a^3$. **B.** $V=\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=8\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\dfrac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Câu 10. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=a$, $CD=2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích tứ diện $SBCD$ bằng $\dfrac{a^3}{\sqrt{6}}$. Khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) là?

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD; gọi M là trung điểm của CD; cạnh bên SB hợp với đáy góc 60°. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABM$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$

Câu 12. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH=\dfrac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 15. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\frac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a

A. $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 16. **(Chuyên - Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{8}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB}=30^0$, $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a, BC=a\sqrt{3}, \widehat{ABC}=60^0$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là 45^0. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

Câu 1. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 2. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Nếu một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và có diện tích xung quanh bằng $4\sqrt{3}$ thì có thể tích bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

A. $\frac{a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{7}}{27}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB=a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. **(HKI-NK HCM-2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ độ dài cạnh đáy là a. Biết rằng mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt cạnh SB tại B' với $\frac{SB'}{SB}=\frac{2}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7. **(Sở Quảng Trị2019)** Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc $45°$. Thể tích của khối chóp đó là

A. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $2a^3\sqrt{2}$.

Câu 8. **(THPT Trần Phú - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $3a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $6a^3\sqrt{3}$. **C.** $12a^3$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh $AB=a$ và cạnh bên hợp với đáy một góc $45°$. Thể tích V của khối chóp là

A. $V=\frac{a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{4}$.

Câu 10. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Dạng 4. Thể tích khối chóp khác

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB,AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M,N,P tương ứng là trung điểm các cạnh BC,CD,DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=7a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$ **D.** $V=\frac{7}{2}a^3$

Câu 2. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Câu 3. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Thể tích tứ diện $SGCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC=4$, $BC=2$, $SA=4\sqrt{3}$, $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}=30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 6. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA=BC=3$; $SB=AC=4$; $SC=AB=2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{390}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{390}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{390}}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{390}}{8}$.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=SB=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng a. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{6}\,a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\,a^3}{6}$. **C.** $2\frac{\sqrt{6}\,a^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}\,a^3}{3}$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB=a, \widehat{BAD}=60°, SO\perp(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa SA và BC là $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC, tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB=a$, $\widehat{BAD}=60°, SO\perp(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh x, $\widehat{BAD}=60°$, gọi I là giao điểm AC và BD. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là H sao cho H là trung điểm của BI. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{39}x^3}{12}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{39}x^3}{36}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{39}x^3}{24}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{39}x^3}{48}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC=4$, $BC=2, SA=4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB}=\widehat{SAC}=30^o$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC}=8$. **B.** $V_{S.ABC}=6$. **C.** $V_{S.ABC}=4$. **D.** $V_{S.ABC}=12$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$. Góc $\widehat{SAB}=60^0$, $\widehat{BAC}=90^0$, $\widehat{CAS}=120^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 14. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=7cm$, $BC=8cm$, $AC=9cm$. Các mặt bên tạo với đáy góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. Biết hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) thuộc miền trong của tam giác ABC.

A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}(cm^3)$. **B.** $20\sqrt{3}(cm^3)$. **C.** $\frac{63\sqrt{3}}{2}(cm^3)$. **D.** $72\sqrt{3}(cm^3)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ tạo với đáy các góc bằng nhau và đều bằng $60°$ .Biết $AB=13a, AC=14a, BC=15a$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V=28\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=112\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=84\sqrt{3}a^3$. **D.** $84a^3$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=6$, $AC=4$; ABC là tam giác vuông cân tại B. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=16\sqrt{7}$ **B.** $V=\frac{16\sqrt{7}}{3}$ **C.** $V=16\sqrt{2}$ **D.** $V=\frac{16\sqrt{2}}{3}$

Câu 17. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ biết rằng $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=120°$, $\widehat{BSC}=60°$ và $\widehat{ASC}=90°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 18. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $\frac{1}{48}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 10 THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

DẠNG CÂU HỎI DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

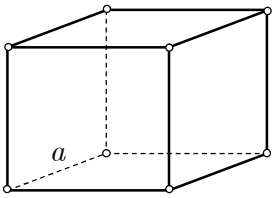
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

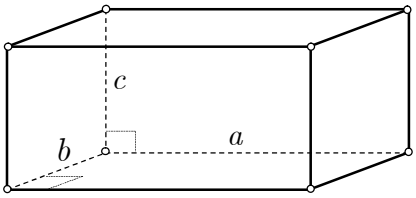
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

1. Thể tích khối chóp $\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}} = \boxed{\frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ d\left(\text{đỉnh; mặt phẳng đáy}\right)}$

2. Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$
- Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$

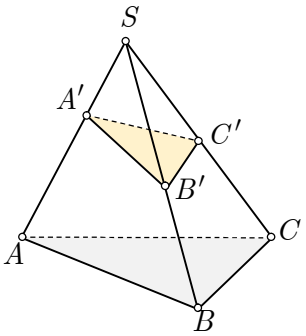




3. Tỉ số thể tích

- Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S. Khi đó ta luôn có tỉ số thể tích:

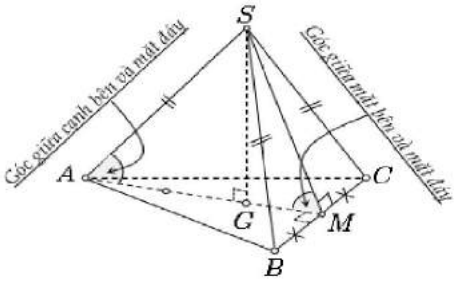
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}.$$

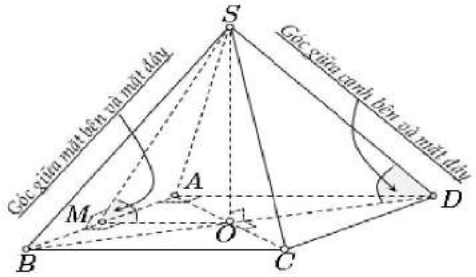


- Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.
- Ta thường dùng tỉ số thể tích khi điểm chia đoạn theo tỉ lệ.

4. Tính chất của hình chóp đều

- ***Đáy là đa giác đều*** (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ***Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy***
- ***Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.***
- ***Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.***
- ***Góc giữa các mặt bên*** và ***mặt đáy đều bằng nhau.***

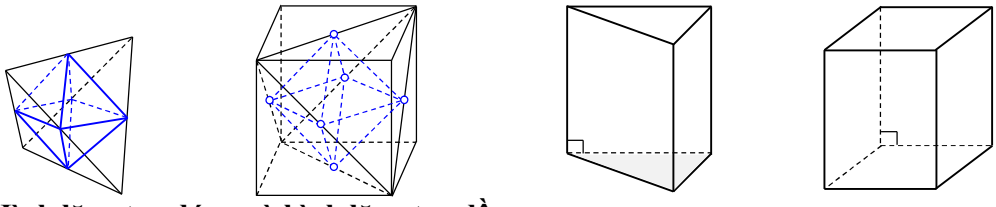




5. Tứ diện đều và bát diện đều:

- **Tứ diện đều** là hình chóp có tất cả các mặt là những tam giác đều bằng nhau.
- **Bát diện đều** là hình gồm hai hình chóp tứ giác đều ghép trùng khít hai đáy với nhau. Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của bốn tam giác đều. Tám mặt là các tam giác đều và bằng nhau.

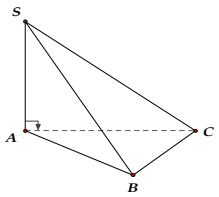
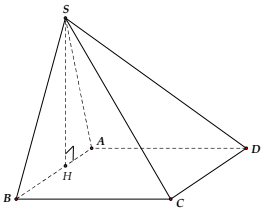
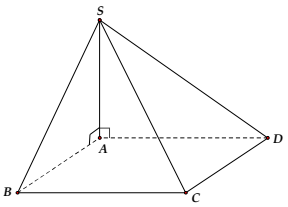
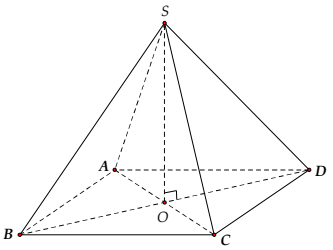
Nếu nối trung điểm của hình tứ diện đều hoặc tâm các mặt của hình lập phương ta sẽ thu được một hình bát diện đều.



Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

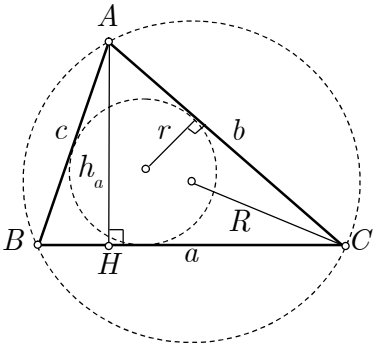
XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO THƯỜNG GẶP

a) Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA. 
b) Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB. 
c) **Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy**: Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SA. 
d) **Hình chóp đều:** Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.	**Ví dụ**: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO. 

DIỆN TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

□ **Diện tích tam giác thường**: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $S_{\Delta ABC} = \begin{cases} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{(Héron)} \end{cases}$



- $S_{\text{tam giác vuông}} = \dfrac{1}{2}\cdot$(tích hai cạnh góc vuông).
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \dfrac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}$.
- $S_{\text{tam giác đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}$.

☐ $S_{\text{hình chữ nhật}}$ = dài × rộng và $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.

☐ $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})\cdot(\text{chiều cao})}{2}$.

☐ $S_{\text{Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc}} = \dfrac{\text{Tích hai đường chéo}}{2} \Rightarrow S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{\text{Tích 2 đường chéo}}{2}$.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

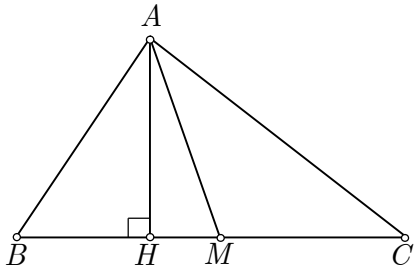
$*$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pitago), $AH.BC = AB.AC$.

$*$ $AB^2 = BH\cdot BC$ và $AC^2 = CH\cdot CB$.

$*$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB\cdot HC$.

$*$ $BC = 2AM$.

$*$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC$.

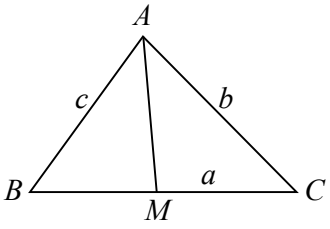


2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho ΔABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi). Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó:

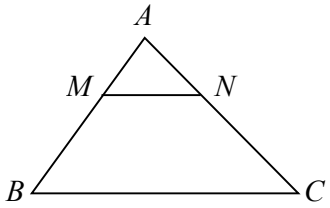
$*$ **Định lý hàm sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$*$ **Định lý hàm cos**:
$$\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}.$$



$*$ **Công thức trung tuyến**:
$$\begin{cases} \bullet\ AM^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ \bullet\ BN^2 = \dfrac{BA^2+BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \\ \bullet\ CK^2 = \dfrac{CA^2+CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}.$$

$*$ **Định lý Thales**:
$$\begin{cases} \bullet\ MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}.$$



Nguyễn Bảo Vương

Dạng 1. Cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có công thức thể tích khối chóp $V=\frac{1}{3}.B.h=\frac{1}{3}.3.4=4$.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C.

Thể tích của khối chóp $V=\frac{1}{3}Bh=4$

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp đã cho là $V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}.3.2=2$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$ và chiều cao $h=2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Lời giải

Chọn B

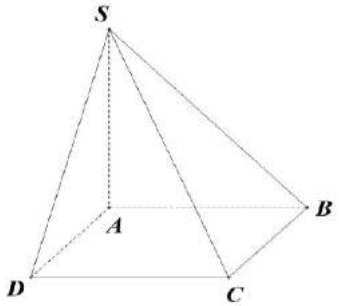
$$V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}6a^2.2a=4a^3$$

Câu 5. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $V=\sqrt{2}a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA$ là đường cao của hình chóp

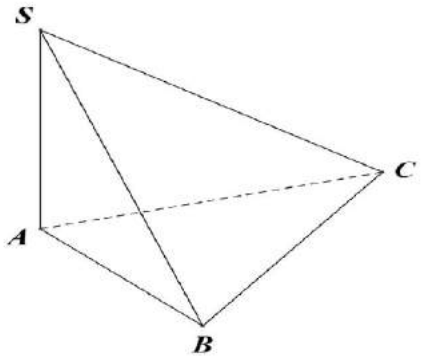
Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 6. **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=4$, $AB=6$, $BC=10$ và $CA=8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=32$ **B.** $V=192$ **C.** $V=40$ **D.** $V=24$

Lời giải

Chọn A



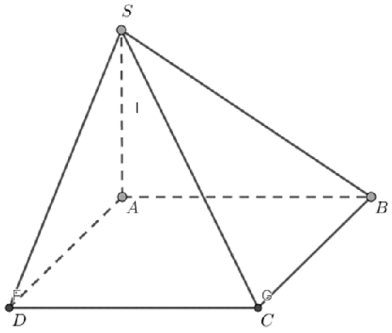
Ta có $BC^2=AB^2+AC^2$ suy ra ΔABC vuông tại A. $S_{ABC}=24$, $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=32$

Câu 7. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $\sqrt{2}a^3$ **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D

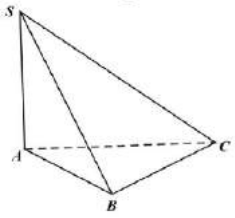


Ta có $S_{ABCD}=a^2$. $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 8. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\frac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải



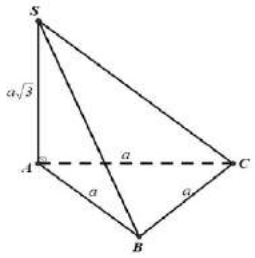
$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA\Rightarrow SA=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3.\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=a\sqrt{3}$.

Câu 9. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{2}$ **C.** $\frac{a^3}{4}$ **D.** $\frac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn C



Ta có SA là đường cao hình chóp

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

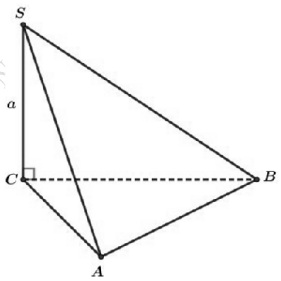
Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 10. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

Chọn D



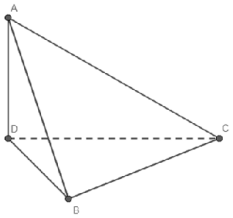
$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 11. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD = 10, AB = 10, BC = 24$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

A. $V = 1200$ **B.** $V = 960$ **C.** $V = 400$ **D.** $V = \frac{1300}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}10.10.24 = 400$

Câu 12. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SA=a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

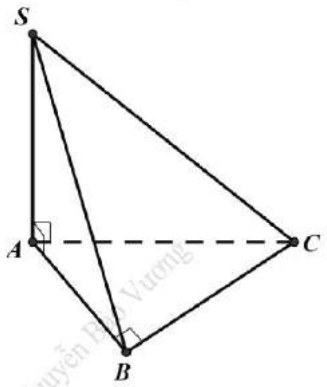
Diện tích tam giác ABC vuông cân tại A là: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}2a.2a=2a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a.2a^2=\dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 13. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, AC=2a, SA\perp(ABC)$ và $SA=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải



Ta có $BC^2=AC^2-AB^2=3a^2\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$.

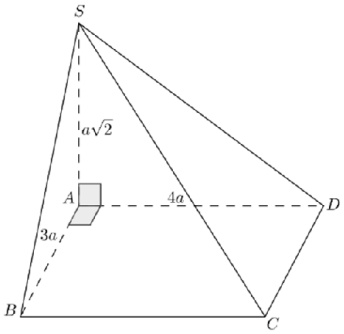
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.BC.SA=\dfrac{1}{6}.a.a\sqrt{3}.a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 14. **(Sở Cần Thơ 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3a$ và $AD=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $12\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích đáy hình chữ nhật là $S=AB\cdot AD=3a\cdot 4a=12a^2$ (đvdt)

Thể tích của hình chóp có đáy hình chữ nhật là $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\cdot 12a^2\cdot a\sqrt{2}=4\sqrt{2}a^3$.

Câu 15. **(Sở Cần Thơ 2019)** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và chiều cao bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ là

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

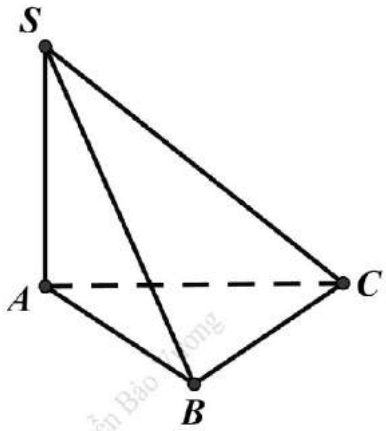
Chọn B

Thể tich khối chóp là $V=\frac{1}{3}$. chiều cao. diện tích đáy $=\frac{1}{3}$.

Câu 16. **(Sở Nam Định 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, độ dài cạnh $AB=BC=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{2}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{6}$.

Lời giải



Chọn A

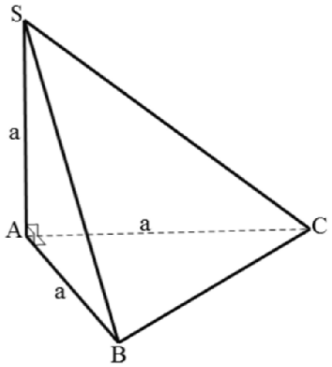
Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2=\frac{a^3}{3}$.

Câu 17. **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $SA=AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



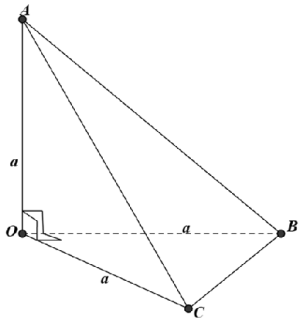
Thể tích của khối chóp $S.ABC$: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 18. **(Nguyễn Khuyến HCM-2019)** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Khi đó thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V=\frac{1}{3}S_{OBC}.OA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.OB.OC.OA=\frac{a^3}{6}$.

Câu 19. **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy là $a^2\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

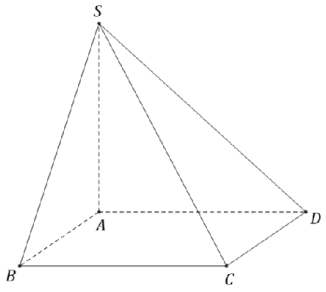
Áp dụng công thức $V=\frac{1}{3}Bh$ ta có $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



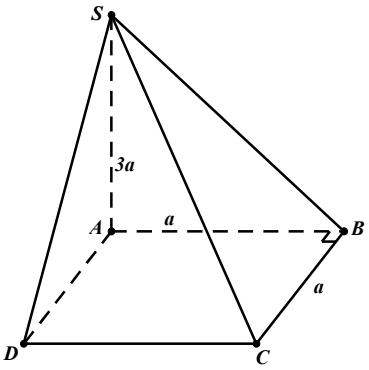
$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 21. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABC)$, $SA=3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $V=a^3$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=\frac{1}{3}a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

Vì $SA\perp(ABC)$ nên chiều cao của khối chóp là $SA=3a$.

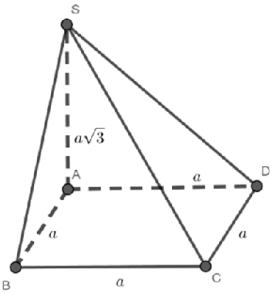
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.3a=a^3$.

Câu 22. **(THPT Hàm Rồng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp S.$ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao $h=a\sqrt{3}$ và diện tích đáy $B=a^2$.

Nên có thể tích $V=\frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 23. **(THPT Cộng Hiền - 2019)** Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V=\frac{1}{3}Bh$.

B. Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V=Bh$.

C. Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.

D. Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V=3Bh$.

Lời giải

Chọn D

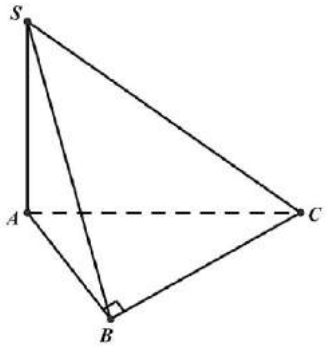
Theo công thức tính thể tích khối chóp, khối lăng trụ và khối hộp chữ nhật ta thấy các khẳng định đúng là A, B, C; khẳng định sai là **D.**

Câu 24. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=AB=2a$, $BC=3a$. Tính thể tích của $S.ABC$ là

A. $3a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn C



$V = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = 2a^3$.

Câu 25. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 4a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $6a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề, ta có thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SD$.

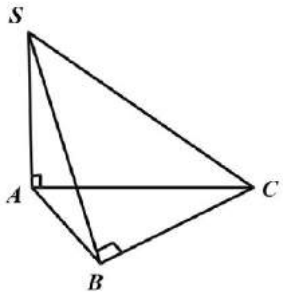
$ABCD$ là hình chữ nhật nên $S_{ABCD} = AB.BC = 4a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.4a^2.2a = \frac{8}{3}a^3$

Câu 26. **(Sở Điện Biên - 2019)** Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có SA là đường cao, đáy là tam giác BAC vuông cân tại A; $SA = AB = a$

A. $V = \frac{a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3}{6}$. **C.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.AB.BC = \frac{1}{6}.a.a.a = \frac{a^3}{6}$.

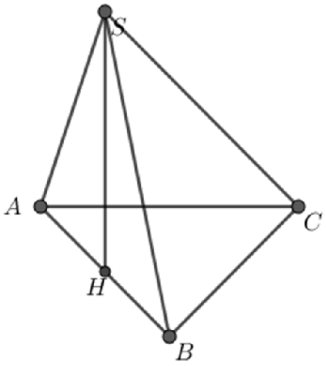
Dạng 2. Mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT Lương Thế Vinh Hà 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH = a\sqrt{3}$

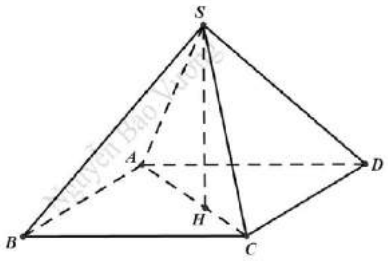
$AB = 2a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(2a)^2 = 2a^2$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}2a^2 a\sqrt{3} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 2. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$ H suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$AC = 2a$, tam giác SAC vuông ở S, góc $SAC = 60^\circ$ nên $SA = a, SC = a\sqrt{3}, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

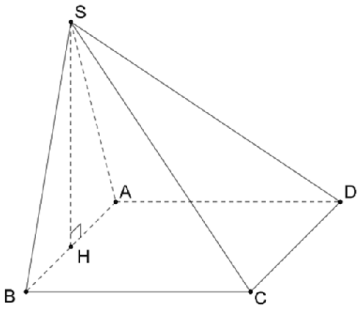
Thể tích hình chóp là $V = \frac{1}{3}\left(a\sqrt{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. **(SGD Nam Định 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $4a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng AB nên $SH \perp (ABCD)$.

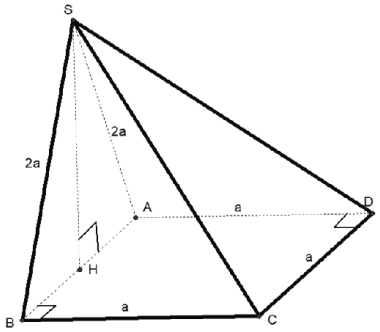
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.(2a)^2.\frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm AB.
Theo đề, tam giác SAB cân tại S nên suy ra $SH \perp AB$.
Mặt khác, tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên suy ra $SH \perp (ABCD)$.
Xét tam giác SHA vuông tại H.

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Diện tích hình vuông là $S_{ABCD} = a^2$.

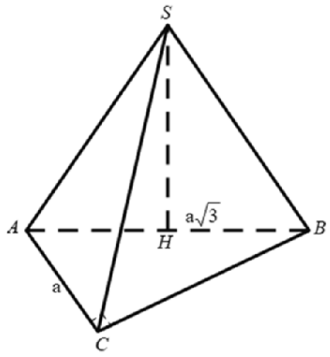
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp. Biết rằng $AB = a\sqrt{3}; AC = a$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng (SAB).Gọi H là trung điểm của AB.
ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$.
Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SH \perp AB \\ (SAB)\cap(ABC)=AB \\ (SAB)\perp(ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

ΔSAB đều $AB = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

ΔABC là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{3a}{2}\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

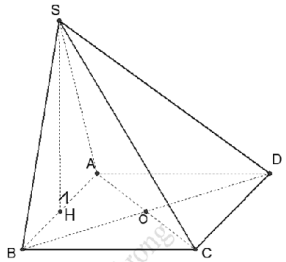
Câu 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hình vẽ minh họa



Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\begin{cases} (SAB)\perp(ABCD) \\ (SAB)\cap(ABCD)=AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases}$. Suy ra SH là đường cao của hình chóp.

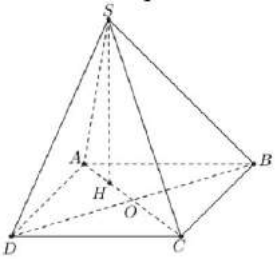
Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 7. **(Chuyên ĐH Vinh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải



Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên AC.

Ta có $SO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra ΔSAO là tam giác đều.

$\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

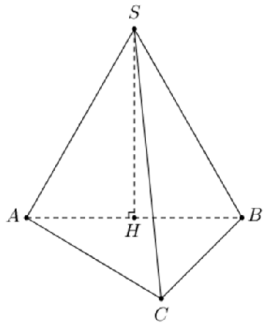
Vậy $V=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{4}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tich V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D



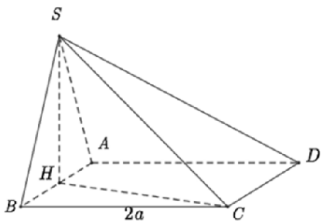
Gọi H là trung điểm AB, ta có $SH\perp AB$ và $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\Rightarrow SH\perp(ABC).\\SH\perp AB\end{cases}$

Thể tích khối chóp $V=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a^2.\sin 120°=\frac{a^3}{8}$.

Vậy $V=\frac{a^3}{8}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt đáy, tính $\tan\alpha$.



A. $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Dựng $SH\perp AB$, do $(SAB)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH\perp(ABCD)\Rightarrow\alpha=\widehat{SCH}$.

Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow\frac{1}{3}SH.4a^2=\frac{4a^3}{3}\Rightarrow SH=a$.

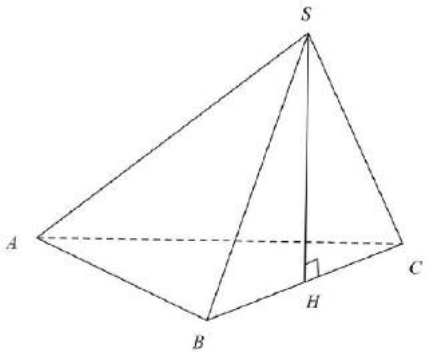
Do $\triangle SAB$ cân tại S nên H là trung điểm của $AB\Rightarrow HC=\sqrt{BH^2+BC^2}=a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\tan\alpha=\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}=\frac{a}{a\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=2a$.

H là trung điểm của BC nên $BH=a$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-a^2}=a$.

Diện tích đáy ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

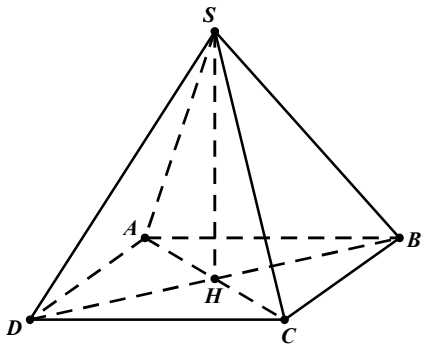
Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}.a^2\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

Câu 1. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Giả sử khối chóp tứ giác đều đã cho là $S.ABCD$. Khi đó $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA=SB=SC=SD=a$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $SH \perp (ABCD)$ nên SH là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$. Tính SH:

Xét tam giác ABC vuông tại B ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Nhận thấy $AC^2 = SA^2 + SC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S. Suy ra $SH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

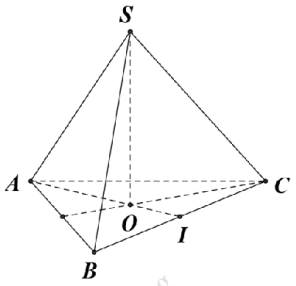
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 2. **(Mã 104 2017)** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$ **D.** $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Lời giải

Chọn D



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC, khi đó AI là đường cao của tam giác đáy. Theo định lý Pitago ta có $AI = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AO = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3.2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$.

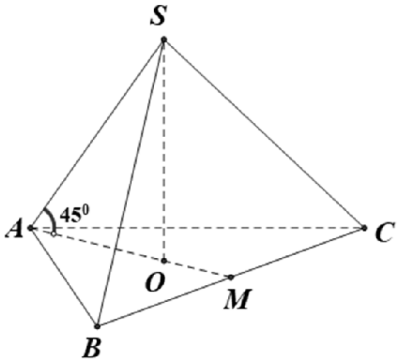
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}a\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 3. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đó là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải

Chọn B



+ $(SA;(ABC)) = \widehat{SAO} = 45°$

$+\ SO = AO.\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

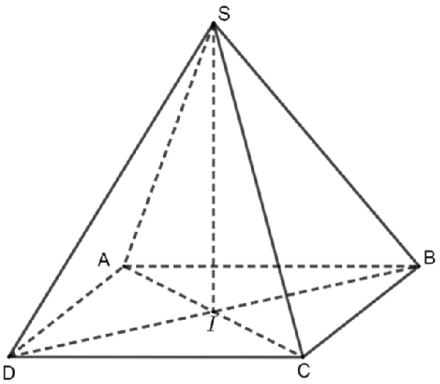
$+\ V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{12}$

Câu 4. **(Dề Tham Khảo 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ là $S.ABCD$ và I tâm của đáy ta có:
$SA = SC = BA = BC = DA = DC \Rightarrow \Delta SAC = \Delta BAC = \Delta DBC \Rightarrow \Delta SAC; \Delta BAC; \Delta DAC$ lần lượt vuông tại S, B, D.

I là trung điểm của AC suy ra $SI = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}2a.\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

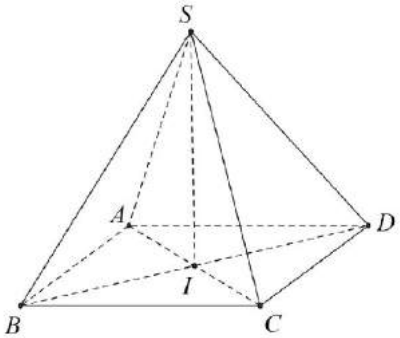
$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \dfrac{1}{3}(2a)^2.a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 5. **(Mã 123 2017)** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$ **C.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **D.** $V = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Lời giải

Chọn D



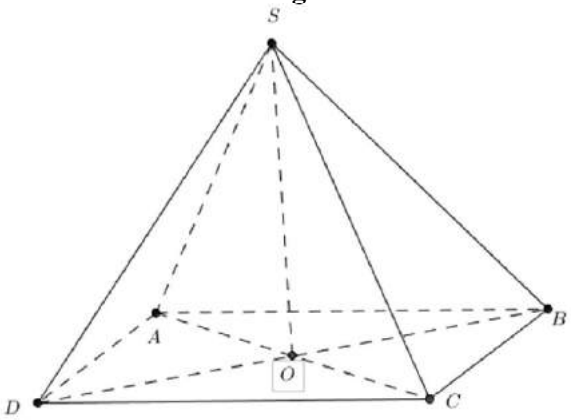
Chiều cao của khối chóp: $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{4a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

Thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{14}}{2}a^2 = \dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Câu 6. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4\sqrt{5}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Ta có $S_{ABCD}=4a^2$; $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{5a^2-2a^2}=a\sqrt{3}$

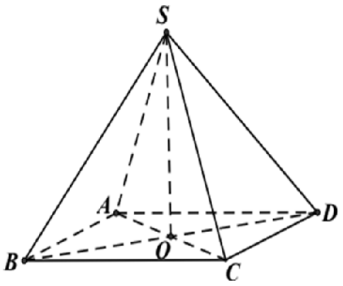
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{a\sqrt{3}.4a^2}{3}=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 7. **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A. $V=9a^3$ **B.** $V=2a^3$ **C.** $V=3a^3$ **D.** $V=6a^3$

Lời giải

Chọn D



Diện tích đáy là: $S_{ABCD}=AB^2=\left(a\sqrt{6}\right)^2=6a^2$.

Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{SDO}\Rightarrow\widehat{SDO}=60^0$

$ABCD$ là hình vuông suy ra $DO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AB\sqrt{2}=\frac{1}{2}a\sqrt{6}.\sqrt{2}=a\sqrt{3}.$

Xét tam giác vuông $SOD: SO=DO.\tan\widehat{SDO}=a\sqrt{3}.\tan 60^0=3a.$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.3a.6a^2=6a^3.$

Câu 8. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

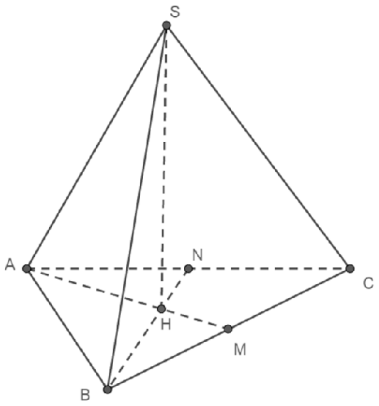
Gọi H là tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SH \perp (ABC)$, $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Theo đề bài ta có: $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{SBH} = 60°$.

Xét ΔSBH vuông tại H. Có $SH = BH.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

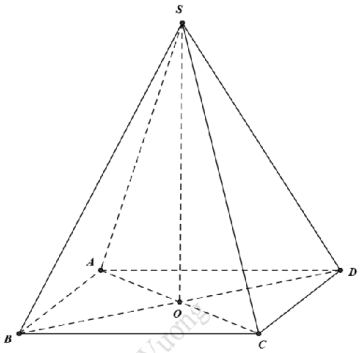


Câu 9. **(Chuyên Nguyễn Du ĐăkLăk)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{10a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO = a\sqrt{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O và $SA = a\sqrt{6}$ nên $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = 2a \Rightarrow AC = BD = 4a$.

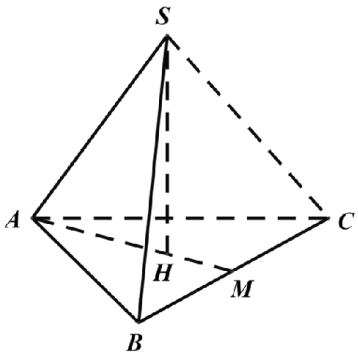
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \dfrac{1}{3}.SO.\dfrac{AC.BD}{2} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{4a.4a}{2} = \dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Xét khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2 lần chiều cao tam giác đáy. Tính thể tích khối chóp.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow AM \perp BC, AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

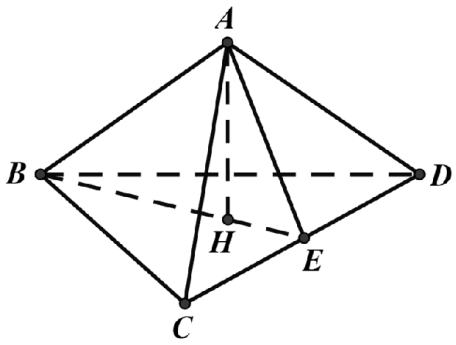
Xét tam giác SAH vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 11. **(SP Đồng Nai - 2019)** Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3.

A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



Chọn A

Có ΔBCD đều cạnh $3 \Rightarrow BE = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{3}$.

ΔABH vuông tại $H \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.BE.CD = \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

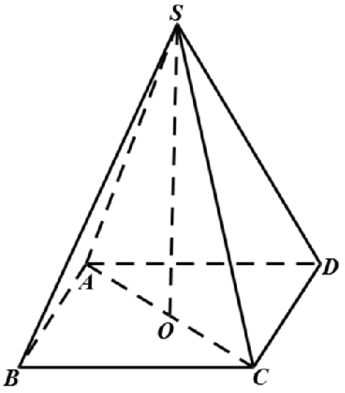
$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AH.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{6}.\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Câu 12. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có: $SO \perp (ABCD)$.

Trong tam giác SOC vuông tại O có: $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

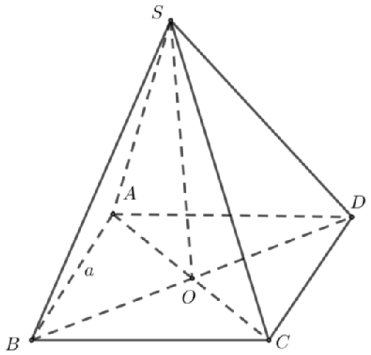
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Câu 13. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối $SBCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O=AC\cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO\perp(ABCD)$ suy ra OA là hình chiếu vuông góc của SA trên mp$(ABCD)\Rightarrow(SA,(ABCD))=(SA,OA)=\widehat{SAO}=60^0$.

Ta có $SO=AO.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $S_{BCD}=\frac{a^2}{2}$.

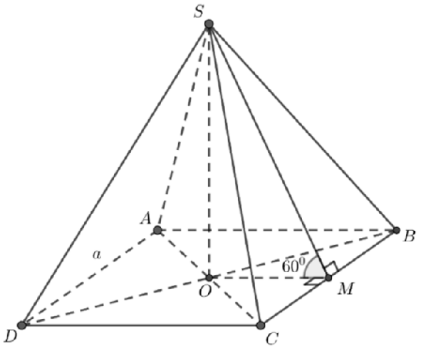
Từ đó, $V_{SBCD}=\frac{1}{3}SO.S_{BCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 14. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a, các mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC, Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO}=60°$.

Xét ΔSOM có $OM=\frac{a}{2}$, $\widehat{SMO}=60°$ thì $SO=OM.\tan\widehat{SMO}=\frac{a}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

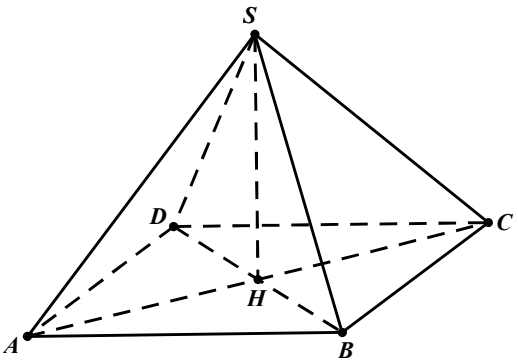
Nên $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt). Đáp án được chọn là **C.**

Câu 15. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $\widehat{ASC}=90°$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V=\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_{ABCD}=a^2$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$. Tam giác ASC là tam giác vuông, H là trung điểm của AC nên $SH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

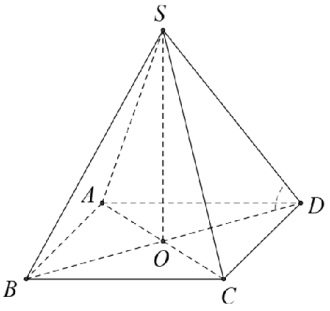
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 16. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đáy thì $SO\perp(ABCD)$. Suy ra $\widehat{SDB}=60°$.

ΔSDB đều nên $SO=\dfrac{DB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

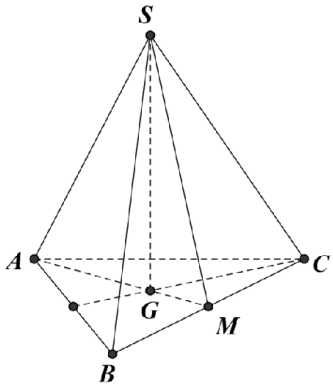
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 17. **(Trường THPT Thăng Long 2019)** Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy góc $45°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là tâm của tam giác đều ABC và M là trung điểm BC.

Theo giả thiết góc giữa mặt bên và đáy bằng 45° suy ra $\widehat{SMG}=45^\circ$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $GM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SGM có $\tan\widehat{SMG}=\dfrac{SG}{GM}\Rightarrow\tan 45^\circ=\dfrac{SG}{GM}\Rightarrow SG=GM=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SG=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^3}{24}$

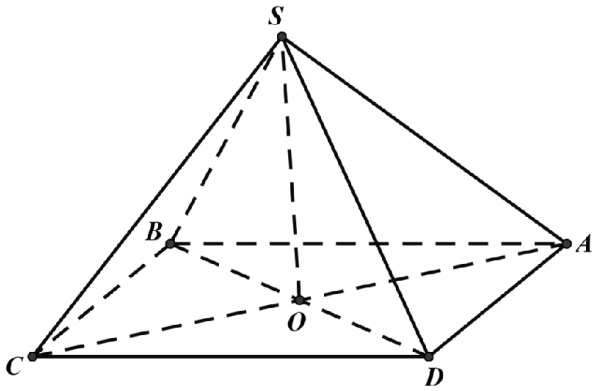
Câu 18. **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Cho khối chóp có đáy hình thoi cạnh a $(a>0)$ các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với đáy góc 45°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}a^3$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có hình vẽ dưới đây.



Xét khối chóp trên ta thấy hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm của hình thoi $ABCD$.

Mặt khác $SA=SB=SC=SD$ và góc hợp bởi các cạnh bên bằng 45° nên ta có các tam giác vuông cân tại O bằng nhau: $\Delta SOA=\Delta SOB=\Delta SOC=\Delta SOD$.

Suy ra hình thoi $ABCD$ là một hình vuông diện tích đáy bằng $S_{ABCD}=a^2$.

Chiều cao của hình chóp trên là: $SO=OD=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

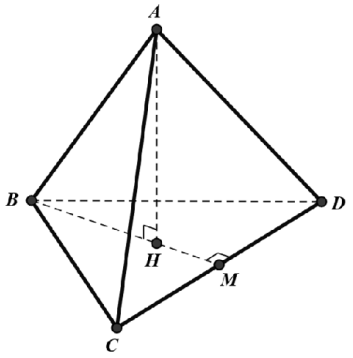
Suy ra thể tích khối chóp bằng $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a^2=\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

Câu 19. **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

A. a^3. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\frac{1}{12}a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Do đáy BCD là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích tứ diện đều là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

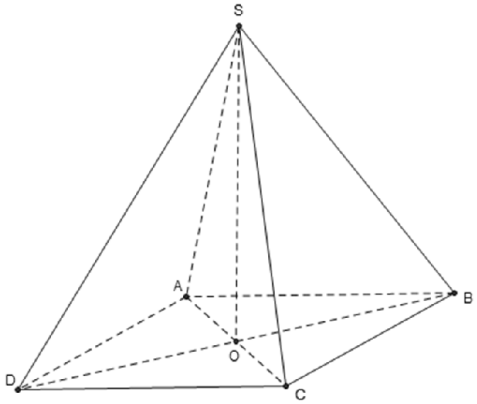
Câu 20. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A



Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

Ta có $SO \perp (ABCD)$, $\widehat{SAO} = 60°$, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $S_{ABCD} = a^2$.

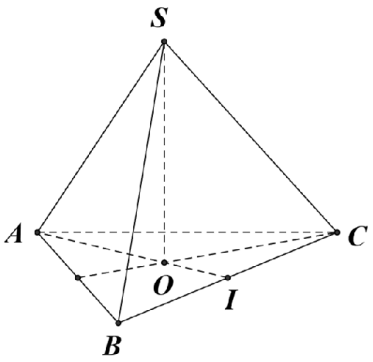
Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 21. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



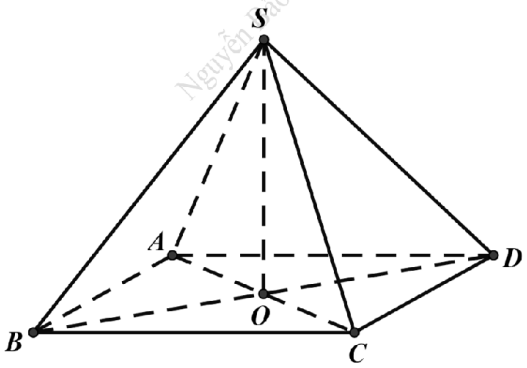
□ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $SO \perp (ABC)$. Suy ra $\widehat{SAO} = 60°$.

□ $AO = \frac{2}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SH = AO.\tan 60° = 2a$.

□ Diện tích ΔABC là $S_{ABC} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

□ Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.



A. $V = 4\sqrt{7}a^3$. **B.** $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **C.** $V = \frac{4a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

$h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$.

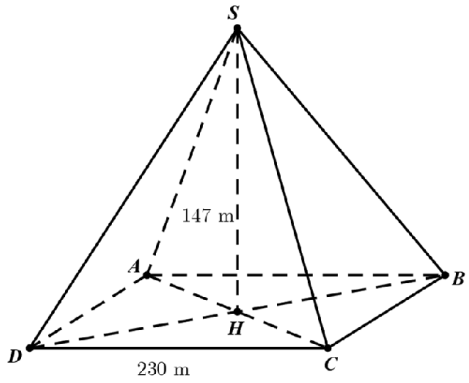
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{4a^3\sqrt{7}}{3}$.

Câu 23. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là 147 m, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là

A. 2592100 m^3. **B.** 2952100 m^3. **C.** 2529100 m^3. **D.** 2591200 m^3.

Lời giải

Chọn A



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 230 m ; chiều cao $SH = 147$ m.

Thể tích của nó là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.\left(230^2\right).147 = 2592100$.

Vậy thể tích Kim tự tháp là 2592100 m^3 .

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 10 THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

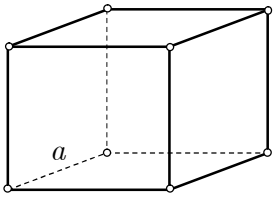
1. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

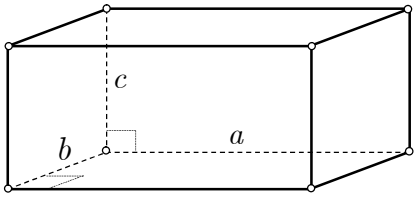
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

1. Thể tích khối chóp $\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}} = \boxed{\frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}.\ d\left(\text{đỉnh; mặt phẳng đáy}\right)}$

2. Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\ \text{chiều cao}}$

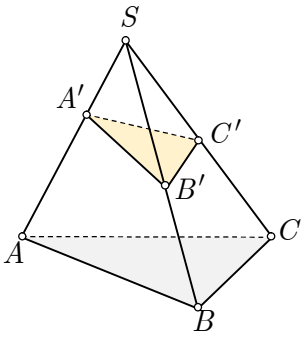
- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$
- Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$





3. Tỉ số thể tích

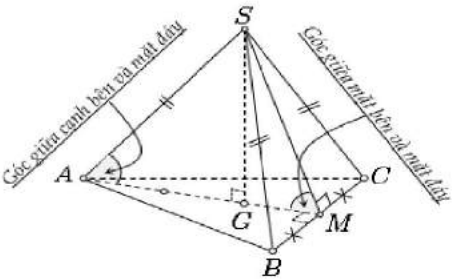
- Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' khác S. Khi đó ta luôn có tỉ số thể tích: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}$.

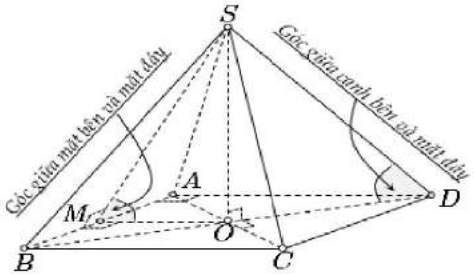


- Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.
- Ta thường dùng tỉ số thể tích khi điểm chia đoạn theo tỉ lệ.

4. Tính chất của hình chóp đều

- ***Đáy là đa giác đều*** (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ***Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy***
- ***Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.***
- ***Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.***
- ***Góc giữa các mặt bên và mặt đáy đều bằng nhau.***

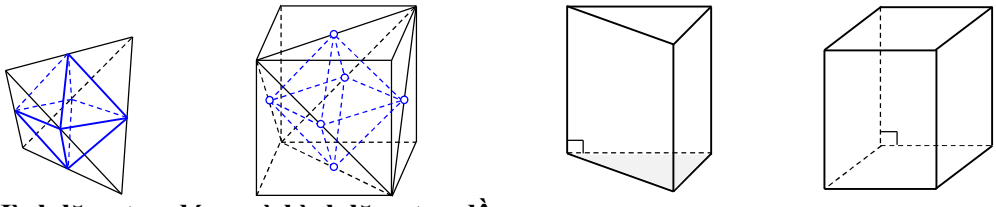




5. Tứ diện đều và bát diện đều:

- **Tứ diện đều** là hình chóp có tất cả các mặt là những tam giác đều bằng nhau.
- **Bát diện đều** là hình gồm hai hình chóp tứ giác đều ghép trùng khít hai đáy với nhau. Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của bốn tam giác đều. Tám mặt là các tam giác đều và bằng nhau.

Nếu nối trung điểm của hình tứ diện đều hoặc tâm các mặt của hình lập phương ta sẽ thu được một hình bát diện đều.



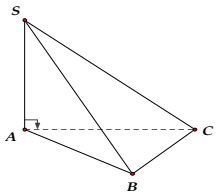
Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO THƯỜNG GẶP

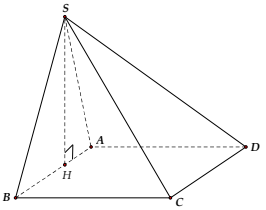
a) Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.



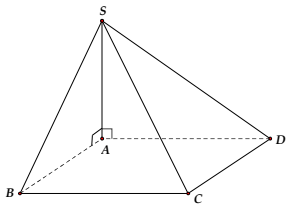
b) Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB.



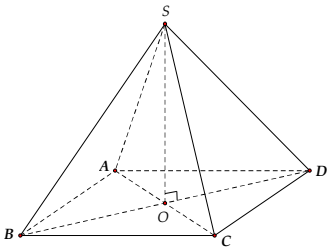
c) Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.



d) Hình chóp đều:
Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.

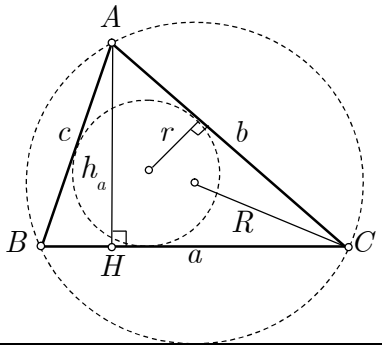
Ví dụ: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO.



DIỆN TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

Diện tích tam giác thường: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $S_{\Delta ABC} = \begin{cases} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{(Héron)} \end{cases}$



- $S_{\text{tam giác vuông}} = \dfrac{1}{2}\cdot$(tích hai cạnh góc vuông).
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \dfrac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}$.
- $S_{\text{tam giác đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}$.

☐ $S_{\text{hình chữ nhật}}$ = dài × rộng và $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.

☐ $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})\cdot(\text{chiều cao})}{2}$.

☐ $S_{\text{Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc}} = \dfrac{\text{Tích hai đường chéo}}{2} \Rightarrow S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{\text{Tích 2 đường chéo}}{2}$.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

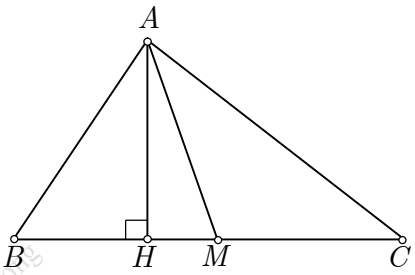
$*$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pitago), $AH.BC = AB.AC$.

$*$ $AB^2 = BH\cdot BC$ và $AC^2 = CH\cdot CB$.

$*$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB\cdot HC$.

$*$ $BC = 2AM$.

$*$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC$.



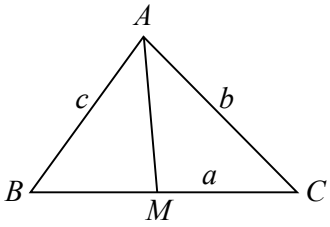
2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho ΔABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi).

Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó:

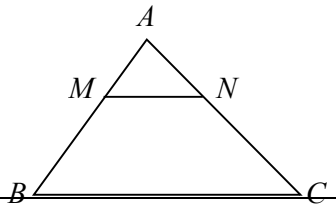
$*$ **Định lý hàm sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$*$ **Định lý hàm cos**:
$$\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}.$$



$*$ **Công thức trung tuyến**:
$$\begin{cases} \bullet\ AM^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ \bullet\ BN^2 = \dfrac{BA^2+BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \\ \bullet\ CK^2 = \dfrac{CA^2+CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}.$$

$*$ **Định lý Thales**:
$$\begin{cases} \bullet\ MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}.$$



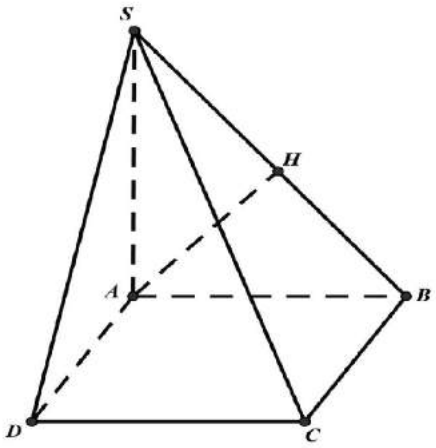
Dạng 1. Cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\frac{a^3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$. Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra $d(A;(SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

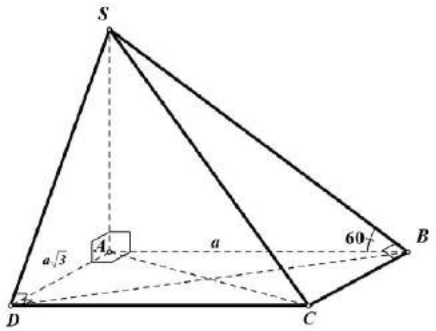
Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Câu 2. **(Mã 110 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 3a^3$ **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = \frac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{ABCD} = \sqrt{3}a^2$.

Vì $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\ BC\perp SB\subset(SBC)\\ BC\perp AB\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SBC),(ABCD))}=\widehat{(SB;AB)}=\widehat{SBA}.$

Vậy $\widehat{SBA}=60^o$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^o=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=a\sqrt{3}$

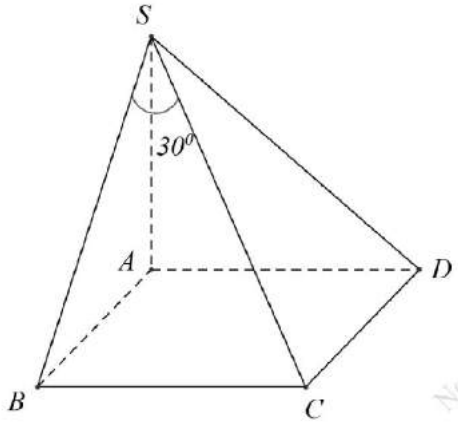
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=a^3$.

Câu 3. **(Mã 123 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{2a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn B



Nguyễn Bảo Vương

+) Do ABCD là hình vuông cạnh a nên: $S_{ABCD}=a^2$

+) Chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB}=30^0$.

+) Đặt $SA=x\Rightarrow SB=\sqrt{x^2+a^2}$. Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan\widehat{CSA}=\tan 30^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{BC}{SB}$

Ta được: $SB=BC\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ (Đvtt)

Câu 4. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB=4a, SB=6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\dfrac{a^3}{3V}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{80}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

+ ΔABC vuông cân tại $C, AB=4a$ suy ra

$AC=BC=2a\sqrt{2}.$

Do đó: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=4a^2$.

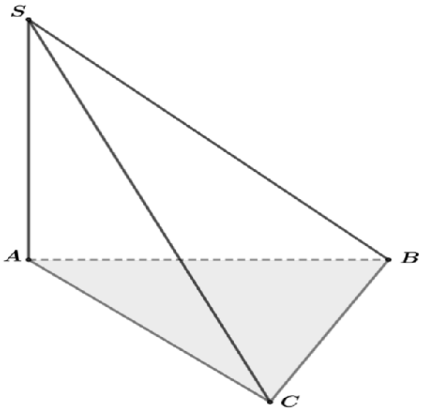
+ $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AB\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{(6a)^2-(4a)^2}=2a\sqrt{5}$.

+ Khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}4a^2.2a\sqrt{5}=\frac{8a^3\sqrt{5}}{3}$

Vậy tỷ số: $\frac{a^3}{3V}=\frac{a^3}{\frac{3.8a^3\sqrt{5}}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{40}$.

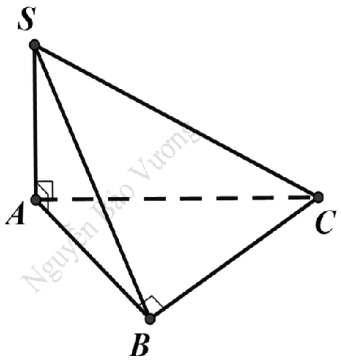


Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Lời giải

Chọn A



ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°\Rightarrow BC=\frac{AB}{\tan 60^0}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\widehat{(SB,(ABC))}=\widehat{(SB,AB)}=45^0$ nên tam giác SAB vuông cân tại $S\Rightarrow SA=AB=a$

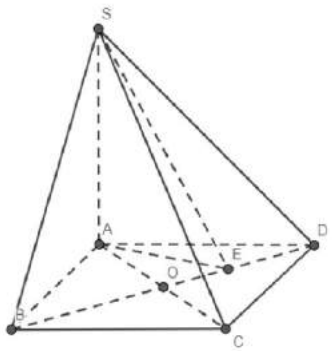
$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}BA.BC.SA=\frac{1}{6}a.a\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Câu 6. **(Lương Thế Vinh Hà Nội Năm 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AE\perp BD$

$\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\widehat{SEA}=60^0$

Xét ΔABD vuông tại A

$AE=\frac{AD.AB}{\sqrt{AD^2+AB^2}}=\frac{2a^2}{a\sqrt{5}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

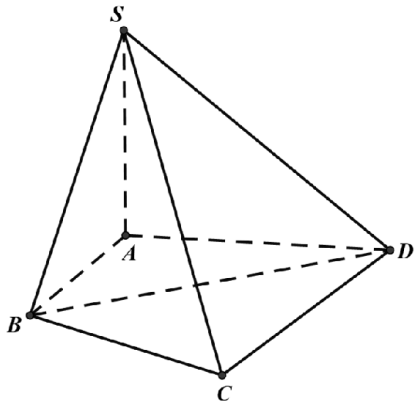
Xét ΔSAE vuông tại A

$SA = AE.\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

Khi đó thể tích $S.ABCD$

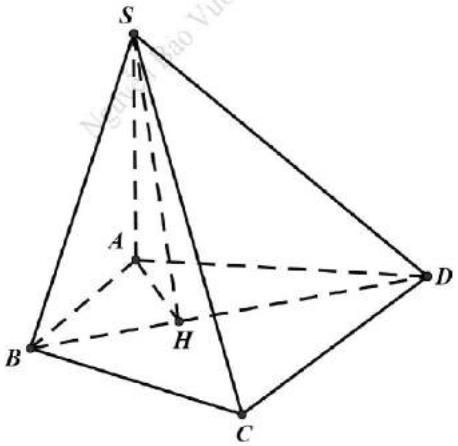
$V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$

Câu 7. **(Hoàng Hoa Thám 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 5\sqrt{3}, BC = 3\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$, $SA = 9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



A. $\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{91}}{9}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{273}}{20}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{91}}{9}$

Lời giải



Có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} \Leftrightarrow 66\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}.9.S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 44\sqrt{3}$

Suy ra $\dfrac{1}{2}AB.AD + \dfrac{1}{2}BC.CD = 44\sqrt{3} \Leftrightarrow 5AD + 3CD = 44$. (1)

Áp dụng định lí Pitago trong 2 tam giác vuông $ABD; BCD$, ta có:

$AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2 \Leftrightarrow CD^2 - AD^2 = 48$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left[\begin{array}{l} AD = 4 \\ AD = \dfrac{47}{2} \end{array}\right.$

$AD = \dfrac{47}{2}$ không thỏa mãn do từ (1) ta có: $AD < \dfrac{44}{5} \Rightarrow AD = 4$.

Trong tam giác ABD, dựng $AH \perp BD$ lại có $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp SH$.

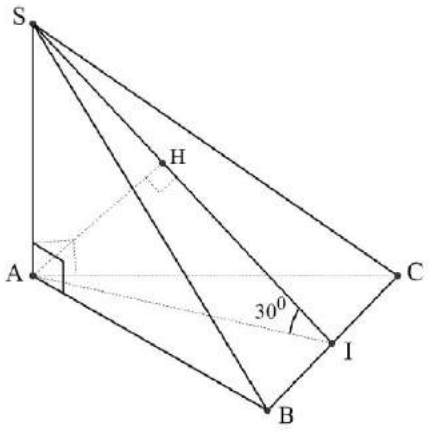
Vậy góc giữa (SBD) và đáy là góc $\widehat{SHA}$.

Dễ tính $BD=\sqrt{91}, AH=\dfrac{AB.AD}{BD}=\dfrac{20\sqrt{273}}{91}$, $\cot\widehat{SHA}=\dfrac{AH}{SA}=\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$.

Câu 8. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{8a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp(SBC) và mp(ABC) là $\widehat{SIA}=30^0$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d(A,(SBC))=AH=a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI=\dfrac{AH}{\sin 30^0}=2a$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, mà AI là đường cao suy ra $2a=x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA=AI.\tan 30^0=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

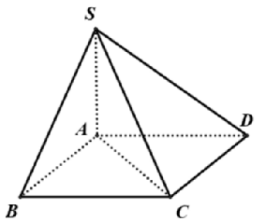
Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}=\dfrac{8a^3}{9}$.

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC=a\sqrt{3}$.

A. $V_{S.ABCD}=a^3$. **B.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Mà $(SAB)\cap(SAD)=SA$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Ta có: $AC=a\sqrt{2}$; $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a$.

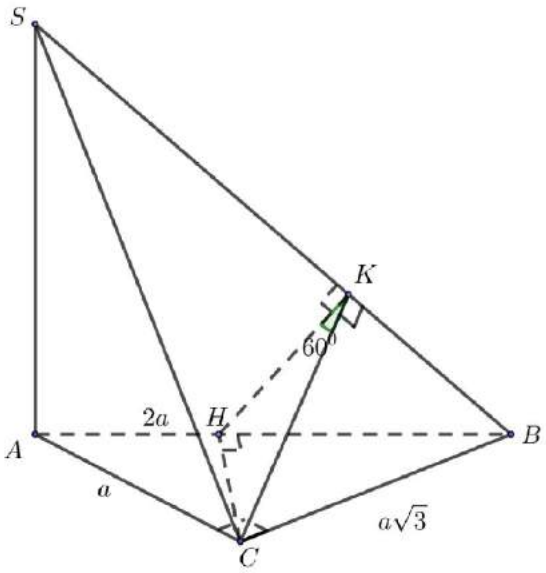
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a.a^2=\frac{a^3}{3}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trong ΔABC kẻ $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow CH\perp SB(1)$.

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a\sqrt{3}$,

$BH.BA=BC^2$,

$\Rightarrow BH=\frac{3a}{2}$, $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAB kẻ $HK\perp SB\Rightarrow CK\perp SB(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow HK\perp SB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{CKH}=60°$.

Trong vuông ΔCKH có $HK=CH.\cot 60°=\frac{a}{2}$, $BK=\sqrt{BH^2-HK^2}=a\sqrt{2}$.

$\Delta SAB\backsim\Delta HKB(g.g)$ nên $\frac{SA}{HK}=\frac{AB}{BK}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}\Rightarrow SA=\frac{a}{\sqrt{2}}$

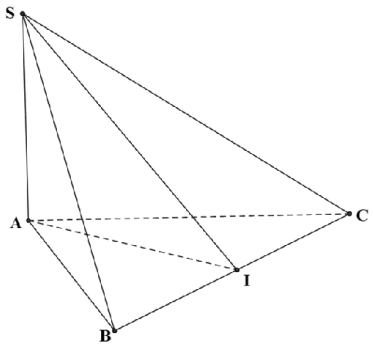
Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2}.a.\sqrt{3}.a=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC=2a$, $\widehat{BAC}=120°$, biết $SA\perp(ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



➢ Gọi I là trung điểm BC.

+ Do ΔABC cân tại A nên $BC\perp AI$

+ Mặt khác do $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$

Suy ra $BC\perp SI$.

Do đó góc giữa (SBC) và đáy chính là góc $\widehat{SIA}=45°$.

➢ Xét ΔAIB vuông tại I có $IB=a$, $\widehat{IAB}=60°$, suy ra $IA=\frac{IB}{\tan 60°}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

ΔSAI vuông tại A có $IA=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\widehat{SIA}=45°$ nên ΔSAI vuông cân tại A, do đó $SA=IA=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

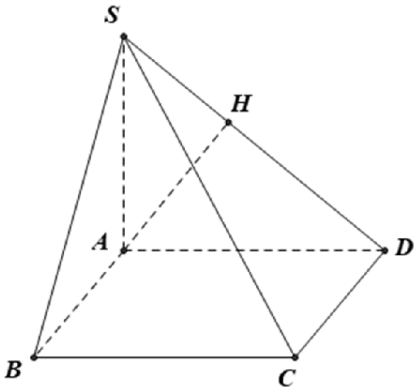
➢ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.AI.SA=\frac{a^3}{9}$.

Câu 12. **(Bạc Liêu – Ninh Bình)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

A. $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng SD. Ta có

$\begin{cases}AH\perp SD\\AH\perp CD\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow AH=d(A,(SCD))$. Suy ra $AH=\frac{a}{2}$.

ΔSAD vuông tại A có đường cao AH nên

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AD^2}=\frac{15}{4a^2}\Rightarrow SA=\frac{2a\sqrt{15}}{15}$.

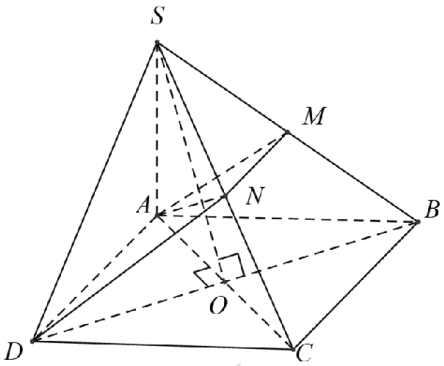
Vậy $V=\frac{1}{3}AB.AD.SA=\frac{1}{3}a.2a.\frac{2a\sqrt{15}}{15}=\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

Câu 13. **(Cụm liên trường Hải Phòng- 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$.

$AO\perp BD\Rightarrow SO\perp BD$. Nên góc của (SBD) và $ABCD$ là góc $\widehat{SOA}=60^0$.

$V_{S.ADN}=\frac{1}{2}.V_{S.ADC}=\frac{1}{4}.V_{S.ABCD}$ và $V_{S.AMN}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{S.ABC}=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN}=V_{S.ADN}+V_{S.AMN}=\frac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

$SA=AO.\tan\widehat{SOA}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

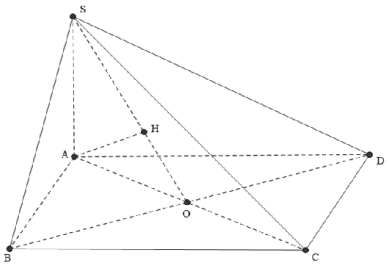
$\Rightarrow V_{S.ADMN}=\frac{3}{8}.\frac{a^3\sqrt{6}}{6}=\frac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, gọi H là hình chiếu của A lên SO.

Vì O là trung điểm của AC nên $d\left(C,\left(SBD\right)\right) = d\left(A,\left(SBD\right)\right)$

Ta có: $BD \perp AC;\ BD \perp SA \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow \left(SBD\right) \perp \left(SAC\right)$;

$SO = \left(SAC\right) \cap \left(SBD\right)$

$$AH \perp SO \Rightarrow AH \perp \left(SBD\right) \Rightarrow AH = d\left(A,\left(SBD\right)\right) = d\left(C,\left(SBD\right)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có: $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác SAO: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} \Rightarrow SA = a$.

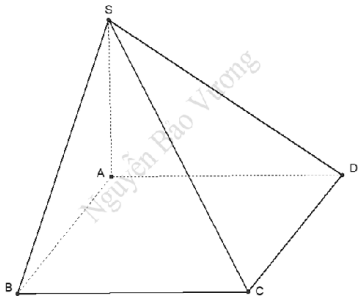
$V_{SABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}$.

Câu 15. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng $\left(SAB\right)$ một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt đáy nên $DA \perp AB$ và $DA \perp SA$. Suy ra $DA \perp \left(SAB\right)$. Vậy góc giữa SD và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ là $\widehat{DSA} = 30°$.

Ta có $SA = AD.\cot 30° = a\sqrt{3}$

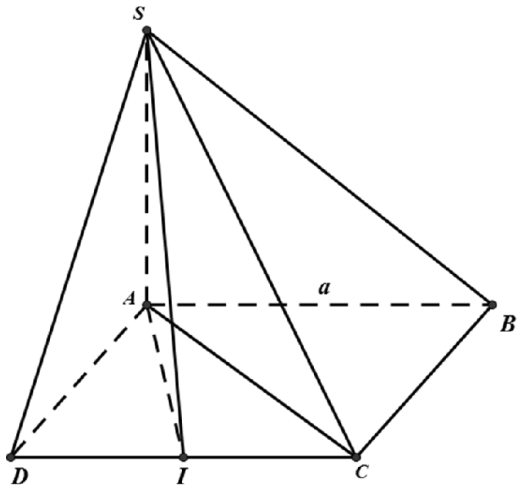
$V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 16. **(Thpt Vĩnh Lộc - Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0, $AB = a$. Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa $\left(SBC\right)$ và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V = \frac{a^3}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp mp(ABCD)$.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a, gọi I là trung điểm của BC khi đó: $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Và góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIA} = 60^0$.

Xét tam giác SAI ta có: $\dfrac{SA}{AI} = \tan\left(\widehat{SIA}\right) \Rightarrow SA = AI\tan\left(60^0\right) \Rightarrow SA = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\left(\dfrac{1}{2}AI.BC\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích của chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

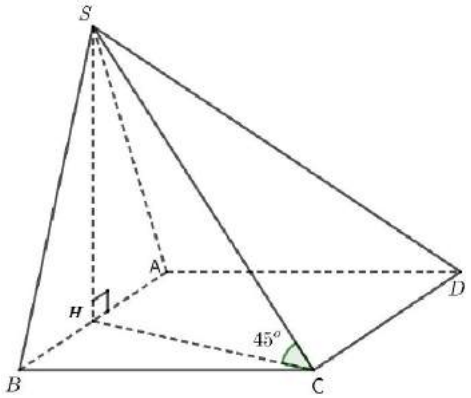
Dạng 2. Mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB, ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$

$$\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\\ SH \subset (SAB); SH \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCH} = 45^o \Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân tại H

$\Rightarrow SH = HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$

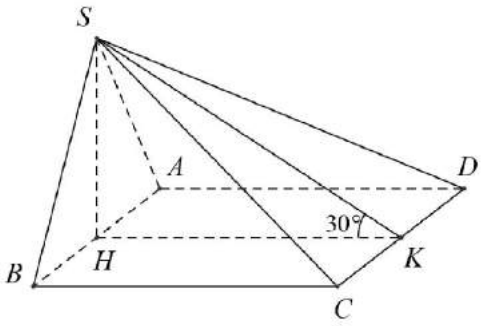
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Câu 2. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa -2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD.

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SKH} = 30°$.

Xét ΔSHK vuông tại H, có $HK = \frac{SH}{\tan 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3. **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

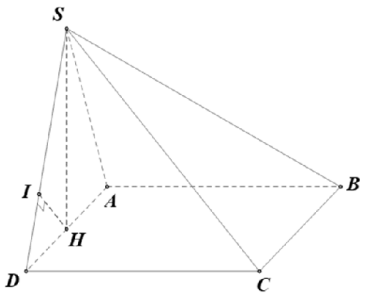
A. $h = \frac{4}{3}a$ **B.** $h = \frac{3}{2}a$ **C.** $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$ **D.** $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

Lời giải

Chọn A

Gọi H là trung điểm của AD. Nên $SH \perp AD$

$$\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ AD \perp SH \end{cases}$$



Ta có: $S_{ABCD} = 2a^2$

$\Rightarrow SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3.4a^3/3}{2a^2} = 2a$

Gọi I là hình chiếu của H lên SD

$d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H;(SCD)) = 2IH$

Mà $IH=\dfrac{SH.HD}{SD}=\dfrac{SH.HD}{\sqrt{SH^2+HD^2}}=\dfrac{2a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(2a)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\dfrac{2}{3}a$

Vậy $d\left(B;(SCD)\right)=\dfrac{4}{3}a$

Câu 4. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h=\dfrac{3}{4}a$ **B.** $h=\dfrac{2}{3}a$ **C.** $h=\dfrac{4}{3}a$ **D.** $h=\dfrac{8}{3}a$

Lời giải

Chọn C

Gọi I là trung điểm của AD. Tam giác SAD cân tại S

$\Rightarrow SI\perp AD$

Ta có $\begin{cases}SI\perp AD\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.

Theo giả thiết

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SI.S_{ABCD}\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}a^3=\dfrac{1}{3}SI.2a^2\Leftrightarrow SI=2a$

Vì AB song song với (SCD)

$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=2d\left(I,(SCD)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD.

Mặt khác $\begin{cases}SI\perp DC\\ID\perp DC\end{cases}\Rightarrow IH\perp DC$. Ta có $\begin{cases}IH\perp SD\\IH\perp DC\end{cases}\Rightarrow IH\perp(SCD)\Rightarrow d\left(I,(SCD)\right)=IH$

Xét tam giác SID vuông tại I: $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{SI^2}+\dfrac{1}{ID^2}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{4}{2a^2}\Rightarrow IH=\dfrac{2a}{3}$

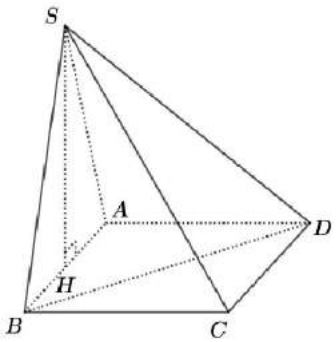
$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=2d\left(I,(SCD)\right)=\dfrac{4}{3}a$.

Câu 5. **(Gia Bình 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{21}$. Hãy cho biết cạnh đáy bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{21}$ **B.** 21 **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** 7

Lời giải

Chọn D



Giả sử $AB=a$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}a^2$

$\Leftrightarrow a^2\sqrt{2}.cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow cos\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin(SA,BD)=\sqrt{\frac{7}{8}}$

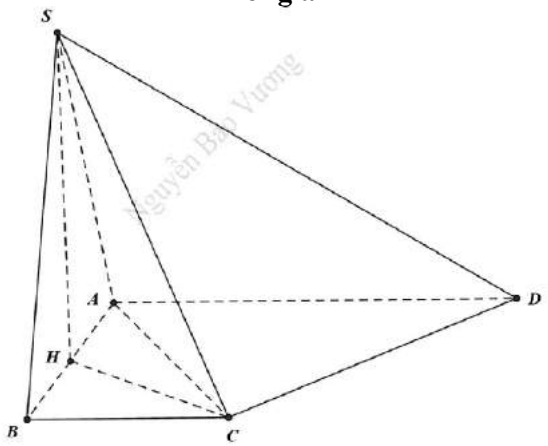
$V_{SABCD}=\frac{1}{3}SH.AB.AD=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3 \Rightarrow V_{SABD}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}SA.BD.d_{(SA,BD)}.\sin(SA,BD)=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{6}a.a\sqrt{2}.\sqrt{21}.\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3 \Leftrightarrow a=7$

Câu 6. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\frac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a.

A. $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB, từ giả thiết ta có: $SH \perp (ABCD)$, $(SC,(ABCD))=\widehat{SCH}=\alpha$.

Đặt $AB=x$, ta có: $HC=\sqrt{BH^2+BC^2}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+a^2}$, $SH=HC.\tan\alpha=\sqrt{\frac{x^2}{4}+a^2}.\frac{\sqrt{15}}{5}$.

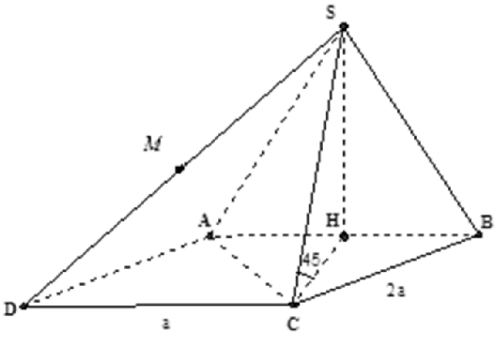
Mặt khác $SH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Vậy ta có: $\sqrt{\frac{x^2}{4}+a^2}.\frac{\sqrt{15}}{5}=\frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=a$.

$S_{ABCD}=\frac{(AD+BC).AB}{2}=\frac{3a^2}{2}$; $S_{ACD}=\frac{2}{3}S_{ABCD}=a^2$; $V_{S.ACD}=\frac{1}{3}SH.S_{ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 7. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB=a; AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC).

A. $d=\frac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d=\frac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d=\frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại B, có: $CH = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông cân tại H, có: $SH = \frac{a\sqrt{17}}{2}; SC = \frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H, có: $SA = \sqrt{\frac{17a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có: $AC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{89}}{4}a^2$.

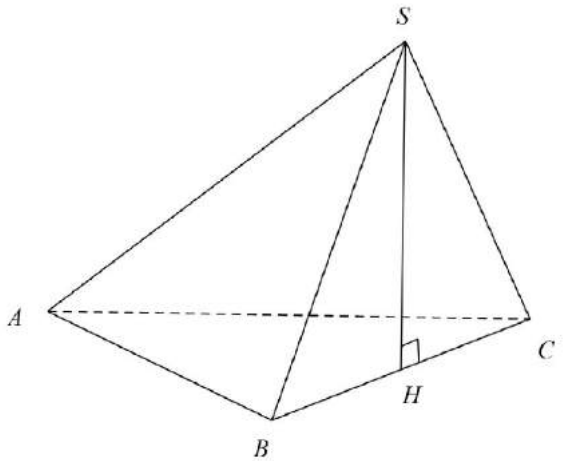
Ta có: $V_{S.ABCD} = V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{17}}{3}$; $V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V = \frac{a^3\sqrt{17}}{6}$.

$V_{S.ACM} = \frac{1}{2}V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{17}}{12}$. Mà $V_{S.MAC} = \frac{1}{3}.d.S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{89}}{12}a^2.d \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 8. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = 2a$.

H là trung điểm của BC nên $BH = a$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-a^2}=a$.

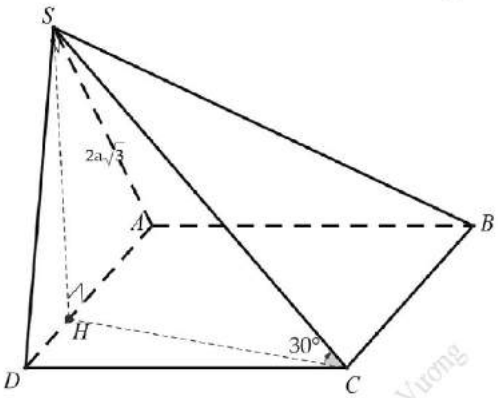
Diện tích đáy ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

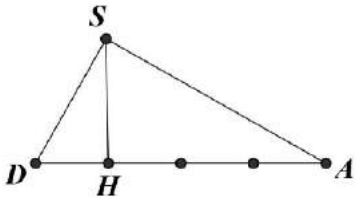
Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{1}{2}.a^2\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng 30°. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=8\sqrt{6}a^3$. **B.** $V=\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=8\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Lời giải





$SH^2=HD.HA=3HD^2\Rightarrow SH=\sqrt{3}HD$

Có: $\begin{cases}\tan\widehat{SDH}=\frac{SH}{DH}=\sqrt{3}\\ \tan\widehat{SDH}=\frac{SA}{SD}\end{cases}\Rightarrow\frac{SA}{SD}=\sqrt{3}\Rightarrow SD=\frac{SA}{\sqrt{3}}=2a\Rightarrow DA=\sqrt{SD^2+SA^2}=4a$.

$DH=\frac{1}{4}DA=a$.

Tam giác SHC có $\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}\Rightarrow\tan 30^\circ=\frac{SH}{HC}\Rightarrow HC=\frac{SH}{\tan 30^\circ}=3a$.

Tam giác DHC có $DC=\sqrt{DH^2+HC^2}=2\sqrt{2}a$

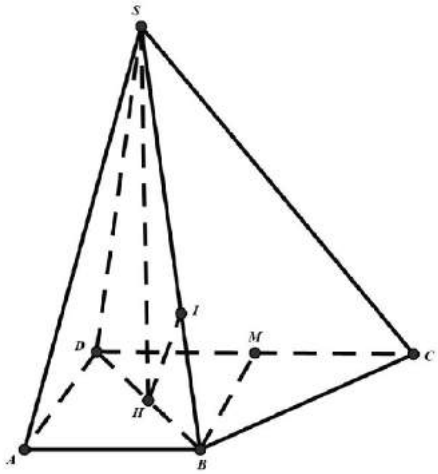
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.AD.DC=\frac{1}{3}.\sqrt{3}a.4a.2\sqrt{2}a=\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$

Câu 10. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=a$, $CD=2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích tứ diện $SBCD$ bằng $\frac{a^3}{\sqrt{6}}$. Khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) là?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của CD thì ta có $ABMD$ là hình vuông cạnh a do đó $BC = BD = a\sqrt{2} \Rightarrow CD^2 = 4a^2 = BC^2 + BD^2$ do đó tam giác BCD vuông cân tại B.

Gọi H là trung điểm của BD thì $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $V_{S.BCD} = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}BD.BC \Rightarrow SH = \frac{6.\frac{a^3}{\sqrt{6}}}{2a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hạ $HI \perp SB$.

Vì $ABMD$ là hình vuông nên H là trung điểm của AM và ta có $AMCB$ là hình bình hành do đó $AH // BC \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = d\left(H;(SBC)\right) = HI$.

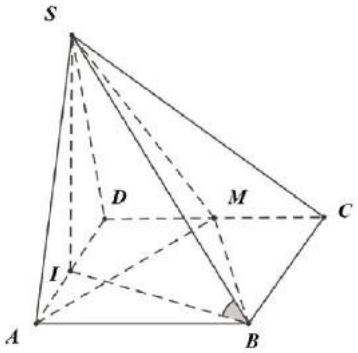
Khi đó $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ hay $d\left(A;(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 11. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD; gọi M là trung điểm của CD; cạnh bên SB hợp với đáy góc 60°. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABM$.

A. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$

$IB = \sqrt{IA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Ta có IB là hình chiếu vuông góc của SB lên $mp(ABCD) \Rightarrow (SB,(ABCD)) = (SB,IB) = 60^\circ$

Ta có $SI = IB.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3}.SI.S_{\Delta ABM} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Câu 12. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \dfrac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải

Gọi M là trung điểm của BC.

$N \in CM : \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{CH}{CA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HN // AM$. Mà

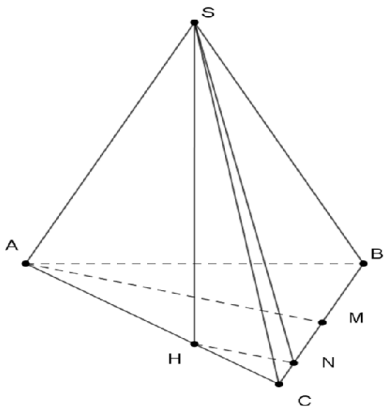
ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow HN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHN)$.

Nên $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SN;HN} = \widehat{SNH} = 60^o$.

Do ΔABC đều nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HN = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

ΔSHN vuông tại H có $SH = HN.\sin\widehat{SNH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sin 60^o = \dfrac{a}{4}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.



Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

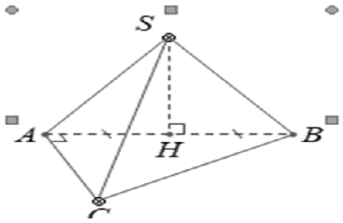
A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Do ΔSAB đều nên $SH \perp AB$

$$\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (ABC)\\ (SAB) \cap (ABC) = AB\\ SH \subset (SAB), SH \perp AB\end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$



Vậy SH là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

ΔABC vuông tại A, ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

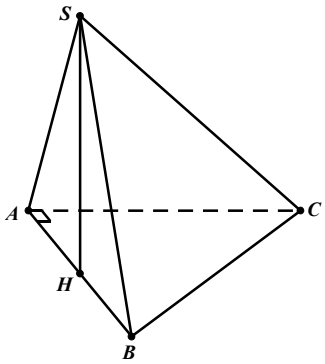
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC=\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là trung điểm đoạn AB thì $SH\perp AB$. Vì $(SAB)\perp(ABC)$ và $(SAB)\cap(ABC)=AB$ nên $SH\perp(ABC)$. Suy ra SH là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SH=SA.\sin\widehat{SAH}=a.\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

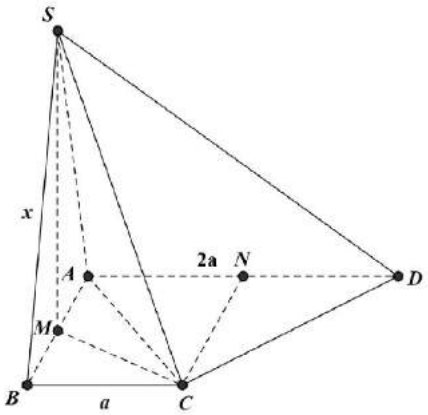
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 15. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\dfrac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a

A. $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AB = x > 0$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, AD.

Tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên SM chính là đường cao của hình chóp $S.ABCD$ và $BM = \frac{x}{2}, SM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CM = \sqrt{a^2 + \frac{x^2}{4}}$

Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$ suy ra

$$\frac{SM}{CM} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow SM^2 = \frac{3}{5}CM^2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{5}\left(a^2 + \frac{x^2}{4}\right) \Rightarrow x = a$$

Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $CN = a \Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2}AD.CN = a^2$

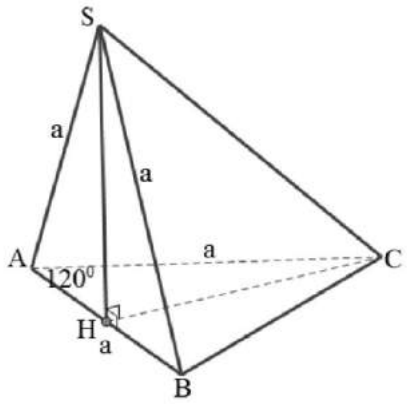
Vậy $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SM.S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 16. **(Chuyên - Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{8}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (vì tam giác SAB là tam giác đều).

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB); SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Nhận thấy ΔSAB là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

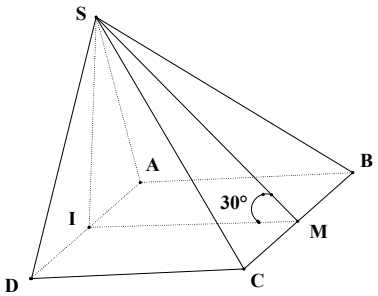
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



+ Trong tam giác đều SAD gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

+ Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp IM$ (1).

Mặt khác do $SI \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SI$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp SM$.

+ Vậy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SMI} = 30°$.

+ Xét tam giác vuông SIM có $IM = \dfrac{SI}{\tan 30°} = 3a$ (vì tam giác SAD là tam giác đều cạnh $2a$ nên $SI = a\sqrt{3}$).

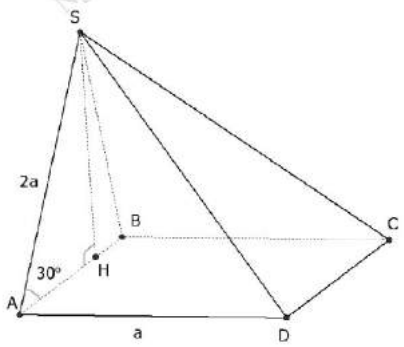
Vậy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SI = \dfrac{1}{3} AD.\text{BC}.SI = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Huệ- 2019)**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 30^0$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên cạnh AB.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có: $\sin \widehat{SAB} = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow SH = \sin 30^0.SA = a.$

Mặt khác: $S_{ABCD} = AD^2 = a^2$.

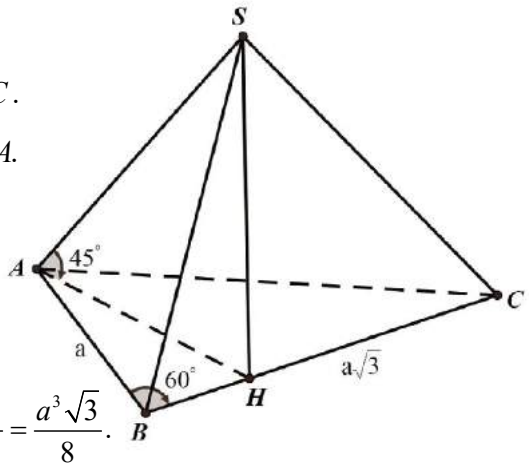
Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD}.a = \dfrac{1}{3} \cdot a^2.a = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, BC = a\sqrt{3}, \widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là 45^0. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



+Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), $H \in BC$.

+$\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = 45^0 \Rightarrow \Delta SHA$ vuông cân $\Rightarrow SH = HA.$

+$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.AH.\frac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC}$

$= \frac{1}{6}.AH.a.a\sqrt{3}.\sin 60^0 = AH.\frac{a^2}{4}.$

+ $V_{min} \Leftrightarrow AH_{min} \Leftrightarrow AH \perp BC$ tại H.

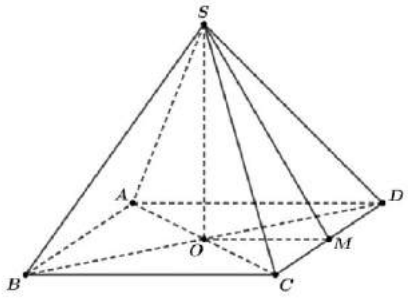
+$\sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = a.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}.$

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

Câu 1. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$ nên $(SOM) \perp BC$, suy ra $\left[(SCD),(ABCD)\right] = (SM,OM) = \widehat{SMO} = 60^0$.

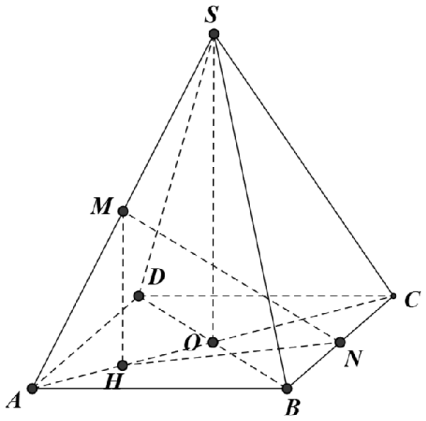
Có $OM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $SO = OM\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 2. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm AO. Khi đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{MNH}$.

Ta có $HN=\sqrt{CN^2+CH^2-2CN.CH.\cos 45^0}=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Suy ra $MH=HN.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{30}}{4}$.

Do đó $SO=2MH=\dfrac{a\sqrt{30}}{2}$.

Câu 3. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Nếu một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và có diện tích xung quanh bằng $4\sqrt{3}$ thì có thể tích bằng

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hình chóp đều $S.ABCD$ như hình vẽ

Kẻ $OE\perp BC\Rightarrow E$ là trung điểm BC và $BC\perp(SOE)$

Do đó $BC\perp SE$

Xét ΔSOE vuông tại O, ta có

$SE^2=SO^2+OE^2$

$\Rightarrow SE=\sqrt{SO^2+1}$

Mặt khác

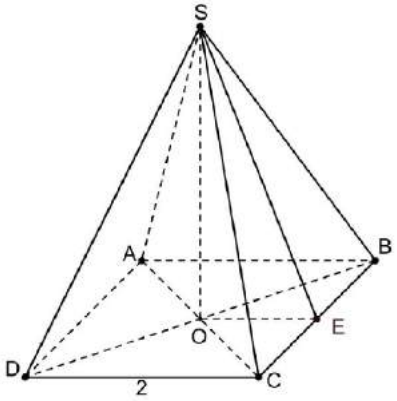
$S_{xq}=4S_{\Delta SBC}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}=4.\dfrac{1}{2}.SE.BC$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}=2.\sqrt{SO^2+1}.2$

$\Leftrightarrow SO=\sqrt{2}\,(x>0)$

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{2}.2^2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (đvtt)

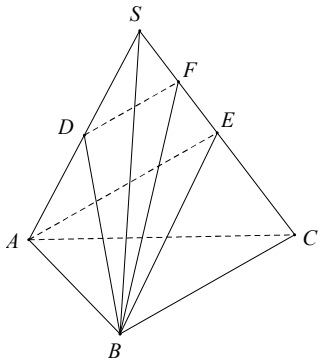


Câu 4. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của SA,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{27}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi F là trung điểm $SE \Rightarrow BD \perp DF$; gọi $AB = x$

Ta có $BE^2 = BD^2 = AE^2 = \dfrac{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}{4} = \dfrac{2a^2 + 2x^2 - a^2}{4} = \dfrac{a^2 + 2x^2}{4}$

$BF^2 = \dfrac{2BS^2 + 2BE^2 - SE^2}{4} = \dfrac{2a^2 + \dfrac{a^2 + 2x^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}}{4} = \dfrac{9a^2 + 4x^2}{16}$

$BF^2 = BD^2 + DF^2 \Leftrightarrow BF^2 = \dfrac{5BD^2}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{9a^2 + 4x^2}{16} = \dfrac{5}{4}.\dfrac{a^2 + 2x^2}{4} \Leftrightarrow 9a^2 + 4x^2 = 5a^2 + 10x^2 \Leftrightarrow 4a^2 = 6x^2 \Rightarrow x = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$

Tam giác ABC đều có cạnh là $x \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{7}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$

Hoặc sử dụng công thức tính thể tích chóp tam giác ABC đều có cạnh bên bằng a, cạnh đáy bằng x

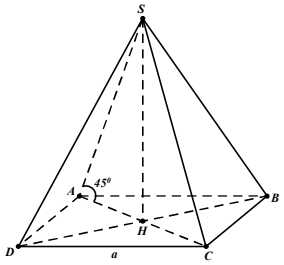
$V_{S.ABC} = \dfrac{x^2.\sqrt{3a^2 - x^2}}{12} = \dfrac{\dfrac{2a}{3}^2\sqrt{3a^2 - \dfrac{2a}{3}^2}}{12} = \dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và chân đường cao H trùng với tâm của hình vuông $ABCD$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

Nhận thấy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC). Vì thế $(SA,(ABC))=(SA,HA)=\widehat{SAH}$. Suy ra $\widehat{SAH}=45°$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$. Suy ra $HA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H và có $\widehat{SAH}=45°$ nên là tam giác vuông cân tại H. Suy ra $SH=HA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

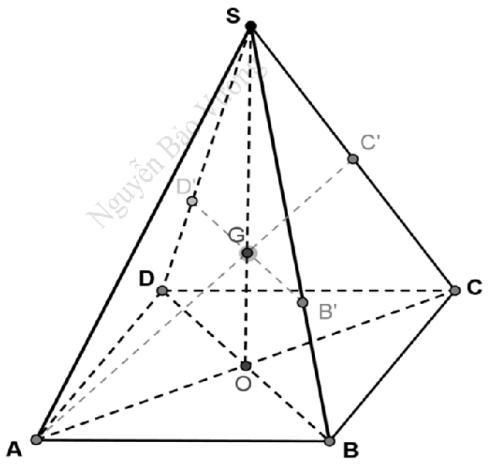
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 6. **(HKI-NK HCM-2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ độ dài cạnh đáy là a. Biết rằng mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt cạnh SB tại B' với $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{2}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\left.\begin{matrix}BD\perp AC\\BD\perp SO\end{matrix}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$

Mà $(P)\perp SC\Rightarrow(P)//BD$

Trong (SAC), gọi $\{G\}=AC'\cap SO\Rightarrow GB'//BD\Rightarrow\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{2}{3}$

Suy ra G là trọng tâm $\Delta SAC\Rightarrow C'$ là trung điểm SC

Nên ΔSAC là tam giác đều cạnh $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow SO=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

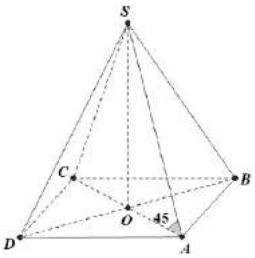
$\Rightarrow V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Câu 7. **(Sở Quảng Trị2019)** Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc $45°$. Thể tích của khối chóp đó là

A. $\dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ thỏa mãn các điều kiện đề bài với $\{O\} = AC \cap BD$

Theo giả thiết ta có $AB = 2a$, SA tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$ suy ra $\widehat{SAO} = 45°$

$ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên tính được $AC = 2\sqrt{2}a \Rightarrow OA = a\sqrt{2}$

Tam giác SOA vuông cân tại O vì có $SO \perp OA, \widehat{SAO} = 45°$ suy ra $SO = OA = a\sqrt{2}$

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3} 4a^2.a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$

Câu 8. **(THPT Trần Phú - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $3a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $6a^3\sqrt{3}$. **C.** $12a^3$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

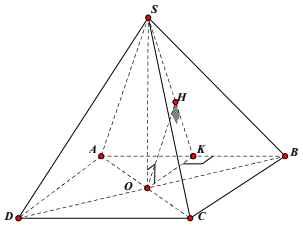
Lời giải

Chọn C

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} CD \,//\, AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = 2d(O, (SAB))$.

Kẻ $\begin{cases} OK \perp AB \\ OH \perp SK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH = d(O, (SAB)) = \frac{3a}{2}$.



Xét $\Delta SOK: \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OK^2} \Leftrightarrow SO = 3a$.

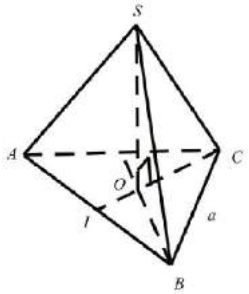
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD: V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = 12a^3$.

Câu 9. **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh $AB = a$ và cạnh bên hợp với đáy một góc $45°$. Thể tích V của khối chóp là

A. $V = \frac{a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên các cạnh bên đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Góc giữa cạnh SC với đáy là góc giữa hai đường thẳng SC và OC hay chính là góc $\widehat{SCO}$. Theo bài ra ta có $\widehat{SCO}=45^\circ \Rightarrow \Delta SOC$ vuông cân tại O.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $CO=SO=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy: $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

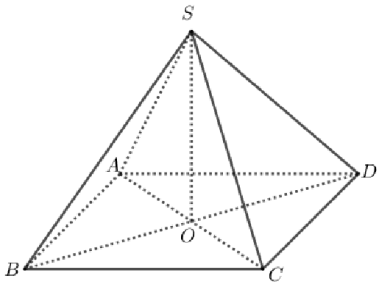
Thể tích của khối chóp $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SO=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3}{12}$.

Câu 10. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO\perp(ABCD)$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SA=2a$, $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}.2a\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

Suy ra $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.(2a)^2=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

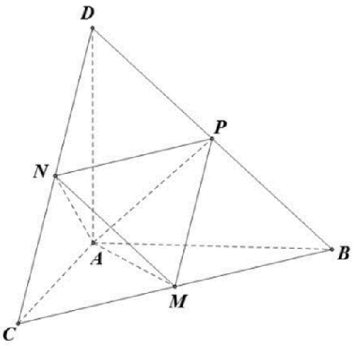
Dạng 4. Thể tích khối chóp khác

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=7a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$ **D.** $V=\frac{7}{2}a^3$

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}AD.AC=\frac{1}{6}6a.7a.4a=28a^3$

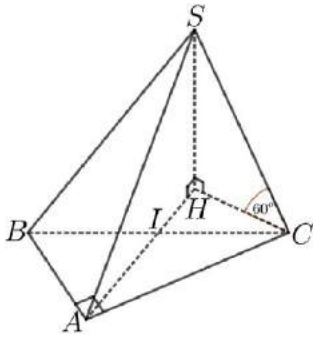
Ta nhận thấy $S_{MNP}=\frac{1}{2}S_{MNPD}=\frac{1}{4}S_{BCD}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.

Câu 2. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=-2\overrightarrow{IH}$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}=a^2$.

$BC=2a,\ IA=a,\ IH=\frac{a}{2}$.

Tam giác HIC vuông tại I ta có $HC^2=HI^2+IC^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow HC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan\widehat{SCH}=\frac{SH}{HC}\Leftrightarrow SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\frac{a\sqrt{5}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

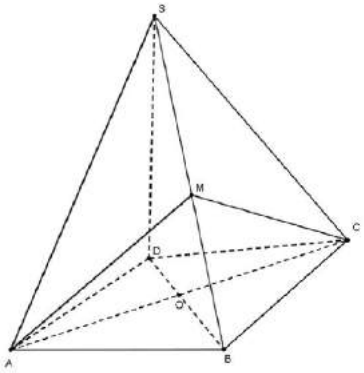
Câu 3. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh $3a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$, góc giữa (SAB) và (SCB) bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **D.** $\frac{9\sqrt{2}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Trong mặt phẳng (ABC) lấy D nằm trên đường trung trực của AC sao cho $SD\perp(ABC)$ và $\widehat{BCD}=\widehat{BAD}=90^0\Rightarrow\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow BD = \dfrac{BC^2}{OB} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow CD = a\sqrt{3}$

Dựng $AM \perp SB$, do $\Delta SAB = \Delta SCB \Rightarrow CM \perp SB \Rightarrow \widehat{((SAB),(SCB))} = \widehat{(AM,CM)}$

+ Nếu $\widehat{AMC} = 60^0 \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 30^0} = 3a = BC$ vô lí vì tam giác MBC vuông tại M

+ Nếu $\widehat{AMC} = 120^0 \Rightarrow MC = \dfrac{OC}{\sin 60^0} = \sqrt{3} \Rightarrow SC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \dfrac{3a\sqrt{6}}{2}$

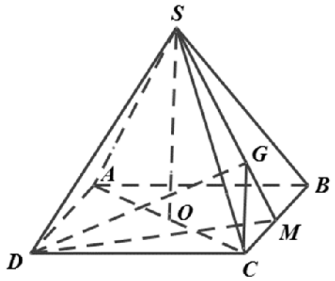
$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{9a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Thể tích tứ diện $SGCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{18}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, M là trung điểm BC.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$

$\dfrac{V_{SGCD}}{V_{SMCD}} = \dfrac{SG}{SM} = \dfrac{2}{3}$ suy ra $V_{SGCD} = \dfrac{2}{3}V_{SMCD}$ (1).

Mặt khác:

Hình chóp $S.ABCD$ và $S.MCD$ có chung đường cao SO và $S_{\Delta MCD} = \dfrac{1}{2}S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD}$

nên $V_{SMCD} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $V_{SGCD} = \dfrac{1}{6}V_{S.ABCD}$

Mặt khác $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.1 = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $V_{SGCD} = \dfrac{\sqrt{2}}{36}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$SC^2 = SA^2 + AC^2 - 2SA.AC.\cos\widehat{SAC}$.

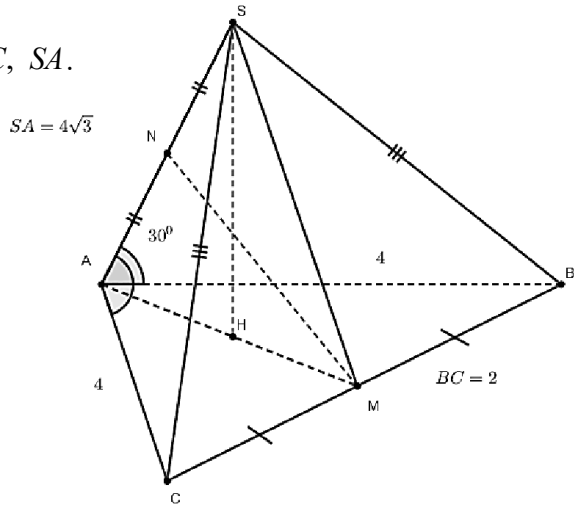
$\Rightarrow SC^2 = 48 + 16 - 2.4\sqrt{3}.4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow SC = 4$.

$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos\widehat{SAB}$.

$\Rightarrow SB = 4$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SA.



Ta có:

ΔSBC cân tại S, ΔABC cân tại A.

$\Rightarrow \begin{cases} SM \perp BC \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Kẻ $SH \perp AM$.

Mà $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SH$.

Vậy, $SH \perp (ABC)$.

Ta có, $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{15} = AM$.

Nên ΔSAM cân tại $M \Rightarrow MN \perp SA$.

Ta có:

$MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{3}$;

$MN.SA = SH.AM \Rightarrow SH = \dfrac{MN.SA}{AM} = \dfrac{4\sqrt{15}}{5}$;

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AM.BC = \sqrt{15}$. Do đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{15}.\dfrac{4.\sqrt{15}}{5} = 4$.

Câu 6. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA = BC = 3$; $SB = AC = 4$; $SC = AB = 2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{390}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{390}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{390}}{12}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{390}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức thể tích khối tứ diện gần đều:

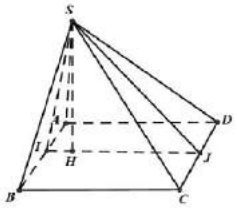
$V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)} = \dfrac{\sqrt{390}}{4}$.

Câu 7. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = SB = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng a. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $2\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD theo đề bài ta có: $SA=SB=a\sqrt{2}$ nên hình chiếu H của S lên đáy nằm trên đường thẳng IJ. Dễ thấy $CD\perp(SIJ)$.

Suy ra $d\left(A,(SCD)\right)=d\left(I,(SCD)\right)=d\left(I,SJ\right)=a$.

Tam giác SAB vuông cân tại S nên $SI=a$ suy ra $SI=d\left(I,SJ\right)=a\Rightarrow SI\perp(SCD)$.

Trong tam giác vuông SIJ ta có: $SH.IJ=SI.SJ\Rightarrow SH=\dfrac{SI.SJ}{IJ}=\dfrac{a.\sqrt{(2a)^2-a^2}}{2a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

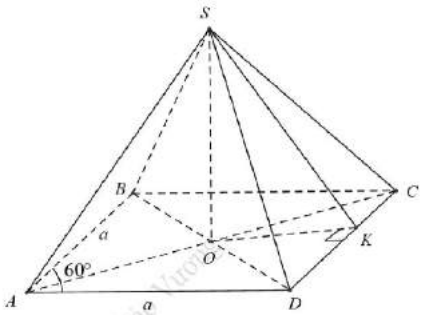
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.AH=\dfrac{1}{3}.4a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB=a,\widehat{BAD}=60°,SO\perp(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết hình thoi $ABCD$ có $AB=a,\widehat{BAD}=60°$ nên $BD=a,AC=a\sqrt{3}$.

Dựng $OK\perp CD,(K\in CD)$.

Ta có $SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp CD$ và $OK\perp CD$ nên $CD\perp(SOK)\Rightarrow CD\perp SK$.

Do đó góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SKO}=60°$.

Trong tam giác vuông $OCD,(\widehat{COD}=90°)$ có $\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{OC^2}+\dfrac{1}{OD^2}=\dfrac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{16}{3a^2}$

$\Rightarrow OK=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác vuông $SOK,(\widehat{SOK}=90°)$ có $SO=OK.\tan\widehat{SKO}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\tan 60°=\dfrac{3a}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là: $S_{ABCD}=\dfrac{AC.BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$.

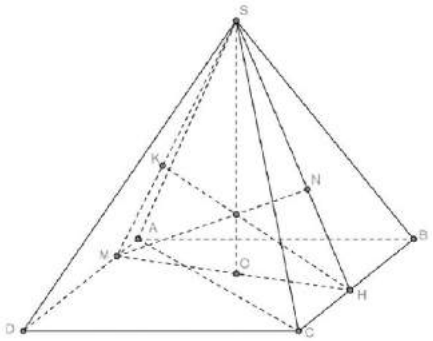
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}.\dfrac{3a}{4}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa SA và BC là $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC, tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.
Dựng đường thẳng d đi qua O, vuông góc với BC và cắt BC, AD lần lượt tại H, M.
Khi đó $AD, BC \perp (SHM)$.
Trong ΔSHM, dựng $HK \perp SM\ (K \in SM)$ và $MN \perp SH\ (N \in SH)$.
Ta có $MN \perp SH$ và $MN \perp BC$ nên $MN \perp (SBC)$.

Vì vậy $MN = d(M,(SBC)) = d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do $BC//(SAD)$ nên $d(BC,SA) = d(BC,(SAD)) = d(H,(SAD)) = HK$. Suy ra $HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Do ΔSHM có hai đường cao $MN = HK$ nên cân tại S. Suy ra O là trung điểm của MH.

Ta có $MH = d(AD,BC) = d(A,BC) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (do ΔABC đều, cạnh bằng a). Suy ra $MO = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác đồng dạng MKH và MOS, ta có

$$\frac{KH}{SO} = \frac{MK}{MO} \Rightarrow SO = \frac{MO.KH}{MK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{15}}{5}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{15}}{5}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

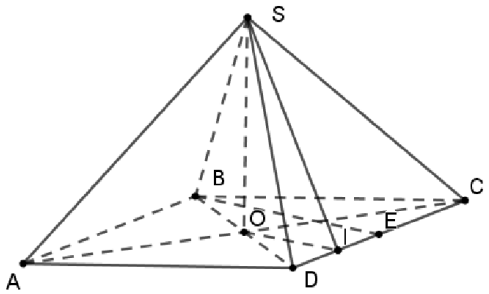
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} SO \times S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Câu 10. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60°$, $SO \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn D



Do $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AB = a$, $\widehat{BAD} = 60°$, nên tam giác BCD đều cạnh a

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Gọi E là trung điểm CD và I là trung điểm ED. $BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OI = \dfrac{1}{2}BE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. $BE \perp CD$ nên $OI \perp CD$.

Nên góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là góc $\widehat{SIO}$, suy ra $\widehat{SIO} = 60°$. $SO = OI.\tan 60° = \dfrac{3a}{4}$.

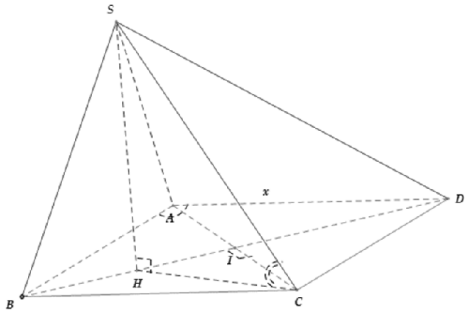
Vậy thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh x, $\widehat{BAD} = 60°$, gọi I là giao điểm AC và BD. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là H sao cho H là trung điểm của BI. Góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{36}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{24}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{39}x^3}{48}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác ABD đều cạnh $x \Rightarrow BD = x \Rightarrow IH = \dfrac{x}{4}$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC: $AC = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x.x.\cos 120°} = x\sqrt{3} \Rightarrow IC = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác IHC vuông tại I: $HC = \sqrt{IH^2 + IC^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{3x^2}{4}} = \dfrac{x\sqrt{13}}{4}$

Do tam giác SHC vuông tại H, có $\widehat{SCH} = (SC,(ABCD)) = 45°$ nên tam giác SHC vuông cân tại H. Suy ra: $HC = SH = \dfrac{x\sqrt{13}}{4}$

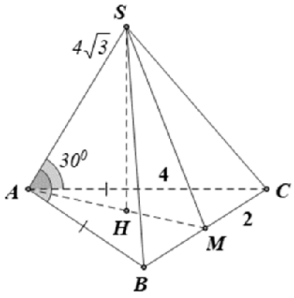
Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.AC.BD.SH = \dfrac{1}{6}.x\sqrt{3}.x.\dfrac{x\sqrt{13}}{4} = \dfrac{x^3\sqrt{39}}{24}$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = 4$, $BC = 2$, $SA = 4\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V_{S.ABC} = 8$. **B.** $V_{S.ABC} = 6$. **C.** $V_{S.ABC} = 4$. **D.** $V_{S.ABC} = 12$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Vì ΔABC cân tại A (do $AB=AC=4$) nên $AM \perp BC$.

$AM=\sqrt{AC^2-MC^2}=\sqrt{15}$; $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=\sqrt{15}$.

$\Delta SAB=\Delta SAC(c-g-c)$ nên $SB=SC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (ABC) suy ra $H \in AM$.

Áp dụng định lí cosin cho ΔSAB, ta có: $SB^2=SA^2+AB^2-2SA.AB.\cos 30^\circ=16 \Rightarrow SB=4$.

ΔSMB vuông tại M nên $SM=\sqrt{SB^2-MB^2}=\sqrt{15}$.

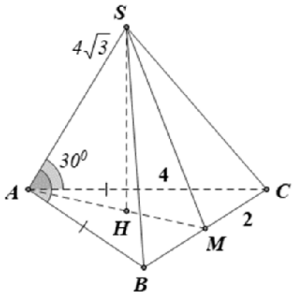
Áp dụng định lí cosin cho ΔSAM, ta có $\cos\widehat{SMA}=\frac{SM^2+AM^2-SA^2}{2.SM.AM}=-\frac{3}{5}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{SMA}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{SMA}}=\frac{4}{5}$.

$\Rightarrow SH=SM.\sin\widehat{SMA}=\sqrt{15}.\frac{4}{5}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{1}{3}.\sqrt{15}.\frac{4\sqrt{15}}{5}=4$.

Cách 2:



Áp dụng định lí cosin cho ΔABC, ta có

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\frac{7}{8}$.

Sử dụng công thức $V=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

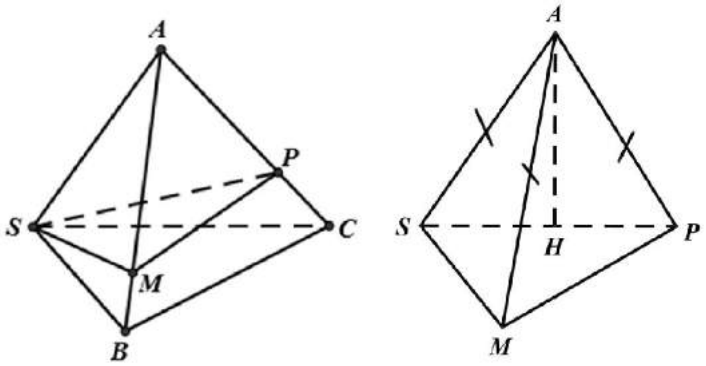
$\Rightarrow V=\frac{AB.AC.SA}{6}\sqrt{1-\cos^2 30^\circ-\cos^2 30^\circ-\left(\frac{7}{8}\right)^2+2\cos 30^\circ.\cos 30^\circ.\frac{7}{8}}=4$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $AB=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$. Góc $\widehat{SAB}=60^0$, $\widehat{BAC}=90^0$, $\widehat{CAS}=120^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Lấy trên cạnh $AB;AC$ lần lượt các điểm $M;P$ sao cho $AS=AM=AP=a$.

Ta có: $SM=a;MP=a\sqrt{2};SP=a\sqrt{3}\Rightarrow \Delta SMP$ vuông tại M.

Do $AS=AM=AP=a\Rightarrow$ Hình chiếu của A trên đáy (SMP) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SMP, là H.

Ta có: $S_{\Delta SMP}=\frac{1}{2}.SM.MP=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

$$AH=\sqrt{SA^2-\left(\frac{SP}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}\Rightarrow V_{ASMP}=\frac{1}{3}S_{\Delta SMP}.AH=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

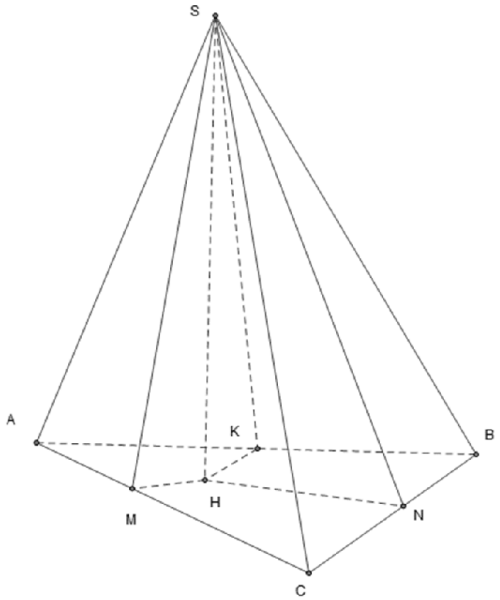
Ta lại có: $\frac{V_{A.SBC}}{V_{A.SMP}}=\frac{AB}{AM}.\frac{AC}{AP}=\sqrt{6}\Rightarrow V_{S.ABC}=V_{A.SBC}=\sqrt{6}.V_{A.SMP}=\sqrt{6}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 14. **(THPT Minh Khai - lần 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=7cm,\ BC=8cm,\ AC=9cm$. Các mặt bên tạo với đáy góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$. Biết hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) thuộc miền trong của tam giác ABC.

A. $\frac{20\sqrt{3}}{3}(cm^3)$. **B.** $20\sqrt{3}(cm^3)$. **C.** $\frac{63\sqrt{3}}{2}(cm^3)$. **D.** $72\sqrt{3}(cm^3)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $p=\frac{AB+BC+AC}{2}=12(cm)$.

Diện tích tam giác ABC là $S=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=12\sqrt{5}(cm^2)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC).

Gọi K, N, M là hình chiếu vuông góc của H trên AB, BC, CA.

Theo bài ra ta có $\widehat{SKH}=\widehat{SNH}=\widehat{SMH}=30°$.

Ta có $\Delta SKH=\Delta SNH=\Delta SMH$ vì

$\widehat{SHK}=\widehat{SHN}=\widehat{SHM}=90°$,

SH chung,

$\widehat{SKH}=\widehat{SNH}=\widehat{SMH}=30°$.

Suy ra $KH=NH=MH$.

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó $KH=NH=MH=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}=\sqrt{5}(cm)$.

$SH=HK\tan 30°=\dfrac{\sqrt{15}}{3}(cm)$.

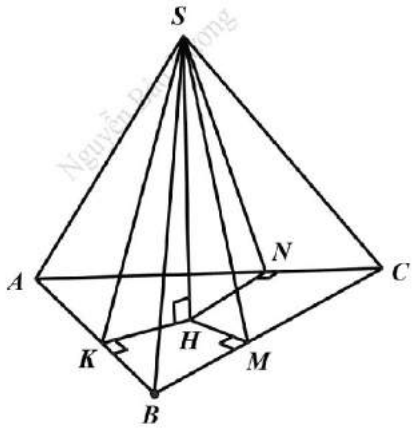
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.12\sqrt{5}.\dfrac{\sqrt{15}}{3}=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}(cm^3)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có các mặt bên $(SAB),(SAC),(SBC)$ tạo với đáy các góc bằng nhau và đều bằng $60°$ .Biết $AB=13a, AC=14a, BC=15a$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V=28\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=112\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=84\sqrt{3}a^3$. **D.** $84a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Gọi M,N,K lần lượt là hình chiếu của H trên các cạnh BC,AC,AB .Khi đó,ta có các tam giác $\Delta SHK,\Delta SHM,\Delta SHN$ bằng nhau $\Rightarrow HM=HN=HK=r$,với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có nửa chu vi của tam giác ABC là $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=\dfrac{13+14+15}{2}=21$.

Ta có: $S_{ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}=\sqrt{21.(21-13)(21-14)(21-15)}=84$.

Mà. $S_{ABC}=pr\Leftrightarrow r=\dfrac{S_{ABC}}{p}=\dfrac{84}{21}=4=HM$

Ta lại có: $\widehat{((SBC),(ABC))}=\widehat{SMH}=60°\Rightarrow SH=r.\tan 60°=4\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.84.4\sqrt{3}=112\sqrt{3}$.

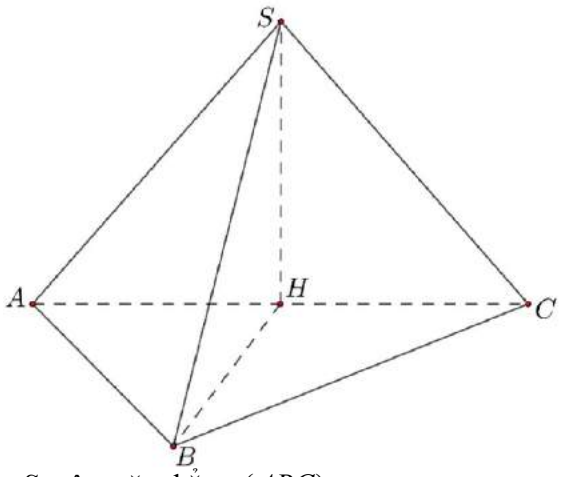
Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=6$, $AC=4$; ABC là tam giác vuông cân tại B. Tính

thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=16\sqrt{7}$ **B.** $V=\dfrac{16\sqrt{7}}{3}$ **C.** $V=16\sqrt{2}$ **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Chọn D



• Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Do $SA=SB=SC$ nên $\Delta SHA=\Delta SHB=\Delta SHC$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow HA=HB=HC\Rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông cân tại B nên H là trung điểm AC.

Suy ra $HA=HC=\dfrac{1}{2}AC=2\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=4\sqrt{2}$

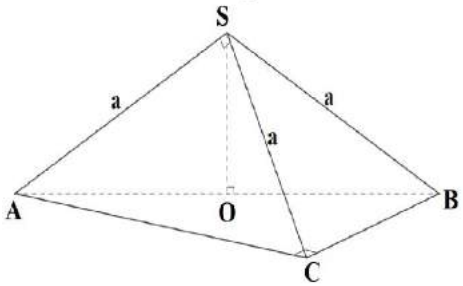
• Ta có: $BA=BC=\dfrac{AC\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right).4\sqrt{2}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ biết rằng $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=120°$, $\widehat{BSC}=60°$ và $\widehat{ASC}=90°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải



Ta có $SB=SC=a$, $\widehat{BSC}=60°$ suy ra tam giác BSC đều $\Rightarrow BC=a$.

Lại có $SA=SC=a$, $\widehat{ASC}=90°$ suy ra tam giác ASC vuông cân tại S $\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $SA=SB=a$, $\widehat{ASB}=120°$, áp dụng định lí cosin cho tam giác ASB, ta được:

$AB^2=SA^2+SB^2-2SA.SB.\cos\widehat{ASB}=3a^2\Leftrightarrow AB=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác ABC có $BC^2+AC^2=a^2+2a^2=3a^2=AB^2$ suy ra tam giác ABC vuông tại C.

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.BC=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là trung điểm của cạnh AB suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA=SB=SC \Rightarrow SO\perp(ABC)$.

Xét tam giác vuông ASO vuông tại O có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$.

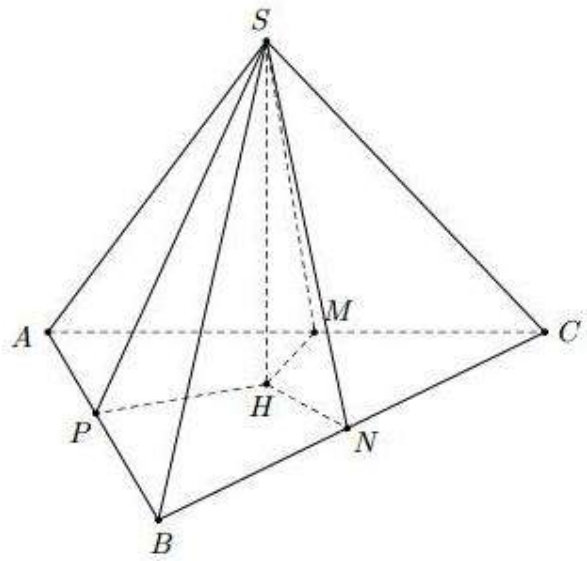
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 18. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $\frac{1}{48}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC,BC,AB.

Đặt $SH=h\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.h.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{h\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $AP=\frac{2S_{SAB}}{AB}=2S_{SAB}=\frac{6V_{S.ABC}}{d(C;(SAB))}=\frac{h\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{30}}{20}=h\sqrt{10}$

Tương tự, tính được $HM=2h, HN=h$

$\Rightarrow PH=\sqrt{SP^2-SH^2}=3h$

Ta có $S_{ABC}=S_{HAB}+S_{HAC}+S_{HBC}=\frac{1}{2}(HP+HM+HN)\Leftrightarrow 3h=\frac{\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{12}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{48}$.

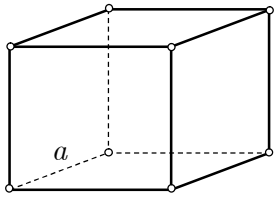
---------- **HẾT** ----------

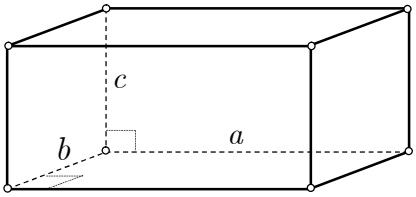
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

DẠNG. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\text{ chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$
- Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$





Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Câu 1. **(Mã 101 - 2019)** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A. Bh. **B.** $\frac{4}{3}Bh$. **C.** $\frac{1}{3}Bh$. **D.** $3Bh$.

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 72.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3;4;5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

A. 10. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 60.

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp hình chữ nhật có ba kích thước $2;\ 4;\ 6$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 48. **D.** 8.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 7. **(Mã 103 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $16a^3$ **B.** $4a^3$ **C.** $\frac{16}{3}a^3$ **D.** $\frac{4}{3}a^3$

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

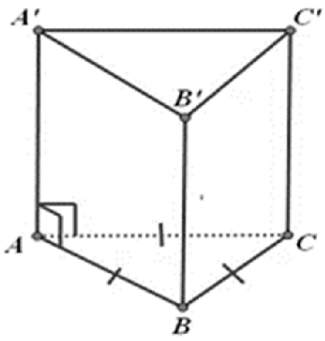
A. $\frac{2}{3}a^3$ **B.** $\frac{4}{3}a^3$ **C.** $2a^3$ **D.** $4a^3$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ

A. $V=3a^3\sqrt{2}$ **B.** $V=a^3\sqrt{2}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

Câu 10. **(Mã 102 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=2a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 11. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$ **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V=\dfrac{1}{3}a^3$

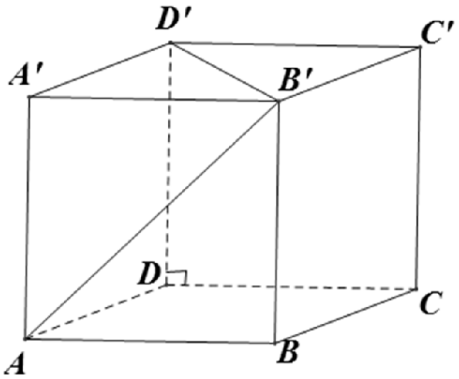
Câu 12. **(SGD Nam Định)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'C=3a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, biết $AB=a$, $AC=2a$ và $A'B=3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{5}a^3$. **D.** $2\sqrt{2}a^3$.

Câu 14. **(Gia Lai 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, $AB'=a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



A. $V=a^3\sqrt{2}$. **B.** $V=2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V=a^3\sqrt{10}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

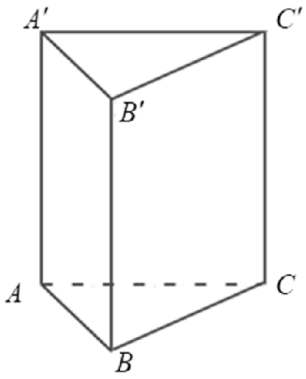
Câu 15. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$..

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2019)** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $6a^3$

Câu 17. **(Mã 104 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=\sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

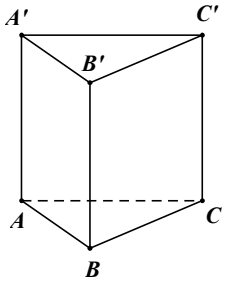
Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 19. **(Mã 110 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{3}$ **B.** $V=\frac{a^3}{2}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\frac{a^3}{6}$

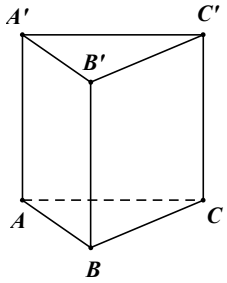
Câu 20. **(Mã 103 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA'=3a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 21. **(Mã 101 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=\sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng.



A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 22. **(THPT Việt Đức Hà Nội Năm 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$ và $A'B=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^o. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D, có $AB=2CD, AD=CD=a\sqrt{2}, AA'=2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $12a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Câu 25. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết $AA'=2a; AB=3a; AC=4a$ và $AB\perp AC$.

A. $12a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $24a^3$. **D.** $8a^3$.

Câu 26. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA'=4a, AC=2a, BD=a$. Thể tích V của khối lăng trụ là

A. $V=8a^3$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=\frac{8}{3}a^3$. **D.** $V=4a^3$.

Câu 27. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Cho hình hộp đứng có một mặt là hình vuông cạnh a và một mặt có diện tích là $3a^2$. Thể tích khối hộp là

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Câu 28. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB=a; BC=2a; AC'=a\sqrt{21}$. Tính thể tích V của khối hộp đó?

A. $4a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $8a^3$.

Câu 29. **(THPT Thăng Long 2019)** Hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6 thì có thể tích là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $54\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 8.

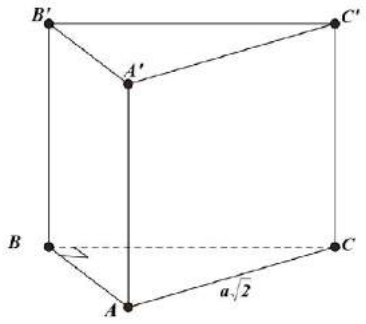
Câu 30. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=a, AB=3a, AC=5a$. Thể tích của khối hộp đã cho là

A. $5a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $15a^3$.

Câu 31. **(HKI-NK HCM-2019)** Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc $60°$. Khi đó thể tích khối hộp là

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 32. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ



A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

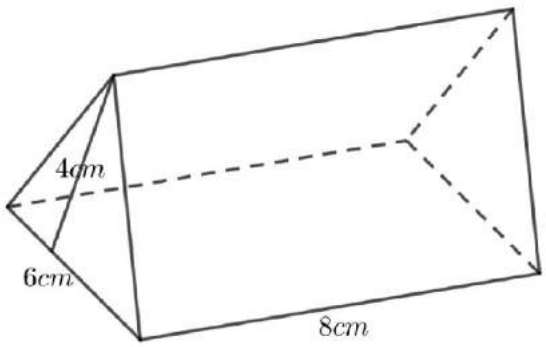
Câu 33. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC'=2a\sqrt{3}$.Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $4a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 34. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC=a$ và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\frac{1}{4}a^3$. **D.** $\frac{1}{12}a^3$.

Câu 35. **(Thăng Long-Hà Nội 2019)** Cho khối đa diện (kích thước như hình vẽ bên) được tạo bởi ba hình chữ nhật và hai tam giác bằng nhau.



Tính thể tích khối đa diện đã cho.

A. $48cm^3$. **B.** $192cm^3$. **C.** $32cm^3$. **D.** $96cm^3$.

Câu 36. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích khối lăng trụ đó bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

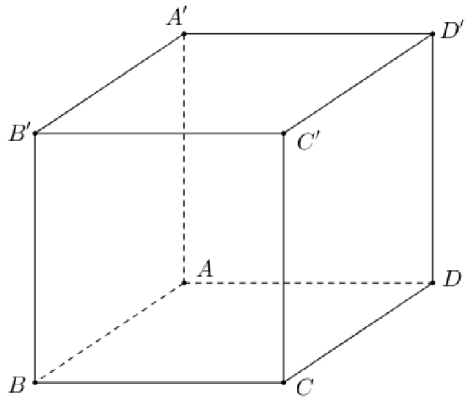
Câu 37. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** a^3.

Câu 38. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 39. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD = a\sqrt{3}$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Nguyễn Bảo Vươ...

Chuyên đề 11 THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Thể tích khối lăng trụ đứng

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Câu 2. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC=AB=2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Câu 4. **(SGD Nam Định)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB}=30°$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{3}$.

Câu 5. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $16a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\frac{a^3}{8}$ **D.** $V=\frac{3a^3}{4}$

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Câu 9. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Câu 10. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC'. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $V=a^3\sqrt{6}$. **D.** $V=\frac{7a^3}{8}$.

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{3a^3}{8}$.

Câu 12. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a\sqrt{2}$, góc giữa $\text{mp}(AB'C')$ và $\text{mp}(ABC)$ bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 15. **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B=a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{9a^3}{4}$.

Câu 16. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3a^3}{2}$

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)**Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 18. **(Liên Trường - Nghệ An 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **B.** $V=\frac{3}{4}a^3$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. **D.** $V=\sqrt{3}a^3$.

Câu 19. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 20. **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. $V=\frac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

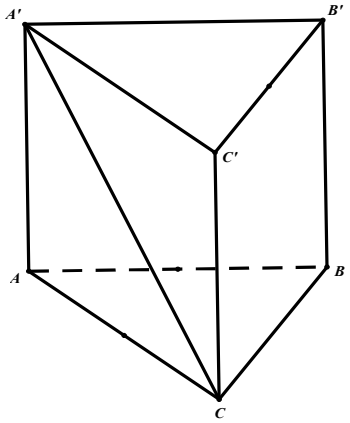
Câu 21. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 22. **(THPT Xuân Hòa - 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 23. **(THPT Hoàng Mai - Nghệ An - 2018)** Cho một lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xp} của hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đỉnh là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.



A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{6}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{6}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{36}$.

Dạng 2. Thể tích khối lăng trụ xiên

Câu 1. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3}{8}$

Câu 2. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A=A'B=A'C=a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AC=2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60^0 và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{8}{3}$ **B.** $V=\dfrac{16}{3}$ **C.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $8\sqrt{3}$

Câu 4. **(Gia Bình 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 5. **(Nguyễn Khuyến 2019)** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

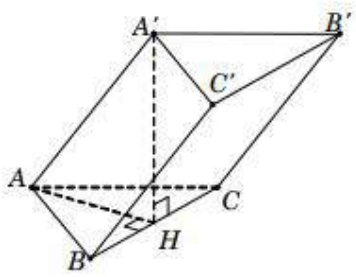
A. $\dfrac{9}{4}$ **B.** $\dfrac{27}{4}$ **C.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

Câu 6. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Câu 7. **(SGD Gia Lai 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Góc tạo

bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45^0(hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $V=\dfrac{\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V=1$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=3$.

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60°, thể tích khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 9. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC}=30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. **(Đề thử nghiệm 2017)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC=2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V=\dfrac{8}{3}$ **B.** $V=\dfrac{16}{3}$ **C.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 11. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}a^3$. **B.** $8\sqrt{3}a^3$. **C.** $24\sqrt{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 13. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 9.

Câu 14. **(chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 15. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa – 2019)** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 16. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đường cao BH. Biết $A'H \perp (ABC)$ và $AB=1, AC=2, AA'=\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Câu 17. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 18. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3}{4}$

Câu 19. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 20. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC}=60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{9a^3}{208}$. **B.** $\frac{3a^3}{26}$. **C.** $\frac{9a^3}{26}$. **D.** $\frac{27a^3}{208}$.

Câu 21. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC. Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{6a^3\sqrt{2}}{7}$ **B.** $\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{5}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 22. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA'=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=2a^2\sqrt{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Câu 23. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $2a^3\sqrt{6}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V=a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V=a^3$.

Câu 25. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a$, $AA'=2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 26. **(SGD Hưng Yên)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $\frac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 27. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3.\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 28. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 29. **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là :

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 30. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. **(THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC}=120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Câu 33. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM=2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

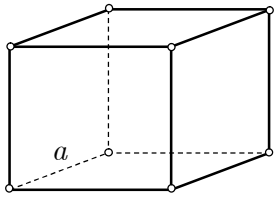
A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{3a^3}{2}$. **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

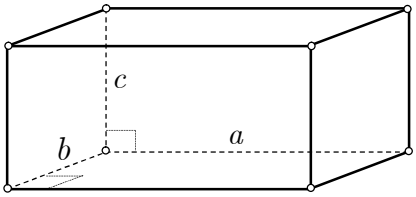
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

DẠNG. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\text{ chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$
- Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$





Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Câu 1. **(Mã 101 - 2019)** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A. Bh. **B.** $\frac{4}{3}Bh$. **C.** $\frac{1}{3}Bh$. **D.** $3Bh$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là: $V = B.h$.

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 72.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lập phương có cạnh bằng 6 là $V = 6^3 = 216$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Vậy thể tích khối lập phương cạnh 2 là: $V = 2^3 = 8$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3;4;5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

A. 10. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 60.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $V = 3.4.5 = 60$

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp hình chữ nhật có ba kích thước $2;\ 4;\ 6$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 48. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $2.4.6 = 48$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

◆ Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = 3.2 = 6$.

Câu 7. **(Mã 103 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $16a^3$ **B.** $4a^3$ **C.** $\frac{16}{3}a^3$ **D.** $\frac{4}{3}a^3$

Lời giải

Chọn B

$V = S_{day}.h = a^2.4a = 4a^3$.

Câu 8. **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}a^3$ **B.** $\frac{4}{3}a^3$ **C.** $2a^3$ **D.** $4a^3$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V_{langtru} = S_{day}.h = a^2.2a = 2a^3$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ

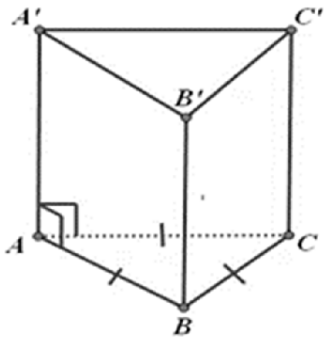
A. $V = 3a^3\sqrt{2}$ **B.** $V = a^3\sqrt{2}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = a^2\sqrt{3}.a\sqrt{6} = 3a^3\sqrt{2}$

Câu 10. **(Mã 102 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên).

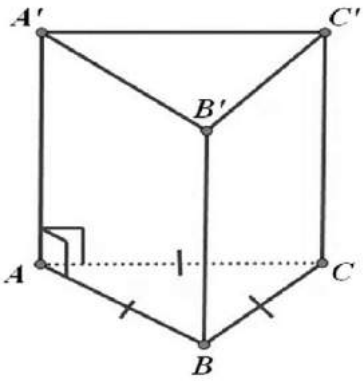


Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao của lăng trụ là $AA'=2a$

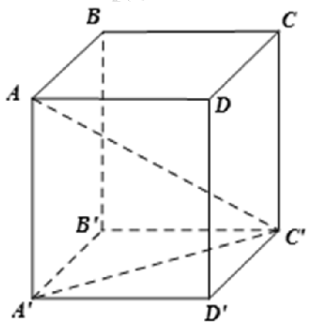
Thể tích khối lăng trụ là $V=AA'.S_{\Delta ABC}=2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}.$

Câu 11. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$ **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V=\dfrac{1}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



Giả sử khối lập phương có cạnh bằng $x;(x>0)$

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' ta có:

$A'C'^2=A'B'^2+B'C'^2=x^2+x^2=2x^2\Rightarrow A'C'=x\sqrt{2}$

Xét tam giác $A'AC'$ vuông tại A'ta có

$AC'^2=A'A^2+A'C'^2\Leftrightarrow 3a^2=x^2+2x^2\Leftrightarrow x=a$

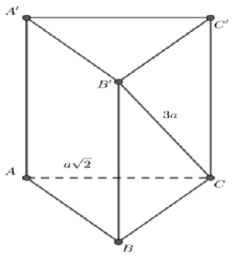
Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=a^3$.

Câu 12. **(SGD Nam Định)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'C=3a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C



Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = AC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$.

$\Delta BB'C$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = \sqrt{\left(B'C\right)^2 - BC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

$V = \dfrac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} 2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

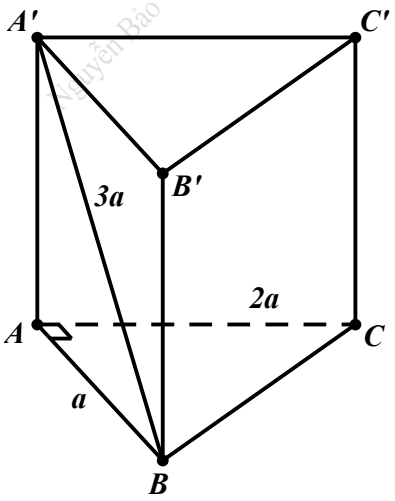
Vậy thể tích của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{5}a^3$. **D.** $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D

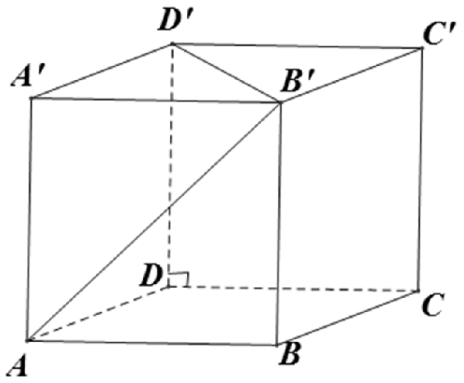


+ Diện tích đáy là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC = \dfrac{1}{2}.a.2a = a^2$.

+ Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

+ Thể tích cần tính là: $V = S_{ABC}.AA' = a^2.2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 14. **(Gia Lai 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



A. $V = a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{10}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$S_{ABCD} = AB.AD = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Trong tam giác ABB', $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$.

Vậy $V = BB'.S_{ABCD} = 2a.a^2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 15. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$..

Lời giải

Chọn A

Đáy hình lăng trụ là tam giác đều cạnh bằng 3 nên $S = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của hình lăng trụ bằng $h = 3$

Thể tích $V = S.h = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}.3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 16. **(Đề Tham Khảo 2019)** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

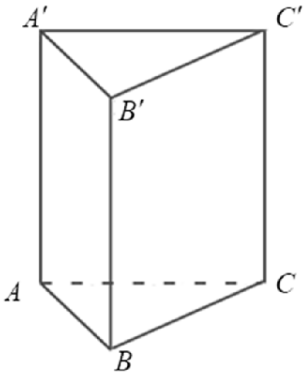
A. $8a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $6a^3$

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng: $V = (2a)^3 = 8a^3$

Câu 17. **(Mã 104 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

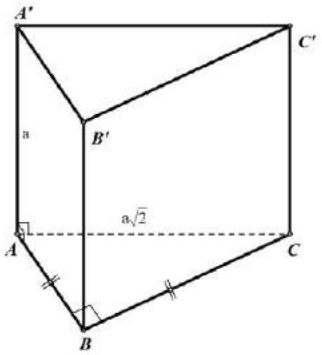
$\begin{cases}h=a\\ S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Rightarrow V=h.S=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 19. **(Mã 110 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{3}$ **B.** $V=\frac{a^3}{2}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\frac{a^3}{6}$

Lời giải

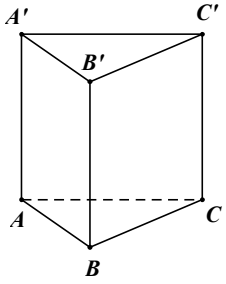
Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại $B\Rightarrow AB=BC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a$. Suy ra: $S_{ABC}=\frac{1}{2}a^2$.

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BB' = \frac{1}{2}a^2.a = \frac{a^3}{2}$

Câu 20. **(Mã 103 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA' = 3a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

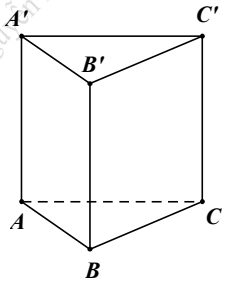
A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B

Khối lăng trụ đã cho có đáy là tam giác đều có diện tích là $\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $AA' = 3a$ (do là lăng trụ đứng) nên có thể tích là $\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.3a = 3\sqrt{3}a^3$

Câu 21. **(Mã 101 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng.



A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AA' = a\sqrt{3}$.

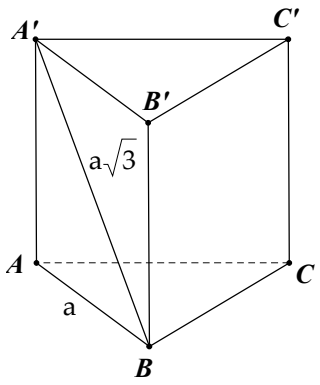
Từ đó suy ra $V = a\sqrt{3}.a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 22. **(THPT Việt Đức Hà Nội Năm 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{2}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

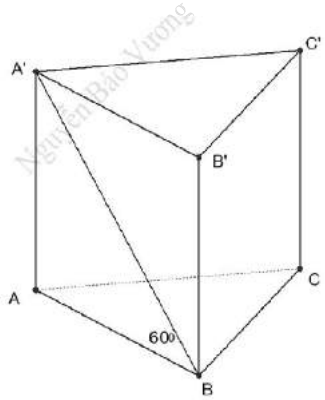
Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^o. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Đáy là tam giác đều cạnh a, có diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì $AA' \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BA} = (A'B, (ABC)) = 60^o$, suy ra: $AA' = AB\tan 60^o = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ:

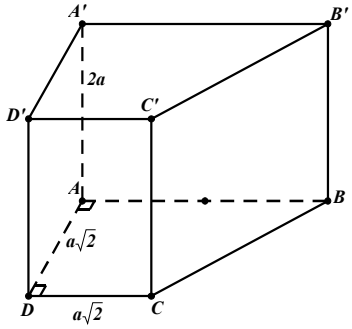
$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2CD, AD = CD = a\sqrt{2}, AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $12a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải

Chọn B



Diện tích hình thang $ABCD$ là:

$S_{ABCD}=\dfrac{(AB+CD).AD}{2}=\dfrac{(2CD+CD).AD}{2}=\dfrac{3CD.AD}{2}=\dfrac{3.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2}=3a^2$.

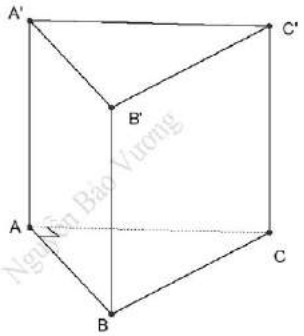
Thể tích khối lăng trụ đã cho: $V=S_{ABCD}.AA'=3a^2.2a=6a^3$.

Câu 25. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết $AA'=2a;AB=3a;AC=4a$ và $AB\perp AC$.

A. $12a^3$**.** **B.** $4a^3$. **C.** $24a^3$. **D.** $8a^3$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}3a.4a=6a^2$.

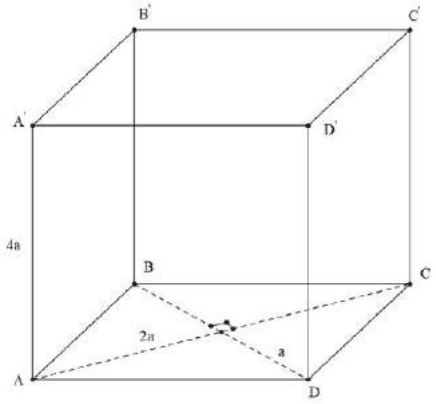
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=12a^3$.

Câu 26. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA'=4a,AC=2a,BD=a$. Thể tích V của khối lăng trụ là

A. $V=8a^3$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=\dfrac{8}{3}a^3$. **D.** $V=4a^3$.

Lời giải

Chọn D



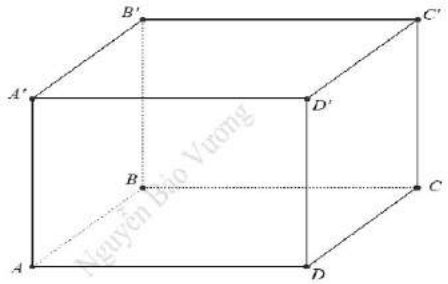
Thể tích V của khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.AA' = \frac{1}{2}.AC.BD.AA' = \frac{1}{2}.2a.a.4a = 4a^3$.

Câu 27. **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Cho hình hộp đứng có một mặt là hình vuông cạnh a và một mặt có diện tích là $3a^2$. Thể tích khối hộp là

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử mặt $ABB'A'$ là hình vuông cạnh bằng a, mặt $ABCD$ có diện tích bằng $3a^2$.

Do đó chiều cao $h = AA' = a$, diện tích đáy là $B = S_{ABCD} = 3a^2$.

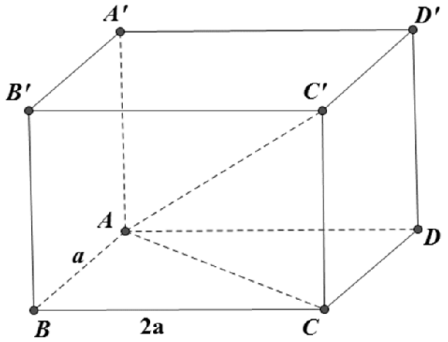
Suy ra thể tích của khối hộp đó là $V = 3a^2a = 3a^3$.

Câu 28. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = a; BC = 2a; AC' = a\sqrt{21}$. Tính thể tích V của khối hộp đó?

A. $4a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $8a^3$.

Lời giải

Chọn D



Xét tam giác vuông ABC, ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông ACC', ta có: $CC'=\sqrt{AC'^2-AC^2}=4a$.

Vậy thể tích của khối hộp hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V=a.2a.4a=8a^3$.

Câu 29. **(THPT Thăng Long 2019)** Hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6 thì có thể tích là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $54\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Gọi cạnh của hình lập phương là $a(a>0)$.

$\Rightarrow$ đường chéo của hình lập phương là $a\sqrt{3}$.

Theo bài ra ta có: $a\sqrt{3}=6\Rightarrow a=2\sqrt{3}$.

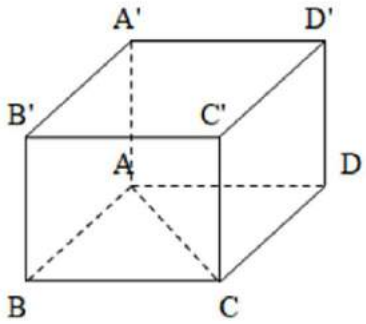
Vậy thể tích của khối lập phương là: $V=\left(2\sqrt{3}\right)^3=24\sqrt{3}$.

Câu 30. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=a, AB=3a, AC=5a$. Thể tích của khối hộp đã cho là

A. $5a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $15a^3$.

Lời giải

Chọn C



Xét ΔABC vuông tại B, ta có: $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{(5a)^2-(3a)^2}=4a$.

$S_{ABCD}=AB.BC=3a.4a=12a^2$

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.AA'=12a^2.a=12a^3$.

Câu 31. **(HKI-NK HCM-2019)** Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc $60°$. Khi đó thể tích khối hộp là

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

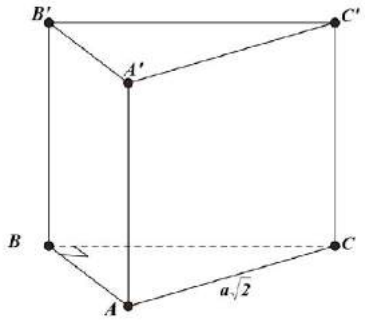
Chọn D

Ta có chiều cao $h=3a$.

Hình thoi cạnh a và có một góc $60°$ có diện tích $S=2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối hộp là $V=S.h=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 32. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ



A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Trong $\Delta ABC: AC^2=AB^2+BC^2 \Leftrightarrow 2AB^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow AB=BC=a.$

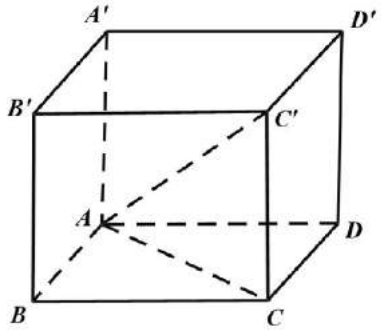
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.BB'=\frac{1}{2}AB.BC.BB'=\frac{a^3}{2}.$

Câu 33. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC'=2a\sqrt{3}$.Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $4a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AC'^2=AB^2+AD^2+AA'^2 \Rightarrow AA'^2=4a^2 \Rightarrow AA'=2a$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

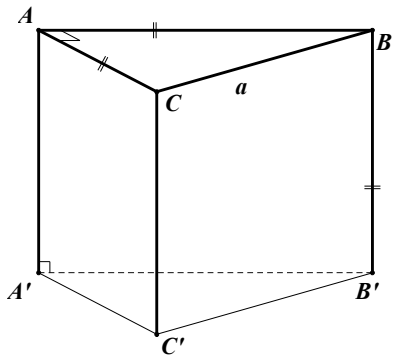
$V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{2}.AB.AD.AA'=\frac{1}{2}.2a.2a.2a=4a^3$.

Câu 34. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC=a$ và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\frac{1}{4}a^3$. **D.** $\frac{1}{12}a^3$.

Lời giải

Chọn A.

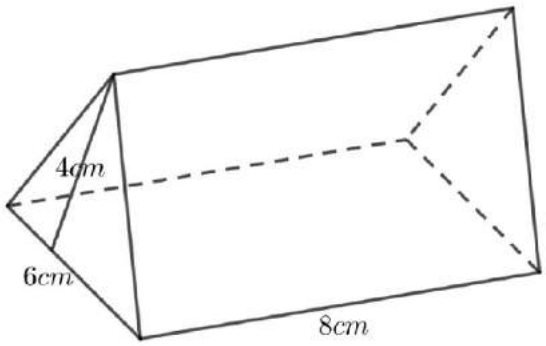


Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = \dfrac{BC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

Mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông $\Rightarrow AA' = AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C''} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 35. **(Thăng Long-Hà Nội 2019)** Cho khối đa diện (kích thước như hình vẽ bên) được tạo bởi ba hình chữ nhật và hai tam giác bằng nhau.



Tính thể tích khối đa diện đã cho.

A. $48cm^3$. **B.** $192cm^3$. **C.** $32cm^3$. **D.** $96cm^3$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết, suy ra khối đa diện là một khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác và các mặt bên là hình chữ nhật.

Thể tích khối đa diện là $V = \dfrac{1}{2}.6.4.8 = 96\left(cm^3\right)$.

Câu 36. **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích khối lăng trụ đó bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

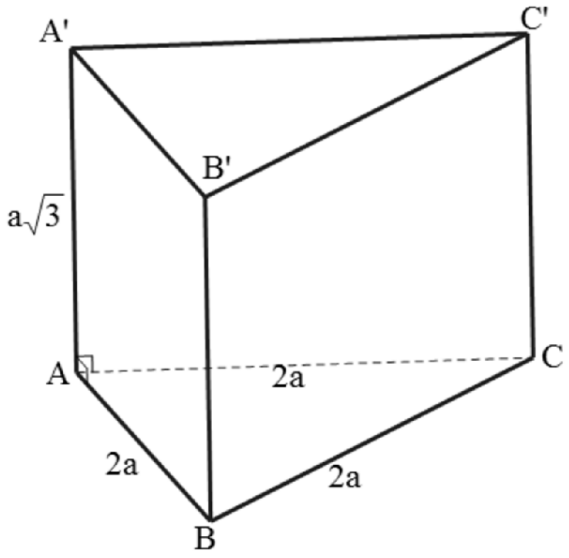
Diện tích đáy $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao $h=a$. Khi đó $V=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 37. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a, AA'=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn A



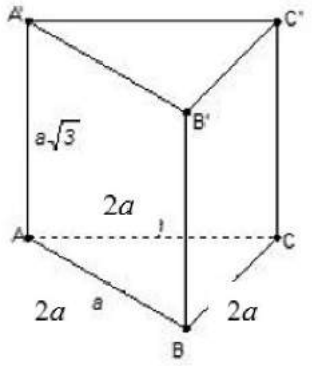
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{3}.\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=3a^3$.

Câu 38. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2a, AA'=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



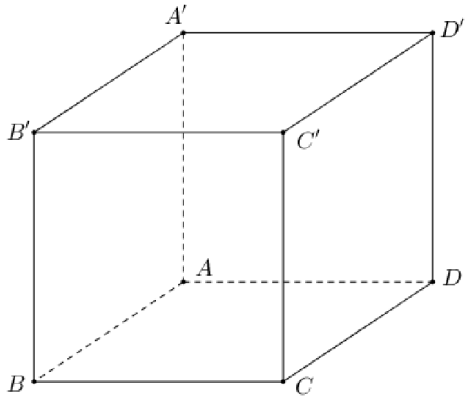
Lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên ΔABC là tam giác đều và $AA'\perp(ABC)$.

- $AA'\perp(ABC)\Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ là: $h=AA'=a\sqrt{3}$.
- ΔABC là tam giác đều có $AB=2a\Rightarrow\Delta ABC$ diện tích là:

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Thể tích khối lăng trụ là: $V_{S.ABC}=h.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3}=3a^3$.

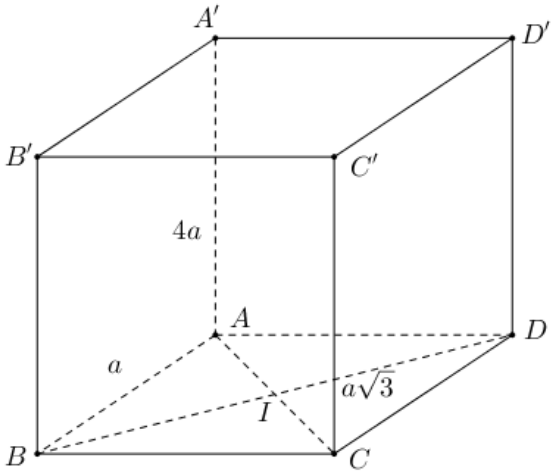
Câu 39. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD=a\sqrt{3}$ và $AA'=4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I=AC\cap BD$. Ta có: $AC\perp BD, BI=\dfrac{BD}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác vuông BAI vuông tại I:

$$AI^2=BA^2-BI^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=a^2-\frac{3a^2}{4}=\frac{a^2}{4}\Rightarrow AI=\frac{a}{2}\Rightarrow AC=a.$$

Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=2.\dfrac{1}{2}BI.AC=2.\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a=2\sqrt{3}a^3$.

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

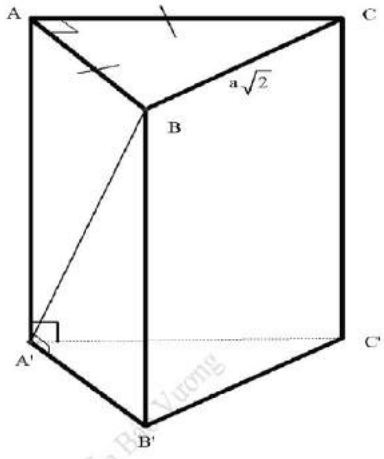
Dạng 1. Thể tích khối lăng trụ đứng

Câu 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}\Rightarrow AB=AC=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.a=\frac{1}{2}a^2$.

$A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60^0\Rightarrow \widehat{BA'B'}=60^0$.

$\Delta_v BA'B'$: $\tan\widehat{BA'B'}=\frac{BB'}{A'B'}=\sqrt{3}\Rightarrow BB'=\sqrt{3}A'B'=a\sqrt{3}$.

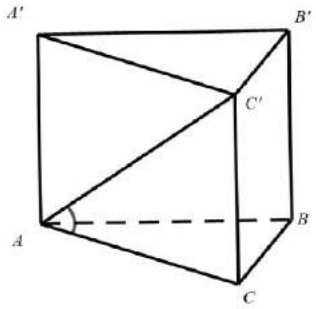
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'}=BB'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 2. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC=AB=2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=2a^2$.

Hình chiếu vuông góc của AC' lên (ABC) là AC.

$\Rightarrow$ Góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và AC hay $\widehat{C'AC}$

Theo bài ra có $\widehat{C'AC}=30°$.

Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có $CC'=AC.\tan 30°=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{ABC}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.2a^2=\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

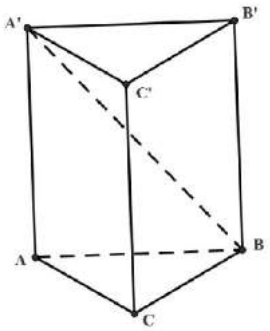
Câu 3. Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C



Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'BA}=60^0\Rightarrow A'A=AB.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

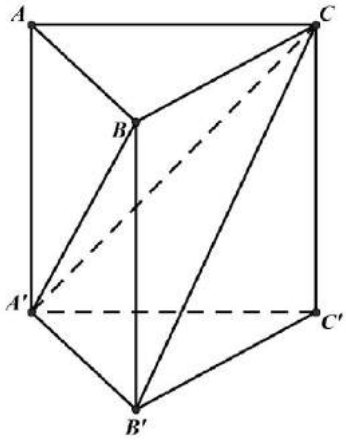
Có $S_{ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{2}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'A=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. **(SGD Nam Định)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB}=30°$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



* Ta có: $CC' // AA' \Rightarrow CC' // (AA'B'B)$

Mà $A'B \subset (AA'B'B)$, nên

$d(CC'; A'B) = d(CC'; (AA'B'B)) = C'A' = a\sqrt{3}$

* Ta có: $AC = A'C' = a\sqrt{3}; AB = A'B' = a;$

Diện tích đáy là $B = dt(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

* Dễ thấy $A'B' \perp (ACC'A')$

Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\widehat{B'CA'} = \alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{A'B'}{B'C} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow B'C = 2a\sqrt{5}$

$CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$

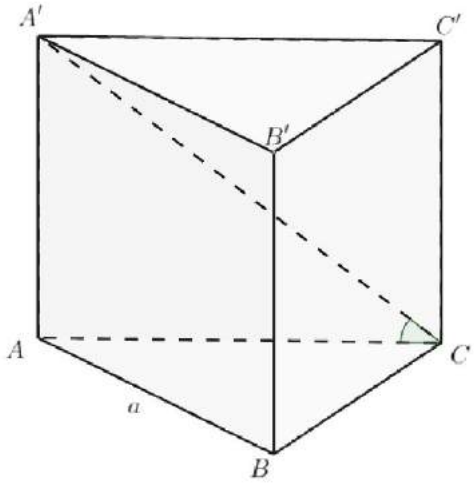
* Thể tích lăng trụ là $V = B.h$ với $h = CC'$ $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a = 2a^3\sqrt{3}.$

Câu 5. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Có: $\widehat{\left(A'C,\left(ABC\right)\right)}=\widehat{A'CA}=45°$.

Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{A'CA}=\dfrac{AA'}{AC}\Rightarrow AA'=a.$

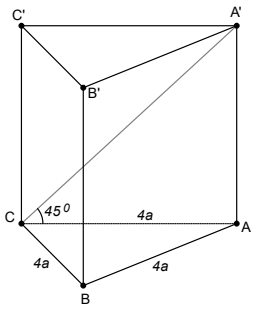
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V=AA'.S_{\Delta ABC}=a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}.$

Câu 6. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $16a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

Ta có:

$A'A\perp\left(ABC\right)\Rightarrow\left(\widehat{A'C,\left(ABC\right)}\right)=\widehat{A'CA}=45°\Rightarrow\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow A'A=AC=4a$.

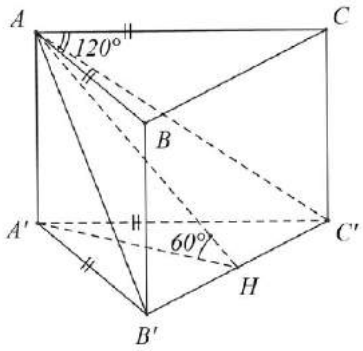
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{\left(AB\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\left(4a\right)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=4a.4a^2\sqrt{3}=16a^3\sqrt{3}$.

Câu 7. **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $(AB'C')$ và đáy là góc $\widehat{AHA'}=60°$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.AB.\sin 120°=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$B'C'=BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos 120°}=\sqrt{a^2+a^2-2.a.a.\dfrac{-1}{2}}=a\sqrt{3}\Rightarrow A'H=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{B'C'}=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow AA'=A'H.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

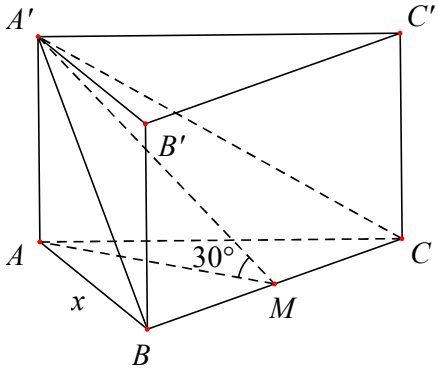
Vậy $V=S_{\Delta ACB}.AA'=\dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 8. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AB=x,(x>0)$, gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases}(A'BC)=(ABC)=BC\\AM\perp BC\\A'M\perp BC\end{cases}\Rightarrow\widehat{((A'BC),(ABC))}=\widehat{A'MA}=30°$.

Xét $\Delta A'AM$, có $A'M = \dfrac{AM}{\cos 30^\circ} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = x$.

$S_{A'BC} = 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}A'M.BC = 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

Suy ra $A'A = AM.\tan 30^\circ = \dfrac{4.\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$; $S_{ABC} = \dfrac{16.\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

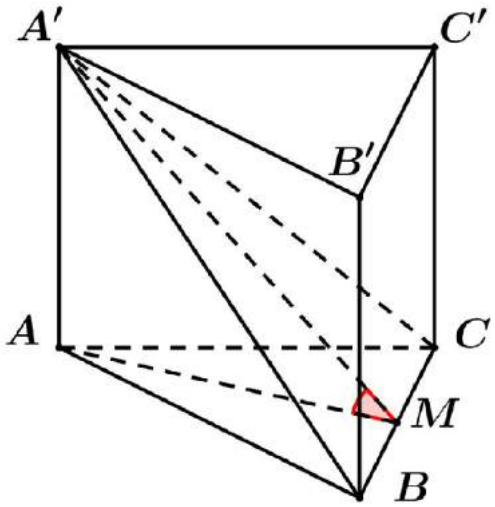
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 9. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn A



Vì đáy ABC là tam giác đều có diện tích bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ cạnh đáy bằng a.

Gọi M trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$

Từ đó ta có $\left((A'BC),(ABC)\right) = \widehat{(A'M,AM)} = \widehat{A'MA} = 60^0$.

Xét $\Delta A'AM$ ta có $AA' = AM.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

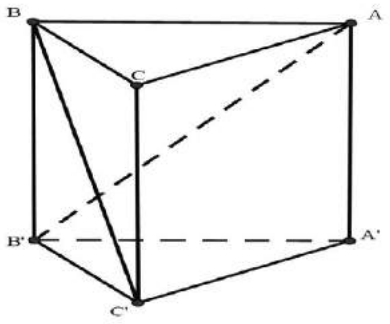
Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 10. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC'. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $V = a^3\sqrt{6}$. **D.** $V = \dfrac{7a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{y}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{z}=\overrightarrow{BB'}$, theo giả thiết $AB'\perp BC'$ nên

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=0\Leftrightarrow\left(\vec{z}-\vec{x}\right)\left(\vec{y}+\vec{z}\right)=0\Leftrightarrow\vec{z}.\vec{y}+\left|\vec{z}\right|^2-\vec{x}.\vec{y}-\vec{x}.\vec{z}=0\Leftrightarrow\left|\vec{z}\right|^2=\vec{x}.\vec{y}$$

$$\Leftrightarrow\left|\vec{z}\right|^2=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\cos 60^o=\frac{a^2}{2}\Rightarrow\left|\vec{z}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

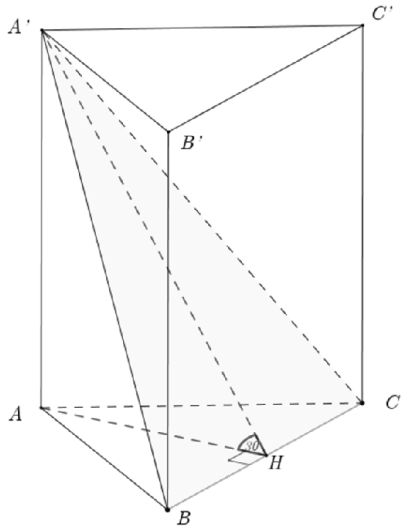
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 60^o.BB'=\frac{\sqrt{6}a^3}{8}$

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $\left(A'BC\right)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Suy ra $AH\perp BC$.

$A'H\perp BC$.

Mà $\left(ABC\right)\cap\left(A'BC\right)=BC$

$\Rightarrow$ Góc giữa $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng góc $\left(AH;A'H\right)=\widehat{AHA'}=30°$.

Ta có: ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A=AH.\tan 30°=\frac{a}{2}$.

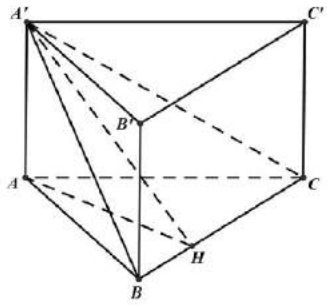
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'A.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 12. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



* Xác định góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy:

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH \perp BC$ với H nằm trên cạnh BC. Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $A'H \perp BC$. Vậy $\widehat{((A'BC);(ABC))} = \widehat{A'HA} = 30°$

* Xét tam giác ABC có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích B của tam giác ABC là: $B = \frac{AB.AC}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

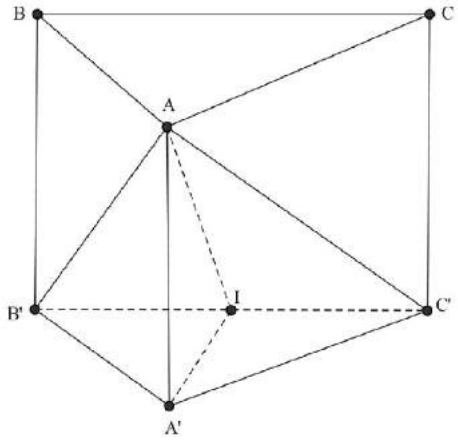
* Xét tam giác $A'HA$ vuông tại A, ta có: $A'A = AH.\tan 30° = \frac{a}{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 13. Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Ta có góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng góc giữa mp$(AB'C')$ và mp$(A'B'C')$

Ta có $B'C'=(AB'C')\cap(A'B'C')$

Vì ABC là tam giác vuông cân tại A nên hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai hình chữ nhật bằng nhau, do đó $AC'=AB'\Rightarrow \Delta AB'C'$ là tam giác cân tại A $\Rightarrow AI\perp B'C'$

Vì $\Delta A'B'C'$ là tam giác vuông cân tại A' nên $A'I\perp B'C'$. Như vậy góc giữa mp$(AB'C')$ và mp(ABC) bằng $\widehat{AIA'}=60^0$

Ta có $A'I=\dfrac{1}{2}BC=a\Rightarrow AA'=A'I.\tan 60^0=a\sqrt{3}$

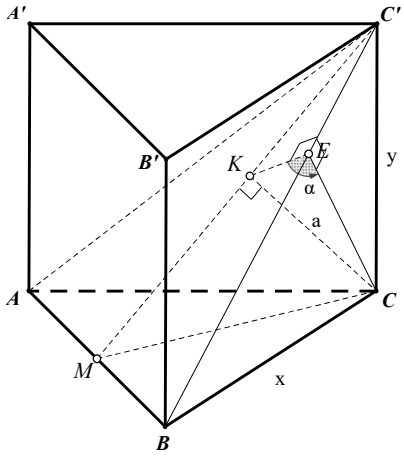
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^3\sqrt{3}$

Câu 14. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = d(C;(ABC')) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (1).

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}$ (2).

Giải (1),(2) ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$V = y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

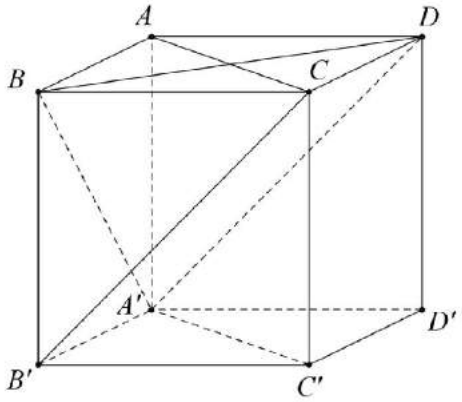
Câu 15. **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B = a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A



Dựng hình hộp $ABCD.ABCD$ khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Đặt $AB = x \Rightarrow AD = x$

Tam giác ABD có góc $\widehat{BAD} = 120°$ áp dụng định lý côsin ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD = x^2 + x^2 - 2x.x.\cos 120 = 3x^2$

Ta có: $A'B = a\sqrt{6} \Rightarrow A'D = a\sqrt{6}$

Ta có: $A'D // B'C \Rightarrow A'B \perp A'D \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông tại A'

$\Rightarrow BD^2 = A'B^2 + A'D^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = 2a$

Chiều cao hình trụ $AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2 \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$

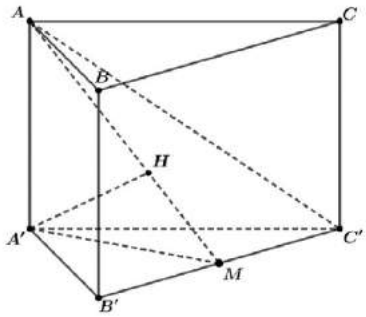
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 16. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3a^3}{2}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến AM.

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $\Rightarrow A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

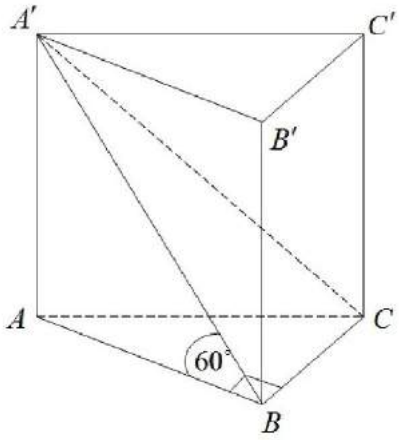
Ta có $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} \Rightarrow \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{A'H^2} - \frac{1}{A'M^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow A'A = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{A'B'C'} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)**Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

Góc giữa $(A'BC)$ và đáy là góc $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.

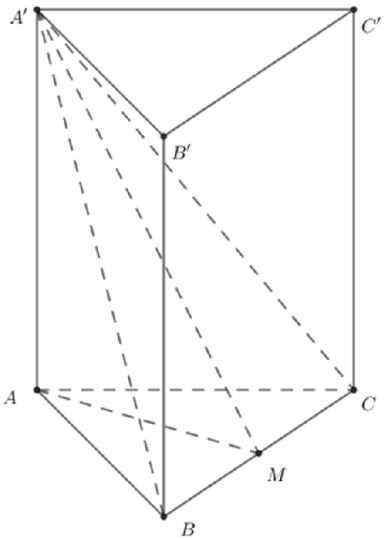
$A'A = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{a^2}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18. **(Liên Trường - Nghệ An 2018)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **B.** $V = \dfrac{3}{4}a^3$. **C.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. **D.** $V = \sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC suy ra $AM \perp BC$ (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ (2)

Mặt khác $(ABC)\cap(A'BC)=BC$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $\left(\widehat{(ABC);(A'BC)}\right)=\widehat{A'MA}=60°$.

Vì tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

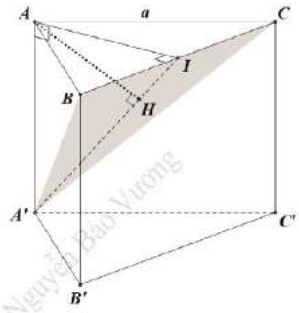
Ta có $AA'=AM.\tan 60°=\dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 19. **(THPT Triệu Thị Trinh - 2018)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$. Khi đó ta có:

$d\left(A,(A'BC)\right)=AH=\dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'I$ ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{a^2}-\frac{4}{3a^2}=\frac{8}{3a^2}$$

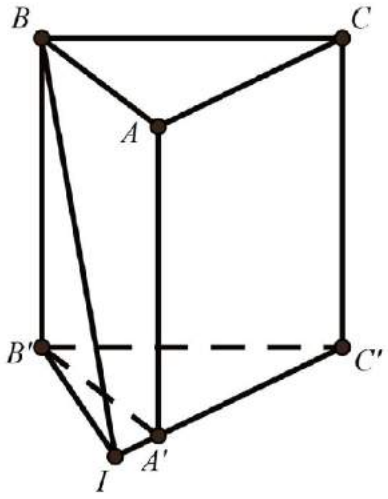
Suy ra: $AA'=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V=S_{\Delta ABC}.AA'=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 20. **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải



Hạ $B'I \perp A'C'$. Khi đó ta có $\left(\widehat{(A'BC'),(ABC)}\right) = \widehat{B'IB} = 60°$

Vì $\widehat{B'A'C'} = 120° \Rightarrow \widehat{B'A'I} = 60°$. Do đó $\sin 60° = \dfrac{B'I}{B'A} \Leftrightarrow B'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan \widehat{B'IB} = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow \tan 60° = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow BB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$

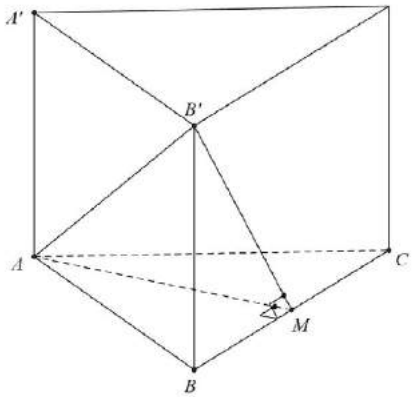
Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AI.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 21. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow \left(AB',(BCC'B')\right) = \widehat{AB'M} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\tan 30° = \dfrac{AM}{AB'} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{AM}{\tan 30°} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có $BB' = \sqrt{B'M^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 60°.BB'=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 22. **(THPT Xuân Hòa - 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

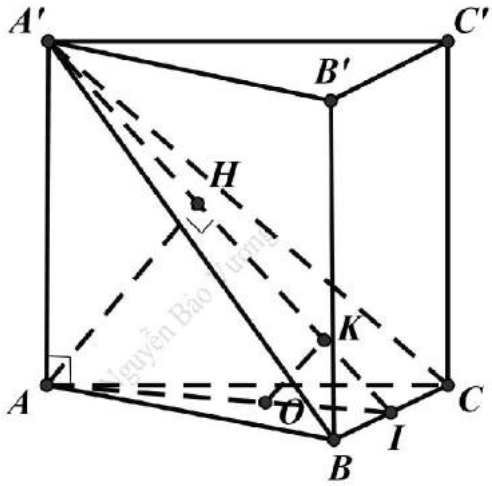
A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Diện tích đáy là $B=S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h=d\left((ABC);(A'B'C')\right)=AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có $AH\perp(A'BC)\Rightarrow d\left(A;(A'BC)\right)=AH$

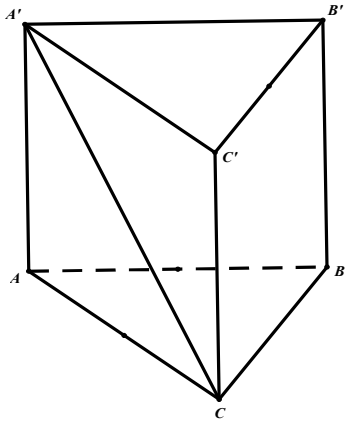


$$\frac{d\left(O;(A'BC)\right)}{d\left(A;(A'BC)\right)}=\frac{IO}{IA}=\frac{1}{3}\Rightarrow d\left(O;(A'BC)\right)=\frac{d\left(A;(A'BC)\right)}{3}=\frac{AH}{3}=\frac{a}{6}\Rightarrow AH=\frac{a}{2}$$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

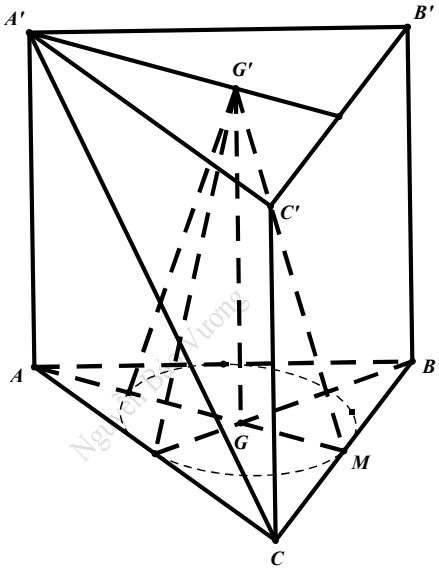
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AI^2}\Rightarrow\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AI^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

Câu 23. **(THPT Hoàng Mai - Nghệ An - 2018)** Cho một lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xp} của hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và đỉnh là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.



A. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{6}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{6}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{111}}{36}$.

Lời giải



Ta có $\left(\widehat{A'C;(ABC)}\right)=\widehat{A'CA}=60°$ suy ra $AA'=AC.\tan 60°=\sqrt{3}a$.

Có $r=GM=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ và $l=G'M=\sqrt{G'G^2+GM^2}=\sqrt{3a^2+\dfrac{3a^2}{36}}=\dfrac{\sqrt{111}a}{6}$.

Vậy $S_{xp}=\pi rl=\pi.\dfrac{\sqrt{3}}{6}a.\dfrac{\sqrt{111}}{6}a=\dfrac{\pi a^2\sqrt{333}}{36}$.

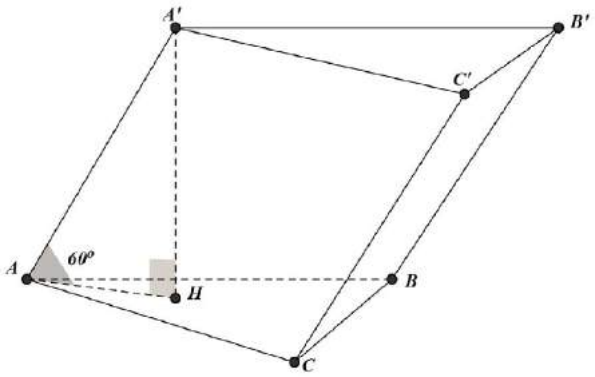
Dạng 2. Thể tích khối lăng trụ xiên

Câu 1. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3}{8}$

Lời giải

Chọn B



Kẻ $AH' \perp (ABC) \Rightarrow (A'A,(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°.$

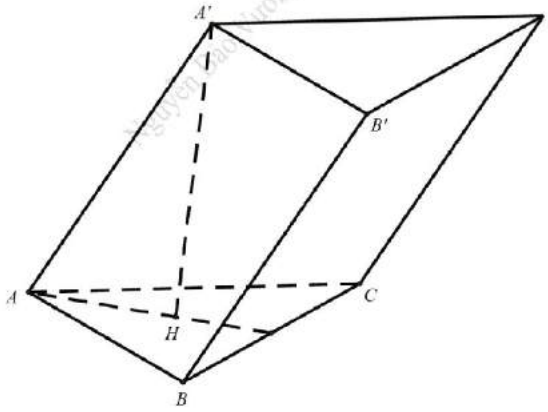
Xét $\Delta AHA' : \sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA'.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C' : V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}.$

Câu 2. **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $\dfrac{3a^3}{4}.$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}.$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}.$ **D.** $\dfrac{a^3}{4}.$

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Theo giả thiết ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$ nên $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ hay $A'H$ là đường cao của khối chóp $A'.ABC$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

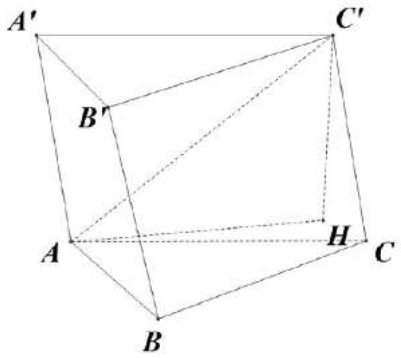
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 60° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}.$

Câu 3. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = 2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60^0 và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{8}{3}$ **B.** $V=\dfrac{16}{3}$ **C.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $8\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC), khi đó $C'H$ là đường cao

$\Rightarrow \widehat{AC',(ABC)}=\widehat{C'AH}=60^0$

Xét tam giác vuông $AC'H$ ta có $C'H=C'A.\sin 60^0=2\sqrt{3}$

Khi đó $V_{ABC.A'B'C}=S_d.C'H=\dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

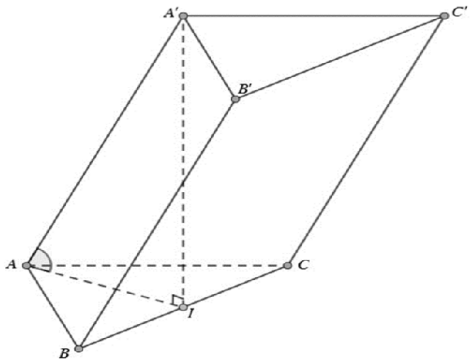
Câu 4. **(Gia Bình 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C



Ta có $A'I\perp(ABC)\Rightarrow AI$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC)

Nên $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right)=\left(\widehat{AA',AI}\right)=\widehat{A'AI}=30^0$

Ta có $AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A'I=AI\tan 30^0=\dfrac{a}{2}, S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

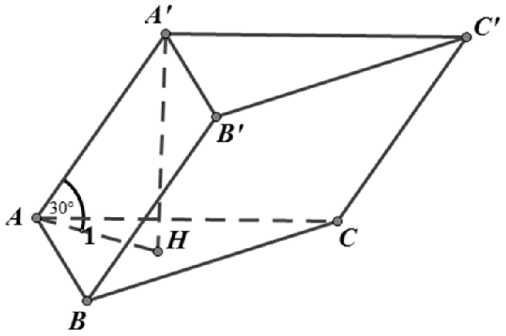
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 5. **(Nguyễn Khuyến 2019)** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{27}{4}$ **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt đáy. Suy ra góc $\widehat{A'AH} = 30°$

$\sin 30° = \frac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = A'A.\sin 30° = 2\sqrt{3}.\frac{1}{2} = \sqrt{3}$

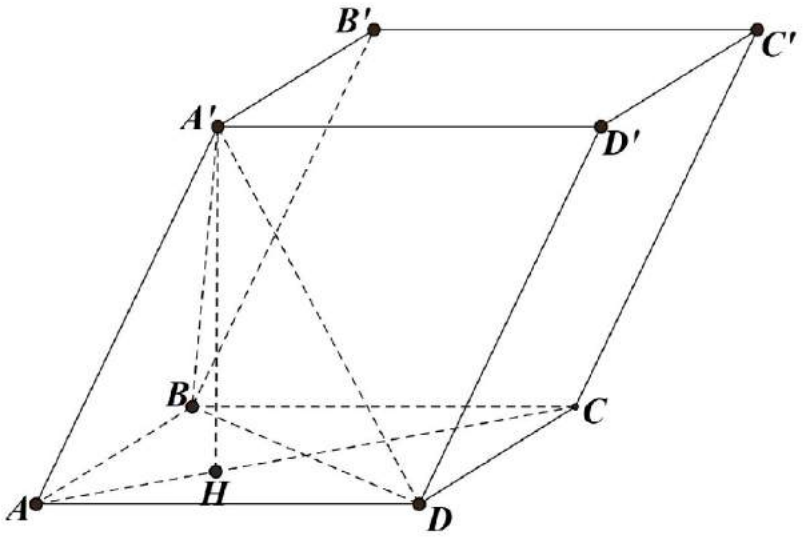
Khi đó: $V_{ABC.A'B'C} = 3^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3} = \frac{27}{4}$.

Câu 6. **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thuyết ta có các tam giác ΔABD, $\Delta A'AD$ và $A'AB$ là các tam giác đều.

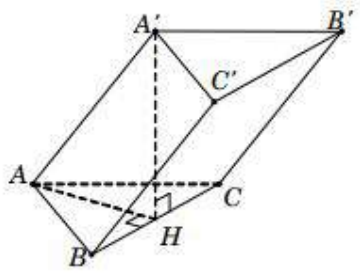
$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD.

$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = A'H.S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.2.\dfrac{4a^2.\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{2}a^3$.

Câu 7. **(SGD Gia Lai 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $V = \dfrac{\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V = 1$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = 3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H$

Ta có

$S_{ABC} = \dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$\begin{cases} AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \tan 45^0 = \dfrac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH = \sqrt{3} \end{cases}$

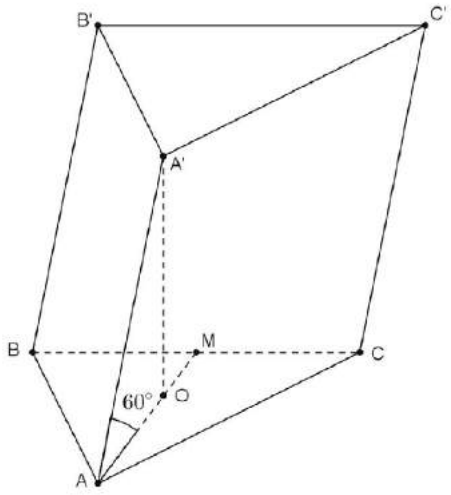
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60°, thể tích khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm cạnh BC. Khi đó $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $A'O\perp(ABC)$ tại điểm O nên AO là hình chiếu vuông góc của AA' xuống (ABC). Suy ra góc giữa đường thẳng AA' và (ABC) là góc $\widehat{A'AO}$, suy ra $\widehat{A'AO}=60^{\circ}$.

Xét $\Delta A'AO$ vuông tại O ta có $A'O=AO.\tan 60=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}=a$.

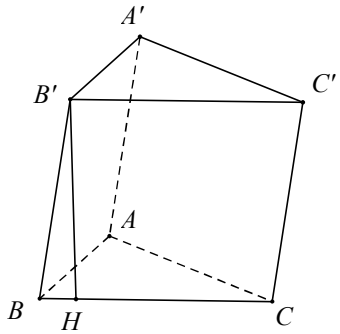
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=A'O\cdot S_{\Delta ABC}=a\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC}=30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Chọn D

Ta có $(BCC'B')\perp(ABC)$ (gt).

Hạ $B'H\perp BC\Rightarrow B'H\perp(ABC)$ và $\widehat{B'BH}=\widehat{B'BC}=30°$

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $h = B'H = BB'.\sin 30° = 2a$.

Diện tích đáy là $S_{đáy} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích của khối lăng trụ là: $V_{LT} = S_{đáy}.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

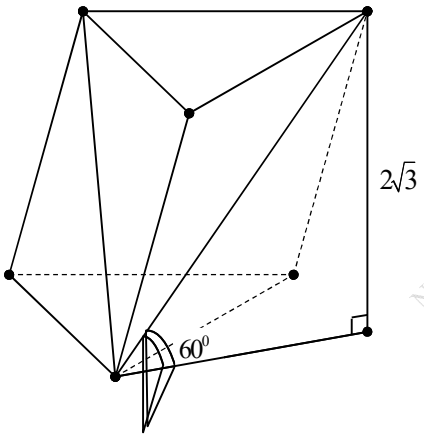
Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là: $V = \dfrac{1}{3}V_{LT} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 10. **(Đề thử nghiệm 2017)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \dfrac{8}{3}$ **B.** $V = \dfrac{16}{3}$ **C.** $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Nguyễn Bảo Vương

Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH} = 60°$.

Ta có: $\sin 60° = \dfrac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = 4$; $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\sqrt{3}$.

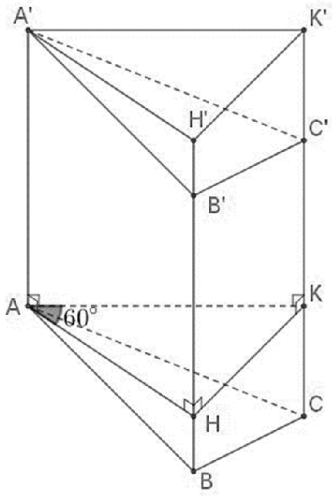
$V_{A.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}C'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; $V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}a^3$. **B.** $8\sqrt{3}a^3$. **C.** $24\sqrt{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC'.

Ta có $HA \perp BB'$, $KA \perp CC' \Rightarrow A'A \perp (AHK)$ do đó $\angle AHK = 60°$.

Khi đó $HK^2 = AK^2 + AH^2 - 2AK.AH.\cos 60° = 12a^2 \Rightarrow AK^2 = HK^2 + AH^2$. Suy ra tam giác AHK vuông tại H.

Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC'. Ta có $V_{A.BCKH} = V_{A.B'C'K'H'}$

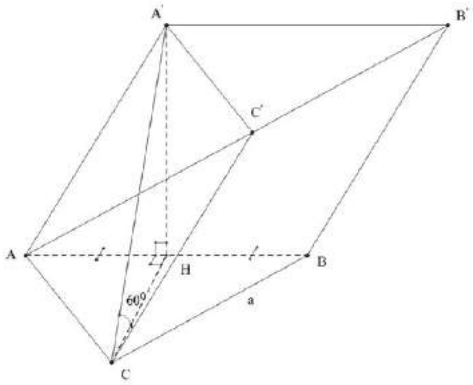
Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = V_{AHK.A'H'K'} = AA'.S_{AHK} = 16\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \widehat{(A'C,(ABC))} = \widehat{(A'C,HC)} = \widehat{A'CH} = 60^0$.

$CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông $A'HC$, ta có: $A'H = CH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

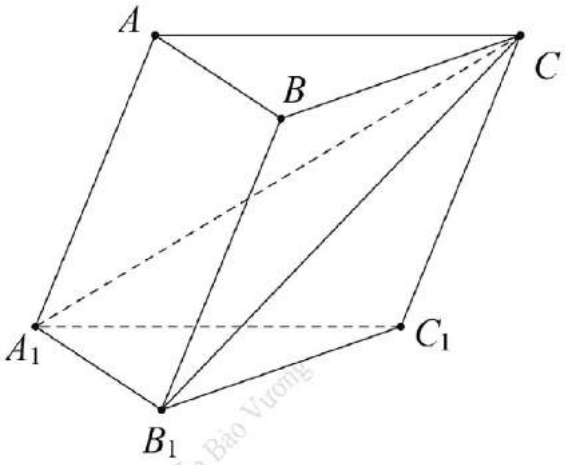
Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 13. **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_{C.ABB_1A_1} = \frac{1}{3}d\left(C,(ABB_1A_1)\right).S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{3}.4.6 = 8$ (đvtt)

$V_{C.ABB_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{C.C_1B_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

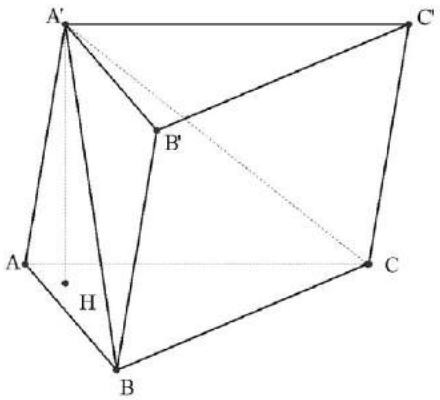
$\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3}{2}.V_{C.ABB_1A_1} = \frac{3}{2}.8 = 12$ (đvtt)

Câu 14. **(chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABC) suy ra $A'H$ là chiều cao của lăng trụ.

Xét khối chóp $A.A'BC$ có diện tích đáy $B = S_{A'BC} = 1$, chiều cao $h = d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = 2$ suy ra thể

tích của khối chóp $A.A'BC$ là $V_{A.A'BC} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.1.2 = \frac{2}{3}$.

Mặt khác $\begin{cases} V_{A.A'BC} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.A'H = \frac{2}{3} \\ V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H \end{cases} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3.\frac{2}{3} = 2$.

*** Cách khác.**

Ta thấy lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối chóp có thể thích bằng nhau là $A'.ABC,\ A'.BCB',\ A'.B'C'C$.

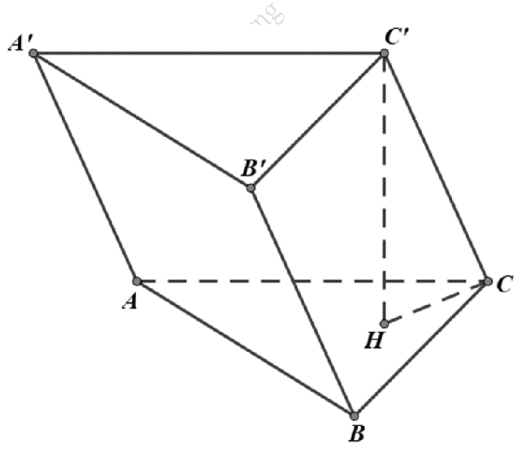
Mà $V_{A'.ABC} = V_{A.A'BC} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.1.2 = \frac{2}{3}$ suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3.\frac{2}{3} = 2$.

Câu 15. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa – 2019)** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' xuống $mp(ABC)$, khi đó góc hợp bởi CC' và

$mp(ABC)$ là $\widehat{C'CH}$. Theo đề bài: $\widehat{C'CH} = 60° \Rightarrow C'H = C'C.\sin 60° = 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

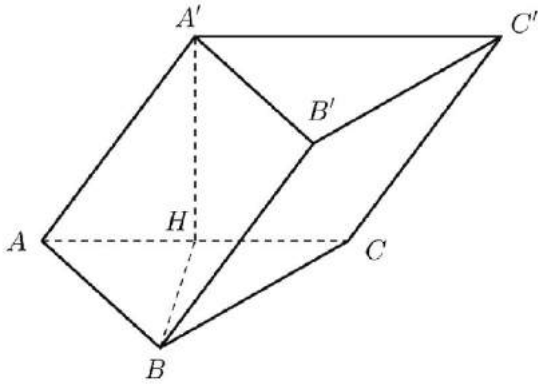
Lại có ΔABC đều cạnh bằng 3 nên $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.C'H = \frac{9\sqrt{3}}{4}.3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$. Chọn **C.**

Câu 16. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đường cao BH. Biết $A'H \perp (ABC)$ và $AB = 1, AC = 2, AA' = \sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại B có $AB=1; AC=2$ nên $BC=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

Độ dài của đường cao BH : $BH=\dfrac{AB.BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó độ dài đường cao $A'H$ của hình lăng trụ bằng : $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng : $V=\dfrac{1}{2}AB.BC.A'H=\dfrac{1}{2}.1.\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{7}}{2}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$.

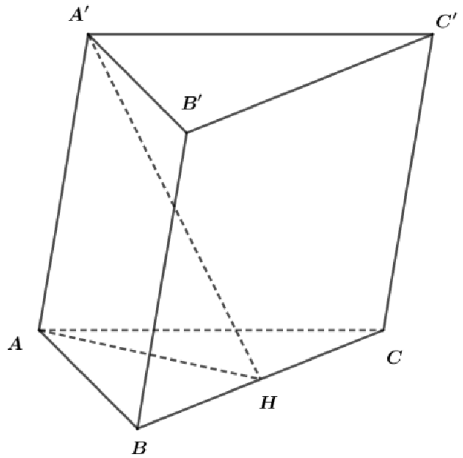
Câu 17. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BC suy ra $A'H\perp(ABC)$

Ta có $(A'A,(ABC))=(A'A,AH)=\widehat{A'AH}=30^0$

Ta có $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $A'H=AH.\tan 30^0=\dfrac{a}{2}$ và $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

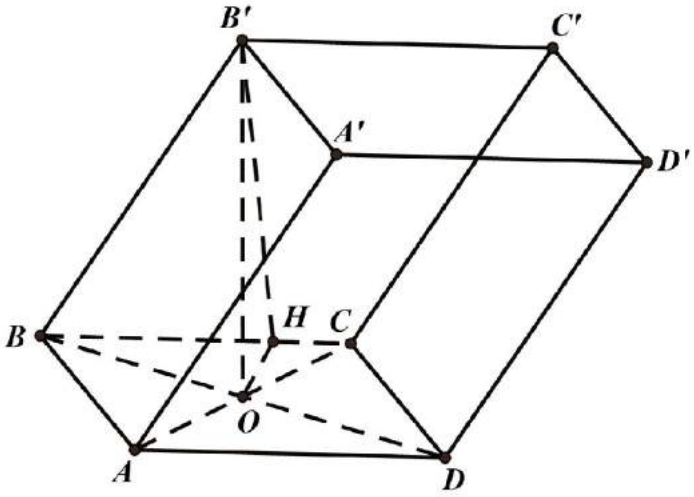
Vậy $V=A'H.S_{ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

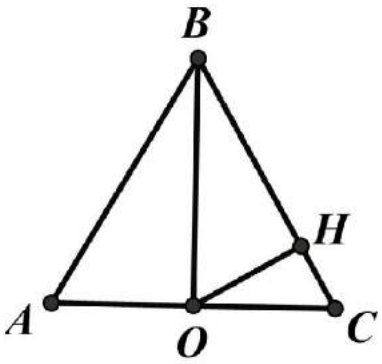
Câu 18. **(THPT Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn D





$ABCD$ là hình thoi nên $AB=BC$. Lại có $\widehat{ABC}=60°$ nên ΔABC là tam giác đều. $OH\perp BC$.

Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO}=60°$.

Ta có $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{16}{3a^2}.\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$B'O=OH.\tan\widehat{B'HO}=\frac{a\sqrt{3}}{4}\tan 60°=\frac{3a}{4}.$

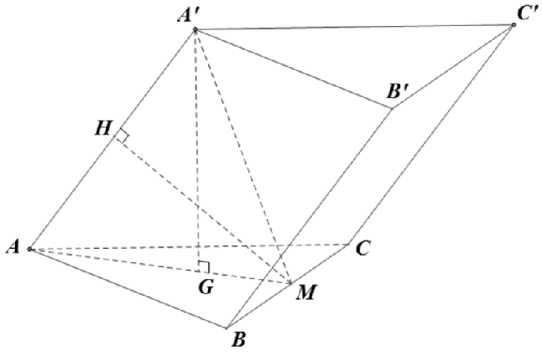
$V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{day}.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{4}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 19. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp AA'$

Kẻ $MH \perp AA'$ tại H, suy ra MH là đoạn vuông góc chung của giữa hai đường thẳng AA' và BC

Tam giác MHA vuông tại H có $AH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \frac{3}{4}a$

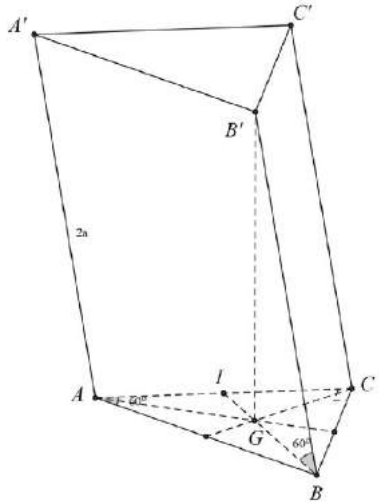
Tam giác $A'GA$ đồng dạng tam giác MHA nên $\frac{A'G}{MH} = \frac{GA}{HA} \Rightarrow A'G = \frac{MH.GA}{HA} = \frac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 20. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{9a^3}{208}$. **B.** $\frac{3a^3}{26}$. **C.** $\frac{9a^3}{26}$. **D.** $\frac{27a^3}{208}$.

Lời giải



Ta có

$B'G = BB'\sin 60° = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$BG = BB'\cos 60° = 2a.\frac{1}{2} = a \Rightarrow BI = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{2}$.

Đặt $AC = 2x\ (x > 0) \Rightarrow CI = x; BC = AC.\tan 60° = 2x\sqrt{3}$.

Khi đó

$x^2+\left(2x\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2\Leftrightarrow x=\frac{3a\sqrt{13}}{26}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.2.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.2.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.\sqrt{3}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.$

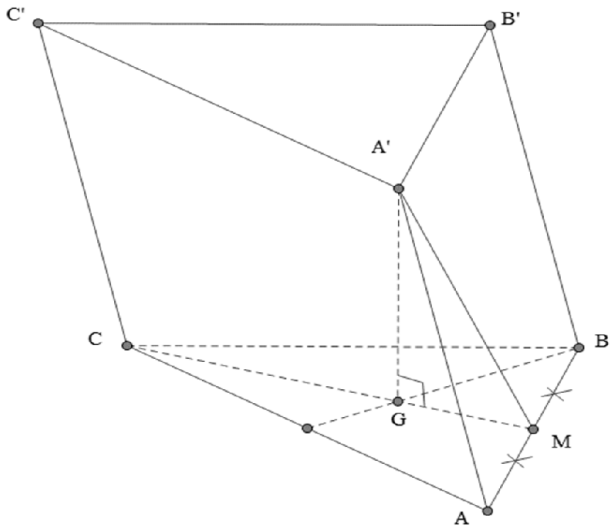
Vậy $V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.a\sqrt{3}=\frac{9a^3}{26}$

Câu 21. **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC. Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{6a^3\sqrt{2}}{7}$ **B.** $\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{5}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Lời giải

Chọn B



+ Ta có $\begin{cases}AB\perp CM\\AB\perp A'M\end{cases}\Rightarrow AB\perp(A'CM)\Rightarrow AB\perp A'M$

Nên $S_{\Delta A'AB}=\frac{1}{2}A'M.AB=\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow A'M=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Do ΔABC đều cạnh bằng a nên $GM=\frac{1}{3}CM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

+ Trong $\Delta A'GM$ vuông tại G ta có $A'G=\sqrt{A'M^2-GM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

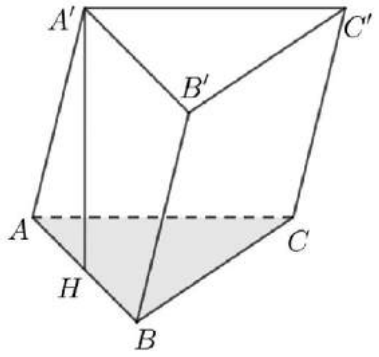
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'G.\text{dt}(\Delta ABC)=\frac{a\sqrt{21}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$

Câu 22. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA'=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=2a^2\sqrt{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại B cạnh $AC=2a$ nên suy ra $AB=a\sqrt{2}$, có diện tích đáy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^2$.

H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) nên $A'H$ là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích là $V=A'H.S_{\Delta ABC}$.

H là trung điểm của cạnh $AB \Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{2a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $V=A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

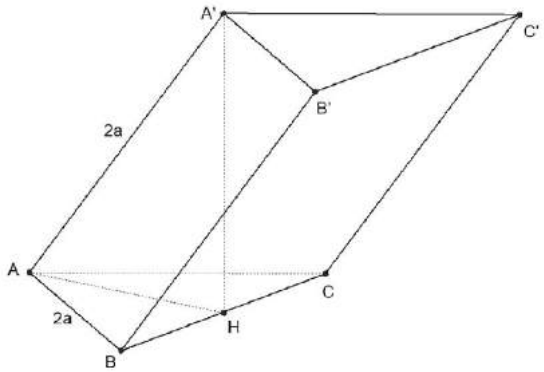
Câu 23. **(THPT Trần Phú 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $2a^3\sqrt{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC), suy ra H là trung điểm của BC.

Tam giác ABC đều cạnh $2a$, suy ra $AH=a\sqrt{3}$.

Đường cao hình lăng trụ: $h=A'H=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$

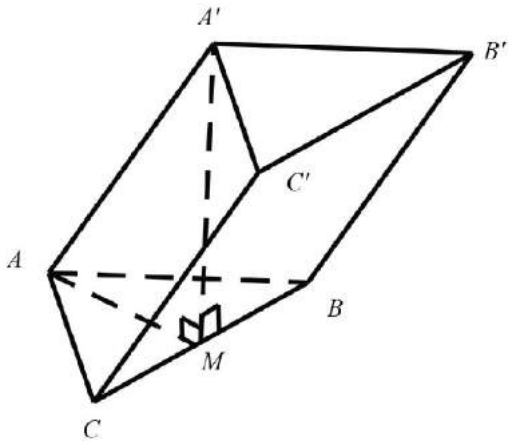
Vậy thể tích lăng trụ: $V=S_{\Delta ABC}.h=\frac{1}{2}AH.BC.A'H=\frac{1}{2}a\sqrt{3}.2a.a=a^3\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V=a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V=a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC.

Theo bài ra ABC là tam giác đều cạnh a nên: $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh BC nên có: $A'M\perp(ABC)$; $A'M\perp BC$.

Xét tam giác $A'MA$ vuông tại M: $A'M=\sqrt{AA'^2-AM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

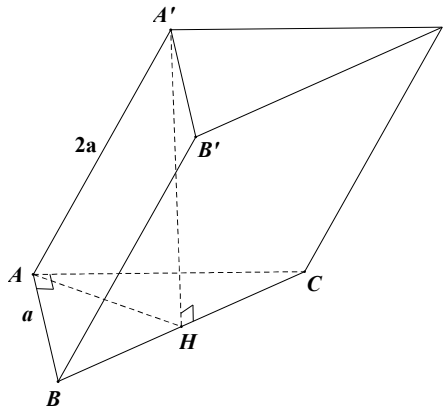
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'}=A'M.S_{ABC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

Câu 25. **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a$, $AA'=2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = a\sqrt{2}; AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$

Trong tam giác $AA'H$ vuông tại H ta có: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{14}}{2}$.

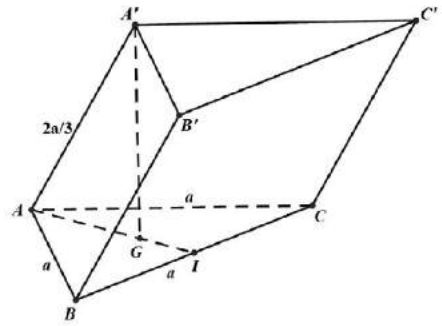
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a\frac{\sqrt{14}}{2}.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{14}}{4}$.

Câu 26. **(SGD Hưng Yên)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $\frac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:

$AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $A'G^2 = A'A^2 - AG^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow A'G = \frac{a}{3}$.

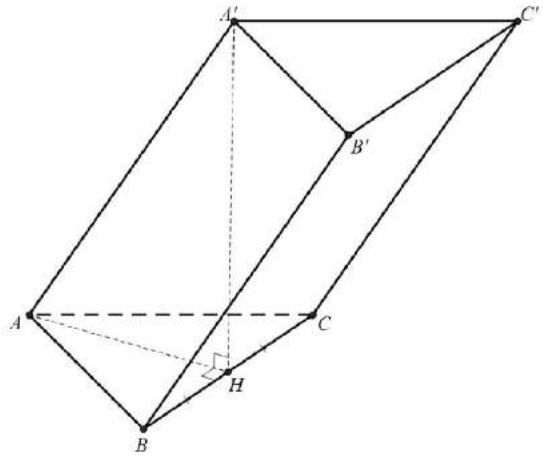
$V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 27. **(SGD Bắc Ninh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3.\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm BC, vì tam giác ABC đều nên ta có $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$.

Theo đề: $A'H\perp(ABC)\Rightarrow A'H\perp AH$. Trong tam giác vuông $A'AH$ có

$$A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

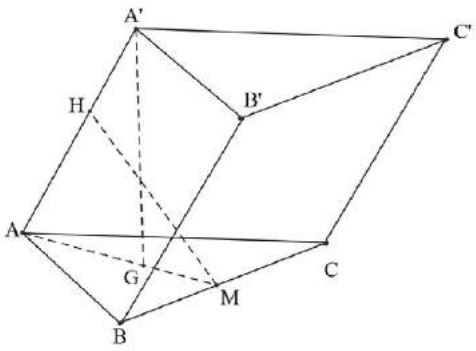
Suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=B.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$.

Câu 28. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC, $MH \perp AA'$ tại H.

Ta có $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp HM$. Do đó $HM = d(AA', BC)$.

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\widehat{HAM} = \dfrac{HM}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAM} = 30^0$.

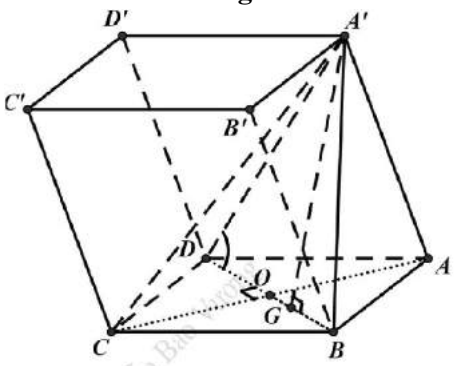
$A'G = AG.\tan 30^0 = \dfrac{a}{3}$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AM.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}A'G.S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 29. **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là :

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\left(\widehat{A'D,(ABCD)}\right) = \widehat{A'DG} = 45°$.

Ta giác ABC đều cạnh a nên $BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $DB = a\sqrt{3}$, $DG = 2BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

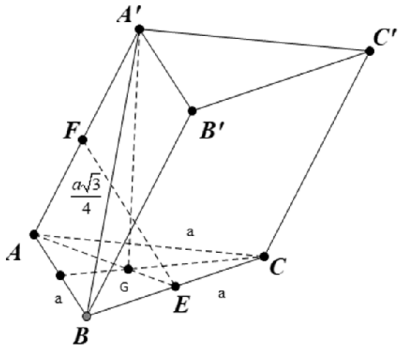
Tam giác $A'DG$ vuông cân tại G nên $A'G = DG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AG = \dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3$.

Câu 30. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì $A'G \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều. Kẻ $EF \perp AA'$ và $BC \perp (AA'E)$ nên $d(AA', BC) = EF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Đặt $A'G = h$

Ta có $A'A = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Tam giác $A'AG$ đồng dạng với tam giác EAF nên

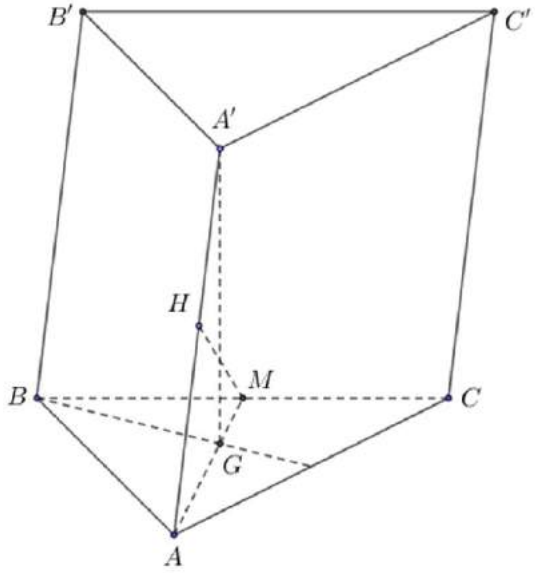
$$\frac{A'A}{EA} = \frac{AG}{FA} = \frac{A'G}{FE} \Rightarrow A'G.EA = A'A.FE \Leftrightarrow h.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}.\frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a}{3}.$$

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AG.S_{ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 31. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MH \perp AA'$ $(H \in BC)$.

Ta có $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AG) \Rightarrow BC \perp MH \Rightarrow d(AA', BC) = MH$.

$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$.

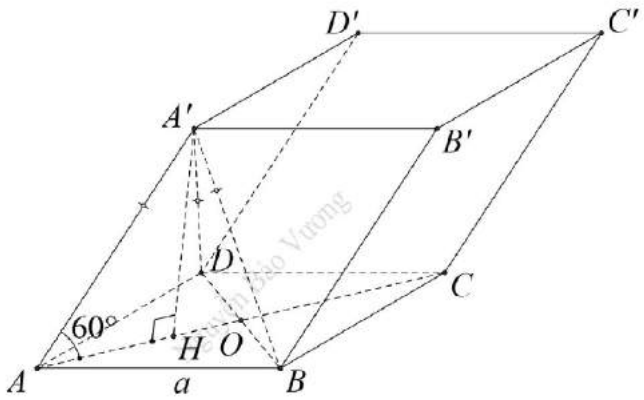
Ta có $\frac{MH}{AH} = \frac{A'G}{AG} = \tan\widehat{GAH} \Rightarrow A'G = \frac{MH.AG}{AH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}} = \frac{a}{3}$.

Vậy $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. **(THPT Hà Huy Tập - Hà Tĩnh - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có tam giác ABD cân tại A và $\widehat{BAD} = 60°$ nên ABD là tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Vì A' cách đều A, B, D nên $A'H$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Do đó $A'H \perp (ABD)$.

Suy ra góc giữa $A'A$ và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'AH} = 60°$.

Ta có $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $A'H = AH.\tan 60° = \frac{3a}{2}$.

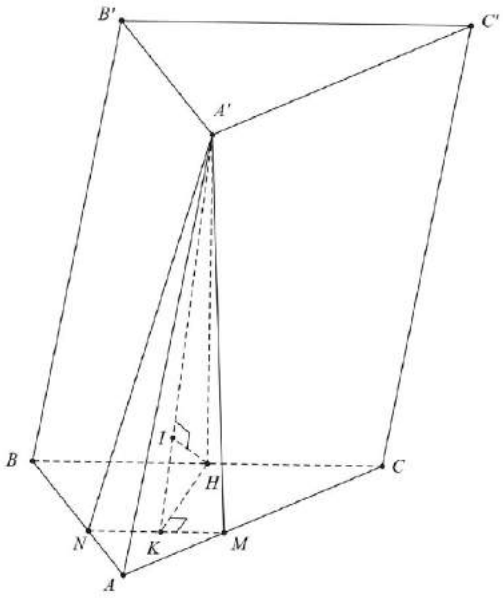
Ngoài ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

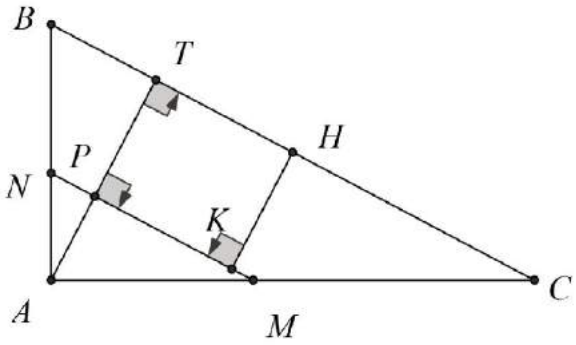
Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S_{ABCD}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 33. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải





Kẻ $MN // BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$d\left(A'M;BC\right)=d\left(BC;\left(A'MN\right)\right)=d\left(H;\left(A'MN\right)\right)=HI \Rightarrow HI=\dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AT // HK$, $AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \dfrac{2}{3}AT$

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AT^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow HK=\dfrac{2}{3}AT=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $A'HK$ vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2}=\dfrac{1}{HI^2}-\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{3}{a^2}=\dfrac{1}{a^2} \Rightarrow A'H=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V=A'H.S_{ABC}=a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

---------- **HẾT** ----------

Chuyên đề 12 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÓ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP - LĂNG TRỤ

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Mã 101 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 2. **(Mã 103 -2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2

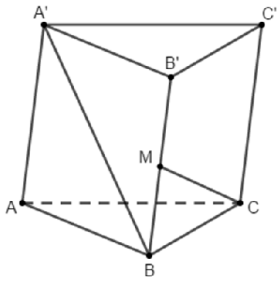
Câu 3. **(Mã 102 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1;2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'}=90°$, $\widehat{BAA'}=120°$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (*tham khảo hình vẽ*). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



A. $V=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{8}$. **B.** $V=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$. **D.** $V=\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB=2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M,N lần

lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 7. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{9}$. **D.** $\frac{4\sqrt{21}}{27}$.

Câu 8. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^0$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$. **C.** $\frac{6\sqrt{7}a^3}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{21}$.

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30^0 và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $64\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $BC=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 11. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 12. **(Sở Ninh Bình)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$, $A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha=\frac{3}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V=12$. **B.** $V=6$. **C.** $V=8$. **D.** $V=10$.

Câu 13. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 15. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC cân tại A. Cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng 30^0 và 45^0, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{6}$. **D.** $V_{S.ABC}=a^3$.

Câu 16. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=BD=AC=AD=1, (ACD)\perp(BCD)$ và $(ABD)\perp(ABC)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{27}$.

Câu 17. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $12a^3$.

Câu 18. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $\frac{1}{48}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Câu 19. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\frac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{12}$ **B.** $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$ **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ **D.** $V=\frac{7\sqrt{3}a^3}{12}$

Câu 20. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA=BC=3$; $SB=AC=4$; $SC=AB=2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{390}}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{390}}{4}$ **C.** $\frac{\sqrt{390}}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{390}}{8}$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{CSB}=60^\circ$, $\widehat{ASC}=90^\circ$, $SA=SB=a$, $SC=3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$, biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{8a^3\sqrt{39}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{13}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 23. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\frac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{7\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD=BC=3$, $AC=BD=4$, $AB=CD=2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2740}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2474}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2047}}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90°$; $AB=a$; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC}=135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Câu 26. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 27. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Góc giữa AA' với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60^0, Tính thể tích khối hộp đã cho.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$

Câu 28. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}, AD=\sqrt{3}, A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C),(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha=\frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V=8$. **B.** $V=12$. **C.** $V=10$. **D.** $V=6$.

Câu 29. **(Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC=a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 12 MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÓ THỂ TÍCH KHỐI CHÓP - LĂNG TRỤ

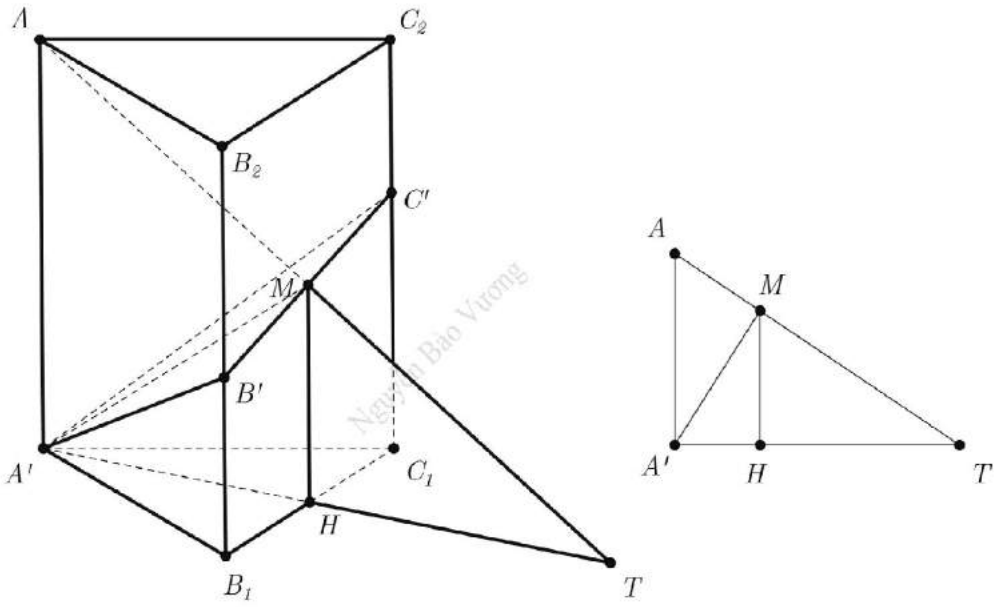
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Mã 101 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng qua A' và vuông góc với AA' ta được thiết diện là tam giác $A'B_1C_1$ có các cạnh $A'B_1=1$; $A'C_1=\sqrt{3}$; $B_1C_1=2$.

Suy ra tam giác $A'B_1C_1$ vuông tại A' và trung tuyến $A'H$ của tam giác đó bằng 1.

Gọi giao điểm của AM và $A'H$ là T.

Ta có: $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H=1\Rightarrow MH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{MA'H}=30°$.

Do đó $\widehat{MA'A}=60°\Rightarrow AA'=\dfrac{A'M}{\cos\widehat{MA'A}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng thể tích khối lăng trụ $A'B_1C_1.AB_2C_2$ và bằng

$V=AA'.S_{A'B_1C_1}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2$.

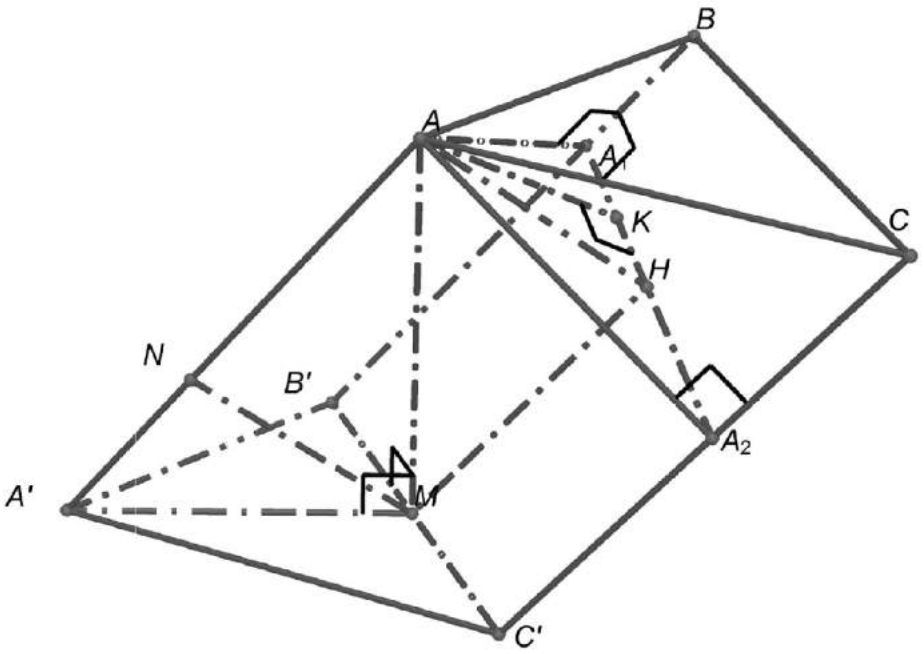
Câu 2. **(Mã 103 -2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình

chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn D



Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên BB', CC'. Theo đề ra $AA_1=1; AA_2=\sqrt{3}; A_1A_2=2$.

Do $AA_1^2+AA_2^2=A_1A_2^2$ nên tam giác AA_1A_2 vuông tại A.

Gọi H là trung điểm A_1A_2 thì $AH=\frac{A_1A_2}{2}=1$.

Lại có $MH \parallel BB' \Rightarrow MH \perp (AA_1A_2) \Rightarrow MH \perp AH$ suy ra $MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{3}$.

nên $\cos((ABC),(AA_1A_2))=\cos(MH,AM)=\cos HMA=\frac{MH}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{ABC}=\frac{S_{AA_1A_2}}{\cos((ABC),(AA_1A_2))}=1$. Thể tích lăng trụ là $V=AM\cdot S_{ABC}=2$.

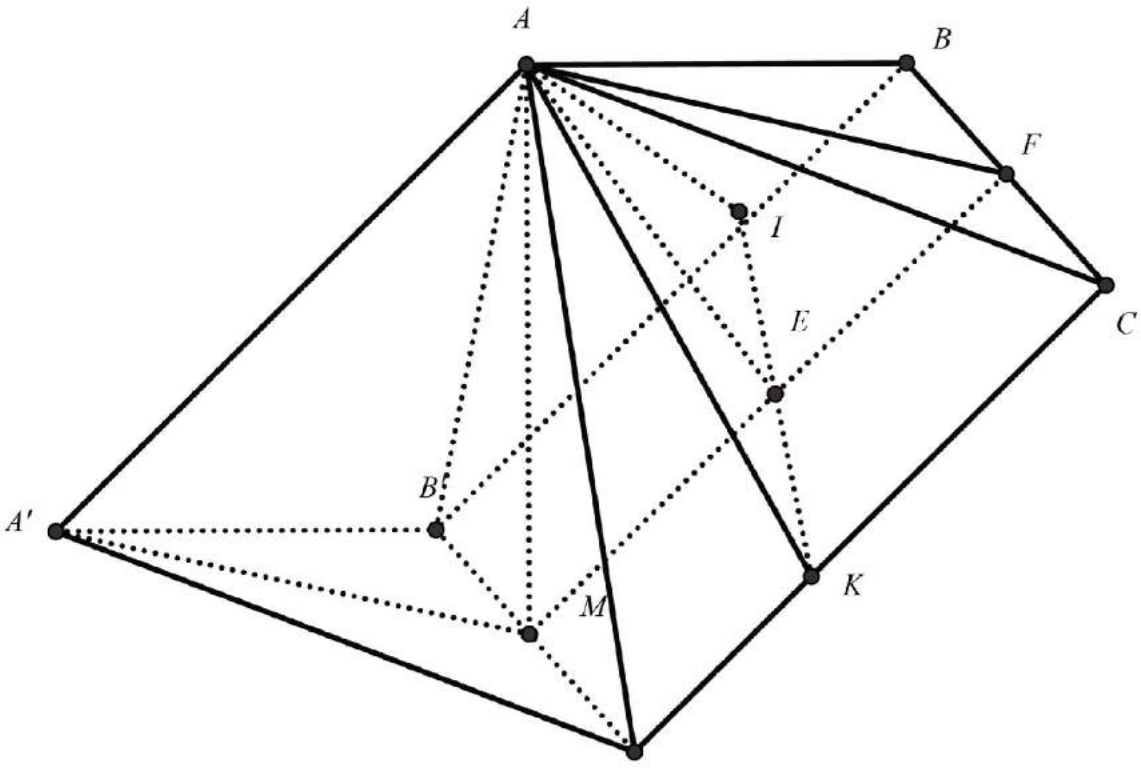
Nhận xét. Ý tưởng câu này là dùng diện tích hình chiếu $S'=S\cos\alpha$.

Câu 3. **(Mã 102 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M=\frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; $2 \Rightarrow AI = 1,\ AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC. $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left.\begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF \parallel BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM bằng góc $\widehat{AME} = \widehat{FAE}$. Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30°$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có: $S_{AIK} = S_{ABC}\cos\widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}$.

Xét ΔAMF vuông tại A: $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

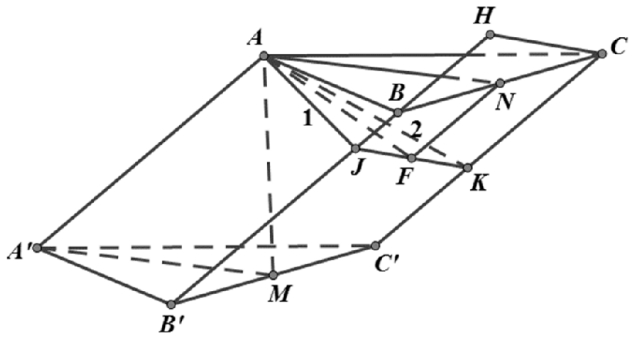
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC', H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'

Ta có $AJ\perp BB'$ (1).

$AK\perp CC'\Rightarrow AK\perp BB'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BB'\perp(AJK)\Rightarrow BB'\perp JK\Rightarrow JK//CH\Rightarrow JK=CH=\sqrt{5}$.

Xét ΔAJK có $JK^2=AJ^2+AK^2=5$ suy ra ΔAJK vuông tại A.

Gọi F là trung điểm JK khi đó ta có $AF=JF=FK=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC, xét tam giác vuông ANF ta có:

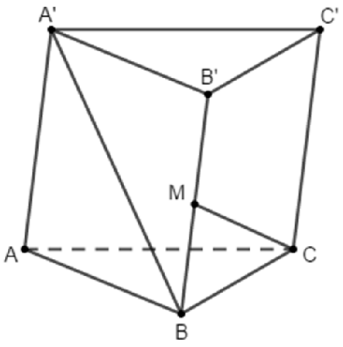
$\cos\widehat{NAF}=\frac{AF}{AN}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{NAF}=60^\circ$. ($AN=AM=\sqrt{5}$ vì $AN//AM$ và $AN=AM$).

Vậy ta có $S_{\Delta AJK}=\frac{1}{2}AJ.AK=\frac{1}{2}.1.2=1\Rightarrow S_{\Delta AJK}=S_{\Delta ABC}.\cos 60^\circ\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{S_{\Delta AJK}}{\cos 60^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Xét tam giác AMA' vuông tại M ta có $\widehat{MAA'}=\widehat{AMF}=30^\circ$ hay $AM=A'M.\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=AM.S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{15}}{3}.2=\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

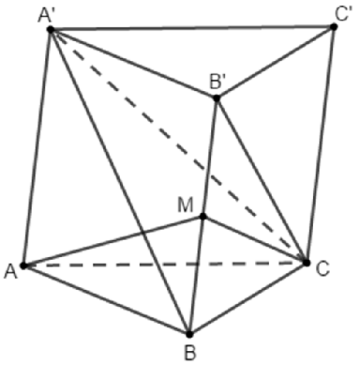
Câu 5. **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$. Góc $\widehat{CAA'}=90°$, $\widehat{BAA'}=120°$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (*tham khảo hình vẽ*). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



A. $V=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{8}$. **B.** $V=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$. **D.** $V=\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Do $AC\perp AB$, $AC\perp AA'$ nên $AC\perp\left(ABB'A'\right)$. Mà $A'B\subset\left(ABB'A'\right)$ nên $AC\perp A'B$.

Có $A'B\perp AC$, $A'B\perp CM$ nên $A'B\perp\left(AMC\right)\Rightarrow A'B\perp AM$.

Đặt $AA'=x\left(x>0\right)$. Ta có $\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Suy ra $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\right)=AB^2-\dfrac{1}{2}AA'^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}$

$=AB^2-\dfrac{1}{2}AA'^2-\dfrac{1}{2}AB.AA'.\cos\widehat{BAA'}=2^2-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}.2.x.\cos120^\circ=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+4$

Do $A'B\perp AM$ nên $\overrightarrow{A'B}.\overrightarrow{AM}=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+4=0\Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$.

Lại có $S_{ABB'A'}=AB.AA'.\sin\widehat{BAA'}=2.\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}.\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{33}\right)}{2}$ (đvdt).

Do $AC\perp\left(ABB'A'\right)$ nên $V_{C.ABB'A'}=\dfrac{1}{3}.AC.S_{ABB'A'}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{33}\right)}{2}=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$ (đvtt).

Mà $V_{C.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow V_{C.ABB'A'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{C.A'B'C'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

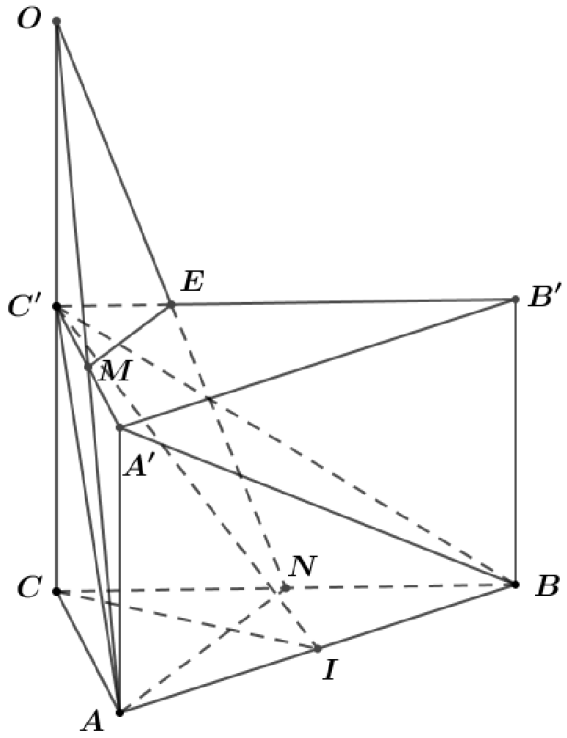
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3}{2}V_{C.ABB'A'}=\dfrac{3}{2}.\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}=\dfrac{3\left(1+\sqrt{33}\right)}{4}$ (đvtt).

Câu 6. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB=2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB\perp(CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI,C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC}=60°$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên $C'C=CI\cdot\tan\widehat{C'IC}=\dfrac{AB}{2}\cdot\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot CI=a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V=CC'\cdot S_{ABC}=a\sqrt{3}\cdot a^2=a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O.

Suy ra $C'M$ là đường trung bình của ΔOAC, do đó $OC=2CC'=2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{O.ACN}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{ACN}\cdot OC=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot S_{ABC}\cdot 2CC'=\dfrac{1}{3}V$.

Thể tích khối chóp $V_{O.C'ME}=\dfrac{1}{3}\cdot S_{C'ME}\cdot OC'=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}S_{A'B'C'}\cdot OC'=\dfrac{1}{24}V$.

Do đó $V_{C'EM.CAN}=V_{O.ACN}-V_{O.C'ME}=\dfrac{1}{3}V-\dfrac{1}{24}V=\dfrac{7}{24}V=\dfrac{7}{24}\cdot a^3\sqrt{3}=\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

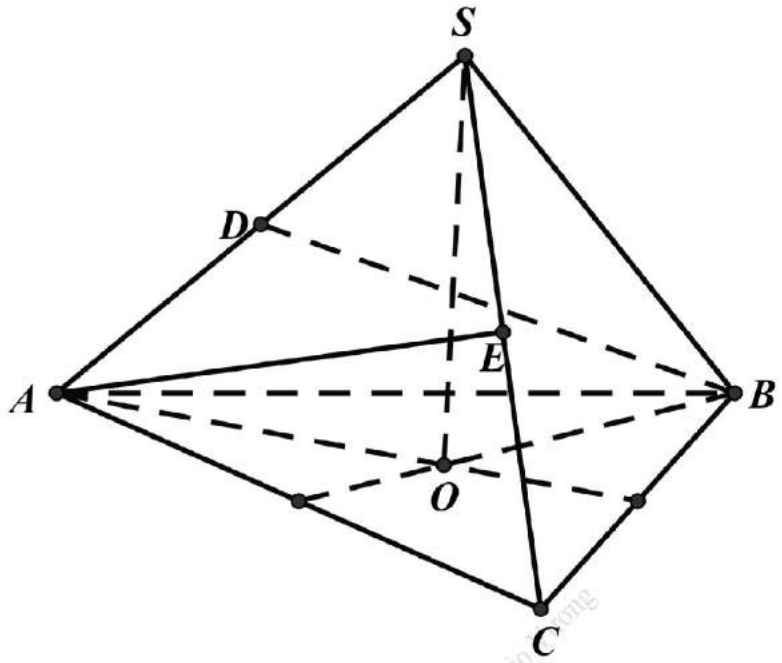
Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM.CAN}=\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 7. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA=2$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $BD \perp AE$.

A. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{21}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{9}$. **D.** $\frac{4\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm tam giác đều ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên ta có $SO \perp (ABC)$.

Ta có $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{SA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$.

Đặt $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\widehat{ASB}=\alpha$.

$BD \perp AE \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AE}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\overrightarrow{SA}\overrightarrow{SC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SA}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha-2-2\cos\alpha+4\cos\alpha=0 \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{2}{3}$.

Áp dụng định lý hàm số côsin trong tam giác SAC, ta có:

$AC^2=SA^2+SC^2-2SA.SC.\cos\alpha=\frac{8}{3} \Rightarrow AC=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$AO=\frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

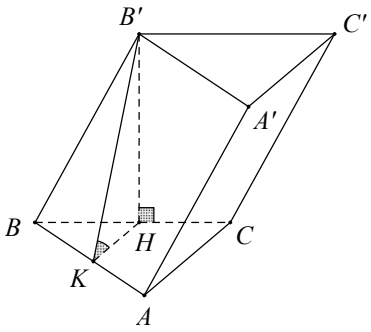
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{7}}{3}=\frac{4\sqrt{21}}{27}$.

Câu 8. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60^0$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc 45^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{7}a^3}{7}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$. **C.** $\frac{6\sqrt{7}a^3}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{7}a^3}{21}$.

Lời giải

Chọn B



Có $\begin{cases}(BCC'B')\perp(ABC)\\(BCC'B')\cap(ABC)=BC\end{cases}$. Do đó trong $(BCC'B')$ kẻ $B'H$ vuông góc với BC tại H thì $B'H\perp(ABC)$ hay $B'H$ là chiều cao của hình lăng trụ.

Trong (ABC) kẻ HK vuông góc với AB tại K. Khi đó $AB\perp(B'HK)$.

Ta có $\begin{cases}(ABB'A')\cap(ABC)=AB\\(B'HK)\perp AB\\(B'HK)\cap(ABB'A')=B'K,\ (B'HK)\cap(ABC)=KH\end{cases}$

$\Rightarrow$ Góc giữa $(ABB'A')$ và (ABC) chính là góc giữa $B'K$ và KH.

$\Delta B'HK$ vuông tại H nên $\widehat{B'KH}$ là góc nhọn. Do đó $\widehat{B'KH}=45°$.

$\Delta B'HK$ vuông tại H có $\widehat{B'KH}=45°\Rightarrow\Delta B'HK$ vuông cân tại $H\Rightarrow B'H=KH$.

Xét hai tam giác vuông $B'BH$ và BKH, ta có

$$\tan\widehat{B'BH}=\frac{B'H}{BH}=\frac{KH}{BH}=\sin\widehat{ABC}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow\frac{B'H}{B'B}=\sin\widehat{B'BH}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{B'BH}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\tan^2\widehat{B'BH}+1}\right)}=\sqrt{1-\frac{1}{\frac{3}{4}+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\Rightarrow B'H=B'B.\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}\ (\text{vì } BCC'B' \text{ là hình thoi có cạnh } BC=2a).$$

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\left(BC.\cos 60^0\right)\left(BC.\sin 60^0\right)=\frac{1}{2}.2a.\frac{1}{2}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

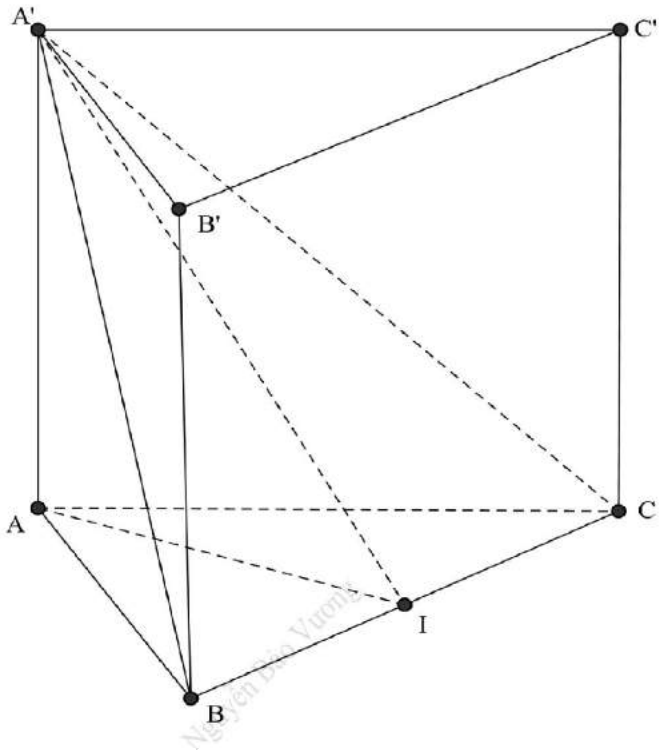
Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=B'H.S_{ABC}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{7}a^3}{7}$.

Câu 9. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc 30^0 và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $64\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều nên $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều.

Do đó ta có: $A'B = A'C$. Suy ra tam giác $A'BC$ cân tại $A' \Rightarrow A'I \perp BC$.

Mặt khác: tam giác ABC đều $\Rightarrow AI \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (A'IA)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy bằng góc $\widehat{A'IA} = 30^0$.

Ta có: tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'BC$ trên mặt đáy nên

$S_{ABC} = S_{A'BC}.\cos\alpha = 8.\cos 30^0 = 4\sqrt{3}$.

Đặt $AB = x \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4$.

Ta có: $AI = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AA' = AI.\tan\widehat{AIA'} = 2$.

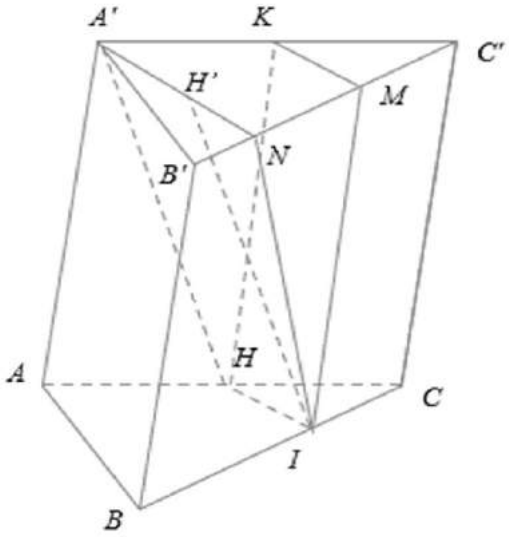
Suy ra: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 10. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh H của cạnh AC. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $BC = a\sqrt{3}$. Từ H kẻ HI vuông góc với BC.

Ta có $\Delta HIC \sim \Delta BAC$ nên $\frac{HI}{AB} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow HI = \frac{AB.HC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là trung điểm của $A'C'$. từ K kẻ KM vuông góc với $B'C'$.

Tứ giác $KMIH$ là hình bình hành nên $KM = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi N là điểm trên $B'C'$ sao cho M là trung điểm của $C'N \Rightarrow A'N = 2KM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABC)$ nên $(A'NIH) \perp (ABC)$. Mà $A'N > HI$ nên $\widehat{HIN}$ là góc tù. Suy ra $\widehat{HIN} = 120^0 \Rightarrow \widehat{A'NI} = 60^0$.

Gọi H' là hình chiếu của I lên $A'N$ suy ra H' là trung điểm của $A'N$.

$\Rightarrow A'H = IH' = NH'.\tan 60^0 = \frac{3a}{4}$.

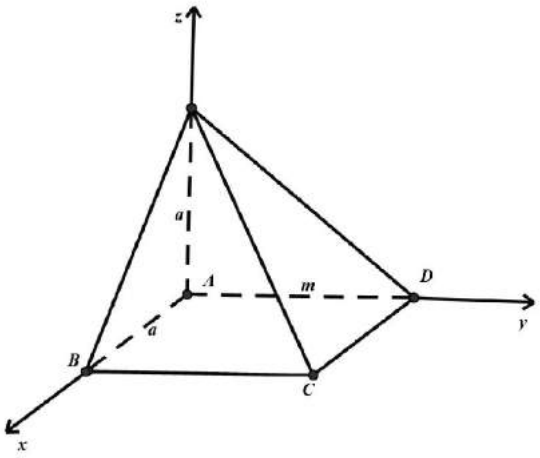
$\Rightarrow V = A'H.S_{ABC} = \frac{3a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 11. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng φ, với $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $AD=m$, $m>0$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, gốc tọa độ trùng với A, tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia $AB,AD,$AS.Khi đó tọa độ của các điểm là:

$B(a;0;0);D(0;m;0);C(a;m;0);S(0;0;a)$

$\overrightarrow{SB}=(a;0;-a);\overrightarrow{BC}=(0;m;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=(ma;0;ma)$

$\overrightarrow{SD}=(0;m;-a);\overrightarrow{DC}=(a;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DC}\right]=(0;-a;-ma)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=(ma;0;ma)$, của mặt phẳng (SCD) là $\left[\overrightarrow{SD},\overrightarrow{DC}\right]=(0;-a^2;-ma)$.

Theo giả thiết: $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\dfrac{m^2a^2}{a\sqrt{a^2+m^2}.ma.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3m^2=2\left(a^2+m^2\right)\Rightarrow m=a\sqrt{2}.$

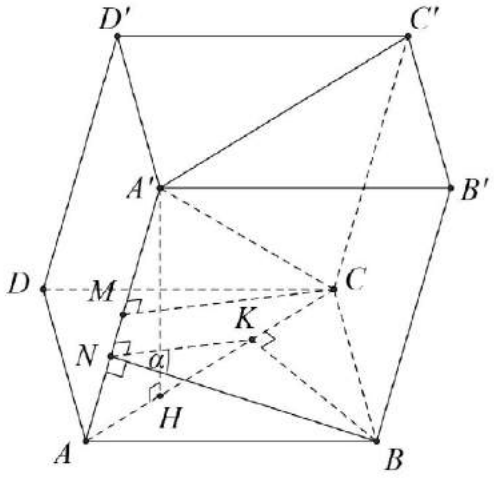
Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a.a.a\sqrt{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. **(Sở Ninh Bình)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$, $A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α có $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $V=12$. **B.** $V=6$. **C.** $V=8$. **D.** $V=10$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của AA'. Kẻ $A'H$ vuông góc với AC tại H, BK vuông góc với AC tại K, KN vuông góc với AA' tại N.

Do $(AA'C'C)\perp(ABCD)$ suy ra $A'H\perp(ABCD)$ và $BK\perp(AA'C'C)\Rightarrow BK\perp AA'$

$\Rightarrow AA'\perp(BKN)\Rightarrow AA'\perp NB$ suy ra $\left(\widehat{(AA'C'C),(AA'B'B)}\right)=\widehat{KNB}=\alpha$.

Ta có: $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$ suy ra $BD=3=AC$

Suy ra $\Delta ACA'$ cân tại C. Suy ra $CM\perp AA'\Rightarrow KN//CM$

$\Rightarrow\dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{NK}{MC}$.

Xét ΔABC vuông tại B có BK là đường cao suy ra $BK=\dfrac{BA.BC}{AC}=\sqrt{2}$ và

$AB^2=AK.AC\Rightarrow AK=\dfrac{AB^2}{AC}=2$

Xét ΔNKB vuông tại K có $\tan\alpha=\tan\widehat{KNB}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{KB}{KN}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow KN=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét ΔANK vuông tại N có $KN=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $AK=2$ suy ra $AN=\dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow\dfrac{2}{3}=\dfrac{\frac{2}{3}}{AM}=\dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{MC}\Rightarrow\begin{cases}AM=1\Rightarrow AA'=2\\CM=2\sqrt{2}\end{cases}$.

Ta lại có: $A'H.AC=CM.AA'\Rightarrow A'H=\dfrac{CM.AA'}{AC}=\dfrac{2\sqrt{2}.2}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

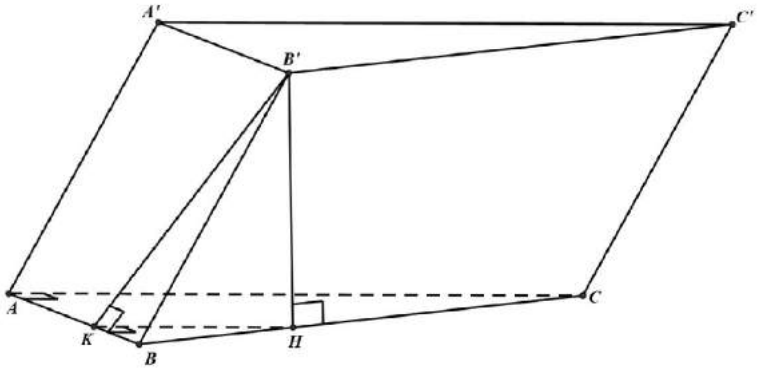
Suy ra thể tích khối lăng trụ cần tìm là: $V=A'H.AB.AD=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}.\sqrt{6}.\sqrt{3}=8$.

Câu 13. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=2a$ và $\widehat{ABC}=60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $\widehat{B'BC}$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{\sqrt{7}}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\dfrac{6a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là chân đường cao hạ từ B' của tam giác $B'BC$. Do góc $\widehat{B'BC}$ là góc nhọn nên H thuộc cạnh BC. $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) suy ra $B'H$ là đường cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$BCC'B'$ là hình thoi suy ra $BB' = BC = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 60°$ suy ra $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi K là hình chiếu của H lên AB, do tam giác ABC là tam giác vuông tại A nên $HK // AC \Rightarrow \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BH}{BC} \Rightarrow BH = 2BK$.

Khi đó mặt phẳng $(B'HK)$ vuông góc với AB nên góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là góc $\widehat{B'KH}$. Theo giả thiết, $\widehat{B'KH} = 45° \Rightarrow B'K = h\sqrt{2}$, với $B'H = h$.

Xét tam giác vuông $B'BH$ có $B'H^2 + BH^2 = B'B^2$ hay $h^2 + 4BK^2 = 4a^2 (1)$.

Xét tam giác vuông $B'BK$: $B'K^2 + BK^2 = B'B^2$ hay $2h^2 + BK^2 = 4a^2 (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $h = \dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{7}}$.

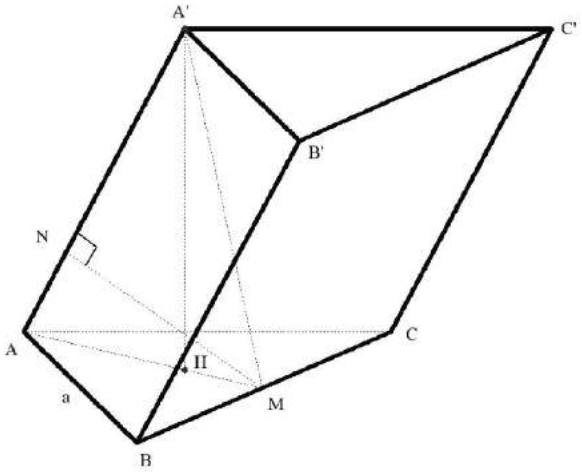
Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V = S_{ABC}.h = \dfrac{1}{2}AB.BC.h = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 14. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi M là trung điểm BC, H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

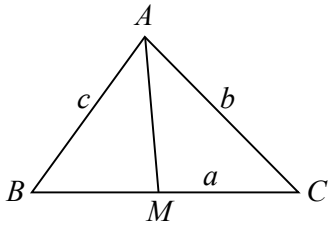
+ $AM \perp BC$

$AH \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (AA'M)$.

+ Trong tam giác $AA'M$, kẻ $MN \perp AA'$ tại N

$MN \perp BC$ tại M vì $BC \perp (AA'M)$.



$\Rightarrow MN$ là đoạn vuông góc chung của AA' và $BC \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

+ Tam giác $AA'M$ có $S_{\Delta AA'M} = \dfrac{1}{2}A'H.AM = \dfrac{1}{2}MN.AA'$

$\Rightarrow A'H.AM = MN.AA' \Leftrightarrow A'H.AM = MN.\sqrt{A'H^2 + AH^2}$

$$\Rightarrow A'H = \frac{MN.\sqrt{A'H^2 + AH^2}}{AM} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'H^2 + \left(\dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{A'H^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{2}.$$

$$\Rightarrow 4A'H^2 = A'H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}.$$

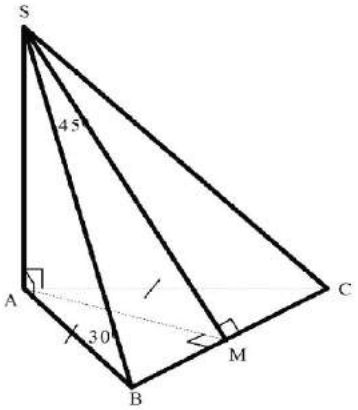
Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 15. **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC cân tại A. Cạnh bên SB lần lượt tạo với mặt phẳng đáy, mặt phẳng trung trực của BC các góc bằng 30^0 và 45^0, khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng a. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{6}$. **D.** $V_{S.ABC} = a^3$.

Lời giải

Chọn C



+ Lấy M là trung điểm của BC, tam giác ABC cân tại A

$\Rightarrow AM \perp BC$.

$SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAM)$ tại trung điểm M $\Rightarrow (SAM)$ là mặt phẳng trung trực cạnh BC.

Góc giữa SB và mặt phẳng (SAM) = góc giữa SB và $SM = \widehat{BSM} = 45^0$.

Góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) = góc giữa SB và $AB = \widehat{SBA} = 30^0$.

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM \Rightarrow$ khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng $SM = a$.

+ Tam giác vuông cân SBM có $BM = a, SB = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow BC = 2BM = 2a$.

Tam giác vuông SAB có $\sin 30^0 = \dfrac{SA}{SB} \Rightarrow SA = a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác vuông ABM có $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

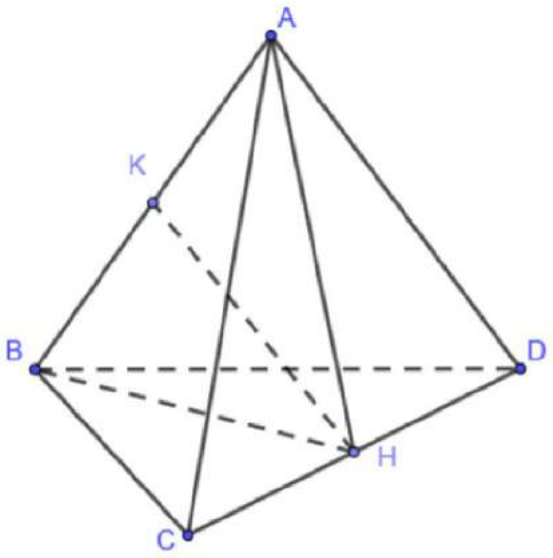
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3}{6}$.

Câu 16. (Chu Văn An - Hà Nội - 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = BD = AC = AD = 1, (ACD) \perp (BCD)$ và $(ABD) \perp (ABC)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

Đặt $AH = x, (x > 0)$

ΔACD và ΔBCD lần lượt cân tại A và D nên AH và BH là hai đường cao tương ứng.

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \Rightarrow AH \perp (BCD) \\ (ACD) \supset AH \perp CD \end{cases}$$

Do đó $AH \perp BH$ (1)

$\Delta ACD = \Delta BCD (c.c.c)$ do đó $AH = BH$ (2 đường cao tương ứng) (2)

Từ (1), (2) suy ra ΔAHB vuông cân tại H.

$\Rightarrow AB = AH\sqrt{2} = x\sqrt{2}$. (3)

Chứng minh tương tự ta được ΔCKD vuông cân tại K.

$$\Rightarrow CK = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{2.HD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{2}.\sqrt{1 - x^2}$$

Mặt khác, ΔACD cân tại A có CK là đường cao nên:

$$AB = 2AK = 2\sqrt{AC^2 - CK^2} = 2\sqrt{1 - 2(1 - x^2)} \quad (4)$$

Từ (3), (4) ta có:

$$x\sqrt{2} = 2\sqrt{1 - 2(1 - x^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 4(2x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (x > 0)$$

$$CD = 2.HD = 2\sqrt{1 - AH^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

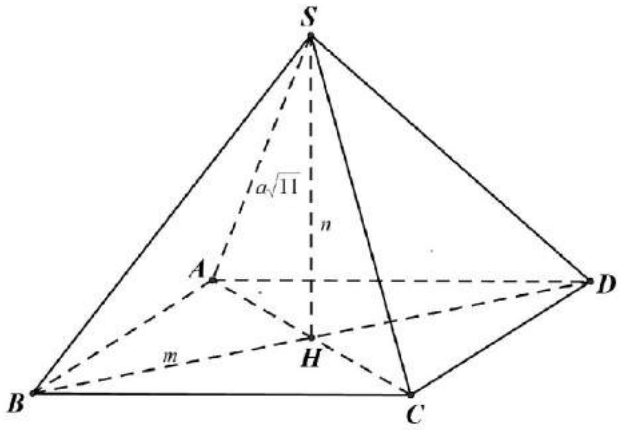
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{27}.$$

Câu 17. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $12a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ nên $SH \perp (ABCD)$. Đặt $m = HA$, $n = SH$. Do tam giác SAH vuông tại H nên $m^2 + n^2 = 11a^2$

Xây dựng hệ trục tọa độ như sau: $H(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(-m;0;0)$, $C(0;m;0)$, $S(0;0;n)$

Khi đó phương trình mặt phẳng (SBC) là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ hay véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_1} = (n;n;m)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (SCD) là: $\frac{x}{-m} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ hay véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\overrightarrow{n_2} = (n;-n;-m)$

Do cosin góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $\frac{1}{10}$ nên $\frac{1}{10} = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}$ hay

$\frac{m^2}{2n^2 + m^2} = \frac{1}{10}$ mà $n^2 = 11a^2 - m^2$

Vậy $\frac{m^2}{2n^2 + m^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{m^2}{22a^2 - m^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow m^2 = 2a^2 \Rightarrow m = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = 3a$

$m = HA = a\sqrt{2}$ nên $AB = 2a$,

Chiều cao của hình chóp là $SH = 3a$.

Diện tích của hình vuông là $S_{ABCD} = 4a^2$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.4a^2.3a = 4a^3$.

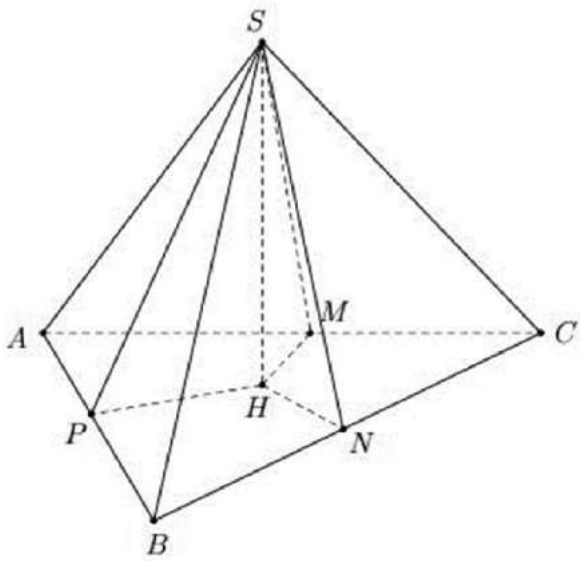
Câu 18. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB)

là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

A. $\frac{1}{36}$ **B.** $\frac{1}{48}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{24}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC, BC, AB.

Đặt $SH = h \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.h.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{h\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $AP = \frac{2S_{SAB}}{AB} = 2S_{SAB} = \frac{6V_{S.ABC}}{d\left(C;(SAB)\right)} = \frac{h\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{30}}{20} = h\sqrt{10}$

Tương tự, tính được $HM = 2h, HN = h$

$\Rightarrow PH = \sqrt{SP^2 - SH^2} = 3h$

Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} + S_{HBC} = \frac{1}{2}\left(HP + HM + HN\right) \Leftrightarrow 3h = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{12}$

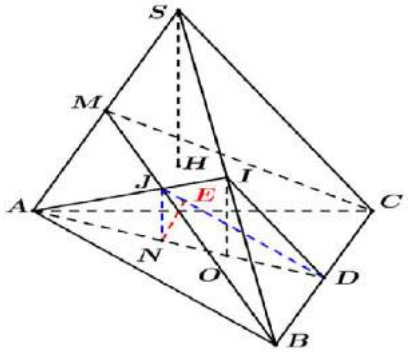
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}.\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{48}$.

Câu 19. **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^0$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\frac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{12}$ **B.** $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$ **D.** $V = \frac{7\sqrt{3}a^3}{12}$

Lời giải

Chọn B



Vì $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^0 \Rightarrow S,A,B,C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có $OI\perp(ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH\perp(ABC)$(vì OI là đường trung bình ΔSHB).

Gọi $BM\cap AI=J$, ta có J trọng tâm ΔSAB.

Trong ΔAID, kẻ $JN//IO$. Khi đó, vì $BC\perp(JND)$ nên $(JND)\perp(MBC)$.

Kẻ $NE\perp JD$, ta có $NE\perp(MBC)$. Do đó $d(N;(MBC))=NE$.

Ta có $\dfrac{d(A,(MBC))}{d(N,(MBC))}=\dfrac{AD}{ND}=\dfrac{AD}{AD-AN}=\dfrac{AD}{AD-\frac{2}{3}AO}=\dfrac{AD}{AD-\frac{4}{9}AD}=\dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $d(N,(MBC))=\dfrac{5}{9}d(A,(MBC))=\dfrac{10a}{21}$.

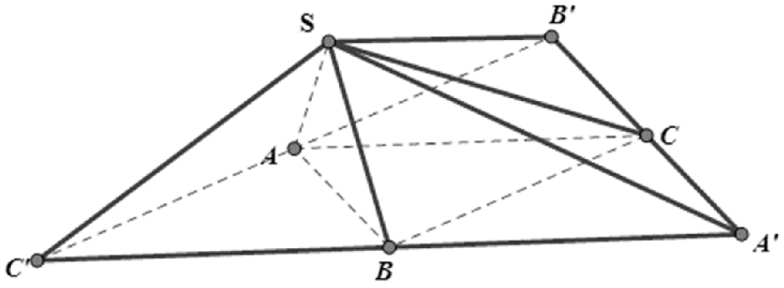
Xét ΔJND có $\dfrac{1}{NE^2}=\dfrac{1}{ND^2}+\dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ=\dfrac{10a}{3}\Rightarrow OI=\dfrac{3}{2}NJ=5a\Rightarrow SH=10a$.

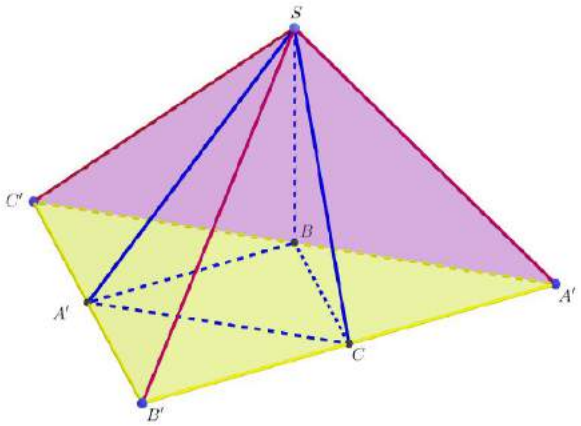
Vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.10a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 20. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh $SA=BC=3$; $SB=AC=4$; $SC=AB=2\sqrt{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{390}}{12}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{390}}{4}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{390}}{6}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{390}}{8}$

Lời giải.





+ Dựng hình chóp $S.A'B'C'$ sao cho A là trung điểm $B'C'$, B là trung điểm $A'C'$, C là trung điểm $A'B'$.

+ Khi đó $SB = AC = BA' = BC' = 4$ nên $\Delta SA'C'$ vuông tại S và

$SA'^2 + SC'^2 = (2.SB)^2 = 64$ (1).

+ Tương tự $\Delta SB'C'$, $\Delta SA'B'$ vuông tại S và $\begin{cases} SA'^2 + SB'^2 = 80 & (2) \\ SB'^2 + SC'^2 = 36 & (3) \end{cases}$.

+ Từ $(1);(2);(3)$ ta suy ra $SC' = \sqrt{10}$; $SB' = \sqrt{26}$; $SA' = \sqrt{54}$.

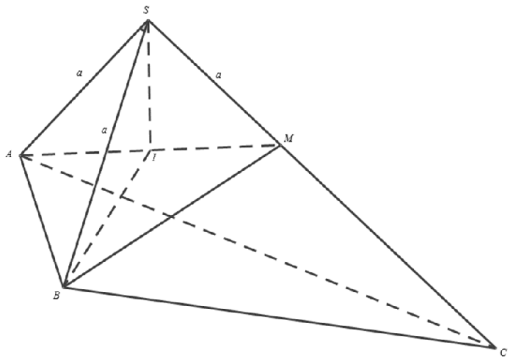
+ Ta tính được $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}SC'.\frac{1}{2}.SA'.SB' = \sqrt{390}$ và $V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.A'B'C'} = \frac{\sqrt{390}}{4}$ (đvtt).

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 90^\circ$, $SA = SB = a$, $SC = 3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Gọi M là điểm nằm trên SC sao cho $SM = \frac{1}{3}SC = a$.

Ta có:

Tam giác SAM vuông tại $S \Rightarrow AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBM là tam giác đều có độ dài cạnh $SM = SB = BM = a$.

Tam giác SAB là tam giác đều có độ dài cạnh $SA = SB = AB = a$.

Vậy $AB^2 + BM^2 = AM^2 \Rightarrow$ Tam giác ABM là tam giác vuông tại B.

$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta ASM \Rightarrow SI = IB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IB^2 + SI^2 = SB^2 \Rightarrow$ Tam giác SIB vuông tại I

$\Rightarrow \begin{cases} SI \perp IB \\ SI \perp AM \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABM) \Rightarrow SI$ là đường cao của khối chóp $SABM$

Thể tích của khối chóp $S.ABM$ là $V_{S.ABM} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABM}.SI = \dfrac{1}{6}.AB.BM.SI = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Mà $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = 3.V_{S.ABM} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2: Ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{abc}{6}.\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\delta - 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\delta}$

Trong đó $a = SA$; $b = SB$; $c = SC$; $\alpha = \widehat{ASB}$; $\beta = \widehat{ASC}$; $\delta = \widehat{BSC}$

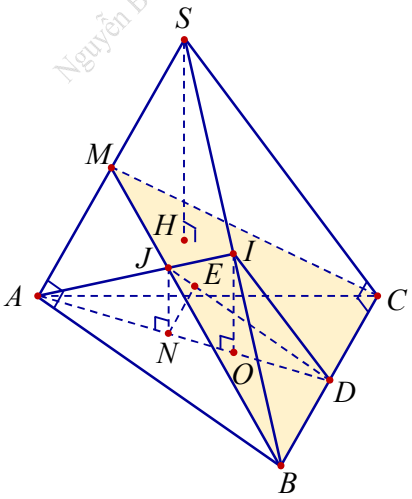
$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{a.a.3a}{6}.\sqrt{1-\cos^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \cos^2 90^\circ - 2\cos 60^\circ.\cos 60^\circ.\cos 90^\circ} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$ (đvtt).

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$, biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\dfrac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{39}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^3\sqrt{13}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Vì $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ \Rightarrow S, A, B, C$ cùng thuộc mặt cầu đường kính SB.

Gọi D là trung điểm BC, I là trung điểm SB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta có $OI \perp (ABC)$.

Gọi H là điểm đối xứng với B qua $O \Rightarrow SH \perp (ABC)$ (vì OI là đường trung bình ΔSHB).

Gọi $BM \cap AI = J$, ta có J trọng tâm ΔSAB.

Trong ΔAID, kẻ $JN // IO$. Khi đó, vì $BC \perp (JND)$ nên $(JND) \perp (MBC)$.

Kẻ $NE \perp JD$, ta có $NE \perp (MBC)$. Do đó $d(N;(MBC)) = NE$.

Ta có $\dfrac{d\left(A,(MBC)\right)}{d\left(N,(MBC)\right)}=\dfrac{AD}{ND}=\dfrac{AD}{AD-AN}=\dfrac{AD}{AD-\dfrac{2}{3}AO}=\dfrac{AD}{AD-\dfrac{4}{9}AD}=\dfrac{9}{5}$.

Suy ra, $d\left(N,(MBC)\right)=\dfrac{5}{9}d\left(A,(MBC)\right)=\dfrac{10a}{3\sqrt{21}}$.

Xét ΔJND có $\dfrac{1}{NE^2}=\dfrac{1}{ND^2}+\dfrac{1}{NJ^2}$ nên $NJ=\dfrac{10a}{9}\Rightarrow OI=\dfrac{3}{2}NJ=\dfrac{5a}{3}\Rightarrow SH=\dfrac{10a}{3}$.

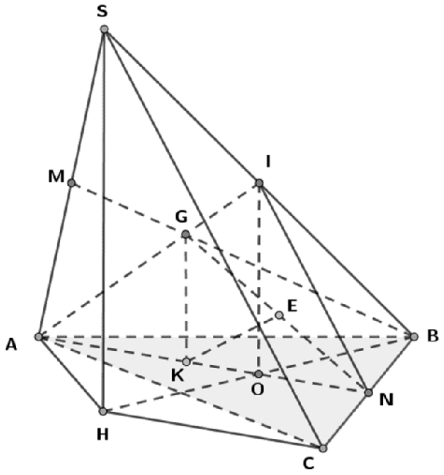
Vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{10a}{3}.\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{10\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 23. **(Cụm liên trường Hải Phòng 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$. Gọi M là trung điểm của SA. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MBC) bằng $\dfrac{6a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{5\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{7\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của SB.

Do $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90°$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi O là tâm của đáy $ABC\Rightarrow OI\perp(ABC)$.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC). Ta có $AB\perp(SAH)\Rightarrow AB\perp AH$. Tương tự, $BC\perp CH$. Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, có tâm là O nên O là trung điểm của BH. Do đó, $SH=2OI$.

Gọi N là trung điểm của $BC\Rightarrow IN//SC$ nên $BC\perp IN\Rightarrow BC\perp(AIN)$(*)

Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và K là hình chiếu của G lên mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow K\in AO$ và $GK//OI\Rightarrow AK=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{4}{9}AN\Rightarrow KN=\dfrac{5}{9}AN$.

$\Rightarrow d\left[K,(MBC)\right]=\dfrac{5}{9}d\left[A,(MBC)\right]=\dfrac{10a}{21}$.

Kẻ $KE\perp GN\overset{(*)}{\Rightarrow}KE\perp BC\Rightarrow KE\perp(MBC)\Rightarrow d\left[K,(MBC)\right]=KE=\dfrac{10a}{21}$.

Tam giác GKN vuông tại K có

$\frac{1}{KE^2}=\frac{1}{GK^2}+\frac{1}{KN^2}\Rightarrow GK=\frac{10a}{3}\Rightarrow SH=2OI=3GK=10a.$

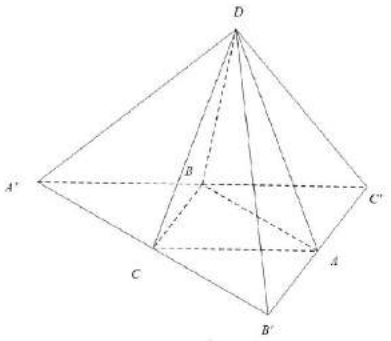
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.10a=\frac{5a^3\sqrt{3}}{6}.$

Câu 24. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD=BC=3$, $AC=BD=4$, $AB=CD=2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2740}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2474}}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{2047}}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$.

Theo cách dựng và theo bài ra có: $AC=BC'=BD$.

Xét tam giác $DA'C'$ có: BD là đường trung tuyến và $A'B=BC'=BD\Rightarrow\Delta DA'C'$ vuông tại D.

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\Delta DB'C'$, $\Delta DA'B'$ vuông tại D.

Khi đó tứ diện $D.A'B'C'$ có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc với nhau.

Ta có: $V_{ABCD}=\frac{1}{4}V_{D.A'B'C'}=\frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}DA'^2+DB'^2=48\\DA'^2+DC'^2=64\\DB'^2+DC'^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}DA'^2=38\\DB'^2=10\\DC'^2=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}DA'=\sqrt{38}\\DB'=\sqrt{10}\\DC'=\sqrt{26}\end{cases}$

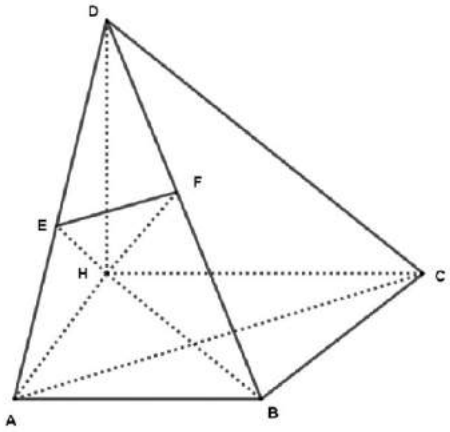
Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{24}DA'.DB'.DC'=\frac{1}{24}.\sqrt{38}.\sqrt{10}.\sqrt{26}=\frac{\sqrt{2470}}{12}.$

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90°$; $AB=a$; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC}=135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H thuộc mặt phẳng (ABC) và $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp BD \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác ABH có $AB = a$; $\widehat{ABC} = 135°$; $\widehat{CBH} = 90° \Rightarrow \widehat{ABH} = 45°$ suy ra ΔABH vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý côsin ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.\text{BA}.\text{BC}.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$.

Kẻ HE, HF lần lượt vuông góc với DA, DB.

Suy ra $HE \perp (ABD)$, $HF \perp (BCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng góc $\widehat{EHF}$.

Tam giác EHF vuông tại E, ta có $HE = \frac{a.DH}{\sqrt{a^2 + DH^2}}$, $HF = \frac{DH.a.\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + DH^2}}$.

Mặt khác: $\cos\widehat{EHF} = \frac{HE}{HF} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{DH^2 + 2a^2}}{\sqrt{2.DH^2 + 2a^2}} \Rightarrow DH = a$.

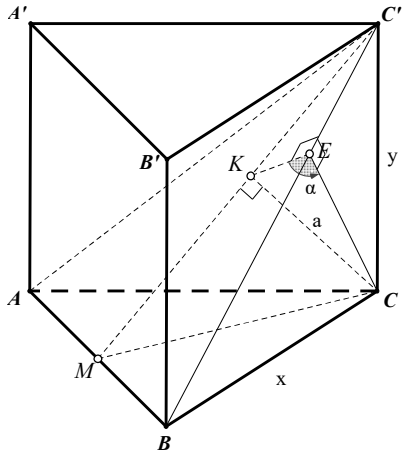
Thể tích tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 26. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = d(C;(ABC')) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{CM^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{3x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (1).

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}$ (2).

Giải (1),(2) ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

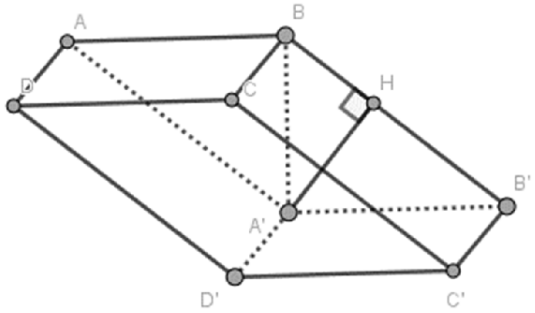
$V = y.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$

Câu 27. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Góc giữa AA' với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45^0. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và DD' bằng 1. Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60^0, Tính thể tích khối hộp đã cho.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $A'B \perp (ABCD) \Rightarrow (AA', ABCD) = \widehat{AA'B} = \widehat{B'BA} = 45^0$

Vì $d(A, BB') = d(A', BB') = A'H = 1$ (H là hình chiếu của A lên BB'). Suy ra ta có

$A'B' = \dfrac{A'H}{\sin(BB'A)} = \sqrt{2}$ và $A'B = A'B'.\tan(BB'A') = \sqrt{2}$

Gán hệ trục tọa độ gốc A' với điểm $B \in Oz, B' \in Oy$ và mặt phẳng $(A'B'C'D') \equiv (Oxy)$. Ta có tọa độ các điểm $A'(0,0,0), B(0,0,\sqrt{2}), B'(0,\sqrt{2},0)$.

Ta có $D \in (Oxy)$, giả sử $D'(a,b,0); a \geq 0 \Rightarrow C'(a, b+\sqrt{2}, 0)$.

Chọn $\vec{n}_{(BB'C'C)} = (-b, a, a)$ và $\vec{n}_{(DD'C'C)} = (1,0,0)$.

Vì góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(CC'D'D)$ bằng 60^0. Ta có

$\cos(60^0) = \dfrac{|-b|}{\sqrt{b^2+2a^2}} \Leftrightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

Mặt khác ta có đường thẳng DD' có phương trình $\begin{cases} x = a \\ y = b - t \\ z = t \end{cases}$ 4. Vì khoảng cách từ A đến đường thẳng DD' bằng 1. Ta có:

$d(A, DD'0) = d(A', DD') = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'D'}, \vec{u}_{DD'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{DD'}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{b^2+2a^2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{b^2+2a^2} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

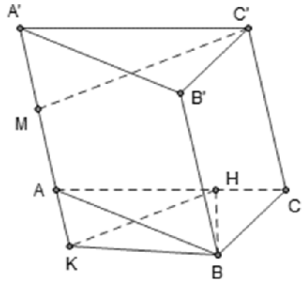
Trường hợp 1: $D(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0) \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'B.S_{A'B'C'D'} = \sqrt{2}.\left|\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}\right]\right| = 2\sqrt{3}$

Trường hợp 2. $D(\sqrt{3}, -\sqrt{2}, 0) \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'B.S_{A'B'C'D'} = \sqrt{2}.\left|\left[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'D'}\right]\right| = 2\sqrt{3}$

Câu 28. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}, AD = \sqrt{3}, A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C), (AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 8$. **B.** $V = 12$. **C.** $V = 10$. **D.** $V = 6$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của B lên $(ACC'A')$, vậy $BH \perp (ACC'A')$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3$; $BH = \dfrac{AB.BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{6}.\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}$; $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 1$;

$AH = AC - HC = 2$.

Kẻ $HK \perp AA', (K \in AA')$, $AA' \perp BH$ vì $BH \perp (ACC'A')$ nên $AA' \perp BK$.

$\left(\widehat{(ABB'A');(ACC'A')}\right) = \widehat{BKH}$; ΔBKH vuông tại H.

$\tan \widehat{BKH} = \dfrac{BH}{KH} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{KH} \Rightarrow KH = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$; $AK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{2}{3}$.

Gọi M là trung điểm AA'. Tam giác $A'C'A$ cân tại C', $(AC = A'C' = AC' = 3)$

$\Rightarrow C'M \perp AA' \Rightarrow KH // C'M$.

$\triangle A'C'M \backsim AHK \Rightarrow A'M = \dfrac{AK.A'C'}{AH} = 1 \Rightarrow AA' = 2$; $C'M = \dfrac{A'C'.KH}{AH} = 2\sqrt{2}$.

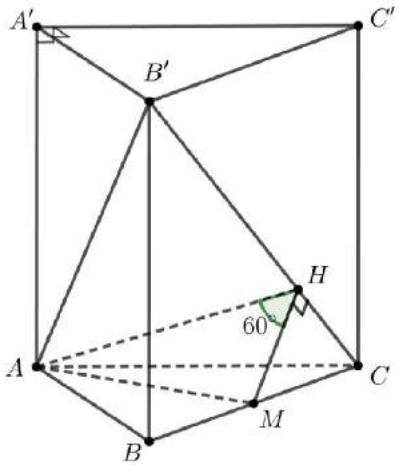
$S_{ACC'A'} = C'M.AA' = \mathrm{d}(A';AC).AC = 4\sqrt{2} \Rightarrow d(A';AC) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = d(A';\mathrm{AC}).S_{ABCD} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}.\sqrt{6}.\sqrt{3} = 8$.

Câu 29. **(Cụm 5 Trường Chuyên - Đbsh - 2018)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'C'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B'.ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH. Mà tam giác AMH vuông tại H nên $\Rightarrow \widehat{AHM} = 60°$.

$\Rightarrow MH = AM.\cot 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác $B'BC$ đồng dạng với tam giác MHC nên suy ra $\sin\widehat{HCM} = \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 1 + \tan^2\widehat{MCH} = \dfrac{1}{1-\sin^2\widehat{MCH}} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \tan\widehat{MCH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow BB' = BC.\tan\widehat{MCH} = a\sqrt{6}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{AB'CA'C'} = V_{B'.ACC'A'} = \dfrac{1}{3}B'A'.AC.AA' = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

---------- HẾT ----------

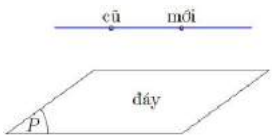
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Kỹ thuật chuyển đỉnh

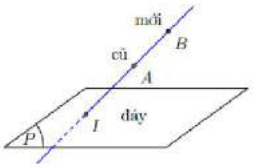
A. Song song đáy

$$\boxed{V_{cũ} = V_{mới}}$$



B. Cắt đáy

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{Giao\ cũ}{Giao\ mới} = \frac{IA}{IB}$$



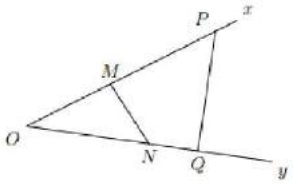
2. Kỹ thuật chuyển đáy (đường cao không đổi)

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{S_{đáy}}{S_{đáy\ mới}}$$

- Để kỹ thuật chuyển đáy được thuận lợi, ta nên chọn hai đáy có cùng công thức tính diện tích, khi đó ta sẽ dễ dàng so sánh tỉ số hơn.
- Cả hai kỹ thuật đều nhằm mục đích chuyển đa diện ban đầu về đa diện khác dễ tính thể tích hơn.

3. Tỉ số diện tích của hai tam giác

$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{OM.ON}{OP.OQ}$$

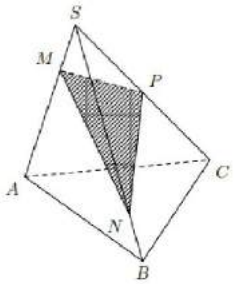


4. Tỉ số thể tích của khối chóp

A. Công thức tỉ số thể tích của hình chóp tam giác

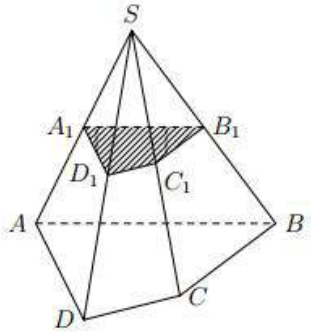
$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$

Công thức trên chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác, do đó trong nhiều trường hợp ta cần hoạt phân chia hình chóp đã cho thành nhiều hình chóp tam giác khác nhau rồi mới áp dụng.



B. Một số trường hợp đặc biệt

Nếu $(A_1B_1C_1D_1)\,||\,(ABCD)$ và $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD} = k$ thì $\frac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}} = k^3$



Kết quả vẫn đúng trong trường hợp đáy là n − giác.

5. Tỉ số thể tích của khối lăng trụ

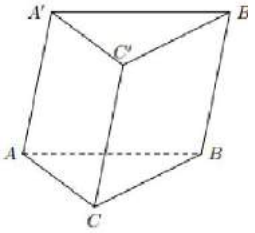
A. Lăng trụ tam giác

Gọi V là thể tích khối lăng trụ, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 6 đỉnh của lăng trụ, $V_{(5)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 5 trong 6 đỉnh của lăng trụ. Khi đó:

$V_{(4)} = \frac{V}{3}$

$V_{(5)} = \frac{2}{3}V$

Ví dụ: $V_{A'B'BC} = \frac{V}{3}; V_{A'B'ABC} = \frac{2V}{3}$



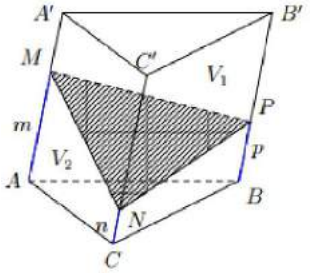
B. Mặt phẳng cắt các cạnh bên của lăng trụ tam giác

Gọi V_1, V_2 và V lần lượt là thể tích phần trên, phần dưới và lăng trụ. Giả sử

$\frac{AM}{AA'} = m, \frac{CN}{CC'} = n, \frac{BP}{BB'} = p$

Khi đó: $V_2 = \frac{m+n+p}{3}.V$

Khi $M \equiv A', N \equiv C$ thì $\frac{AM}{AA'} = 1, \frac{CN}{CC'} = 0$



6. Khối hộp

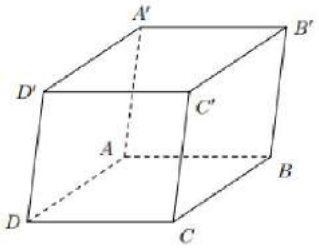
A. Tỉ số thể tích của khối hộp

Gọi V là thể tích khối hộp, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp. Khi đó:

$V_{(4)}$ (hai đường chéo của hai mặt phẳng song song) $= \frac{V}{3}$

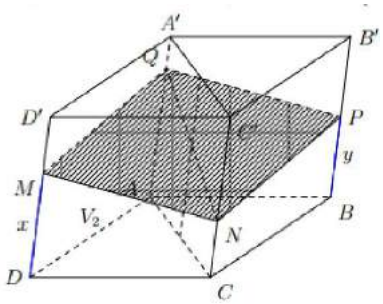
$V_{(4)}$ (trường hợp còn lại) $= \frac{V}{6}$

Ví dụ: $V_{A'C'BD} = \frac{V}{3}, V_{A'C'D'D} = \frac{V}{6}$



B. Mặt phẳng cắt các cạnh của hình hộp (chỉ quan tâm tới hai cạnh đối nhau)

$\left.\begin{array}{l} \frac{DM}{DD'} = x \\ \frac{BP}{BB'} = y \end{array}\right\} \Rightarrow V_2 = \frac{x+y}{2}.V$



Dạng 1. Tỉ số thể tích khối chóp tam giác

Câu 1. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 3.

Câu 2. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{6}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

Câu 3. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\dfrac{1}{16}$ **B.** $\dfrac{1}{4}$ **C.** $\dfrac{1}{8}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC. Tính tỉ số thể tích của 2 khối chóp $S.MNP$ và $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 5. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V. Gọi B', C' lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tính theo V thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

A. $\dfrac{1}{3}V$. **B.** $\dfrac{1}{2}V$. **C.** $\dfrac{1}{12}V$. **D.** $\dfrac{1}{4}V$.

Câu 6. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A. 16. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$, trên các tia SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC}{SC'}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{SA}{SA'}.\dfrac{SB}{SB'}.\dfrac{SC}{SC'}$.

Câu 8. **(Gia Lai 2019)** Cho khối chóp SABC có thể tích bằng $5a^3$. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $SM=3MB$, $SN=4NC$ (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích V của khối chóp $AMNCB$.

A. $V=\dfrac{3}{5}a^3$. **B.** $V=\dfrac{3}{4}a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 9. Nếu một hình chóp tứ giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 2 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 2 lần. **B.** 4 lần. **C.** 6 lần. **D.** 8 lần.

Câu 10. Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA'=OA$, $4OB'=OB$ và $3OC'=OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{24}$. **C.** $\dfrac{1}{32}$. **D.** $\dfrac{1}{16}$.

Câu 11. Cho khối chóp $SAB.C$, M là trung điểm của SA. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Câu 12. **(THPT Hoa Lư A - 2018)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE=3EB$. Tính thể tích khối tứ diện $EBCD$ theo V.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{5}$.

Câu 13. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V. Các điểm A', B', C' tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{V}{8}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{16}$.

Câu 14. **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B',C' sao cho $AB'=\frac{a}{2}, AC'=\frac{2a}{3}$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Dạng 2. Tỉ số khối lăng trụ

Câu 1. **(Sở Nam Định - 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $BAA'C'C$.

A. $\frac{3V}{4}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Câu 2. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm CC'. Mặt phẳng (ABM) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối lăng trụ chứa đỉnh C và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{5}$

Câu 3. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Mặt phẳng $(A'BC')$ chia khối lăng trụ thành một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác có thể tích lần lượt là

A. 2 và 4. **B.** 3 và 3. **C.** 4 và 2. **D.** 1 và 5.

Câu 4. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Mặt phẳng (MAB) chia khối lăng trụ thành hai phần có tỉ số $k\le 1$. Tìm k?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 5. **(THPT Thăng Long 2019)** Một khối lăng trụ tứ giác đều có thể tích là 4. Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ này hai lần thì được khối lăng trụ mới có thể tích là:

A. 8. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 2.

Câu 6. Biết khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Nếu tăng mỗi cạnh của hình hộp đó lên gấp hai lần thì thể tích khối hộp mới là:

A. $8V$. **B.** $4V$. **C.** $2V$. **D.** $16V$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của AA'. Tỉ số thể tích $\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 8. **(HKI-NK HCM-2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là trung điểm cạnh AA'. Khi đó thể tích khối chóp $M.BCC'B'$ là

A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Câu 9. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Biết diện tích mặt bên $(ABB'A')$ bằng 15, khoảng cách từ điểm C đến $(ABB'A')$ bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. 30. **B.** 45. **C.** 60. **D.** 90.

Câu 10. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{2}$. **C.** $\frac{3V}{4}$. **D.** $\frac{2V}{3}$.

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có I là giao điểm của AC và BD. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của các khối $ABCD.A'B'C'D'$ và $I.A'B'C'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=6$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=2$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=3$.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 13 TỈ SỐ THỂ TÍCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

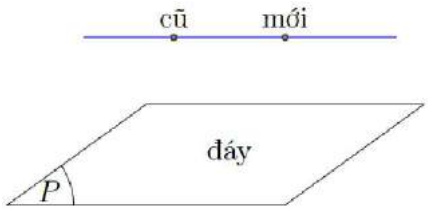
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT CHUNG

1. Kỹ thuật chuyển đỉnh

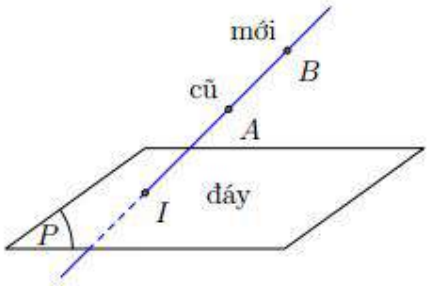
A. Song song đáy

$\boxed{V_{cũ} = V_{mới}}$



B. Cắt đáy

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{Giao\ cũ}{Giao\ mới} = \frac{IA}{IB}$$



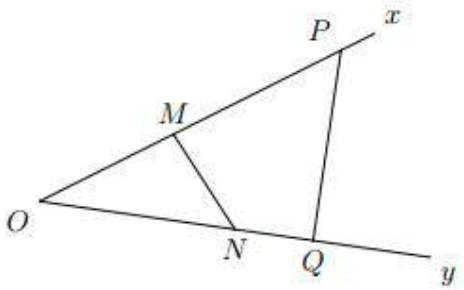
2. Kỹ thuật chuyển đáy (đường cao không đổi)

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{S_{đáy}}{S_{đáy\ mới}}$$

- Để kỹ thuật chuyển đáy được thuận lợi, ta nên chọn hai đáy có cùng công thức tính diện tích, khi đó ta sẽ dễ dàng so sánh tỉ số hơn.
- Cả hai kỹ thuật đều nhằm mục đích chuyển đa diện ban đầu về đa diện khác dễ tính thể tích hơn.

3. Tỉ số diện tích của hai tam giác

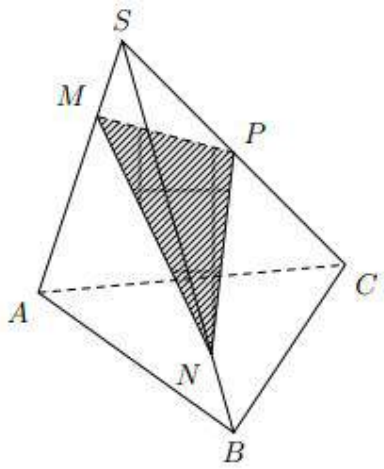
$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{OM.ON}{OP.OQ}$$



4. Tỉ số thể tích của khối chóp

A. Công thức tỉ số thể tích của hình chóp tam giác

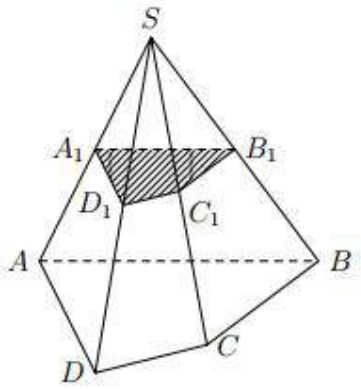
$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$



Công thức trên chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác, do đó trong nhiều trường hợp ta cần hoạt phân chia hình chóp đã cho thành nhiều hình chóp tam giác khác nhau rồi mới áp dụng.

B. Một số trường hợp đặc biệt

Nếu $\left(A_1B_1C_1D_1\right)\|\left(ABCD\right)$ và $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=k$ thì $\frac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}}=k^3$



Kết quả vẫn đúng trong trường hợp đáy là n − giác.

5. Tỉ số thể tích của khối lăng trụ

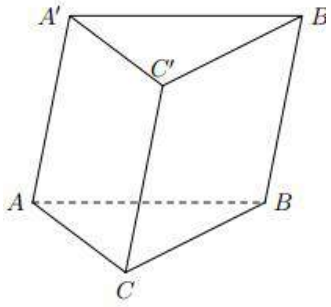
A. Lăng trụ tam giác

Gọi V là thể tích khối lăng trụ, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 6 đỉnh của lăng trụ, $V_{(5)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 5 trong 6 đỉnh của lăng trụ. Khi đó:

$$V_{(4)}=\frac{V}{3}$$

$$V_{(5)}=\frac{2}{3}V$$

Ví dụ: $V_{A'B'BC}=\frac{V}{3};V_{A'B'ABC}=\frac{2V}{3}$

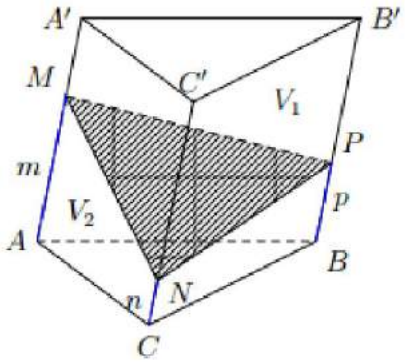


B. Mặt phẳng cắt các cạnh bên của lăng trụ tam giác

Gọi V_1, V_2 và V lần lượt là thể tích phần trên, phần dưới và lăng trụ. Giả sử

$$\frac{AM}{AA'}=m,\frac{CN}{CC'}=n,\frac{BP}{BB'}=p$$

Khi đó: $V_2=\frac{m+n+p}{3}.V$



Khi $M\equiv A',N\equiv C$ thì $\frac{AM}{AA'}=1,\frac{CN}{CC'}=0$

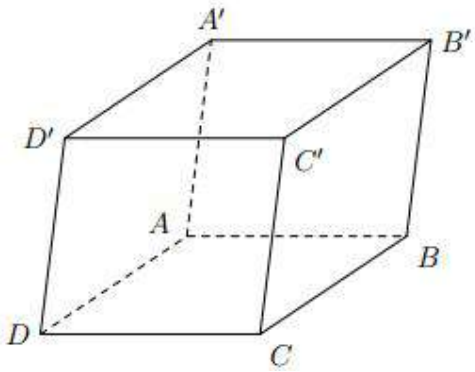
6. Khối hộp

A. Tỉ số thể tích của khối hộp

Gọi V là thể tích khối hộp, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp. Khi đó:

$V_{(4)}$ (hai đường chéo của hai mặt phẳng song song) $=\frac{V}{3}$

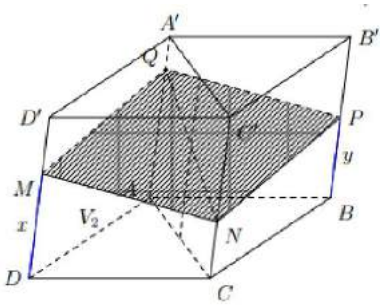
$V_{(4)}$ (trường hợp còn lại) $=\frac{V}{6}$



Ví dụ: $V_{A'C'BD}=\frac{V}{3},V_{A'C'D'D}=\frac{V}{6}$

B. Mặt phẳng cắt các cạnh của hình hộp (chỉ quan tâm tới hai cạnh đối nhau)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{DM}{DD'}=x\\ \dfrac{BP}{BB'}=y\end{array}\right\}\Rightarrow V_2=\dfrac{x+y}{2}.V$$



Dạng 1. Tỉ số thể tích khối chóp – khối lăng trụ

Câu 1. **(HSG 12-Sở Nam Định-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V với M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của $MNBC$ và $MNDA$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1+V_2}{V}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 2. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M và N là trung điểm các cạnh SA,SC, mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}$ bằng :

A. $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó tỷ số thể tích của khối đa diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K,M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, (α) là mặt phẳng qua K song song với AC và AM. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{25}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{11}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{17}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{9}{23}$.

Câu 6. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết C' là trung điểm của SC. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 8. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M và đặt $\frac{SM}{SA}=x$. Giá trị x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $x=\frac{\sqrt{5}-1}{3}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chop $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k=\frac{IA}{IS}$?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=6, SB=2, SC=4, AB=2\sqrt{10}, \widehat{SBC}=90^\circ, \widehat{ASC}=120^\circ$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC đồng thời vuông góc với (SAC) cắt SA tại M. Tính tỉ số thể tích $k=\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $k=\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{1}{4}$. **C.** $k=\frac{1}{6}$. **D.** $k=\frac{2}{9}$.

Câu 11. **(Đề tham khảo 2017)** Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC=3BM$, $BD=\frac{3}{2}BN, AC=2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2, trong đó khối đa diện chứa cạnh CD có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{26}{19}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{26}{13}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{15}{19}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{19}$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Xét điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm P trên cạnh CD sao cho $\frac{MB}{MA}=3,\frac{NB}{NC}=4,\frac{PC}{PD}=\frac{3}{2}$. Gọi V_1,V_2 theo thứ tự là thể tích các khối tứ diện $MNBD$ và $NPAC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 14. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC}=\frac{1}{2},\frac{SN}{ND}=2$, biết G là trọng tâm tam giác SAB. Tỉ số thể tích $\frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}}=\frac{m}{n}$, m, n là các số nguyên dương và $(m,n)=1$. Giá trị của $m+n$ bằng:

A. 17 **B.** 19 **C.** 21 **D.** 7

Câu 15. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SB. Mặt phẳng $(MNCD)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là (số bé chia số lớn)

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

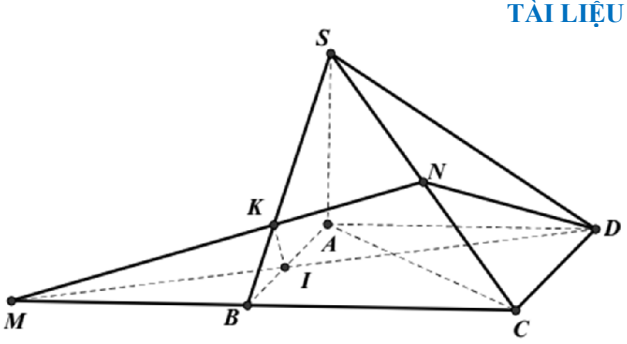
Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 17. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với (H_1) là khối đa diện chứa điểm S, (H_2) là khối đa diện chứa điểm A. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 18. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=60°$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên).



Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{12}{7}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Câu 19. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1<V_2$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{8}$.

Câu 20. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 21. (**Thpt Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018**) Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện, đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ là:

A. $\frac{V_2}{V_1}=3$. **B.** $\frac{V_2}{V_1}=2$. **C.** $\frac{V_2}{V_1}=1$. **D.** $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{2}$.

Câu 22. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho điểm M nằm trên cạnh SA, điểm N nằm trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2}$, $\frac{SN}{NB}=2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{6}{5}$.

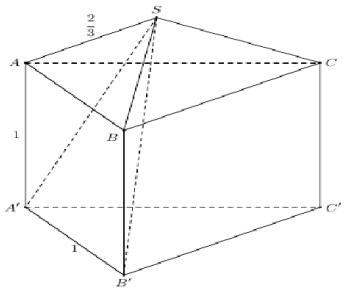
Câu 23. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 $(V_1 < V_2)$. Tính tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{8}{27}$. **B.** $\frac{16}{81}$. **C.** $\frac{8}{19}$. **D.** $\frac{16}{75}$.

Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $C'.A'B'FE$ có thể tích V_1 và khối đa diện $ABCEFC'$ có thể tích V_2. Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k.

A. $k = 4$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = 1$. **D.** $k = 2$.

Câu 25. Cho khối đa diện như hình vẽ bên. Trong đó $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng 1, $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều có cạnh bên $SA = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng $(SA'B')$ chia khối đa diện đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích phần khối đa diện không chứa đỉnh A. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $72V_1 = 5V_2$. **B.** $3V_1 = V_2$. **C.** $24V_1 = 5V_2$. **D.** $4V_1 = 5V_2$.

Câu 26. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm thuộc AA', AA', BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CC'} = \frac{1}{4}$, $\frac{C'Q}{C'B'} = \frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{30}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{11}{45}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{45}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{22}{45}$.

Câu 27. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = 2MA'$, $NB' = 2NB$, $PC = PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = 1$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$.

Dạng 2. Ứng dụng tỉ số thể tích để tính thể tích

Câu 1. **(Đề minh họa lần 1 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=\frac{7}{2}a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$ **D.** $V=7a^3$

Câu 2. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A. 16. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60^0. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD. Tính theo a thể tích khối tứ diện $DKAC$

A. $V=\frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **B.** $V=\frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Câu 4. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 32. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi D' là trung điểm SD, mặt phẳng chứa BD' và song song với AC lần lượt cắt các cạnh SA, SC tại A' và C'. Biết thể tích khối chóp $S.A'BC'D'$ bằng 1, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{9}{2}$. **B.** $V=\frac{3}{2}$. **C.** $V=6$. **D.** $V=3$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD. Tính thể tích của tứ diện $AMNP$.

A. $\frac{1}{27}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{27}$.

Câu 7. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 18, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SC tại N. Thể tích khối chóp $S.ABNM$ bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm M thuộc cạnh $A'B'$ sao cho $A'B'=3A'M$. Đường thẳng BM cắt đường thẳng AA' tại F, và đường thẳng CF cắt đường thẳng $A'C'$ tại G, Tính tỉ số thể tích khối chóp $FA'MG$ và thể tích khối đa diện lồi $GMB'C'CB$

A. $\frac{1}{11}$. **B.** $\frac{1}{27}$. **C.** $\frac{3}{22}$. **D.** $\frac{1}{28}$.

Câu 9. **(Sở GD Nam Định 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V, hai điểm M và P lần lượt là trung điểm của AB, CD; điểm N thuộc đoạn AD sao cho $AD=3AN$. Tính thể tích tứ diện $BMNP$.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{12}$. **C.** $\frac{V}{8}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Câu 10. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình 2019)**Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48 và $ABCD$ là hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC, SD thỏa mãn $SA=2SM$, $SB=3SN$, $SC=4SP$, $SD=5SQ$. Tính thể tích khối đa diện $S.MNPQ$

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Câu 11. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS=2NC$. Thể tích của khối chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{16}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=2a$, $SB=3a$, $SC=4a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60°$, $\widehat{ASC}=90°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. **B.** $V=2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=a^3\sqrt{2}$.

Câu 13. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$D,có đáy và cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SD. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích V_1,V_2 với $V_1<V_2$.Ta có V_2 bằng

A. $\frac{a^3}{18}$. **B.** $\frac{5a^3}{9}$. **C.** $\frac{8a^3}{15}$. **D.** $\frac{a^3}{9}$.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=1;AC=2;AD=3$ và $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60^0$.Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Một mặt phẳng đi qua hai điểm A, G và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B' và C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'$ bằng:

A. $\frac{2a^3}{27}$. **B.** $\frac{a^3}{9}$. **C.** $\frac{4a^3}{27}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Câu 16. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{2}a^2}{4}$.

Câu 17. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB,AC,AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB=3a,AC=6a,AD=4a$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CD,BD. Tính thể tích khối đa diện $AMNP$.

A. $12a^3$ **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 18. **(HKI-Chuyên Long An-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt

là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{1}{8}$.

A. $k=\frac{1}{8}$. **B.** $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA'=\frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính theo V thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$?

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{V}{81}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{9}$.

Câu 20. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB=6a$, $AC=9a$, $AD=12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $108a^3$. **D.** $36a^3$.

Câu 21. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\frac{4a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{27}$. **C.** $\frac{5a^3}{54}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ theo V.

A. $\frac{V}{9}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{2V}{9}$. **D.** $\frac{V}{27}$.

Câu 23. **(THPT QG 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

A. $V=3$ **B.** $V=4$ **C.** $V=6$ **D.** $V=5$

Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V. Tính V.

A. $\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ **B.** $\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$ **D.** $\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V=12$. Gọi M, N lần lượt trung điểm SA, SB; P là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS=2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{12}{25}$.

Câu 26. **(CHUYÊN Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)**Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Thể tích khối tứ diện $SGCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn là AD và $AD=3BC$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $ND=3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Thể tích khối chóp $A.MBNP$ bằng

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{5}{16}$. **D.** $\frac{9}{32}$.

Câu 28. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A. $\frac{1}{8}V$. **B.** $\frac{7}{48}V$. **C.** $\frac{5}{48}V$. **D.** $\frac{1}{6}V$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Trên cạnh SB, SD lấy các điểm M, N sao cho $SM=MB$, $SD=3SN$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích V của khối tứ diện $SMNP$.

A. $V=\frac{1}{3}$. **B.** $V=\frac{1}{2}$. **C.** $V=2$. **D.** $V=1$.

Câu 30. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90°$; $AB=a; AC=a\sqrt{5}; \widehat{ABC}=135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABD), (BCD)$ bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 31. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN=2CN$, P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=3DP$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA tại Q. Biết khối chóp $SMNPQ$ có thể tích bằng 1. Khối đa diện $ABCD.QMNP$ có thể tích bằng

A. $\frac{9}{7}$. **B.** $\frac{17}{5}$. **C.** 4. **D.** $\frac{14}{5}$.

Câu 32. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC đều, $AB=a$, góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính thể tích của khối chóp $S.MNC$.

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{16}$.

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA=a\sqrt{6}$, SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc φ sao cho $\tan\varphi=\sqrt{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích khối tứ diện $SOGC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Câu 34. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Lấy điểm M thuộc cạnh AA' sao cho $MA = 2MA'$. Thể tích của khối chóp $M.ABC$ bằng

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{V}{9}$. **C.** $\frac{V}{18}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là trung điểm BB', điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$ theo V.

A. $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{12}$. **B.** $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{18}$. **C.** $V_{A.BCMN} = \frac{V}{3}$. **D.** $V_{A.BCMN} = \frac{5V}{18}$.

Câu 36. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$, $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37. **(Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60°$ và $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 38. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích 2017. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{2017}{9}$. **B.** $\frac{4034}{81}$. **C.** $\frac{8068}{27}$. **D.** $\frac{2017}{27}$.

Câu 39. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V = \frac{1}{12}a^3$ **B.** $V = \frac{1}{6}a^3$. **C.** $V = \frac{1}{8}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{36}a^3$.

Câu 40. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi $B'; D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{16a^3}{45}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

Câu 41. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V = \frac{11\sqrt{2}}{216}$. **C.** $V = \frac{7\sqrt{2}}{216}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}}{108}$.

Câu 42. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V^3}{3}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

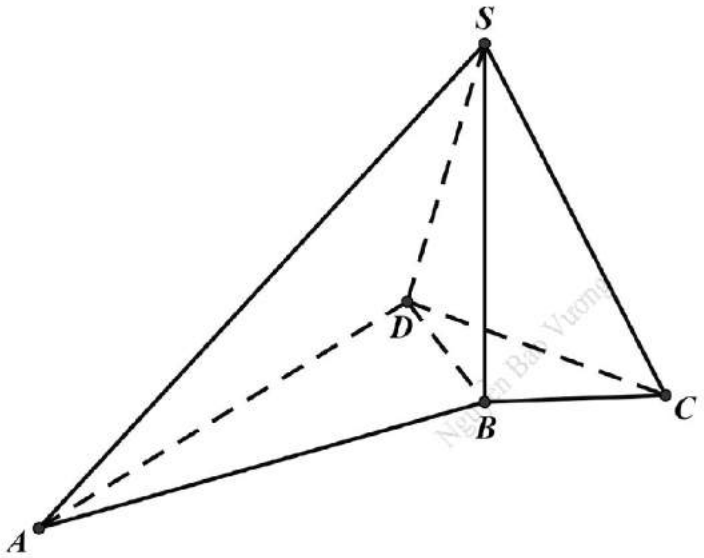
Câu 43. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C'. Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

A. $\frac{V}{6}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{V\sqrt{2}}{3}$.

Câu 45. **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình đa diện như hình vẽ



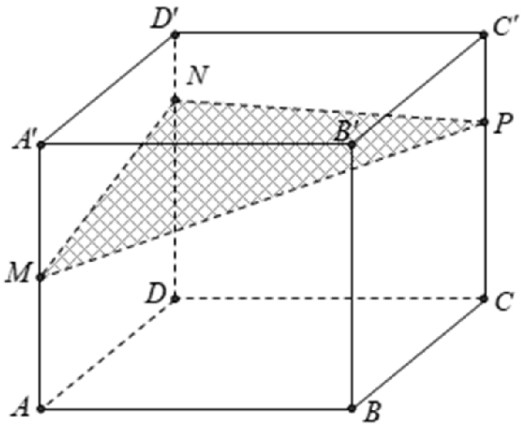
Biết $SA = 6$, $SB = 3$, $SC = 4$, $SD = 2$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSD} = \widehat{DSA} = \widehat{BSD} = 60°$. Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $30\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Câu 46. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V = \frac{1}{8}a^3$. **B.** $V = \frac{1}{6}a^3$. **C.** $V = \frac{1}{36}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{12}a^3$.

Câu 47. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - 2018)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M = MA$, $DN = 3ND'$, $CP = 2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng

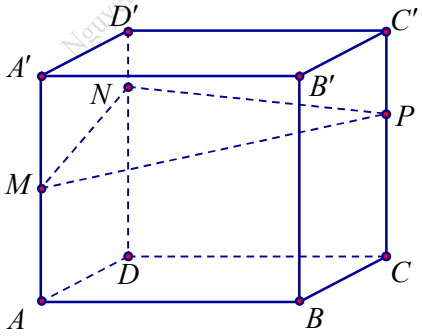


A. $\frac{5275}{6}$. **B.** $\frac{8440}{9}$. **C.** $\frac{7385}{18}$ **D.** $\frac{5275}{12}$.

Câu 48. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích bằng V. Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC=2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AE và song song với BD, (α) cắt SB,SD lần lượt tại hai điểm M,N. Tính theo V thể tích của khối chóp $S.AMEN$.

A. $\frac{3V}{8}$. **B.** $\frac{V}{6}$. **C.** $\frac{3V}{16}$. **D.** $\frac{V}{9}$.

Câu 49. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M=MA$; $DN=3ND'$; $CP=2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{7385}{18}$. **B.** $\frac{5275}{12}$. **C.** $\frac{8440}{9}$. **D.** $\frac{5275}{6}$.

Câu 50. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA'; N,P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN=2B'N$, $CP=3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $\frac{32288}{27}$. **B.** $\frac{40360}{27}$. **C.** $\frac{4036}{3}$. **D.** $\frac{23207}{18}$.

Câu 51. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $6a^3$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'}=\frac{CP}{CC'}=\frac{2}{3}$. Tính thể tích V' của đa diện $ABC.MNP$

A. $V'=\frac{11}{27}a^3$. **B.** $V'=\frac{9}{16}a^3$. **C.** $V'=\frac{11}{3}a^3$. **D.** $V'=\frac{11}{18}a^3$.

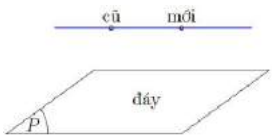
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Kỹ thuật chuyển đỉnh

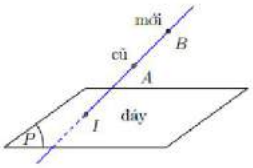
A. Song song đáy

$$\boxed{V_{cũ} = V_{mới}}$$



B. Cắt đáy

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{Giao\ cũ}{Giao\ mới} = \frac{IA}{IB}$$



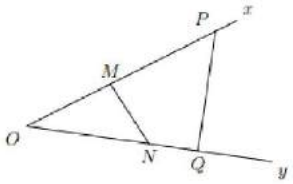
2. Kỹ thuật chuyển đáy (đường cao không đổi)

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{S_{đáy}}{S_{đáy\ mới}}$$

- Để kỹ thuật chuyển đáy được thuận lợi, ta nên chọn hai đáy có cùng công thức tính diện tích, khi đó ta sẽ dễ dàng so sánh tỉ số hơn.
- Cả hai kỹ thuật đều nhằm mục đích chuyển đa diện ban đầu về đa diện khác dễ tính thể tích hơn.

3. Tỉ số diện tích của hai tam giác

$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{OM.ON}{OP.OQ}$$

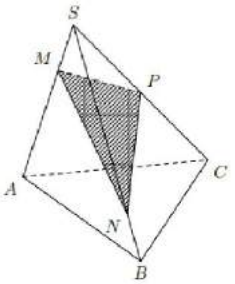


4. Tỉ số thể tích của khối chóp

A. Công thức tỉ số thể tích của hình chóp tam giác

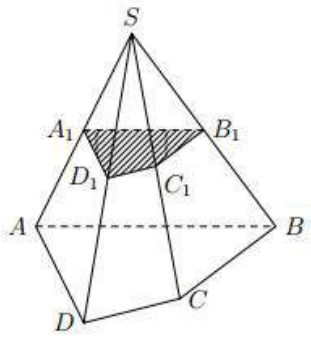
$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$

Công thức trên chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác, do đó trong nhiều trường hợp ta cần hoạt phân chia hình chóp đã cho thành nhiều hình chóp tam giác khác nhau rồi mới áp dụng.



B. Một số trường hợp đặc biệt

Nếu $(A_1B_1C_1D_1)\,||\,(ABCD)$ và $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD} = k$ thì $\frac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}} = k^3$



Kết quả vẫn đúng trong trường hợp đáy là n − giác.

5. Tỉ số thể tích của khối lăng trụ

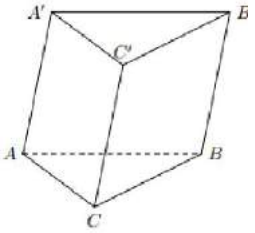
A. Lăng trụ tam giác

Gọi V là thể tích khối lăng trụ, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 6 đỉnh của lăng trụ, $V_{(5)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 5 trong 6 đỉnh của lăng trụ. Khi đó:

$V_{(4)} = \frac{V}{3}$

$V_{(5)} = \frac{2}{3}V$

Ví dụ: $V_{A'B'BC} = \frac{V}{3}; V_{A'B'ABC} = \frac{2V}{3}$



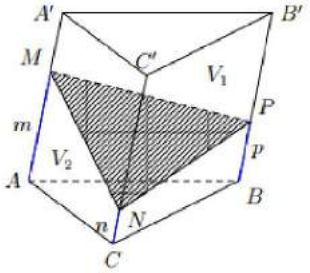
B. Mặt phẳng cắt các cạnh bên của lăng trụ tam giác

Gọi V_1, V_2 và V lần lượt là thể tích phần trên, phần dưới và lăng trụ. Giả sử

$\frac{AM}{AA'} = m, \frac{CN}{CC'} = n, \frac{BP}{BB'} = p$

Khi đó: $V_2 = \frac{m+n+p}{3}.V$

Khi $M \equiv A', N \equiv C$ thì $\frac{AM}{AA'} = 1, \frac{CN}{CC'} = 0$



6. Khối hộp

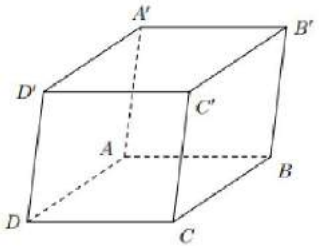
A. Tỉ số thể tích của khối hộp

Gọi V là thể tích khối hộp, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp. Khi đó:

$V_{(4)}$ (hai đường chéo của hai mặt phẳng song song) $= \frac{V}{3}$

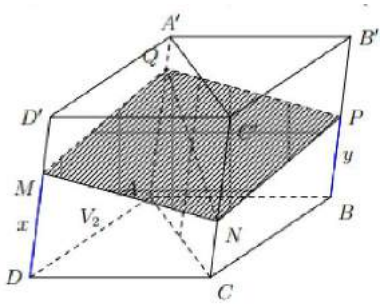
$V_{(4)}$ (trường hợp còn lại) $= \frac{V}{6}$

Ví dụ: $V_{A'C'BD} = \frac{V}{3}, V_{A'C'D'D} = \frac{V}{6}$



B. Mặt phẳng cắt các cạnh của hình hộp (chỉ quan tâm tới hai cạnh đối nhau)

$\left.\begin{array}{l} \frac{DM}{DD'} = x \\ \frac{BP}{BB'} = y \end{array}\right\} \Rightarrow V_2 = \frac{x+y}{2}.V$

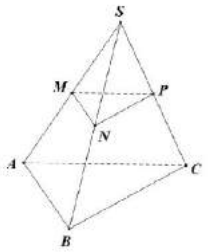


Dạng 1. Tỉ số thể tích khối chóp tam giác

Câu 1. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}}$ bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải



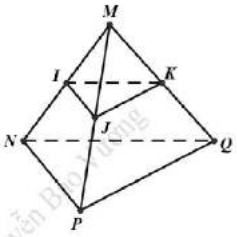
Ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNP}}=\frac{SA}{SM}.\frac{SB}{SN}.\frac{SC}{SP}=2.2.2=8$, suy ra đáp án **C.**

Câu 2. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $MNPQ$. Gọi I; J; K lần lượt là trung điểm của các cạnh MN; MP; MQ. Tỉ số thể tích $\frac{V_{MIJK}}{V_{MNPQ}}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{6}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\frac{V_{M.IJK}}{V_{M.NPQ}}=\frac{MI}{MN}.\frac{MJ}{MP}.\frac{MK}{MQ}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

Câu 3. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{16}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{1}{2}$

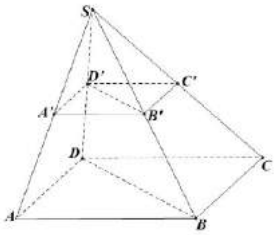
Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{16}$.

Và $\frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.BDC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{16}$.

Suy ra $\frac{V_{S.A'B'D'}}{V_{S.ABCD}}+\frac{V_{S.B'D'C'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$.

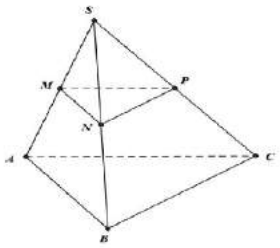


Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm của SA,SB,SC. Tính tỉ số thể tích của 2 khối chóp $S.MNP$ và $S.ABC$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{16}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



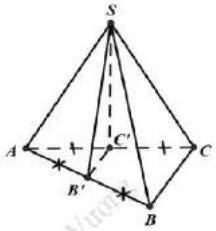
Ta có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SP}{SC}=\frac{1}{8}$

Câu 5. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích V. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của AB,AC. Tính theo V thể tích khối chóp $S.AB'C'$.

A. $\frac{1}{3}V$. **B.** $\frac{1}{2}V$. **C.** $\frac{1}{12}V$. **D.** $\frac{1}{4}V$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tỷ số thể tích $\frac{V_{A.SB'C'}}{V_{A.SBC}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Do đó $V_{A.SB'C'}=\frac{1}{4}V_{A.SBC}$ hay $V_{S.AB'C'}=\frac{1}{4}V$.

Câu 6. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SB,SC,SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A. 16. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

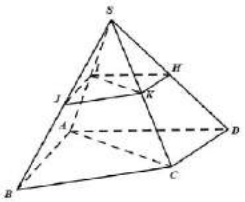
Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.IJK}}=\frac{SA}{SI}.\frac{SB}{SJ}.\frac{SC}{SK}=8\Rightarrow V_{S.ABC}=8V_{S.IJK}$.

$\frac{V_{S.ACD}}{V_{S.IKH}}=\frac{SA}{SI}.\frac{SC}{SK}.\frac{SD}{SH}=8\Rightarrow V_{S.ACD}=8V_{S.IKH}$

Do đó: $V_{S.ABCD}=8V_{S.IJKH}=8$.



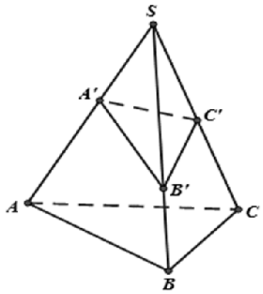
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$, trên các tia SA,SB,SC lần lượt lấy các điểm A', B', C'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC}{SC'}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

Lời giải

Chọn D



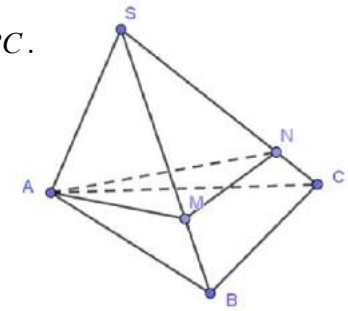
Theo công thức tỉ số thể tích ta có $\frac{V_1}{V_2}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$.

Câu 8. **(Gia Lai 2019)** Cho khối chóp SABC có thể tích bằng $5a^3$. Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $SM=3MB$, $SN=4NC$ (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích V của khối chóp $AMNCB$.

A. $V=\frac{3}{5}a^3$. **B.** $V=\frac{3}{4}a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V_1 là thể tích khối chóp $SAMN$ và V_o là thể tích khối chóp $SABC$.

Theo công thức tỷ lệ thể tích ta có: $\frac{V_1}{V_o}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{3}{4}.\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$.

V là thể tích khối chóp $AMNCB$ ta có $V+V_1=V_0$.

Vậy $V=\frac{2}{5}V_0=\frac{2}{5}.5a^3=2a^3$.

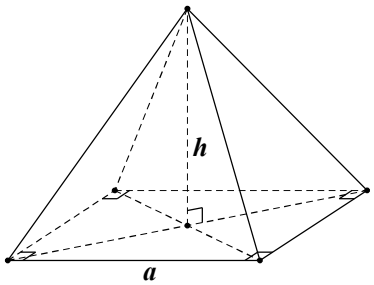
Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. Nếu một hình chóp tứ giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên 2 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 2 lần. **B.** 4 lần. **C.** 6 lần. **D.** 8 lần.

Lời giải

Chọn D



Gọi h, a lần lượt là chiều cao và cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều.

Thể tích của khối chóp tứ giác đều là $V=\frac{1}{3}a^2h$.

Khi tăng chiều cao và cạnh đáy lên 2 lần thì ta được khối chóp tứ giác đều mới có thể tích là

$$V'=\frac{1}{3}(2a)^2(2h)=8\cdot\frac{1}{3}a^2h=8V.$$

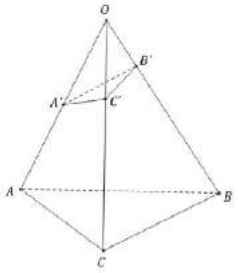
Vậy thể tích của khối chóp tăng lên 8 lần.

Câu 10. Trên ba cạnh OA, OB, OC của khối chóp $O.ABC$ lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $2OA' = OA,\ 4OB' = OB$ và $3OC' = OC$. Tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $O.A'B'C'$ và $O.ABC$ là

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn B



$$\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}} = \frac{OA'}{OA}.\frac{OB'}{OB}.\frac{OC'}{OC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

Câu 11. Cho khối chóp $SAB.C$, M là trung điểm của SA. Tỉ số thể tích $\frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

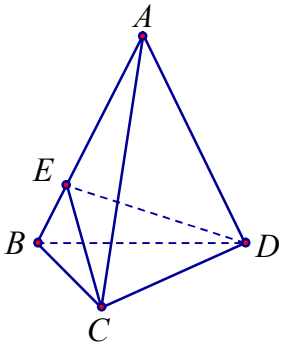
Chọn B

Ta có $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{2}$.

Câu 12. **(THPT Hoa Lư A - 2018)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V và điểm E trên cạnh AB sao cho $AE = 3EB$. Tính thể tích khối tứ diện $EBCD$ theo V.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{5}$.

Lời giải



$$\frac{V_{B.ECD}}{V_{A.BCD}} = \frac{BE}{BA}.\frac{AC}{AC}.\frac{AD}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{B.ECD} = V_{E.BCD} = \frac{1}{4}V$$

Câu 13. **(Chuyên Vinh - 2018)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V. Các điểm A', B', C' tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SB, SC. Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{V}{8}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{16}$.

Lời giải

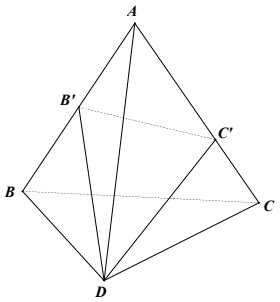
Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{V}{8}$.

Câu 14. **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh a. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B',C' sao cho $AB'=\frac{a}{2}, AC'=\frac{2a}{3}$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}=\frac{1}{3}$.



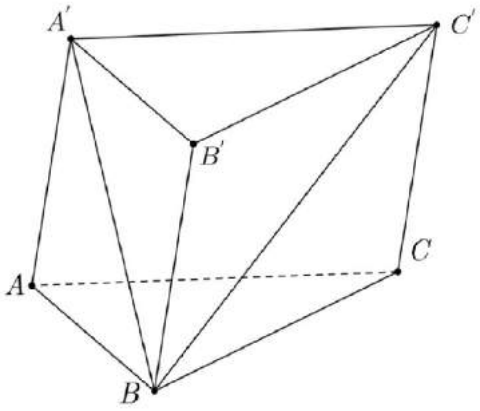
Dạng 2. Tỉ số khối lăng trụ

Câu 1. **(Sở Nam Định - 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $BAA'C'C$.

A. $\frac{3V}{4}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V}{2}$. **D.** $\frac{V}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng $(BA'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối: $B.AA'C'C$ và $B.A'B'C'$

$\Rightarrow V_{B.AA'C'C}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{B.A'B'C'}$.

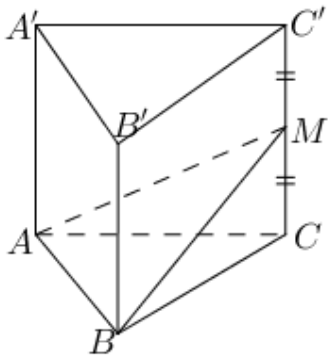
Khối chóp $B.A'B'C'$ và khối lăng trụ có chung đáy và chung chiều cao $\Rightarrow V_{B.A'B'C'}=\frac{1}{3}V$

$\Rightarrow V_{BAA'C'C}=V-\frac{1}{3}V=\frac{2V}{3}$.

Câu 2. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm CC'. Mặt phẳng (ABM) chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối lăng trụ chứa đỉnh C và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{5}$

Lời giải



V_1 là thể tích khối lăng trụ chứa đỉnh C tức là $V_1 = V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.MC$

V_2 là thể tích khối đa diện còn lại $\Rightarrow V_2 = V_{ABC.A'B'C'} - V_1 = S_{ABC}.CC' - \frac{1}{6}S_{ABC}.CC' = \frac{5}{6}S_{ABC}.CC'$

Khi đó ta có tỉ số

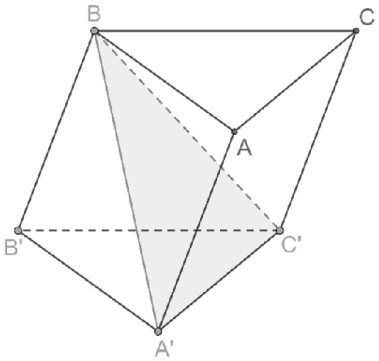
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}S_{ABC}MC}{\frac{5}{6}S_{ABC}.CC'} = \frac{\frac{1}{6}S_{ABC}.CC'}{\frac{5}{6}S_{ABC}.CC'} = \frac{1}{5}.$$

Câu 3. Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Mặt phẳng $(A'BC')$ chia khối lăng trụ thành một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác có thể tích lần lượt là

A. 2 và 4. **B.** 3 và 3. **C.** 4 và 2. **D.** 1 và 5.

Lời giải

Chọn A



+) Thể tích khôi lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right).S_{A'B'C'} = 6$.

+) Thể tích khối chóp tam giác $B.A'B'C'$ là:

$$V_{B.A'B'C'} = \frac{1}{3}.d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right).S_{A'B'C'} = \frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}.6 = 2.$$

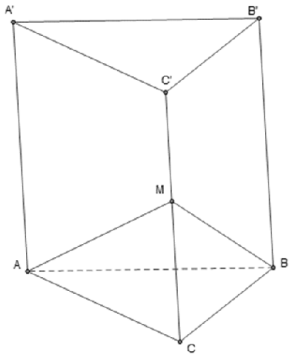
Vậy thể tích khối chóp tứ giác $B.ACC'A'$ là: $V_{B.ACC'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{B.A'B'C'} = 6 - 2 = 4$.

Câu 4. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Mặt phẳng (MAB) chia khối lăng trụ thành hai phần có tỉ số $k \le 1$. Tìm k?

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V = d\left(C',(ABC)\right)\cdot S_{ABC}$.

Khi đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3}d\left(M,(ABC)\right).S_{ABC} = \frac{1}{6}d\left(C',(ABC)\right)\cdot S_{ABC} = \frac{1}{6}V \Rightarrow V_{ABM.A'B'C'} = \frac{5}{6}V$.

Vậy $k = \frac{V_{M.ABC}}{V_{ABM.A'B'C'}} = \frac{1}{5}$.

Câu 5. **(THPT Thăng Long 2019)** Một khối lăng trụ tứ giác đều có thể tích là 4. Nếu gấp đôi các cạnh đáy đồng thời giảm chiều cao của khối lăng trụ này hai lần thì được khối lăng trụ mới có thể tích là:

A. 8. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Giả sử khối lăng trụ tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là a và chiều cao là h. Khi đó thể tích khối lăng trụ tứ giác đều được tính bởi công thức $V = B.h = a^2.h = 4$.

Nếu gấp đôi các cạnh đáy thì diện tích đáy mới $B' = 4a^2$. Giảm chiều cao hai lần nên chiều cao mới $h' = \frac{h}{2}$. Vì vậy thể tích khối lăng trụ mới sẽ là: $V = B'.h' = 4a^2.\frac{h}{2} = 2a^2h = 8$.

Câu 6. Biết khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Nếu tăng mỗi cạnh của hình hộp đó lên gấp hai lần thì thể tích khối hộp mới là:

A. $8V$. **B.** $4V$. **C.** $2V$. **D.** $16V$.

Lời giải

Chọn A

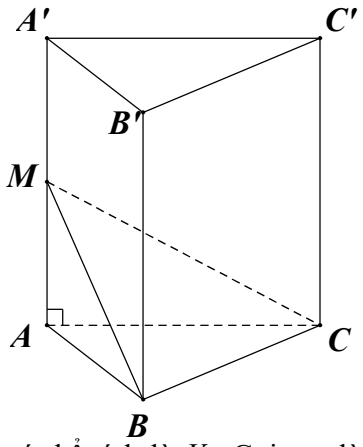
Ta có nếu tăng mỗi cạnh của khối hộp lên hai lần thì ta được khối hộp mới đồng dạng với khối hộp cũ theo tỉ số 2. Do đó thể tích khối hộp mới bằng $2^3.V = 8V$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của AA'. Tỉ số thể tích $\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC}$

$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}AM.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'}$.

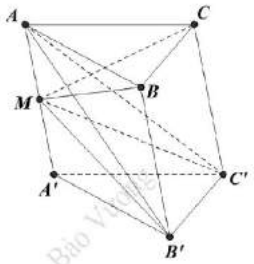
$\Rightarrow \frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}$

Câu 8. **(HKI-NK HCM-2019)** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là trung điểm cạnh AA'. Khi đó thể tích khối chóp $M.BCC'B'$ là

A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{2V}{3}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $AA' // (BB'C'C)$ nên $d(M,(BB'C'C)) = d(A,(BB'C'C))$ suy ra $V_{M.BB'C'C} = V_{A.BB'C'C}$

Mà $V_{A.BB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{AA'B'C'} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V$

Vậy $V_{M.BB'C'C} = \frac{2}{3}V$.

Câu 9. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Biết diện tích mặt bên $(ABB'A')$ bằng 15, khoảng cách từ điểm C đến $(ABB'A')$ bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

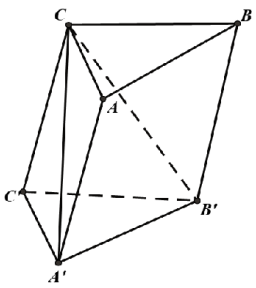
A. 30. **B.** 45. **C.** 60. **D.** 90.

Lời giải

Chọn B

Ta có $V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{3}d(C;(ABB'A')).S_{ABB'A'} = \frac{1}{3}.6.15 = 30.$

Mà $V_{C.ABB'A'} = \frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{C.ABB'A'} = 45.$

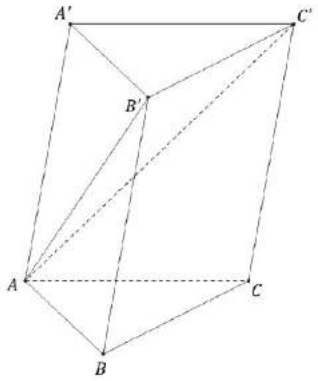


Câu 10. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Tính thể tích khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{2}$. **C.** $\frac{3V}{4}$. **D.** $\frac{2V}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi chiều cao của lăng trụ là h, $S_{ABC} = S_{A'B'C'} = S$. Khi đó $V = S.h$.

Ta có $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}V \Rightarrow V_{ABCB'C'} = \frac{2}{3}V$.

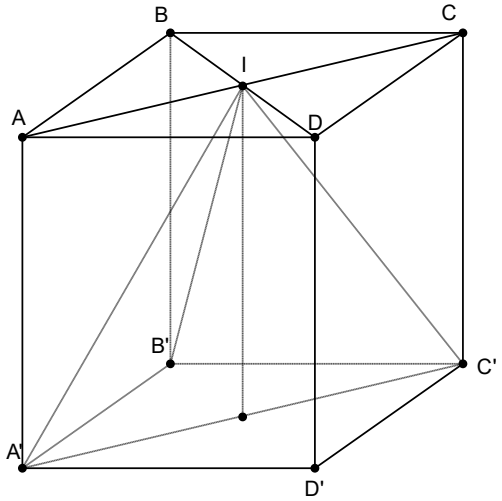
Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có I là giao điểm của AC và BD. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của các khối $ABCD.A'B'C'D'$ và $I.A'B'C'$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 6$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = 2$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = 3$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_1 = AA'.S_{A'B'C'D'}$

$V_2 = \frac{1}{3}d\left(I;(A'B'C')\right).S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}d\left(A;(A'B'C')\right).\frac{1}{2}S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{6}AA'.S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{6}V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 6$

Chuyên đề 13 TỈ SỐ THỂ TÍCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

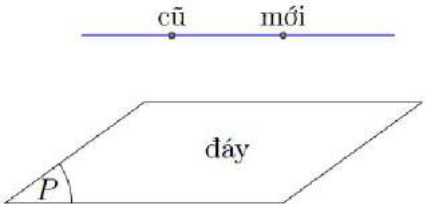
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

LÝ THUYẾT CHUNG

1. Kỹ thuật chuyển đỉnh

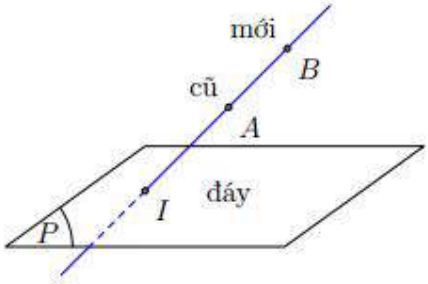
A. Song song đáy

$\boxed{V_{cũ} = V_{mới}}$



B. Cắt đáy

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{Giao\ cũ}{Giao\ mới} = \frac{IA}{IB}$$



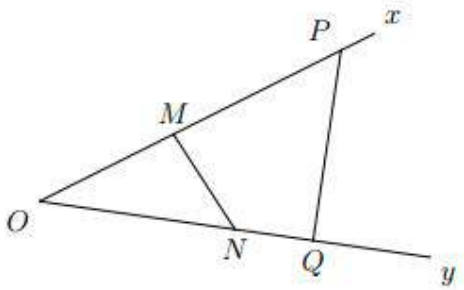
2. Kỹ thuật chuyển đáy (đường cao không đổi)

$$\frac{V_{cũ}}{V_{mới}} = \frac{S_{đáy}}{S_{đáy\ mới}}$$

- Để kỹ thuật chuyển đáy được thuận lợi, ta nên chọn hai đáy có cùng công thức tính diện tích, khi đó ta sẽ dễ dàng so sánh tỉ số hơn.
- Cả hai kỹ thuật đều nhằm mục đích chuyển đa diện ban đầu về đa diện khác dễ tính thể tích hơn.

3. Tỉ số diện tích của hai tam giác

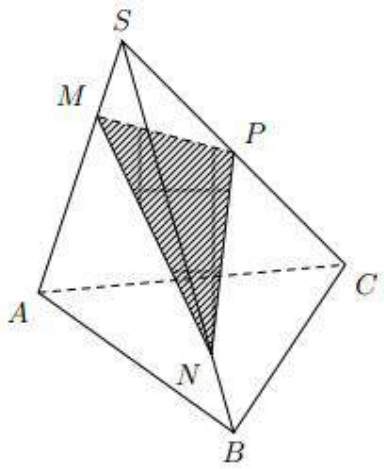
$$\frac{S_{\Delta OMN}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{OM.ON}{OP.OQ}$$



4. Tỉ số thể tích của khối chóp

A. Công thức tỉ số thể tích của hình chóp tam giác

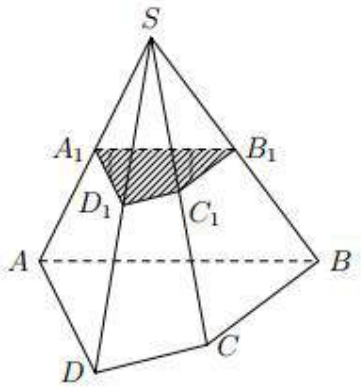
$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}$$



Công thức trên chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác, do đó trong nhiều trường hợp ta cần hoạt phân chia hình chóp đã cho thành nhiều hình chóp tam giác khác nhau rồi mới áp dụng.

B. Một số trường hợp đặc biệt

Nếu $\left(A_1B_1C_1D_1\right)\|\left(ABCD\right)$ và $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=k$ thì $\frac{V_{S.A_1B_1C_1D_1}}{V_{S.ABCD}}=k^3$



Kết quả vẫn đúng trong trường hợp đáy là n − giác.

5. Tỉ số thể tích của khối lăng trụ

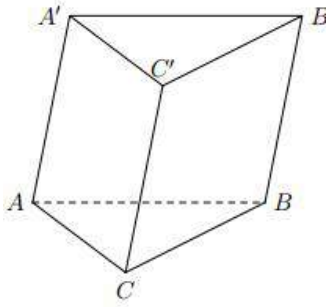
A. Lăng trụ tam giác

Gọi V là thể tích khối lăng trụ, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 6 đỉnh của lăng trụ, $V_{(5)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 5 trong 6 đỉnh của lăng trụ. Khi đó:

$$V_{(4)}=\frac{V}{3}$$

$$V_{(5)}=\frac{2}{3}V$$

Ví dụ: $V_{A'B'BC}=\frac{V}{3};V_{A'B'ABC}=\frac{2V}{3}$

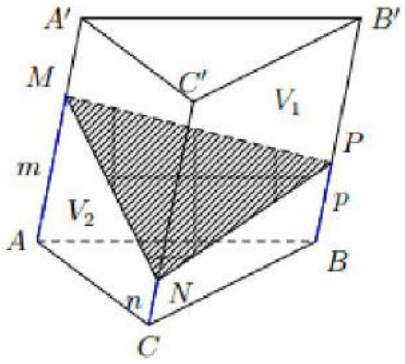


B. Mặt phẳng cắt các cạnh bên của lăng trụ tam giác

Gọi V_1, V_2 và V lần lượt là thể tích phần trên, phần dưới và lăng trụ. Giả sử

$\frac{AM}{AA'}=m,\frac{CN}{CC'}=n,\frac{BP}{BB'}=p$

Khi đó: $V_2=\frac{m+n+p}{3}.V$



Khi $M\equiv A',N\equiv C$ thì $\frac{AM}{AA'}=1,\frac{CN}{CC'}=0$

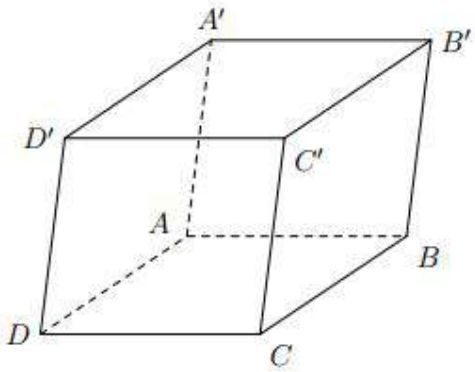
6. Khối hộp

A. Tỉ số thể tích của khối hộp

Gọi V là thể tích khối hộp, $V_{(4)}$ là thể tích khối chóp tạo thành từ 4 trong 8 đỉnh của khối hộp. Khi đó:

$V_{(4)}$ (hai đường chéo của hai mặt phẳng song song) $=\frac{V}{3}$

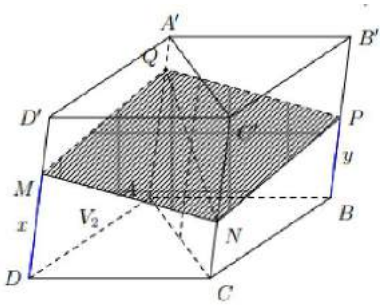
$V_{(4)}$ (trường hợp còn lại) $=\frac{V}{6}$



Ví dụ: $V_{A'C'BD}=\frac{V}{3},V_{A'C'D'D}=\frac{V}{6}$

B. Mặt phẳng cắt các cạnh của hình hộp (chỉ quan tâm tới hai cạnh đối nhau)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{DM}{DD'}=x\\ \dfrac{BP}{BB'}=y\end{array}\right\}\Rightarrow V_2=\frac{x+y}{2}.V$$

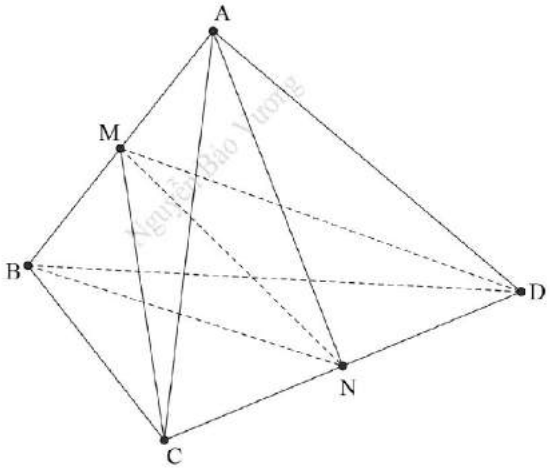


Câu 1. **(HSG 12-Sở Nam Định-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V với M,N lần lượt là trung điểm AB,CD. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích của $MNBC$ và $MNDA$. Tính tỉ lệ $\dfrac{V_1+V_2}{V}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì M,N lần lượt là trung điểm AB,CD nên ta có:

$d\left(A,\left(MCD\right)\right)=d\left(B,\left(MCD\right)\right);d\left(C,\left(NAB\right)\right)=d\left(D,\left(NAB\right)\right)$, do đó:

$V_{A.MCD}=V_{B.MCD}=\dfrac{V}{2};V_1=V_{MNBC}=V_{C.MNB}=V_{D.MNB}=\dfrac{V_{B.MCD}}{2}=\dfrac{V}{4};$

$V_2=V_{MNAD}=V_{D.MNA}=V_{C.MNA}=\dfrac{V_{A.MCD}}{2}=\dfrac{V}{4}.$

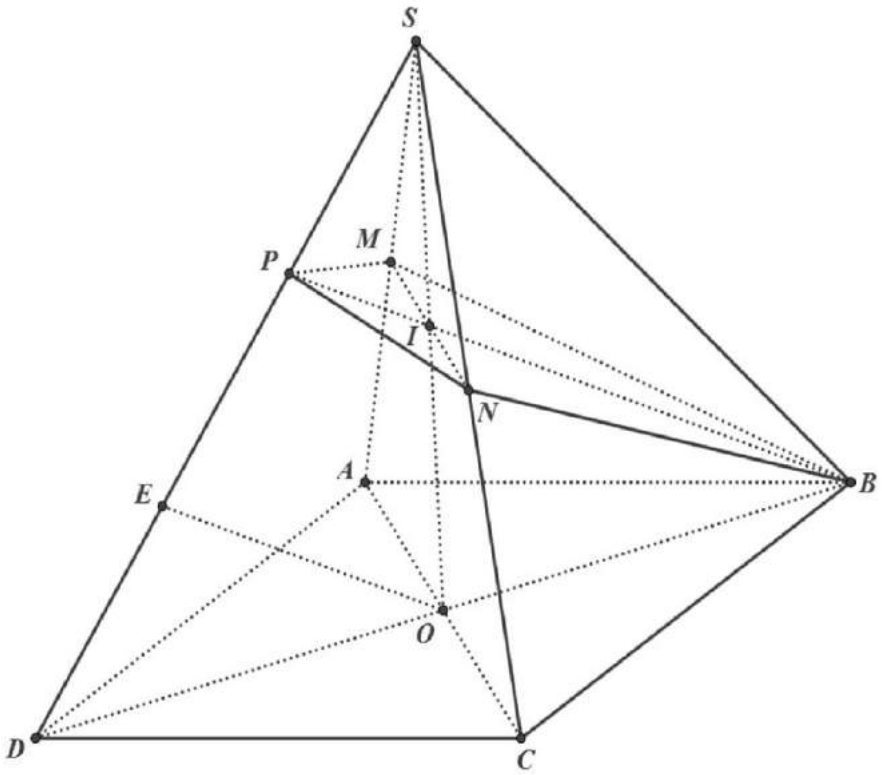
$\Rightarrow\dfrac{V_1+V_2}{V}=\dfrac{\dfrac{V}{4}+\dfrac{V}{4}}{V}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 2. **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M và N là trung điểm các cạnh SA,SC, mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}$ bằng :

A. $\frac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{V_{SBMPN}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $SO\cap MN=\{I\}$, $SI\cap SD=\{P\}$, $OE//BP$;

Khi đó: I là tung điểm của MN,SO nên $\frac{SP}{SE}=\frac{SI}{SO}=\frac{1}{2}$; $\frac{DE}{DP}=\frac{DO}{DP}=\frac{1}{2}$

Vậy: $SP=PE=ED\Rightarrow\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}$

$\frac{V_{SMPB}}{V_{SADB}}=\frac{SP}{SD}\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{V_{SMPB}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{12}$

$\frac{V_{SNPB}}{V_{SCDB}}=\frac{SP}{SD}\frac{SN}{SC}=\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{V_{SNPB}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{12}$

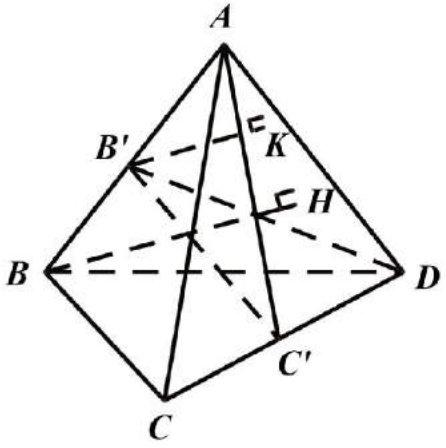
$V_{SBMPN}=V_{SBMP}+V_{SBPN}\Rightarrow\frac{V_{SMPNB}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi B',C' lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó tỷ số thể tích của khối đa diện $AB'C'D$ và khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:.

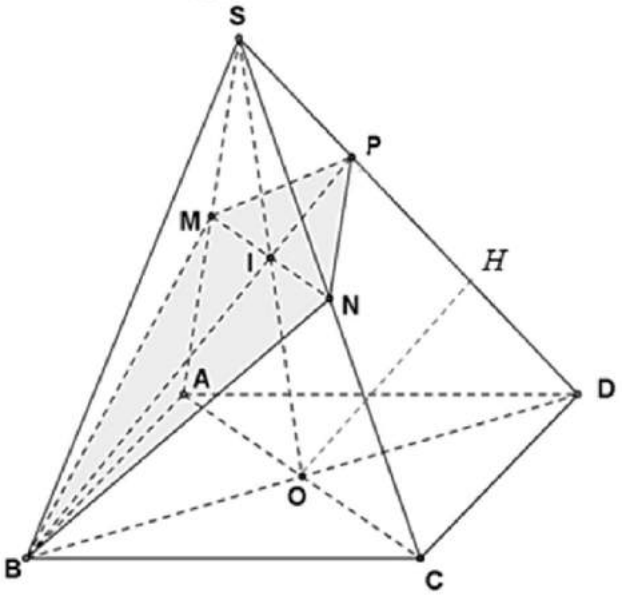
$$\frac{V_{AB'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{B'AC'D}}{V_{BACD}}=\frac{\frac{1}{3}S_{\Delta DC'A}.d\left(B',\left(DC'A\right)\right)}{\frac{1}{3}S_{\Delta DCA}.d\left(B,\left(DCA\right)\right)}=\frac{\frac{1}{2}DC'.DA.\sin\widehat{ADC'}}{\frac{1}{2}DC.DA.\sin\widehat{ADC}}.\frac{d\left(B',\left(DC'A\right)\right)}{d\left(B,\left(DCA\right)\right)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Tỉ số $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có M,N là trung điểm của SA,SC nên $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$.

Cách 1: Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSOD ta có : $\frac{PS}{PD}.\frac{BD}{BO}.\frac{IO}{IS}=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}.2.1=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}$.

Cách 2: Kẻ $OH\,//\,BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD.

Ta có $OH\,//\,IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH.

Suy ra $SP = PH = HD \Rightarrow \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

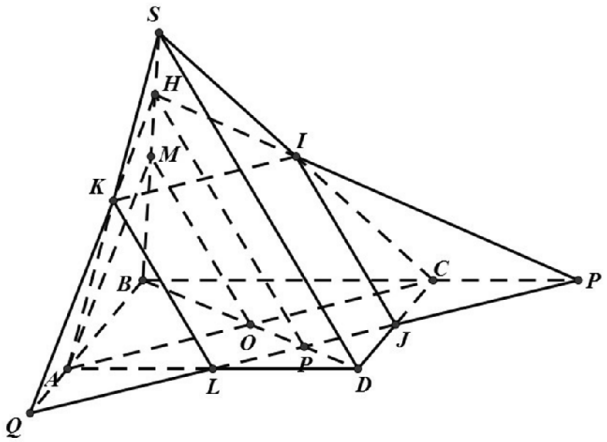
Theo công thức tỉ số thể tích ta có : $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{2V_{S.BMP}}{2V_{S.BAD}} = \dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SP}{SD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$..

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K, M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SB, (α) là mặt phẳng qua K song song với AC và AM. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{25}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{11}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{17}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{23}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$; I, H lần lượt là trung điểm SC, SM. Do (α) // (ACM) nên (α) cắt (SAD), (SBD), (SCD) lần lượt tại KL, HP, IJ cùng song song với OM.

Ta có $\dfrac{V_{B.HQP}}{V_{B.SAC}} = \dfrac{BH}{BS}\cdot\dfrac{BQ}{BA}\cdot\dfrac{BP}{BC} = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{27}{16}$. Suy ra $V_{B.HQP} = \dfrac{27}{16}V_{B.SAC} = \dfrac{27}{16}\cdot\dfrac{1}{2}V = \dfrac{27}{32}V$.

$\dfrac{V_{A.KQL}}{V_{A.SBD}} = \dfrac{AK}{AS}\cdot\dfrac{AQ}{AB}\cdot\dfrac{AL}{AD} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8} \Rightarrow V_{A.KQL} = \dfrac{1}{8}V_{A.SBD} = \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}V = \dfrac{1}{16}V$.

Tương tự: $\Rightarrow V_{C.IPJ} = \dfrac{1}{16}V$.

Do đó $V_2 = \left(\dfrac{27}{32} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}\right)V = \dfrac{23}{32}V \Rightarrow V_1 = \dfrac{9}{32}V$.

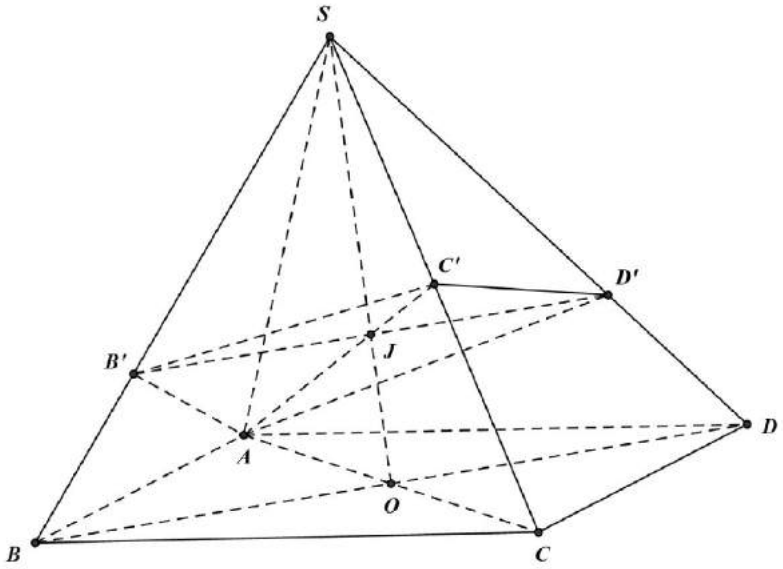
Vậy tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{9}{23}$.

Câu 6. **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết C' là trung điểm của SC. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{9}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_2 = 2.V_{S.ABC} = 2.V_{S.ACD}$. Gọi $O = AC \cap BD$, $J = SO \cap AC'$.

Vì C' là trung điểm của SC nên J là trọng tâm của ΔSAC.

Vì $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ mà (P) qua A và vuông góc với SC nên $(P) // BD$.

Trong (SBD) qua J kẻ đường thẳng song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại B', D'.

Ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SJ}{SO} = \frac{2}{3}$.

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{S.AB'C'}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.AC'D'}}{2V_{S.ACD}} = \frac{1}{2}\left(\frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} + \frac{SA}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}\right) = \frac{1}{2}.2.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8}$; $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC} = \frac{1}{8}$.

Mà $V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$, suy ra

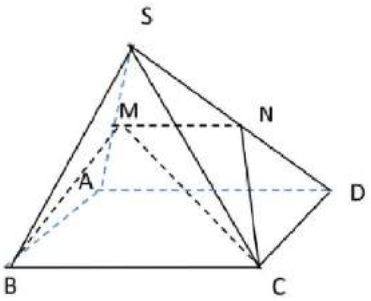
$$\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{8}(V_{S.ABC} + V_{S.ACD})}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

Câu 8. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M và đặt $\frac{SM}{SA} = x$. Giá trị x để mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau là:

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $x=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$\begin{cases} BC//(SAD) \\ BC\subset(BMC) \end{cases} \Rightarrow (SAD)\cap(BMC)=MN//BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=x.$

$\dfrac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{2V_{S.MBC}}{V}=\dfrac{SM}{SA}=x$

$\dfrac{V_{S.MCN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{2V_{S.MCN}}{V}=\dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SD}=x^2$

$\Rightarrow \dfrac{2\left(V_{S.MCN}+V_{S.MBC}\right)}{V}=x+x^2 \Leftrightarrow \dfrac{2V_{S.MBCN}}{V}=x+x^2 \Leftrightarrow \dfrac{V_{S.MBCN}}{V}=\dfrac{x+x^2}{2}\ (1)$

Mặt phẳng (MBC) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích bằng nhau $\dfrac{V_{S.MNBC}}{V}=\dfrac{1}{2}\ (2)$

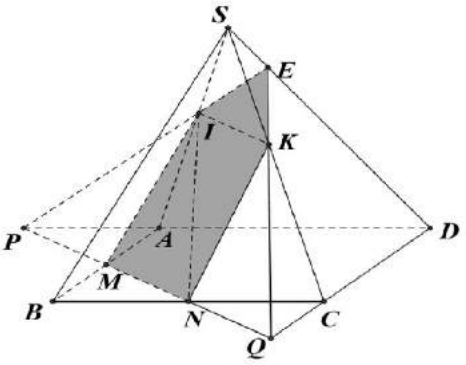
Từ (1) và (2) ta có: $1=x+x^2 \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chop $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\dfrac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k=\dfrac{IA}{IS}$?

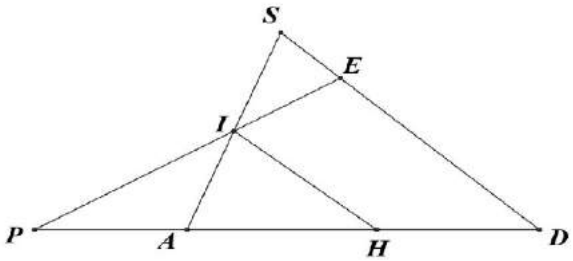
A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Ta có $S_{\Delta APM}=S_{\Delta BMN}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{8}S_{ABCD}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{8}$.

$\frac{d\left(I,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{IA}{SA}=\frac{k}{k+1}$.

$\Rightarrow\frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}}=\frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}.\frac{d\left(I,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{k}{8(k+1)}\Rightarrow V_{I.APM}=\frac{k}{8(k+1)}V$.

Do $MN//AC\Rightarrow IK//AC\Rightarrow IK//(ABCD)\Rightarrow d\left(I;(ABCD)\right)=d\left(K;(ABCD)\right)$.

Mà $S_{\Delta APM}=S_{\Delta NCQ}.\Rightarrow V_{I.APM}=V_{K.NCQ}=\frac{k}{8(k+1)}V$.

Kẻ $IH//SD$ $(H\in SD)$ như hình 2. Ta có :

$\frac{IH}{SD}=\frac{AH}{AD}=\frac{AI}{AS}=\frac{k}{k+1}$.

$\frac{IH}{ED}=\frac{PH}{PD}=\frac{PA}{PD}+\frac{AH}{PD}=\frac{PA}{PD}+\frac{2AH}{3AD}=\frac{1}{3}+\frac{2k}{3(k+1)}=\frac{3k+1}{3(k+1)}$.

$\Rightarrow\frac{ED}{SD}=\frac{IH}{SD}:\frac{ID}{ED}=\frac{3k}{3k+1}\Rightarrow\frac{d\left(E,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{ED}{SD}=\frac{3k}{3k+1}$.

$\frac{S_{\Delta PQD}}{S_{ABCD}}=\frac{9}{8}\Rightarrow\frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{27k}{24k+8}\Rightarrow V_{E.PQD}=\frac{27k}{24k+8}V$.

$V_{EIKAMNCD}=\frac{13}{20}V\Leftrightarrow V_{E.PDC}-V_{I.APM}-V_{K.NQC}=\frac{13}{20}V$

$\Leftrightarrow\frac{27k}{8(3k+1)}V-\frac{k}{8(k+1)}V-\frac{k}{8(k+1)}V=\frac{13}{20}V$

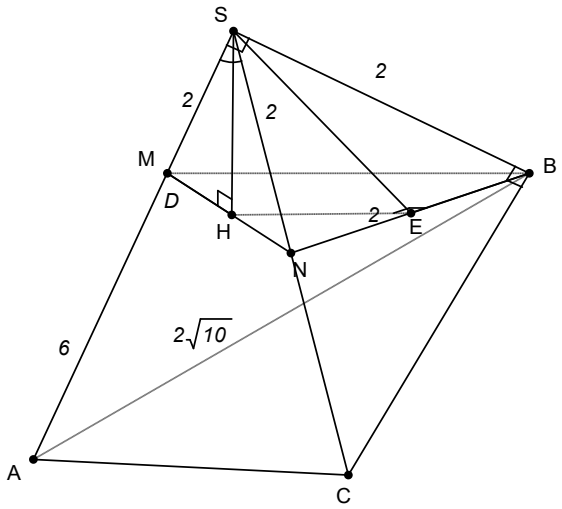
$\Leftrightarrow\frac{27k}{2(3k+1)}-\frac{k}{k+1}=\frac{13}{5}\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=6,SB=2,SC=4,AB=2\sqrt{10},\widehat{SBC}=90^{\circ},\widehat{ASC}=120^{\circ}$. Mặt phẳng (P) đi qua B và trung điểm N của SC đồng thời vuông góc với (SAC) cắt SA tại M. Tính tỉ số thể tích $k=\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}$.

A. $k=\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{1}{4}$. **C.** $k=\frac{1}{6}$. **D.** $k=\frac{2}{9}$.

Lời giải

Chọn C



o,

Ta có:

• $SA^2+SB^2=6^2+2^2=40=AB^2\Rightarrow \widehat{ASB}=90^o$.

• ΔSBC vuông tại $B\Rightarrow BN=\frac{1}{2}SC=2$.

$\Rightarrow SN=NB=SB=2\Rightarrow \Delta SNB$ đều.

Gọi D là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SD=2$, ta có:

$DB^2=2^2+2^2=8$

$DN^2=2^2+2^2-2.2.2.\cos 120^o=12$

$NB^2=4$

$\Rightarrow DB^2+NB^2=DN^2\Rightarrow \Delta DNB$ vuông tại B.

• Gọi H, E lần lượt là trung điểm của $DN, NB,$ ta có:

+) $\begin{cases} NB\perp SE \\ NB\perp HE \end{cases}\Rightarrow NB\perp (SHE)\Rightarrow NB\perp SH$.

+) $\begin{cases} SH\perp DN \\ SH\perp NB \end{cases}\Rightarrow SH\perp (DNB)\Rightarrow (SDN)\perp (DNB)\Rightarrow D\equiv M\Rightarrow SM=2$.

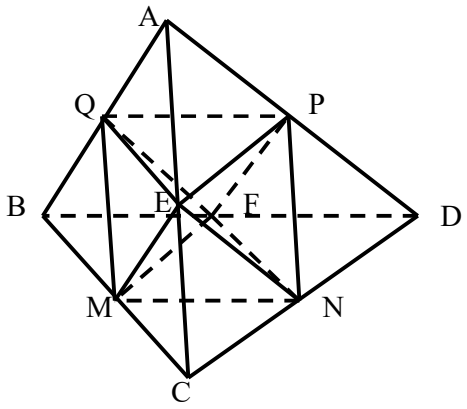
$\Rightarrow k=\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SC}=\frac{2}{6}.\frac{2}{4}=\frac{1}{6}$.

Câu 11. **(Đề tham khảo 2017)** Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4.\frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

(Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$)

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành úp lại.

Suy ra: $V' = 2V_{N.MEPF} = 4.V_{N.MEP} = 4.V_{P.MNE} = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}V = \frac{1}{2}V$

(Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4)

Cách 3. Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{A.QEP} - V_{B.QMF} - V_{C.MNE} - V_{D.NPF}}{V}$

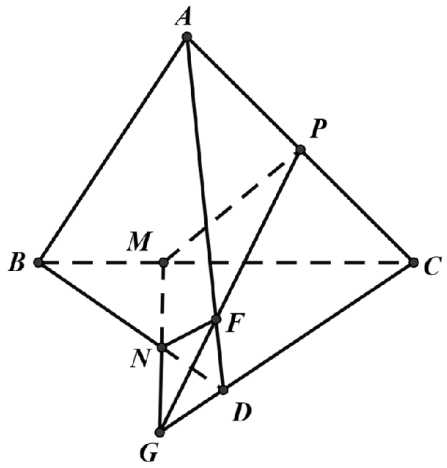
$= 1 - \frac{V_{A.QEP}}{V} - \frac{V_{B.QMF}}{V} - \frac{V_{C.MNE}}{V} - \frac{V_{D.NPF}}{V} = 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \frac{3}{2}BN, AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1, V_2, trong đó khối đa diện chứa cạnh CD có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{13}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{15}{19}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{19}$.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng định lí Me-ne-la-uyt ta có : $\frac{MB}{MC}.\frac{ND}{NB}.\frac{GC}{GD}=1\Rightarrow\frac{GC}{GD}=4$

và $\frac{GC}{GD}.\frac{FD}{FA}.\frac{PA}{PC}=1\Rightarrow\frac{FD}{FA}=\frac{1}{4}$

$V_{DCPMNF}=V_{CPMF}+V_{CMNF}+V_{CNFD}$

$$\frac{V_{CPMF}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(F,(CPM)\right).S_{CPM}}{\frac{1}{3}d\left(\mathrm{D},(ABC)\right).S_{ABC}}=\frac{4}{5}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{V_{CNMF}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(F,(CNM)\right).S_{CNM}}{\frac{1}{3}d\left(A,(CBD)\right).S_{CBD}}=\frac{1}{5}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{45}$$

$$\frac{V_{CNDF}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(C,(FND)\right).S_{FND}}{\frac{1}{3}d\left(C,(ABD)\right).S_{ABD}}=\frac{1}{5}.\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

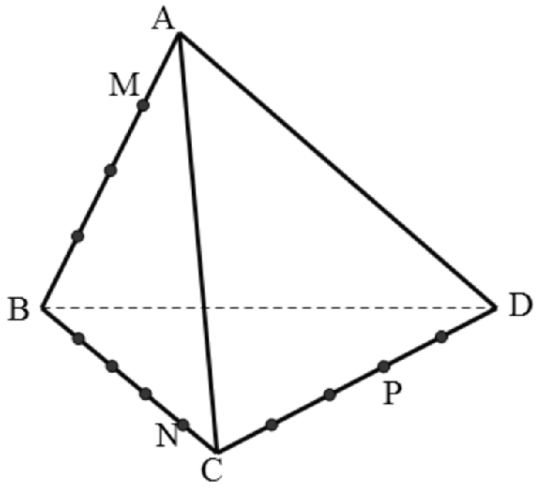
$$\Rightarrow\frac{V_2}{V_{ABCD}}=\frac{4}{15}+\frac{4}{45}+\frac{1}{15}=\frac{19}{45}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{45-19}{19}=\frac{26}{19}$$

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Xét điểm M trên cạnh AB, điểm N trên cạnh BC, điểm P trên cạnh CD sao cho $\frac{MB}{MA}=3,\frac{NB}{NC}=4,\frac{PC}{PD}=\frac{3}{2}$. Gọi V_1,V_2 theo thứ tự là thể tích các khối tứ diện $MNBD$ và $NPAC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$V_1 = \frac{1}{3}h_1.S_1$ với $h_1 = d\left(M;(BCD)\right); S_1 = S_{\Delta NBD}$.

$V_2 = \frac{1}{3}h_2.S_2$ với $h_2 = d\left(A;(BCD)\right); S_2 = S_{\Delta CNP}$.

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1.S_1}{h_2.S_2} = 5$

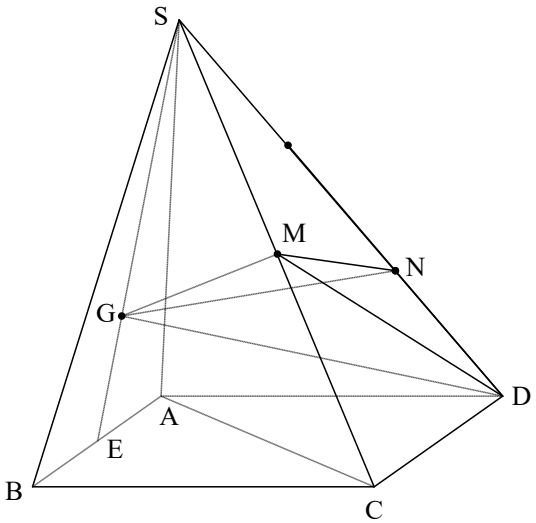
Vì $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{4}$ và $S_1 = \frac{4}{5}S_{\Delta BCD}; S_2 = \frac{1}{5}.\frac{3}{5}S_{\Delta BCD} = \frac{3}{25}S_{\Delta BCD} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{20}{3}$.

Câu 14. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho khối chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC, SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}, \frac{SN}{ND} = 2$, biết G là trọng tâm tam giác SAB. Tỉ số thể tích $\frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$, m, n là các số nguyên dương và $(m,n) = 1$. Giá trị của $m+n$ bằng:

A. 17 **B.** 19 **C.** 21 **D.** 7

Lời giải

Chọn B



$+\ S_{\Delta DMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta SMD}=\frac{1}{6}S_{\Delta SCD}$

+ Gọi E là trung điểm của AB

$\Rightarrow d_{(G,(DMN))}=\frac{2}{3}.d_{(\mathrm{E},(DMN))}=\frac{2}{3}.d_{(\mathrm{A},(DMN))}=\frac{2}{3}.d_{(\mathrm{A},(SCD))}$

$\Rightarrow V_{G.\mathrm{MND}}=\frac{1}{3}.S_{\Delta DMN}.d_{(G,(DMN))}$

$=\frac{1}{3}.\frac{1}{6}S_{\Delta SCD}.\frac{2}{3}.d_{(\mathrm{A},(SCD))}=\frac{1}{9}V_{S.ACD}=\frac{1}{18}V_{S.ABCD}$

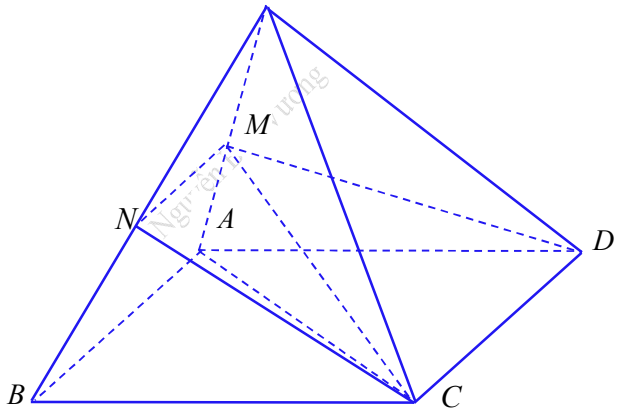
$\Rightarrow \frac{V_{G.MND}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{18}\Rightarrow m+n=19$

Câu 15. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SB. Mặt phẳng $(MNCD)$ chia hình chóp đã cho thành hai phần. Tỉ số thể tích hai phần là (số bé chia số lớn)

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V, khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ là $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V$.

Ta có $\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1=\frac{1}{4}$, do đó $V_{S.MNC}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{8}V$.

Ta có $\frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD}=\frac{1}{2}.1.1=\frac{1}{2}$, do đó $V_{S.MCD}=\frac{1}{2}V_{S.ACD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{4}V$.

Từ đó $V_{S.MNCD}=V_{S.MNC}+V_{S.MCD}=\frac{1}{8}V+\frac{1}{4}V=\frac{3}{8}V$, do đó $V_{MNABCD}=V-\frac{3}{8}V=\frac{5}{8}V$.

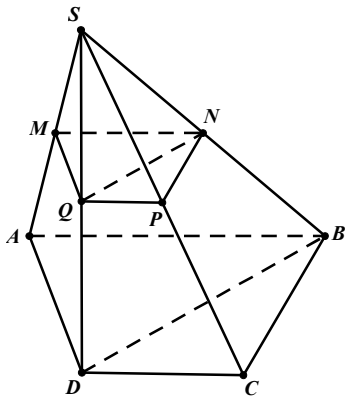
Vậy $\frac{V_{S.MNCD}}{V_{MNABCD}}=\frac{3}{8}V:\frac{5}{8}V=\frac{3}{5}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.MNPQ$ và $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

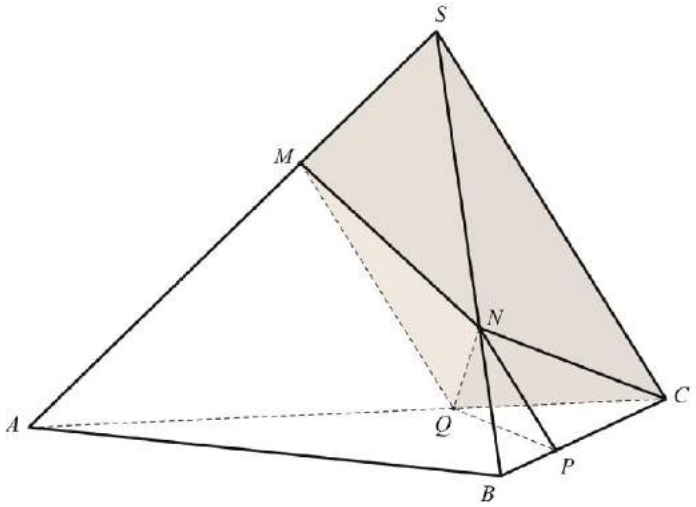
$\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.MNQ}=\frac{1}{8}.V_{S.ABD}$; $\frac{V_{S.NPQ}}{V_{S.BCD}}=\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.NPQ}=\frac{1}{8}.V_{S.BCD}$.

Suy ra: $V_1=V_{S.MNPQ}=V_{S.MNQ}+V_{S.NPQ}=\frac{1}{8}\left(V_{S.ABD}+V_{BCD}\right)=\frac{1}{8}.V_{S.ABCD}=\frac{1}{8}.V_2\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{8}$.

Câu 17. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hình chóp $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA=2SM$, $SN=2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp $S.ABC$ thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với (H_1) là khối đa diện chứa điểm S, (H_2) là khối đa diện chứa điểm A. Gọi V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải



Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Ta có $NP \,//\, MQ \,//\, SC$.

Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{d\left(N,(SAC)\right)}{d\left(B,(SAC)\right)} \cdot \dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$.

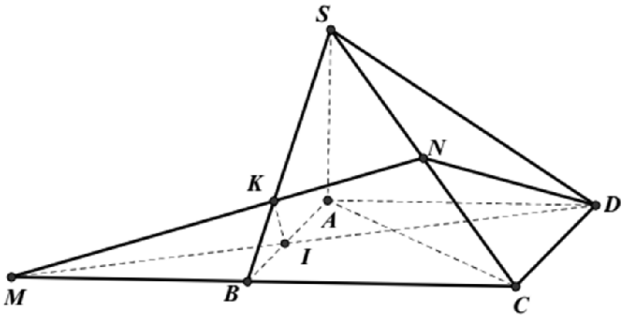
$\dfrac{d\left(N,(SAC)\right)}{d\left(B,(SAC)\right)} = \dfrac{NS}{BS} = \dfrac{2}{3}$; $\dfrac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \dfrac{AM}{AS}.\dfrac{AQ}{AC} = \left(\dfrac{AM}{AS}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \dfrac{5}{9}$.

Do đó $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{9} = \dfrac{10}{27}$.

$\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{d\left(N,(QPC)\right)}{d\left(S,(ABC)\right)} \cdot \dfrac{S_{QPC}}{S_{ABC}} = \dfrac{NB}{SB}\cdot\left(\dfrac{CQ}{CA}\cdot\dfrac{CP}{CB}\right) = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{27}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{10}{27} + \dfrac{2}{27} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$.

Câu 18. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60°$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên).



Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{12}{7}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{7}{5}$.

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD$.

Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $45° \Leftrightarrow \widehat{SOA} = 45°$.

ΔBAD đều $\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = AO.\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $V = \dfrac{1}{3}SA.2S_{\Delta ABD} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Thể tích khối chóp $N.MCD$ bằng thể tích khối chóp $N.ABCD$ bằng: $V'=\frac{1}{2}V=\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

Thể tích khối chóp $KMIB$ bằng: $V''=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}SA.S\Delta_{MBI}=\frac{1}{9}.\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

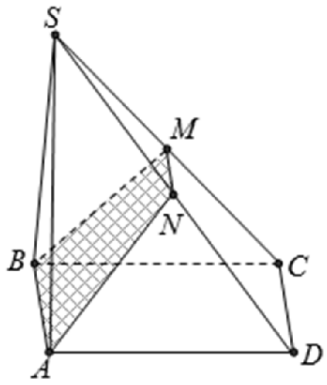
Khi đó: $V_2=V'-V''=\frac{a^3\sqrt{2}}{16}-\frac{a^3\sqrt{2}}{96}=\frac{5\sqrt{2}a^3}{96}$; $V_1=V-V_2=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}-\frac{5\sqrt{2}a^3}{96}=\frac{7a^3\sqrt{2}}{96}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Câu 19. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1<V_2$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{8}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}AB\subset(\alpha)\\AB//CD\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SCD)=MN//AB//CD$.

$\Rightarrow(\alpha)$ cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang $ABMN$.

Khi đó $(ABMN)$ chia hình chóp thành hai đa diện là $S.ABMN$ và $ABCDNM$ có thể tích lần lượt là V_1 và V_2.

Lại có

$\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{SABM}=\frac{1}{2}V_{SABC}=\frac{1}{4}V_{SABCD}$.

$\frac{V_{SAMN}}{V_{SACD}}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{1}{4}V_{SABC}=\frac{1}{8}V_{SABCD}$.

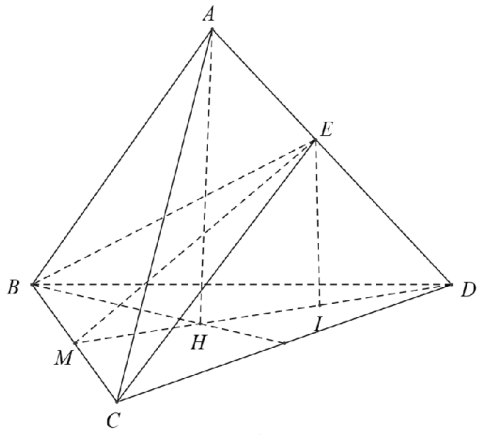
Mà $V_1=V_{SABM}+V_{SAMN}=\frac{3}{8}V_{SABCD}$ và $V_2=V_{SABCD}-V_{SABMN}=\frac{5}{8}V_{SABCD}$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 20. **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Mặt phẳng (P) chứa cạnh BC cắt cạnh AD tại E. Biết góc giữa hai mặt phẳng (P) và (BCD) có số đo là α thỏa mãn $\tan\alpha=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Gọi thể tích của hai tứ diện $ABCE$ và tứ diện $BCDE$ lần lượt là V_1 và V_2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

Lời giải



Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, E trên mặt phẳng (BCD). Khi đó H, $I\in DM$ với M là trung điểm BC.

Ta tính được $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $MH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có góc giữa (P) với $(BCD)\Rightarrow((P),(BCD))=\widehat{EMD}=\alpha$. Khi đó $\tan\alpha=\dfrac{EI}{MI}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$.

Gọi $DE=x\Rightarrow\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{EI}{AH}=\dfrac{DI}{DH}\Rightarrow\begin{cases}EI=\dfrac{DE.AH}{AD}=\dfrac{x.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\dfrac{x\sqrt{6}}{3}\\ DI=\dfrac{DE.DH}{AD}=\dfrac{x.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\end{cases}$.

Khi đó $MI=DM-DI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

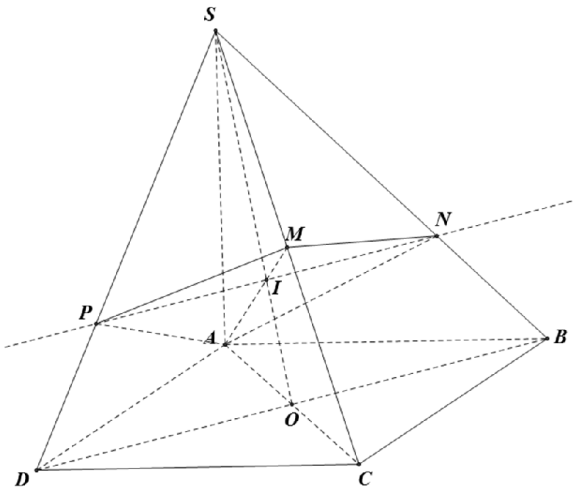
Vậy $\tan\alpha=\dfrac{EI}{MI}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\Leftrightarrow\dfrac{\dfrac{x\sqrt{6}}{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{x\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{7}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{8}a$.

Khi đó: $\dfrac{V_{DBCE}}{V_{ABCD}}=\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{5}{8}\Rightarrow\dfrac{V_{ABCE}}{V_{BCDE}}=\dfrac{3}{5}$.

Câu 21. **(Thpt Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD chia khối chóp thành hai khối đa diện, đặt V_1 là thể tích khối đa diện có chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện có chứa đáy $ABCD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ là:

A. $\frac{V_2}{V_1}=3$. **B.** $\frac{V_2}{V_1}=2$. **C.** $\frac{V_2}{V_1}=1$. **D.** $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



Đặt $V_{S.ABCD}=V$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi I là giao điểm của SO và AM.

Do $(P)//BD$ nên (P) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến NP qua I và song song với BD; $(N\in SB;P\in SD)$.

Xét tam giác SAC có I là giao điểm hai trung tuyến nên I là trọng tâm.

Ta có $\frac{V_{S.APN}}{V_{S.ADB}}=\frac{SP.SN}{SD.SB}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\Rightarrow V_{S.APN}=\frac{4}{9}V_{S.ADB}=\frac{4}{9}.\frac{1}{2}V=\frac{2}{9}V$.

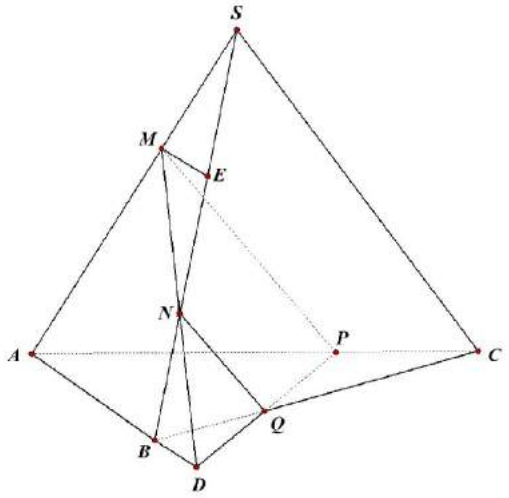
Tương tự $\frac{V_{S.PMN}}{V_{S.DCB}}=\frac{SP.SM.SN}{SD.SC.SB}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{S.PMN}=\frac{2}{9}V_{S.DCB}=\frac{2}{9}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{9}V$.

Từ đó $V_1=V_{S.APN}+V_{S.PMN}=\frac{1}{3}V$. Do đó $\frac{V_2}{V_1}=2$.

Câu 22. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho điểm M nằm trên cạnh SA, điểm N nằm trên cạnh SB của hình chóp tam giác $S.ABC$ sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2}$, $\frac{SN}{NB}=2$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành 2 phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$?

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{6}{5}$.

Lời giải



- Trong mặt phẳng (SAC) dựng MP song song với SC cắt AC tại P. Trong mặt phẳng (SBC) dựng NQ song song với SC cắt BC tại Q. Gọi D là giao điểm của MN và PQ. Dựng ME song song với AB cắt SB tại E (như hình vẽ).

- Ta thấy: $\frac{SE}{SB}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}\Rightarrow SN=NE=NB=\frac{1}{3}SB$

Suy ra N là trung điểm của BE và DM, đồng thời $DB=ME=\frac{1}{3}AB\Rightarrow\frac{DB}{DA}=\frac{1}{4},\ \frac{DN}{DM}=\frac{1}{2}.$

Do $NQ//MP\Rightarrow\frac{DQ}{DP}=\frac{DN}{DM}=\frac{1}{2}.$

- Nhận thấy: $V_1=V_{D.AMP}-V_{D.BNQ}.$

$\frac{V_{D.BNQ}}{V_{D.AMP}}=\frac{DB}{DA}.\frac{DN}{DM}.\frac{DQ}{DP}=\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\Rightarrow V_{D.BNQ}=\frac{1}{16}V_{D.AMP}\Rightarrow V_1=\frac{15}{16}.V_{D.AMP}=\frac{15}{16}.V_{M.ADP}.$

- Do $NQ//SC\Rightarrow\frac{QB}{CB}=\frac{NB}{SB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{d(N;DB)}{d(C;AB)}=\frac{QB}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow d(Q;DB)=\frac{1}{3}.d(C;AB)$

$\Rightarrow S_{QDB}=\frac{1}{2}.d(Q;DB).DB=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.d(C;AB).\frac{1}{3}AB=\frac{1}{9}S_{CAB}\Rightarrow S_{ADP}=\frac{8}{9}.S_{ABC}$

Và $d(M;(ADP))=\frac{2}{3}d(S;(ABC))$

$\Rightarrow V_{M.ADP}=\frac{1}{3}.d(M;(ADP)).S_{ADP}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}d(S;(ABC)).\frac{8}{9}S_{ABC}=\frac{16}{27}.V_{S.ABC}$

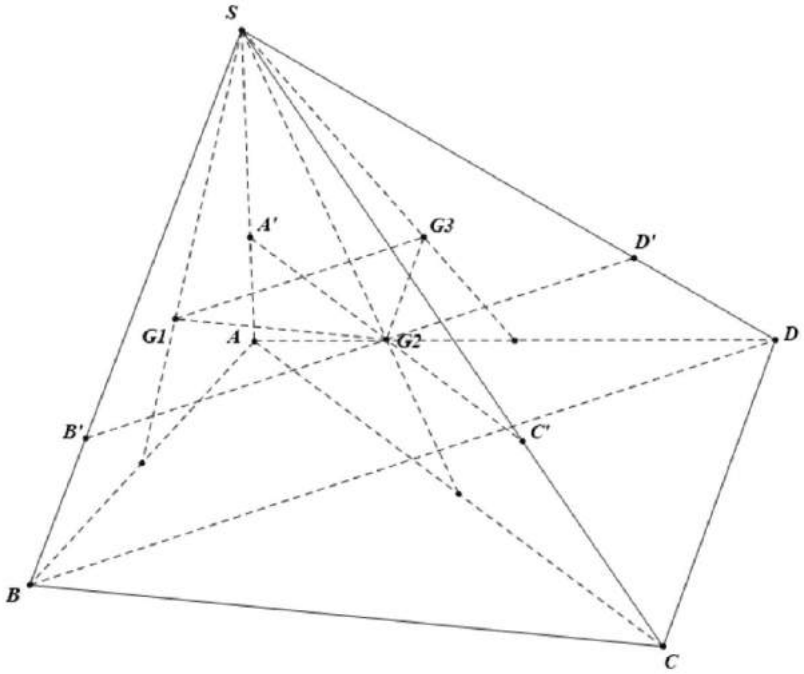
$\Rightarrow V_1=\frac{15}{16}.\frac{16}{27}.V_{S.ABC}=\frac{5}{9}.V_{S.ABC}\Rightarrow V_2=V_{S.ABC}-V_1=\frac{4}{9}.V_{S.ABC}.$

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{4}.$

Câu 23. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 $(V_1<V_2)$. Tính tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{8}{27}$. **B.** $\frac{16}{81}$. **C.** $\frac{8}{19}$. **D.** $\frac{16}{75}$.

Lời giải



Cách 1.

Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD. Ta có $(G_1G_2G_3) \| (ABCD)$.

Gọi $(G_1G_2G_3)$ cắt SA, SB, SC, SD theo thứ tự lần lượt tại A', B', C', D', ta có $S.A'B'C'D'$ đồng dạng với $S.ABCD$ theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$ suy ra $V_{S.A'B'C'D'} = \frac{8}{27} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8/27}{1 - 8/27} = \frac{8}{19}$.

Cách 2.

$$V_{S.ABCD} = V_{S.ABC} + V_{S.ACD}$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{8}{27} V_{S.ABC}$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow V_{S.A'C'D'} = \frac{8}{27} V_{S.ACD}$$

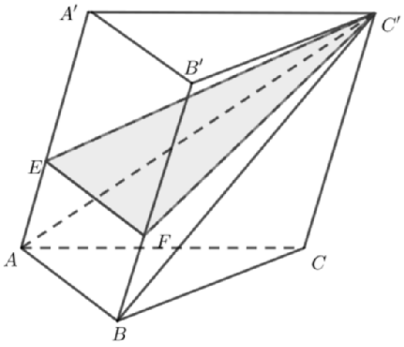
$$V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{8}{27} V_{S.ABCD} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{8/27}{1 - 8/27} = \frac{8}{19}.$$

Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Trên các cạnh AA', BB' lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AA' = kA'E, BB' = kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $C'.A'B'FE$ có thể tích V_1 và khối đa diện $ABCEFC'$ có thể tích V_2. Biết rằng $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{7}$, tìm k.

A. $k = 4$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = 1$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$AA' = kA'E$

$BB' = kB'F$

$S_{A'B'FE} = \frac{1}{k} S_{ABB'A'}$

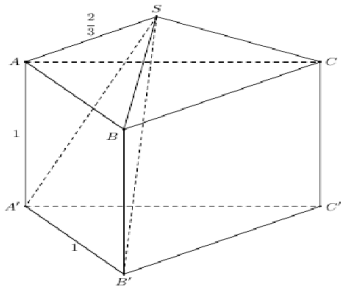
$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.ABB'A'}} = \frac{1}{k};$

$V_{C'.ABB'A'} = \frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C'.A'B'FE} = \frac{2}{3k}.V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{ABCEFC'} = \left(1 - \frac{2}{3k}\right) V_{ABC.A'B'C'}$

$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABCEFC'}} = \frac{\frac{2}{3k}}{\left(1 - \frac{2}{3k}\right)} = \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{14}{3k} = 2\left(1 - \frac{2}{3k}\right) \Leftrightarrow k = 3.$

Nguyễn Bảo Vương

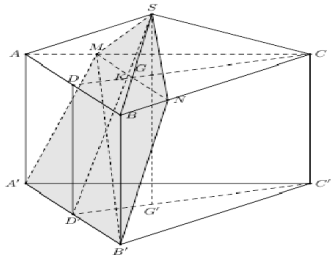
Câu 25. Cho khối đa diện như hình vẽ bên. Trong đó $ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng 1, $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều có cạnh bên $SA = \frac{2}{3}$. Mặt phẳng $(SA'B')$ chia khối đa diện đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích phần khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích phần khối đa diện không chứa đỉnh A. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $72V_1 = 5V_2$. **B.** $3V_1 = V_2$. **C.** $24V_1 = 5V_2$. **D.** $4V_1 = 5V_2$.

Lời giải

Chọn B



Dựng thiết diện $SMA'B'N$ tạo bởi mặt phẳng $(SA'B')$ và khối đa diện đã cho như hình vẽ.

$SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$; $GD=G'D'=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{6}$; $GK=\frac{1}{4}G'D'=\frac{\sqrt{3}}{24}$

$DK=GD-GK=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{24}=\frac{\sqrt{3}}{8}$; $MN=\frac{3}{4}$.

Gọi V là thể tích toàn bộ khối đa diện: $V=V_{ABC.A'B'C'}+V_{S.A'B'C'}=\frac{\sqrt{3}}{4}.1+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$.

$V_{B'.ABNM}=\frac{1}{3}BB'.S_{ABNM}=\frac{1}{3}.1.\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right).\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{7\sqrt{3}}{192}$.

$V_{B'.AA'M}=\frac{1}{3}d\left(B;(ACC'A')\right).S_{AA'M}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.1.\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{48}$.

$V_{S.ABNM}=\frac{1}{3}SG.S_{ABNM}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right).\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{7\sqrt{3}}{576}$.

$V_1=\frac{7\sqrt{3}}{192}+\frac{\sqrt{3}}{48}+\frac{7\sqrt{3}}{576}=\frac{5\sqrt{3}}{72}\Rightarrow V_2=V-V_1=\frac{5\sqrt{3}}{18}-\frac{5\sqrt{3}}{72}=\frac{5\sqrt{3}}{24}$.

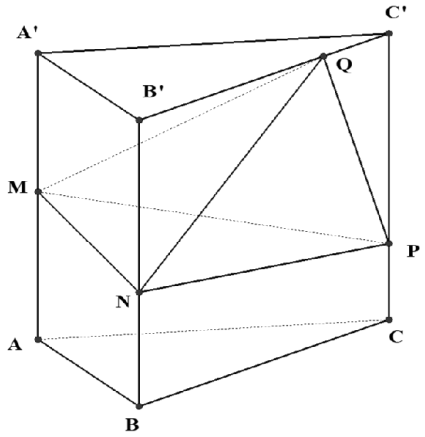
Suy ra $3V_1=V_2$.

Câu 26. Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm thuộc AA', AA',BB', CC', $B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'}=\frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CC'}=\frac{1}{4}$, $\frac{C'Q}{C'B'}=\frac{1}{5}$. Gọi V_1, V_2 là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{30}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{45}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{45}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{22}{45}$.

Lời giải

Chọn B.



$\frac{S_{C'PQ}}{S_{C'B'C}}=\frac{C'Q}{C'B'}.\frac{C'P}{C'C}=\frac{1}{5}.\frac{3}{4}=\frac{3}{20}\Rightarrow S_{C'PQ}=\frac{3}{40}S_{C'B'BC}.$

$\frac{S_{B'NQ}}{S_{B'BC'}}=\frac{B'Q}{B'C'}.\frac{B'N}{B'B}=\frac{2}{3}.\frac{4}{5}=\frac{8}{15}\Rightarrow S_{B'NQ}=\frac{4}{15}S_{C'B'BC}$

$\frac{S_{NPCB}}{S_{C'B'BC}}=\frac{1}{2}\left(\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{24}\Rightarrow S_{NPCB}=\frac{7}{24}S_{C'B'BC}$

Suy ra, $\frac{S_{NPQ}}{S_{C'B'BC}}=1-\frac{S_{C'QP}+S_{B'NQ}+S_{CPNB}}{S_{BB'C'C}}=1-\left(\frac{3}{40}+\frac{4}{15}+\frac{7}{24}\right)=\frac{11}{30}$

Mặt khác $AM\,//\,CC'$ nên $d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)=d\left(M,\left(BB'C'C\right)\right)$

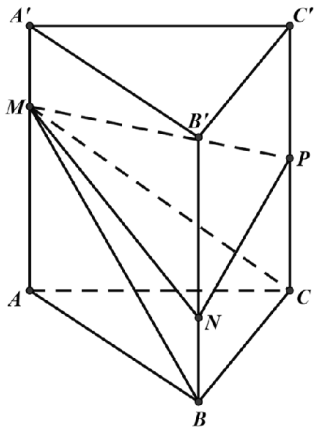
$V_{M.NPQ}=\frac{11}{30}V_{A.BB'C'C}=\frac{11}{30}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{45}$.

Câu 27. **(Chuyên Ngữ - Hà Nội - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM=2MA'$, $NB'=2NB$, $PC=PC'$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối đa diện $ABCMNP$ và $A'B'C'MNP$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=2$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=1$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$.

Lời giải



Gọi V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Ta có $V_1 = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$.

$V_{M.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.d\left(M,(ABC)\right) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}S_{ABC}.d\left(A',(ABC)\right) = \frac{2}{9}V$.

$V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,(A'B'C')\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}S_{A'B'C'}.d\left(M,(A'B'C')\right) = \frac{1}{9}V$.

Do $BCC'B'$ là hình bình hành và $NB' = 2NB$, $PC = PC'$ nên $S_{B'C'PN} = \frac{7}{5}S_{BCPN}$.

Suy ra $V_{M.B'C'PN} = \frac{7}{5}V_{M.BCPN}$, Từ đó $V = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} + V_{M.A'B'C'} + V_{M.B'C'PN}$

$\Leftrightarrow V = \frac{2}{9}V + V_{M.BCPN} + \frac{1}{9}V + \frac{7}{5}V_{M.BCPN} \Leftrightarrow V_{M.BCPN} = \frac{5}{18}V$.

Như vậy $V_1 = \frac{2}{9}V + \frac{5}{18}V = \frac{1}{2}V \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2}V$. Bởi vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

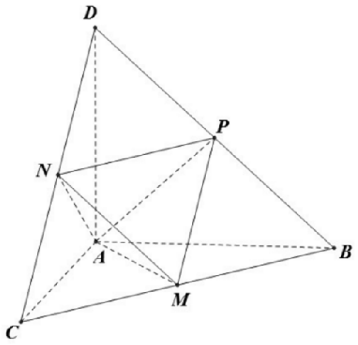
Dạng 2. Ứng dụng tỉ số thể tích để tính thể tích

Câu 1. **(Đề minh họa lần 1 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \frac{7}{2}a^3$ **B.** $V = 14a^3$ **C.** $V = \frac{28}{3}a^3$ **D.** $V = 7a^3$

Lời giải

Chọn D



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}AD.AC = \frac{1}{6}6a.7a.4a = 28a^3$

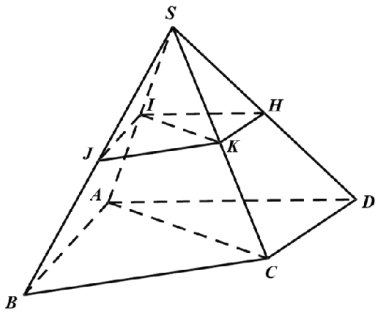
Ta nhận thấy $S_{MNP} = \frac{1}{2}S_{MNPD} = \frac{1}{4}S_{BCD} \Rightarrow V_{AMNP} = \frac{1}{4}V_{ABCD} = 7a^3$

Câu 2. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi I, J, K, H lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết thể tích khối chóp $S.IJKH$ bằng 1.

A. 16. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.IJK}}=\frac{SA}{SI}.\frac{SB}{SJ}.\frac{SC}{SK}=8\Rightarrow V_{S.ABC}=8V_{S.IJK}$.

$\frac{V_{S.ACD}}{V_{S.IKH}}=\frac{SA}{SI}.\frac{SC}{SK}.\frac{SD}{SH}=8\Rightarrow V_{S.ACD}=8V_{S.IKH}$

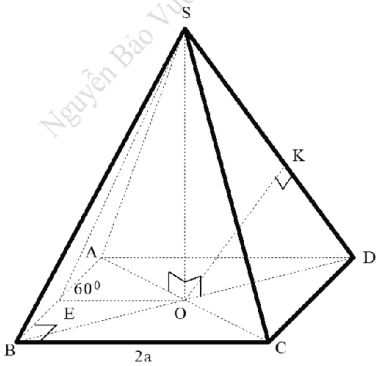
Do đó: $V_{S.ABCD}=8V_{S.IJKH}=8$.

Câu 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Mặt bên tạo với đáy góc 60^0. Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên SD. Tính theo a thể tích khối tứ diện $DKAC$

A. $V=\frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **B.** $V=\frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{15}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Nguyễn Bảo Vương

+ Gọi E là trung điểm của AB, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$\Rightarrow OE\perp AB$

$SO\perp AB$

$\Rightarrow AB\perp(SOE)$.

$\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SEO}\Rightarrow\widehat{SEO}=60^0$.

$\Delta_v SEO:\tan 60^0=\frac{SO}{OE}\Rightarrow SO=OE.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

+ $\Delta_v SOD$ có đường cao $OK\Rightarrow SO^2=SK.SD\Rightarrow\frac{SO^2}{SD^2}=\frac{SK}{SD}=\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^2}{3a^2+2a^2}=\frac{3}{5}$.

$\Rightarrow\frac{KD}{SD}=\frac{2}{5}$.

$\frac{d\left(K,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{KD}{SD}=\frac{2}{5}\Rightarrow d\left(K,(ABCD)\right)=\frac{2}{5}SO=\frac{2a\sqrt{3}}{5}$.

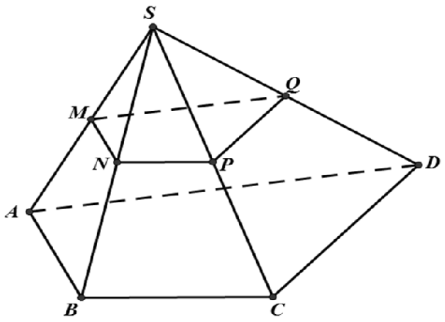
Vậy $V_{DKAC}=\frac{1}{3}d\left(K,(ABCD)\right).S_{\Delta ACD}=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{5}.\frac{(2a)^2}{2}=\frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 4. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 32. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{8}V_{S.ABC}$.

$\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.MPQ}=\frac{1}{8}V_{S.ACD}$.

Do đó $V_{S.MNPQ}=V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}=\frac{1}{8}\left(V_{S.ABC}+V_{S.ACD}\right)=\frac{1}{8}V_{S.ABCD}=4$

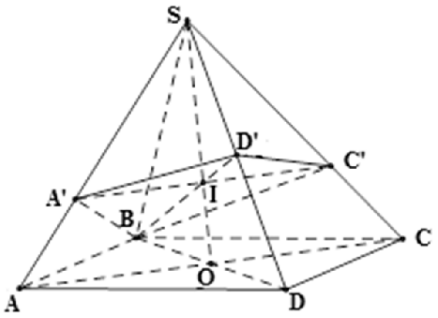
Vậy $V_{S.MNPQ}=4$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi D' là trung điểm SD, mặt phẳng chứa BD' và song song với AC lần lượt cắt các cạnh SA, SC tại A' và C'. Biết thể tích khối chóp $S.A'BC'D'$ bằng 1, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{9}{2}$. **B.** $V=\frac{3}{2}$. **C.** $V=6$. **D.** $V=3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình bình hành đáy và $\{I\}=SO\cap BD'$.

Mặt phẳng được nói đến đi qua I và song song AC nên cắt (SAC) theo giao tuyến là đường thẳng $A'C'$ qua I và song song AC (với $A'\in SA, C'\in SC$).

I là trọng tâm tam giác SBD nên $\frac{SA'}{SA}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

Ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{V_{S.A'BD'}}{V_{S.ABD}}=\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{V_{S.BC'D'}}{V_{S.BCD}}=\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}V_{S.A'BD'}=\dfrac{1}{6}V\\ V_{S.BC'D'}=\dfrac{1}{6}V\end{cases}\Rightarrow V_{S.AB'C'D'}=V_{S.A'BD'}+V_{S.BC'D'}=\dfrac{1}{3}V$$

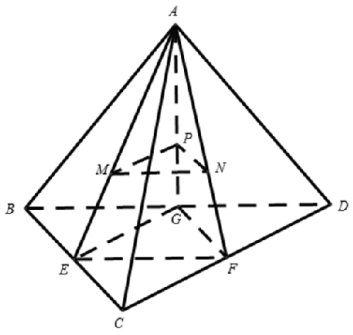
$\Rightarrow V=3V_{S.AB'C'D'}=3$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD. Tính thể tích của tứ diện $AMNP$.

A. $\dfrac{1}{27}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, CD và DB

Ta có $S_{\Delta EFG}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}\Rightarrow V_{A.GEF}=\dfrac{1}{4}V_{A.BCD}=\dfrac{1}{4}$

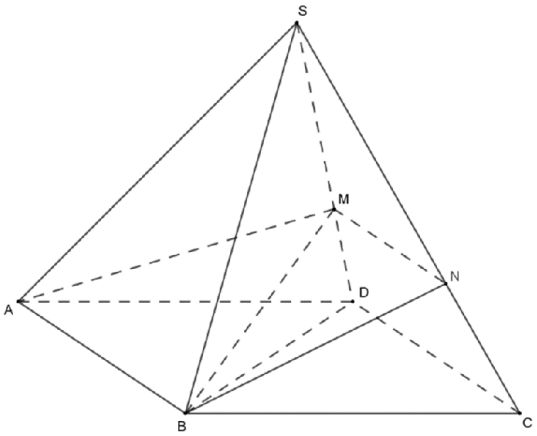
$$\dfrac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}}=\dfrac{AM}{AE}.\dfrac{AN}{AF}.\dfrac{AP}{AG}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}\Rightarrow V_{AMNP}=\dfrac{8}{27}V_{AEFG}=\dfrac{2}{27}.$$

Câu 7. **(Sở Cần Thơ - 2019)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 18, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SC tại N. Thể tích khối chóp $S.ABNM$ bằng

A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng (MAB) và mặt phẳng (SCD) có chung điểm M và lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB và CD nên $MN // AB // CD$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABD} = V_{S.BDC} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = 9$.

Ta có:

- $\frac{V_{M.ABD}}{V_{S.ABD}} = \frac{d(M;(ABD))}{d(S;(ABD))} = \frac{MD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{M.ABD} = 3 \Rightarrow V_{S.ABM} = 6$.
- $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \frac{V_{B.SMN}}{V_{B.SDC}} = \frac{SM.SN}{SD.SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = 4$.

$\Rightarrow V_{S.ABNM} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = 6 + 4 = 10$.

☞ ***Chú ý:*** Có thể áp dụng công thức tỉ số thể tích và tính như sau:

Ta có:

- $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{2}{3}.V_{S.ABD} = 6$.
- $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BDC}} = \frac{SM}{SD}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{4}{9}.V_{S.BDC} = 4$.

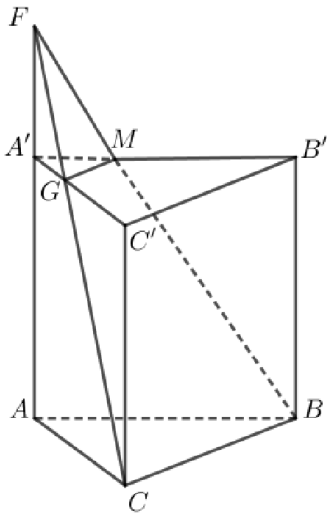
$\Rightarrow V_{S.ABNM} = V_{S.ABM} + V_{S.BMN} = 6 + 4 = 10$.

Câu 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm M thuộc cạnh $A'B'$ sao cho $A'B' = 3A'M$. Đường thẳng BM cắt đường thẳng AA' tại F, và đường thẳng CF cắt đường thẳng $A'C'$ tại G, Tính tỉ số thể tích khối chóp $FA'MG$ và thể tích khối đa diện lồi $GMB'C'CB$

A. $\frac{1}{11}$. **B.** $\frac{1}{27}$. **C.** $\frac{3}{22}$. **D.** $\frac{1}{28}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $GM\ //\ C'B' \Rightarrow \dfrac{GM}{C'B'}=\dfrac{A'M}{A'B'}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow S_{A'MG}=\dfrac{1}{9}S_{ABC}$.

Gọi h là chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$, V là thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Ta có

$V=S_{ABC}.h$.

$V_{A'MG.ABC}=\dfrac{h}{3}\left(S_{ABC}+S_{A'MG}+\sqrt{S_{ABC}.S_{A'MG}}\right)$

$=\dfrac{h}{3}\left(S_{ABC}+\dfrac{1}{9}S_{ABC}+\sqrt{S_{ABC}.\dfrac{1}{9}S_{ABC}}\right)=\dfrac{13}{27}S_{ABC}.h=\dfrac{13}{27}V$

$\Rightarrow V_{GMB'C'CB}=V-V_{A'MG.ABC}=\dfrac{14}{27}V$.

Mặt khác ta cũng có

$\dfrac{FG}{FC}=\dfrac{GM}{CB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{FA'}{FA}=\dfrac{FG}{FC}=\dfrac{FM}{FB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{V_{FA'GM}}{V_{FACB}}=\dfrac{FA'}{FA}.\dfrac{FG}{FC}.\dfrac{FM}{FB}=\dfrac{1}{27}$.

$\Rightarrow V_{FA'GM}=\dfrac{1}{27}V_{FACB}=\dfrac{1}{27}\left(V_{A'MG.ABC}+V_{FA'GM}\right)\Rightarrow V_{FA'GM}=\dfrac{1}{26}V_{A'MG.ABC}=\dfrac{1}{54}V$.

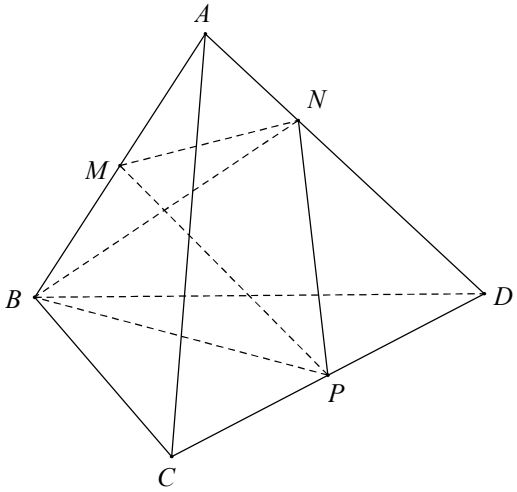
Vậy $\dfrac{V_{FA'GM}}{V_{A'MG.ABC}}=\dfrac{1}{28}$.

Câu 9. **(Sở GD Nam Định 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng V, hai điểm M và P lần lượt là trung điểm của AB,CD; điểm N thuộc đoạn AD sao cho $AD=3AN$. Tính thể tích tứ diện $BMNP$.

A. $\dfrac{V}{4}$. **B.** $\dfrac{V}{12}$. **C.** $\dfrac{V}{8}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$MB=\frac{AB}{2}, AN=\frac{AD}{3}\Rightarrow d\left(N,AB\right)=\frac{1}{3}d\left(D,AB\right)\Rightarrow S_{\Delta NMB}=\frac{1}{6}S_{\Delta DAB}$

$DP=\frac{CD}{2}\Rightarrow d\left(P,\left(MNB\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,\left(ABD\right)\right)$

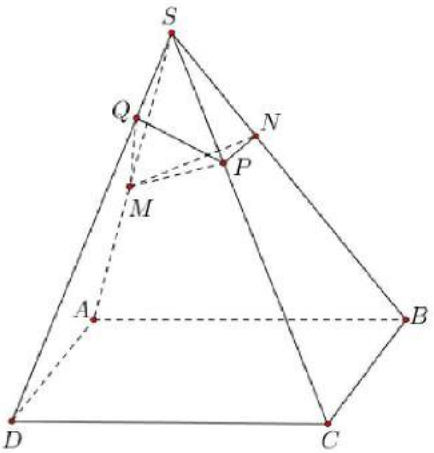
$\Rightarrow V_{P.MNB}=\frac{1}{3}d\left(P,\left(MNB\right)\right).\mathrm{S}_{\Delta MNB}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}d\left(C,\left(ABD\right)\right).\frac{1}{6}\mathrm{S}_{\Delta ABD}=\frac{1}{12}V$

Câu 10. **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình 2019)**Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 48 và $ABCD$ là hình thoi. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC, SD thỏa mãn $SA=2SM$, $SB=3SN$, $SC=4SP$, $SD=5SQ$. Tính thể tích khối đa diện $S.MNPQ$

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $ABCD$ là hình thoi nên $S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ABC}$.

Suy ra $V_{S.ACD}=V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=24$.

* $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}\Rightarrow V_{S.MPQ}=\frac{3}{5}$.

* $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\Rightarrow V_{SMNP}=1$.

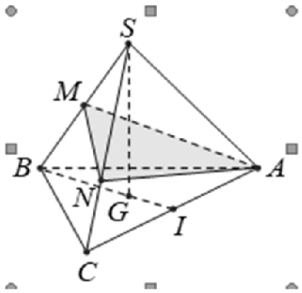
Vậy $V_{S.MNPQ}=V_{S.MPQ}+V_{S.MNP}=\frac{8}{5}$.

Câu 11. Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm trên đoạn SC sao cho $NS=2NC$. Thể tích của khối chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{11}}{18}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{16}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $BO=\frac{2}{3}BI=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Khối chóp $S.ABC$ đều và O là trọng tâm tam giác ABC lên $SO\perp(ABC)\Rightarrow SO\perp OB$

$\Rightarrow \Delta SOB$ vuông tại $O \Rightarrow SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{4a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{33}}{3}$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{33}}{3}.\frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{1}{3}V_{S.ABC}$.

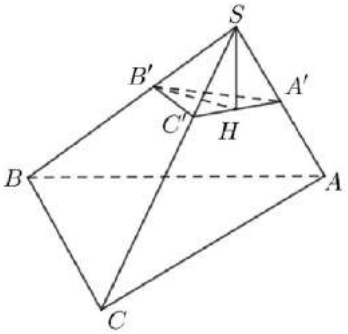
$V_{A.BCNM}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}=V_{S.ABC}-\frac{1}{3}V_{S.ABC}=\frac{2}{3}V_{S.ABC}=\frac{2}{3}.\frac{a^3\sqrt{11}}{12}=\frac{a^3\sqrt{11}}{18}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=2a$, $SB=3a$, $SC=4a$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60°$, $\widehat{ASC}=90°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{2}}{9}$. **B.** $V=2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA'=SB'=SC'=a$, suy ra:

$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\Rightarrow V_{S.ABC}=24V_{S.A'B'C'}$.

(vì $SA=2a=2SA'$, $SB=3a=3SB'$, $SC=4a=4SC'$).

Theo giả thiết $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60^\circ$ và $SA'=SB'=a$ suy ra hai tam giác $SA'B'$, $SB'C'$ đều và $A'B'=B'C'=a$.

$\widehat{ASC}=90^\circ$ và $SA'=SC'=a$ nên tam giác $A'SC'$ vuông cân tại S, do đó $A'C'=a\sqrt{2}$.

Gọi H là trung điểm $A'C'$ thì $SH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và $SH\perp A'C'$ (1).

Tam giác $A'B'C'$ cân tại B' nên trung tuyến, cũng là đường cao $B'H=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SHB' có $SH^2+HB'^2=\frac{2a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}=a^2$ suy ra $SH\perp HB'$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $SH\perp(A'B'C')$, nên SH là chiều cao khối chóp $S.A'B'C'$.

Thể tích khối chóp $S.A'B'C'$ là:

$V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta A'B'C'}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}\text{A'C'}.B'H=\frac{a\sqrt{2}}{12}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

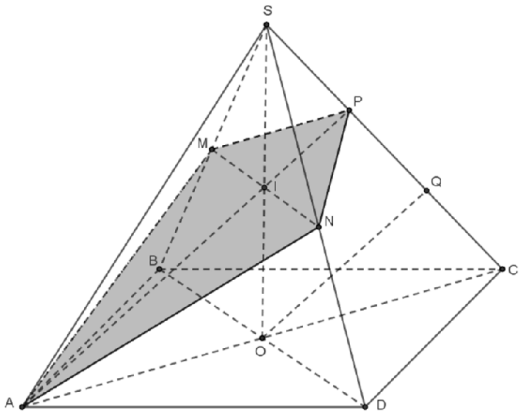
Suy ra $V_{S.ABC}=24V_{S.A'B'C'}=24.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=2a^3\sqrt{2}$.

Câu 13. **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy và cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SD. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích V_1,V_2 với $V_1<V_2$. Ta có V_2 bằng

A. $\frac{a^3}{18}$. **B.** $\frac{5a^3}{9}$. **C.** $\frac{8a^3}{15}$. **D.** $\frac{a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O=AC\cap BD, I=SO\cap MN, P=AI\cap SC$. Khi đó I là trung điểm của SO.

Gọi Q là trung điểm của $CP\Rightarrow IP//OQ\Rightarrow P$ là trung điểm của $SQ\Rightarrow SP=PQ=QC$.

Ta có $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{V_{S.AMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{6}\Rightarrow V_1=\frac{1}{6}V_{S.ABCD}, V_2=\frac{5}{6}V_{S.ABCD}$ (vì $V_1<V_2$)

Mặt khác $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{2a^2-a^2}=a$.

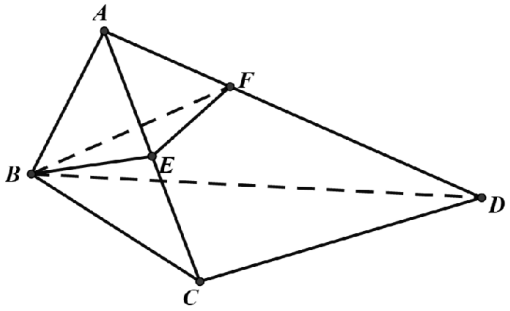
Do đó $V_2=\frac{5}{6}.\frac{1}{3}a.2a^2=\frac{5}{9}a^3$

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=1; AC=2; AD=3$ và $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60^0$.Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Do $AB<AC<AD$ nên chọn $E\in AC, AE=1, F\in AD,\ AF=1$

Ta có $\widehat{BAC}=\widehat{CAD}=\widehat{DAB}=60^\circ$ (giả thiết)

Suy ra tứ diện $ABEF$ là tứ diện đều cạnh bằng 1. Ta có $V_{ABEF}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác ta có $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{ABEF}}=\dfrac{AB.AC.AD}{AB.AE.AF}=\dfrac{1.2.3}{1.1.1}=6$.

Từ đó $V_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên chọn đáp án **A**

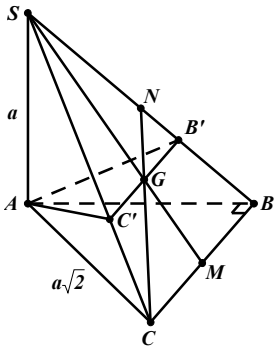
Nguyễn Bảo Vương

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Một mặt phẳng đi qua hai điểm A, G và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B' và C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'$ bằng:

A. $\dfrac{2a^3}{27}$. **B.** $\dfrac{a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, SB. Khi đó, $G=SM\cap CN$.
Đặt $BA=BC=x>0$. Theo định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2=BA^2+BC^2\Rightarrow\left(a\sqrt{2}\right)^2=x^2+x^2\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=a.$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.BA.BC=\frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a=\frac{a^3}{6}$.

Mặt phẳng qua A, G song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại B', C' nên $B'C'//BC$. Khi đó ta có $\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$.

Ta lại có: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

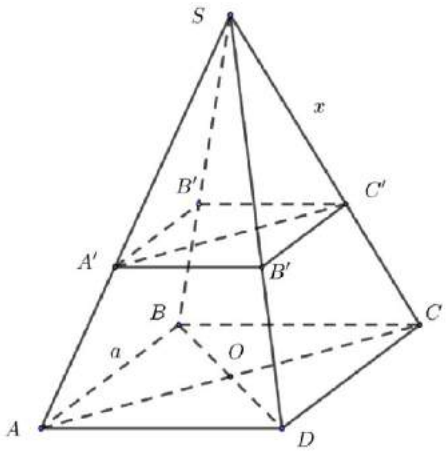
Suy ra, $V_{S.AB'C'}=\frac{4}{9}.V_{S.ABC}=\frac{4}{9}.\frac{a^3}{6}=\frac{2a^3}{27}$.

Câu 16. Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều với tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta cưa viên đá đó theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $\frac{a^2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $\frac{\sqrt[3]{2}a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a.

Vì mặt phẳng cắt hình khối chóp song song với đáy nên thiết diện tạo bởi mặt cắt và khối chóp là một hình vuông $A'B'C'D'$.

Giả sử $\frac{SA'}{SA}=k$, ta có $\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SD'}{SD}=\frac{A'B'}{AB}=k$ (định lí Talet).

Theo giả thiết $V_{S.A'B'C'D'}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}\Leftrightarrow 2V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{2}.2.V_{S.ABC}$

$\Leftrightarrow V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{2}.V_{S.ABC}\Leftrightarrow\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (k)^3=\frac{1}{2} \Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

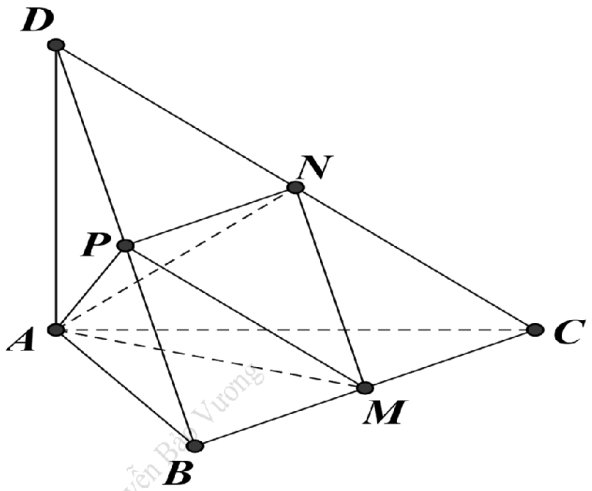
$$\Rightarrow A'B'=\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow S_{A'B'C'D'}=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}.$$

Câu 17. **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau từng đôi một và $AB=3a, AC=6a, AD=4a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích khối đa diện $AMNP$.

A. $12a^3$ **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\frac{V_{D.APN}}{V_{D.ABC}}=\frac{DP}{DB}.\frac{DN}{DC}=\frac{1}{4}$; $\frac{V_{B.APM}}{V_{B.ACD}}=\frac{BP}{BD}.\frac{BM}{BC}=\frac{1}{4}$; $\frac{V_{C.AMN}}{V_{C.ABD}}=\frac{CM}{CB}.\frac{CN}{CD}=\frac{1}{4}$.

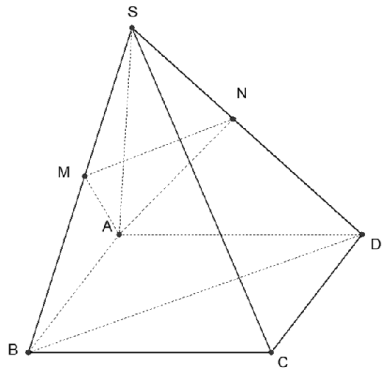
Mà $V_{AMNP}=V_{ABCD}-V_{DAPN}-V_{BAPM}-V_{CAMN}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}AB.AC.AD\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}3a.6a.4a\right)=3a^3$.

Câu 18. **(HKI-Chuyên Long An-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có thể tích bằng 2. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh SB và SD sao cho $\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=k$. Tìm giá trị của k để thể tích khối chóp $S.AMN$ bằng $\frac{1}{8}$.

A. $k=\frac{1}{8}$. **B.** $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **C.** $k=\frac{1}{4}$. **D.** $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta CBD} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = 1$.

Mặt khác $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD} \Leftrightarrow V_{S.AMN} = k^2$, Có $V_{S.AMN} = \frac{1}{8}$

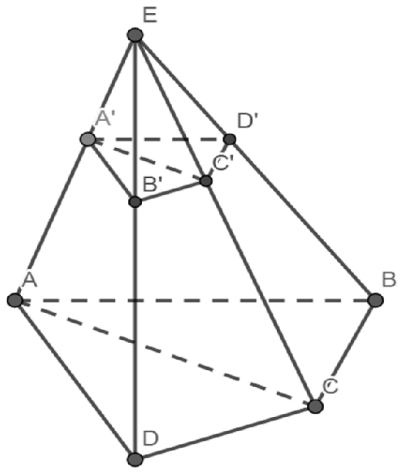
Suy ra $k^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (do $k > 0$). Vậy $k = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có thể tích bằng V. Lấy điểm A' trên cạnh SA sao cho $SA' = \frac{1}{3}SA$. Mặt phẳng qua A' và song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Tính theo V thể tích khối chóp $S.A'B'C'D'$?

A. $\frac{V}{3}$. **B.** $\frac{V}{81}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có:

$V_{S.ABC} + V_{S.ACD} = V_{S.ABCD}$; $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

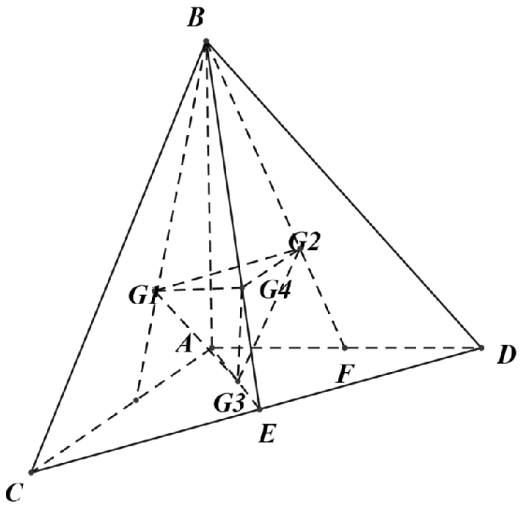
$\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA'}{SA}\frac{SD'}{SD}\frac{SC'}{SC} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$; $V_{S.A'B'C'D'} = V_{S.A'B'C'} + V_{S.A'C'D'} = \frac{1}{27} V_{S.ABCD}$.

Câu 20. **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB = 6a$, $AC = 9a$, $AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $108a^3$. **D.** $36a^3$.

Lời giải

Chọn A



$\Delta G_1G_2G_3$ đồng dạng với ΔACD theo tỉ số $\frac{1}{3}$ và nằm trong hai mặt phẳng song song.

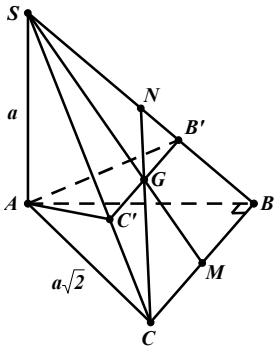
$S_{\Delta G_1G_2G_3}=\frac{1}{9}S_{\Delta ABD}=6a^2$. $G_3G_4//AB$ và $G_3G_4=\frac{1}{3}AB=2a$. $V_{G_1G_2G_3G_4}=\frac{1}{3}G_3G_4.S_{\Delta G_1G_2G_3}=4a^3$.

Câu 21. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\frac{4a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{27}$. **C.** $\frac{5a^3}{54}$. **D.** $\frac{2a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong mặt phẳng (SBC) kẻ đường thẳng qua G song song với BC, cắt SB, SC lần lượt tại B', C'. Khi đó mặt phẳng (α) trùng với mặt phẳng $(AB'C')$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BC, SB.

Đặt $BA=BC=x>0$. Theo định lý Pitago trong tam giác ABC vuông tại B, ta có:

$$AC^2=BA^2+BC^2\Rightarrow\left(a\sqrt{2}\right)^2=x^2+x^2\Rightarrow x^2=a^2\Rightarrow x=a.$$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.BA.BC=\frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2}{2}.a=\frac{a^3}{6}$.

Ta lại có: $\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SG}{SM}=\frac{2}{3}$.

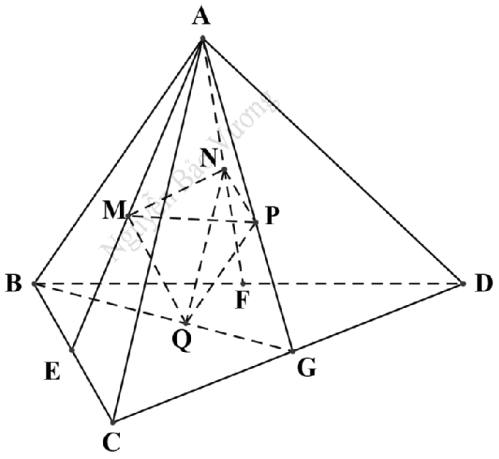
Suy ra: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=1.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

Vì thế, $V_{S.AB'C'}=\frac{4}{9}.V_{S.ABC}=\frac{4}{9}.\frac{a^3}{6}=\frac{2a^3}{27}$.

Vậy $V=V_{S.ABC}-V_{S.AB'C'}=\frac{a^3}{6}-\frac{2a^3}{27}=\frac{5a^3}{54}$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD và M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ theo V.

A. $\frac{V}{9}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{2V}{9}$. **D.** $\frac{V}{27}$.



Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta MNP\sim\Delta EFG$ và $\frac{MN}{EF}=\frac{2}{3}$

$\Delta EFG\sim\Delta DCB$ và $\frac{EF}{DC}=\frac{1}{2}$

Do đó $\Delta MNP\sim\Delta DCB$ và $\frac{MN}{DC}=\frac{1}{3}$ $\square$ $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\frac{1}{9}S_{\Delta BCD}$

Mặt khác $d\left(Q,(MNP)\right)=\frac{1}{3}d\left(A,(BCD)\right)$

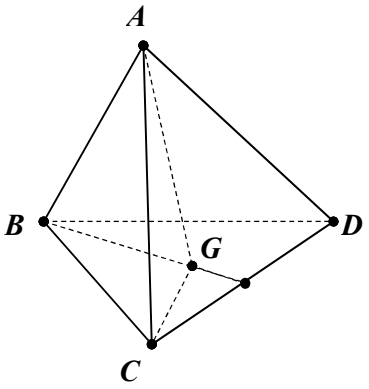
Suy ra $V_{MNPQ}=\frac{1}{27}V$.

Câu 23. **(THPT QG 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

A. $V=3$ **B.** $V=4$ **C.** $V=6$ **D.** $V=5$

Lời giải

Chọn B



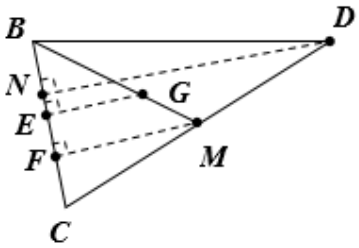
Cách 1:

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

$$\left.\begin{array}{l}V_{ABCD}=\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}\\ V_{A.GBC}=\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}}=\frac{\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}}=\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=3\Rightarrow V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$$

Chứng minh: Đặt $DN=h;BC=a$.



+) $MF//ND\Rightarrow\frac{MF}{DN}=\frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}\Rightarrow MF=\frac{1}{2}DN\Rightarrow MF=\frac{h}{2}.$

+) $GE//MF\Rightarrow\frac{GE}{MF}=\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow GE=\frac{2}{3}MF=\frac{2}{3}.\frac{h}{2}=\frac{h}{3}$

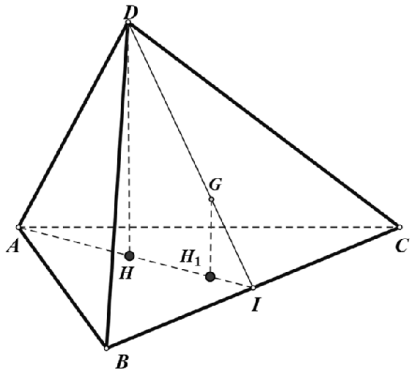
+) $\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=\frac{\frac{1}{2}DN.BC}{\frac{1}{2}GE.BC}=\frac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}\frac{h}{3}a}=3\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBC}$

+) Chứng minh tương tự có $S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBD}=3S_{\Delta GCD}\Rightarrow S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}$

Cách 2:

Ta có $\frac{d\left(G;\left(ABC\right)\right)}{d\left(D;\left(ABC\right)\right)}=\frac{GI}{DI}=\frac{1}{3}\Rightarrow d\left(G;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(D;\left(ABC\right)\right)$.

Nên $V_{G.ABC}=\frac{1}{3}d\left(G;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.V_{DABC}=4$

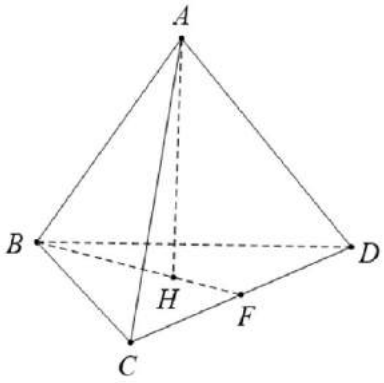


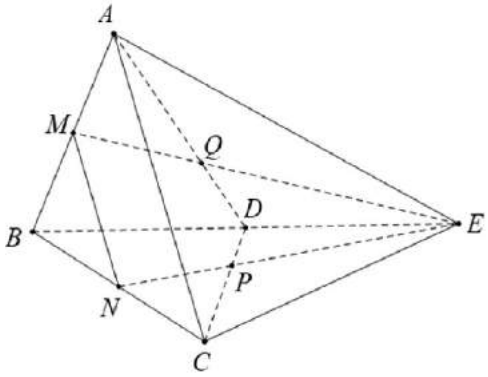
Câu 24. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm A có thể tích V. Tính V.

A. $\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ **B.** $\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$ **D.** $\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$

Lời giải

Chọn D





Tính thể tích T có khối tứ diện $ABCD$. Gọi F là trung điểm BC và H trọng tâm tam giác BCD.

Ta có $BF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BH=\frac{2}{3}BF=\frac{a}{\sqrt{3}}$ suy ra $BH=\sqrt{AB^2-BH^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Thể tích tứ diện $ABCD$ là $T=\frac{1}{3}AH.S_{BCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Gọi diện tích một mặt của tứ diện là S. Gọi P là giao điểm của NE và CD, tương tự cho Q.

Ta thấy P,Q lần lượt là trọng tâm các tam giác BEC và BEA nên $PD=\frac{1}{3}DC,QD=\frac{1}{3}AD$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có:

$\frac{V_{B.ACE}}{V_{B.ACD}}=2$ nên $V_{B.ACE}=2T$; $\frac{V_{E.BMN}}{V_{E.BAC}}=\frac{1}{4}$ nên $V_{E.BMN}=\frac{1}{4}.2T=\frac{T}{2}$.

Nên $V_{E.AMNC}=V_{E.ABC}-V_{B.EMN}=2T-\frac{T}{2}=\frac{3}{2}T$.

Tương tự: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.DCA}}=\frac{1}{9}$ nên $V_{E.DPQ}=\frac{1}{9}T$. Nên $V_{ACPQ}=T-\frac{1}{9}T=\frac{8}{9}T$

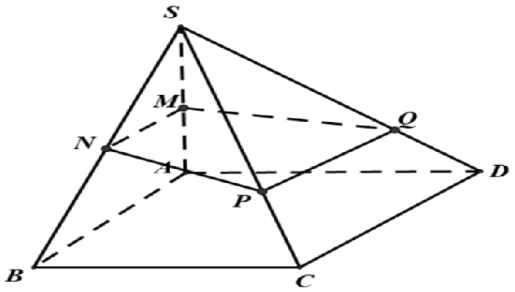
Suy ra $V=V_{E.AMNC}-V_{E.ACPQ}=\frac{3}{2}T-\frac{8}{9}T=\frac{11}{18}T=\frac{11a^3\sqrt{2}}{216}$

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích $V=12$. Gọi M,N lần lượt trung điểm $SA, SB; P$ là điểm thuộc cạnh SC sao cho $PS=2PC$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh SD tại Q. Tính thể tích khối chóp $S.MNPQ$ bằng

A. $\frac{5}{18}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $PQ//CD\Rightarrow\frac{SQ}{SD}=\frac{SP}{SC}=\frac{2}{3}$.

Khi đó ta có: $\frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SA}\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow V_{SMNP}=\frac{1}{12}V$.

$\frac{V_{SMPQ}}{V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{SMPQ}=\frac{1}{9}V$.

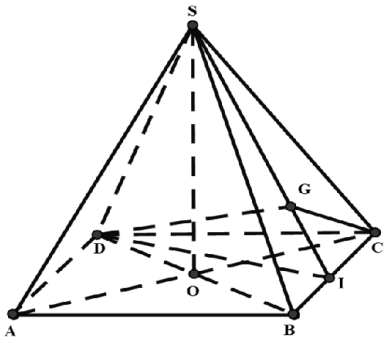
Vậy $V_{S.MNPQ}=\frac{7}{36}V=\frac{7}{3}$.

Câu 26. **(CHUYÊN Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)**Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Thể tích khối tứ diện $SGCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{36}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$, I là trung điểm cạnh BC.

$OC = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

$V_{S.DCI} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{24}$.

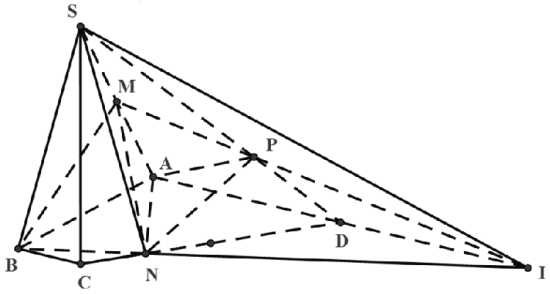
$\frac{V_{S.DCG}}{V_{S.DCI}} = \frac{SD}{SD}.\frac{SC}{SC}.\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.DCG} = \frac{2}{3} V_{S.DCI} = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{36}$.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1, đáy $ABCD$ là hình thang với cạnh đáy lớn là AD và $AD = 3BC$. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm thuộc cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Mặt phẳng (BMN) cắt cạnh SD tại P. Thể tích khối chóp $A.MBNP$ bằng

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{5}{16}$. **D.** $\frac{9}{32}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $V = V_{S.ABCD} = 1$.

Gọi I là giao điểm của BN với AD, suy ra P là giao điểm của MI với SD.

$BC \parallel DI$ và $ND = 3NC \Rightarrow DI = 3BC \Rightarrow D$ là trung điểm của AI.

Do đó P là trọng tâm của tam giác $SAI \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{2}{3}$.

$S_{BCN} = \frac{1}{4} S_{BCD} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{16} S_{ABCD}$; $S_{ADN} = S_{NID} = 9S_{BCN} = \frac{9}{16} S_{ABCD}$.

$S_{ABN} = S_{ABCD} - S_{BCN} - S_{ADN} = \frac{3}{8} S_{ABCD}$. Suy ra $V_{S.ABN} = \frac{3}{8} V$; $V_{S.ADN} = \frac{9}{16} V$.

$V_{S.MBN}=\frac{1}{2}V_{S.ABN}\Rightarrow V_{A.BMN}=\frac{1}{2}V_{S.ABN}=\frac{3}{16}V$;

$V_{S.MNP}=\frac{1}{2}V_{S.ANP}\Rightarrow V_{A.MNP}=\frac{1}{2}V_{S.ANP}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{S.AND}=\frac{3}{16}V$.

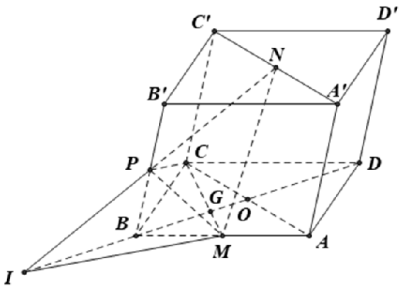
Do đó $V_{A.MBNP}=V_{A.BMN}+V_{A.MNP}=\frac{3}{8}V=\frac{3}{8}$.

Câu 28. **(THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, $A'C'$, BB'. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A. $\frac{1}{8}V$. **B.** $\frac{7}{48}V$. **C.** $\frac{5}{48}V$. **D.** $\frac{1}{6}V$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $G=CM\cap BD$, $I=PN\cap BD$, $O=AC\cap BD$. Dễ thấy BP là đường trung bình của ΔINO và G là trọng tâm ΔABC nên $BG=\frac{2}{3}BO=\frac{2}{3}BI$.

$\frac{V_{N.CMP}}{V_{N.CMI}}=\frac{NP}{NI}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{CMNP}=\frac{1}{2}V_{N.CMI}$.

Đặt $S=S_{ABCD}$ và h là chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có

$\frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta IMC}}=\frac{\frac{1}{2}d\left(B,MC\right).MC}{\frac{1}{2}d\left(I,MC\right).MC}=\frac{BG}{IG}=\frac{2}{5}\Rightarrow S_{\Delta IMC}=\frac{5}{2}S_{\Delta BMC}=\frac{5}{2}.\frac{1}{4}S=\frac{5}{8}S$.

Mà $V_{N.IMC}=\frac{1}{3}S_{\Delta IMC}.d\left(N,\left(ABCD\right)\right)=\frac{1}{3}.\frac{5}{8}S.h=\frac{5}{24}V$.

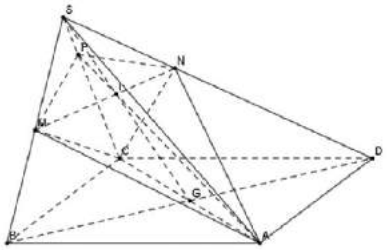
Vậy $V_{CMNP}=\frac{1}{2}V_{N.CMI}=\frac{5}{48}V$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Trên cạnh SB, SD lấy các điểm M, N sao cho $SM=MB$, $SD=3SN$. Mặt phẳng $\left(AMN\right)$ cắt SC tại P. Tính thể tích V của khối tứ diện $SMNP$.

A. $V=\frac{1}{3}$. **B.** $V=\frac{1}{2}$. **C.** $V=2$. **D.** $V=1$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SP}\Leftrightarrow 2+3=1+\frac{SC}{SP}\Rightarrow \frac{SC}{SP}=4$.

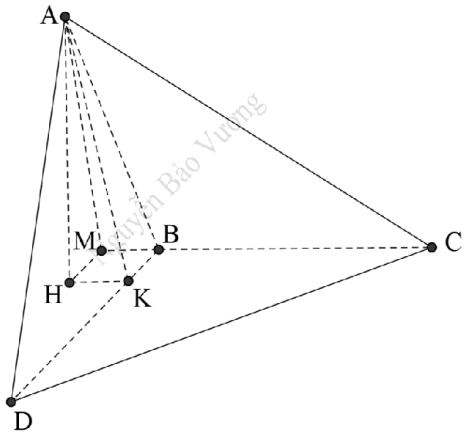
$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\frac{SP}{SC}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{48}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{1}{48}V_{S.ABCD}=1$.

Câu 30. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90°$; $AB=a; AC=a\sqrt{5}; \widehat{ABC}=135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Vẽ $AH\perp(BCD)$, $H\in(BCD)$.

Vẽ $HK // BC$, $K\in BD$, có $BD\perp BC\Rightarrow HK\perp BD$, mà $AH\perp BD$.

$\Rightarrow BD\perp(AHK)\Rightarrow BD\perp AK$.

Nên $\left((\widehat{ABD}),(BCD)\right)=\widehat{AKH}=30°$

Vẽ $HM // BD$, $M\in BD$, có $BC\perp BD\Rightarrow HM\perp BC$, mà $AH\perp BC$.

$\Rightarrow BC\perp AM$, có góc $\widehat{ABC}=135°$.

Suy ra $\widehat{ABM}=45°$ (nên B ở giữa M và C).

ΔAMB vuông tại M có $\widehat{ABM}=45°$.

Suy ra ΔAMB vuông cân tại $B\Rightarrow AM=MB=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Tứ giác $BKHM$ là hình chữ nhật, nên $BM=HK$.

ΔAHK vuông tại H có $\widehat{AKH}=30°$, nên $AH=\frac{HK}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{6}}$, $AK=2AH=\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

ΔBAD vuông tại A có AK là đường cao nên $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}$.

$\Rightarrow \frac{3}{2a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AD^2}=\frac{1}{2a^2} \Rightarrow AD=a\sqrt{2}$ và $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{3}$.

Có $BC=CM-BM$, $CM^2=CA^2-AM^2=5a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{9a^2}{2}$

$\Rightarrow BC=\frac{3a}{\sqrt{2}}-\frac{a}{\sqrt{2}}=a\sqrt{2}$

Có $V=\frac{1}{3}AH.S_{BCD}=\frac{1}{6}AH.BD.BC=\frac{1}{6}\frac{a}{\sqrt{6}}.a\sqrt{3}.a\sqrt{2}=\frac{a^3}{6}$

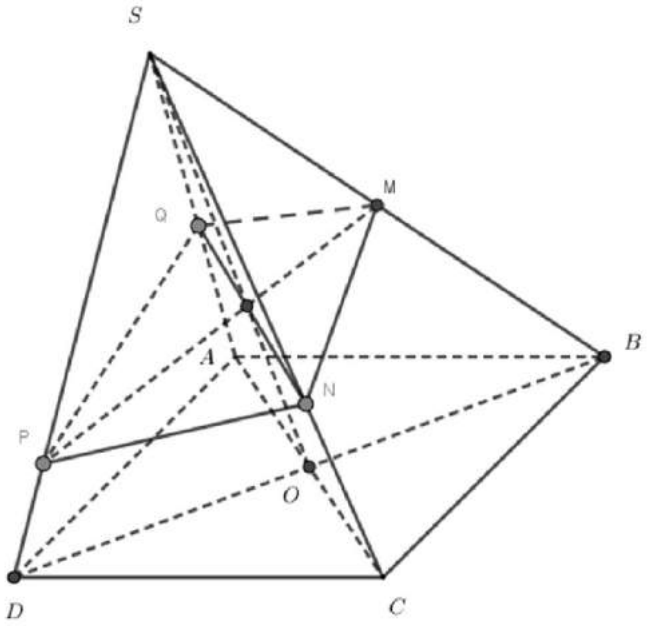
Vậy $V=\frac{a^3}{6}$.

Câu 31. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN=2CN$, P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=3DP$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA tại Q. Biết khối chóp $SMNPQ$ có thể tích bằng 1. Khối đa diện $ABCD.QMNP$ có thể tích bằng

A. $\frac{9}{7}$. **B.** $\frac{17}{5}$. **C.** 4. **D.** $\frac{14}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\frac{SA}{SQ}+\frac{SC}{SN}=\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SP}$ (Tham khảo bài tập 73 trang 64 SBT Hình 11 nâng cao).

Do đó ta có $\frac{SQ}{SA}=\frac{6}{11}$.

Ta có $\frac{V_{SMNQ}}{V_{SBCA}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.\frac{SQ}{SA}=\frac{2}{11} \Rightarrow V_{SMNQ}=\frac{1}{11}V_{SABCD}$.

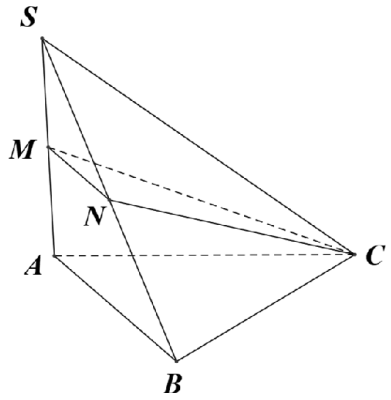
Tương tự: $V_{SQPN}=\frac{3}{22}V_{SABCD}$. Do đó $V_{SMNQ}+V_{SQPN}=\frac{5}{22}V_{SABCD} \Rightarrow V_{SABCD}=\frac{22}{5}$.

Vậy $V_{ABCD.QMNP}=\frac{17}{5}$..

Câu 32. **(THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC đều, $AB=a$, góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính thể tích của khối chóp $S.MNC$.

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{16}$.

Lời giải



Chọn D

Ta có: $SA\perp(ABC)$

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow (SB,(ABC))=(SB,AB)=\widehat{SBA}=60°$.

$SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3}=\frac{a^3}{4}$.

$\frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

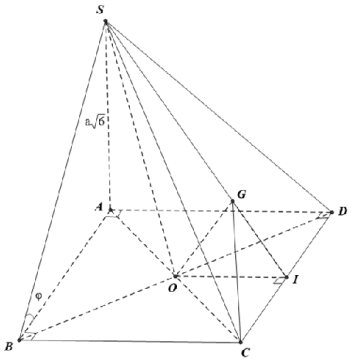
$\Rightarrow V_{S.MNC}=\frac{1}{4}.V_{S.ABC}=\frac{1}{4}.\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{16}$.

Câu 33. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $SA=a\sqrt{6}$, SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc φ sao cho $\tan\varphi=\sqrt{6}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tính thể tích khối tứ diện $SOGC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB.$

Như vậy $\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)} \right) = \left(\widehat{AB;SB} \right) = \widehat{SBA} = \varphi.$

Trong tam giác SAB vuông tại A, $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{AB} \Leftrightarrow AB = a.$

Gọi I là trung điểm CD, trọng tâm G của tam giác SCD, G thuộc SI.

Có $V_{S.OCI} = \dfrac{1}{3} SA.S_{\Delta OIC} = \dfrac{1}{3} SA.\dfrac{1}{2}.IO.IC = \dfrac{1}{6}.a.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{24}.$

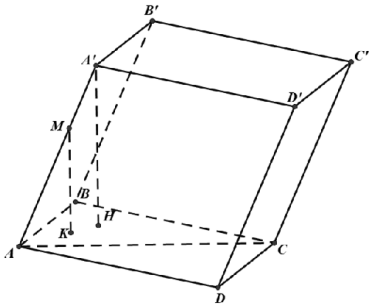
Khi đó: $\dfrac{V_{SOGC}}{V_{SOIC}} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{SOGC} = \dfrac{2}{3} V_{SOIC} = \dfrac{2}{3}\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{36}.$

Câu 34. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Lấy điểm M thuộc cạnh AA' sao cho $MA = 2MA'$. Thể tích của khối chóp $M.ABC$ bằng

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{V}{9}$. **C.** $\dfrac{V}{18}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Thể tích hình hộp là $V = B.h$

Gọi diện tích tam giác ABC là B', ta có: $B' = \dfrac{1}{2}B$.

Gọi $A'H$ là đường cao hạ từ A' xuống mặt phẳng đáy: $A'H \perp (ABCD)$ tại H, đặt $h = A'H$. Dựng $MK \perp (ABCD)$ tại K, ta có $MK // A'H$ và có tỉ số $\dfrac{MK}{A'H} = \dfrac{MA}{A'A} = \dfrac{2}{3}$ $(gt) \Rightarrow h' = \dfrac{2}{3}h$.

Gọi V là thể tích hình chóp $M.ABC$, ta có: $V' = \dfrac{1}{3}.B'.h' = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}B.\dfrac{2}{3}h = \dfrac{1}{9}B.h = \dfrac{V}{9}.$

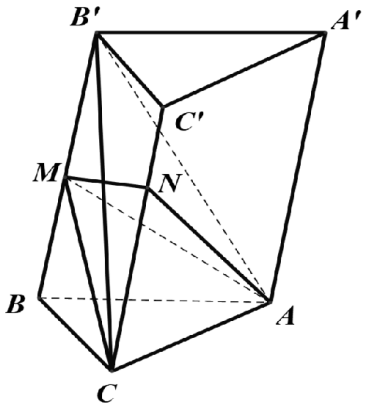
Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V. Gọi M là trung điểm BB', điểm N thuộc cạnh CC' sao cho $CN = 2C'N$. Tính thể tích khối chóp $A.BCMN$ theo V.

A. $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{12}$. **B.** $V_{A.BCMN} = \frac{7V}{18}$. **C.** $V_{A.BCMN} = \frac{V}{3}$. **D.** $V_{A.BCMN} = \frac{5V}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Ta có: $V_{B'BAC} = \frac{1}{3}.d(B',(ABC)).S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}V$.

Theo công thức tỷ số thể tích: $\frac{V_{B.MAC}}{V_{B.B'AC}} = \frac{BM}{BB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{B.MAC} = \frac{1}{2}.V_{B.B'AC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}V = \frac{V}{6}$.

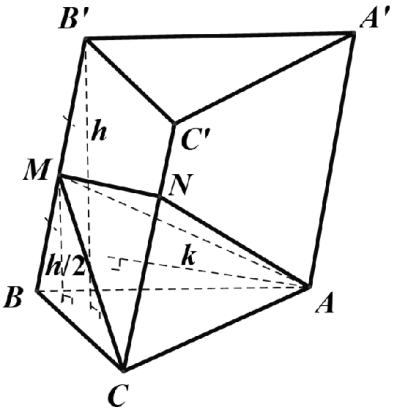
Ta có: $BB' = 2BM = \frac{3}{2}NC \Rightarrow BM = \frac{3}{4}NC$.

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta BMC}}{S_{\Delta NMC}} = \frac{\frac{1}{2}.BM.d(C,BB')}{\frac{1}{2}.NC.d(M,CC')} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{BCNM}}{S_{\Delta BMC}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{V_{A.BCNM}}{V_{A.BMC}} = \frac{7}{3}.$$

Vậy: $V_{A.BCNM} = \frac{7}{3}.V_{A.BMC} = \frac{7}{3}.\frac{V}{6} = \frac{7V}{18}$.

Cách 2:



Gọi h, k lần lượt là độ dài đường cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và hình chóp $A.BCMN$, S là diện tích tam giác ABC.

$\Rightarrow$ độ dài đường cao của hình chóp $M.ABC$ là: $\frac{h}{2}$

$V_{MABC}=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S=\frac{hS}{6}$ (1).

Mặt khác: $V_{MABC}=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S=\frac{1}{3}.k.S_{\Delta BCM} \Rightarrow k.S_{\Delta BCM}=\frac{hS}{2}$

Ta có $S_{\Delta MNC}=\frac{4}{3}S_{\Delta BCM}$ (vì 2 tam giác MNC và BCM có cùng chiều cao và $CN=\frac{4}{3}BM$).

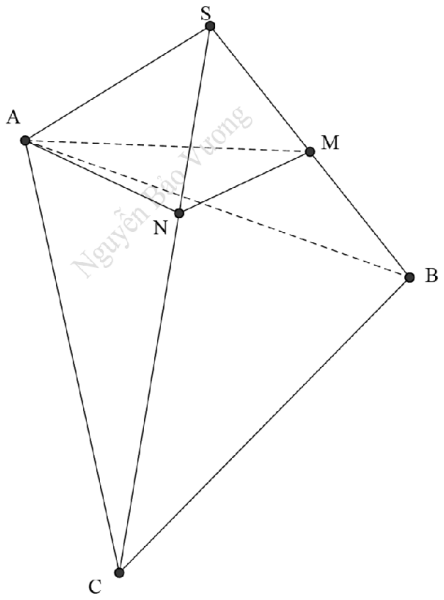
$V_{AMNC}=\frac{1}{3}.k.S_{\Delta MNC}=\frac{1}{3}.k.\frac{4}{3}.S_{\Delta BCM}=\frac{4}{9}.k.S_{\Delta BCM}=\frac{4}{9}.\frac{hS}{2}=\frac{2hS}{9}$. (2).

Từ (1) và (2) ta có: $V_{A.BCMN}=V_{MABC}+V_{AMNC}=\frac{hS}{6}+\frac{2hS}{9}=\frac{7hS}{18}=\frac{7V}{18}$.

Câu 36. **(Chuyên Quang Trung - 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$, $SA=a,\ SB=2a,\ SC=4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Lấy $M\in SB,\ N\in SC$ thoả mãn: $SM=SN=SA=a \Rightarrow \begin{cases}\frac{SM}{SB}=\frac{1}{2}\\ \frac{SN}{SC}=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Theo giả thiết: $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60^0 \Rightarrow S.AMN$ là khối tứ diện đều cạnh a.

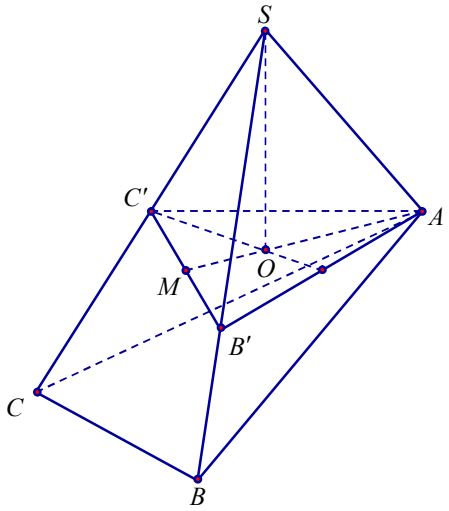
Do đó: $V_{S.AMN}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác : $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.ABC}=8V_{S.AMN}=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37. **(Chuyên Lê Hồng Phong 2018)** Cho khối chóp $S.ABC$ có góc $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=60°$ và $SA=2$, $SB=3$, $SC=4$. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi B' trên SB sao cho $SB' = \frac{2}{3}SB$ và C' trên SC sao cho $SC' = \frac{1}{2}SC$.

Khi đó $SA = SB' = SC' = 2 \Rightarrow S.AB'C'$ là khối tứ diện đều.

Ta có: $AM = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Nên $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ và $S_{AB'C'} = \sqrt{3}$.

Khi đó $V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}S_{AB'C'}.SO = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Mà ta lại có: $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'} = 3 \Rightarrow V_{S.ABC} = 3V_{S.AB'C'} = 2\sqrt{2}$.

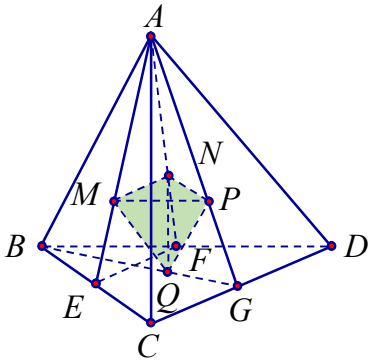
Cách khác:

$$V_{S.ABC} = \frac{SA.SB.SC}{6}.\sqrt{1 - \cos^2\widehat{ASB} - \cos^2\widehat{BSC} - \cos^2\widehat{CSB} + 2\cos\widehat{ASB}.\cos\widehat{BSC}.\cos\widehat{CSB}} = 2\sqrt{2}$$

Câu 38. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích 2017. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD. Tính theo V thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{2017}{9}$. **B.** $\frac{4034}{81}$. **C.** $\frac{8068}{27}$. **D.** $\frac{2017}{27}$.

Lời giải



$\frac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}}=\frac{S_{EFG}}{S_{BCD}}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{AEFG}=\frac{1}{4}V_{ABCD}$

(Do E,F,G lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD).

$\frac{V_{AMNP}}{V_{AEFG}}=\frac{SM}{SE}.\frac{SN}{SE}.\frac{SP}{SG}=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{8}{27}V_{AEFG}=\frac{8}{27}.\frac{1}{4}V_{ABCD}=\frac{2}{27}V_{ABCD}$

Do mặt phẳng $(MNP)//(BCD)$ nên $\frac{V_{QMNP}}{V_{AMNP}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow V_{QMNP}=\frac{1}{2}V_{AMNP}$

$V_{QMNP}=\frac{1}{2}.\frac{2}{27}V_{ABCD}=\frac{1}{27}V_{ABCD}=\frac{2017}{27}.$

Câu 39. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\frac{1}{12}a^3$ **B.** $V=\frac{1}{6}a^3.$ **C.** $V=\frac{1}{8}a^3.$ **D.** $V=\frac{1}{36}a^3.$

Lời giải

Cách 1. Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$

$V_{NDAC}=\frac{1}{3}NH.S_{\Delta DAC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}a.\left(\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{a^3}{18}$

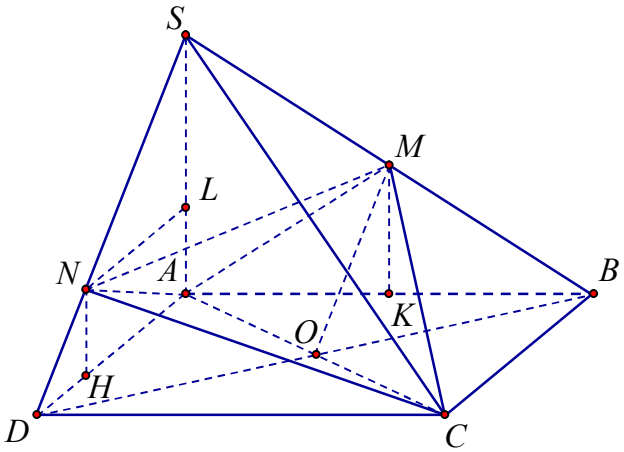
$V_{MABC}=\frac{1}{3}MK.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{a^3}{12}$

$\frac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN}=\frac{a^3}{18}$

Suy ra $V_{NSAM}=\frac{1}{3}NL.S_{\Delta SAM}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}a.\left(\frac{1}{2}a.\frac{a}{2}\right)=\frac{a^3}{18}.$

Mặt khác $V_{C.SMN}=\frac{1}{3}d\left(C,(SMN)\right).S_{\Delta SMN}=\frac{1}{3}d\left(A,(SMN)\right).S_{\Delta SMN}=\frac{a^3}{18}$

Vậy $V_{ACMN}=V_{S.ABCD}-V_{NSAM}-V_{NADC}-V_{MABC}-V_{SCMN}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{18}-\frac{a^3}{18}-\frac{a^3}{12}-\frac{a^3}{18}=\frac{1}{12}a^3.$



Cách 2. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$. Vì $OM//SD$ nên $SD//(AMC)$.

Do đó $d\left(N;\left(AMC\right)\right)=d\left(D;\left(AMC\right)\right)=d\left(B;\left(AMC\right)\right)$

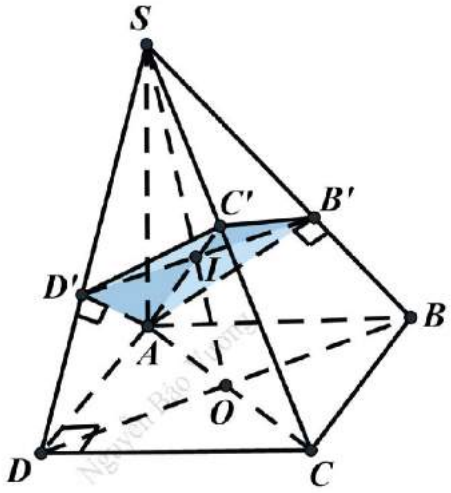
$\Rightarrow V_{ACMN}=V_{N.MAC}=V_{D.MAC}=V_{B.MAC}=V_{M.BAC}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12}.$

(do $d\left(M;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(S;\left(ABC\right)\right)$ và $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$)

Câu 40. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2a$. Gọi $B';D'$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB,SD. Mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$ cắt cạnh SC tại C'. Tính thể tích của khối chóp $S.AB'C'D'$

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{16a^3}{45}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

Lời giải



Ta có $V_{S.AB'C'D'}=2V_{S.AB'C'}$ (1) mà $\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$ $(*)$

ΔSAC vuông tại A nên $SC^2=SA^2+AC^2=\left(2a\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2=6a^2$ suy ra $SC=a\sqrt{6}$

Ta có $BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow BC\perp AB'$ và $SB\perp AB'$ suy ra $AB'\perp\left(SBC\right)$ nên $AB'\perp BC$

Tương tự $AD'\perp SC$. Từ đó suy ra $SC\perp\left(AB'D'\right)\equiv\left(AB'C'D'\right)$ nên $SC\perp AC'$

Mà $SC'.SC=SA^2$ suy ra $\frac{SC'}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{4a^2}{6a^2}=\frac{2}{3}$. Ta cũng có

$\frac{SB'}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{4a^2}{4a^2+a^2}=\frac{4}{5}$

Từ $(*)\Rightarrow\frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}}=\frac{8}{15}$ suy ra $V_{SAB'C'}=\frac{8}{15}V_{SABC}=\frac{8}{15}.\frac{1}{2}V_{SABCD}=\frac{8}{30}V_{SABCD}$ mà

$V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{2a^3}{3}$

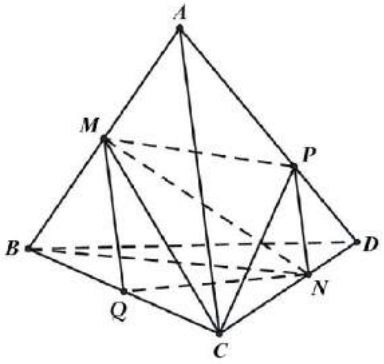
Suy ra $V_{SAB'C'}=\frac{8}{30}.\frac{2a^3}{3}=\frac{8a^3}{45}$

Từ (1) suy ra $V_{S.AB'C'D'}=2V_{S.AB'C'}=\frac{16a^3}{45}.$

Câu 41. **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=-2\overrightarrow{ND}$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song với AC chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích là V. Tính V.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V=\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$. **C.** $V=\dfrac{7\sqrt{2}}{216}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}}{108}$.

Lời giải



Từ N kẻ $NP//AC$, $N\in AD$

M kẻ $MQ//AC$, $Q\in BC$. Mặt phẳng (P) là $MPNQ$

Ta có $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}AH.S_{ABCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

$V=V_{ACMPNQ}=V_{AMPC}+V_{MQNC}+V_{MPNC}$

Ta có $V_{AMPC}=\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AP}{AD}.V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD}$

$V_{MQNC}=\dfrac{1}{2}V_{AQNC}=\dfrac{1}{2}\dfrac{CQ}{CB}.\dfrac{CN}{CD}.V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{2}V_{ABCD}$

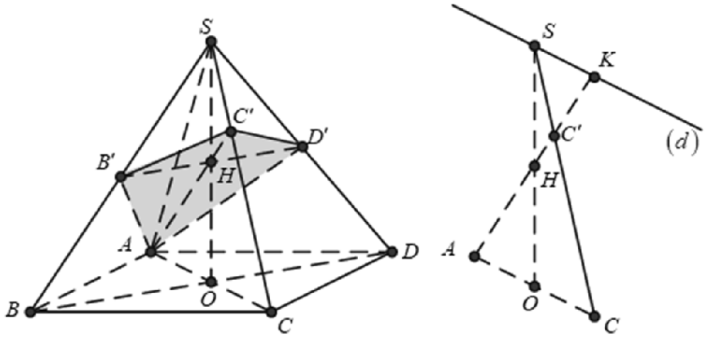
$V_{MPNC}=\dfrac{2}{3}V_{MPCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}V_{MACD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}\dfrac{AM}{AB}.V_{ABCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2}V_{ABCD}=\dfrac{1}{9}V_{ABCD}$

Vậy $V=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\right)V_{ABCD}\Rightarrow V=\dfrac{11}{18}V_{ABCD}=\dfrac{11\sqrt{2}}{216}$.

Câu 42. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy là hình bình hành có thể tích bằng V. Lấy điểm B', D' lần lượt là trung điểm của cạnh SB và SD. Mặt phẳng qua $(AB'D')$ cắt cạnh SC tại C'. Khi đó thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ bằng

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{2V}{3}$. **C.** $\dfrac{V^3}{3}$. **D.** $\dfrac{V}{6}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD thì $SO\cap B'D'=H$. Khi đó H là trung điểm của SO và $C'=AH\cap SO$.

Trong mặt phẳng (SAC): Ta kẻ $(d)//AC$ và AC' cắt (d) tại K. Khi đó áp dụng tính đồng dạng của các tam giác ta có: $\frac{OH}{SH}=\frac{OA}{SK}=1\Rightarrow SK=OA\Rightarrow \frac{SK}{AC}=\frac{1}{2};\ \frac{SK}{AC}=\frac{SC'}{CC'}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{SC'}{SC}=\frac{1}{3}$.

Vì $V_{S.ABD}=V_{S.BCD}=\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}=\frac{V}{2}$ nên ta có $\frac{V_{S.AB'D'}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow V_{S.AB'D'}=\frac{1}{8}V$ và

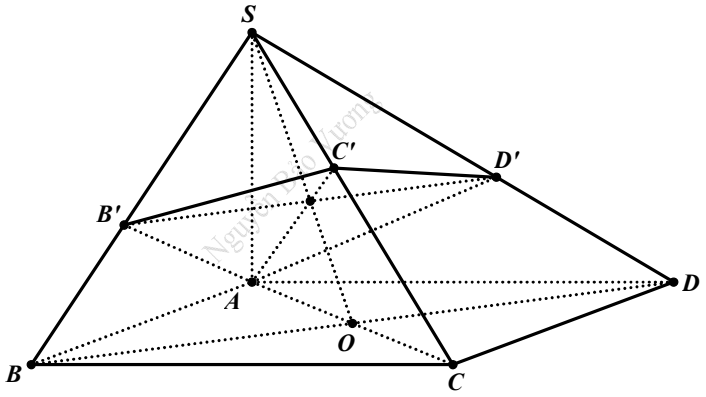
$\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.BCD}}=\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}\cdot\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}\cdot\frac{SC'}{SC}\Leftrightarrow V_{S.B'C'D'}=\frac{SC'}{SC}\cdot\frac{V}{8}$.

Suy ra $V_{S.AB'C'D'}=V_{S.AB'D'}+V_{S.B'C'D'}=\frac{1}{8}V+\frac{SC'}{SC}\cdot\frac{V}{8}=\frac{V}{8}\left(1+\frac{SC'}{SC}\right)=\frac{V}{6}$.

Câu 43. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Một mặt phẳng đi qua A vuông góc với SC cắt SB, SD, SC lần lượt tại B', D', C'. Thể tích khối chóp $SAB'C'D'$ là:

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a^2.a\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ta có $AD'\perp(SDC)\Rightarrow AD'\perp SD$; $AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp SB$.

Do $SC\perp(AB'D')\Rightarrow SC\perp AC'$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên C' là trung điểm của SC.

Trong tam giác vuông SAB' ta có $\frac{SB'}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{2a^2}{3a^2}=\frac{2}{3}$.

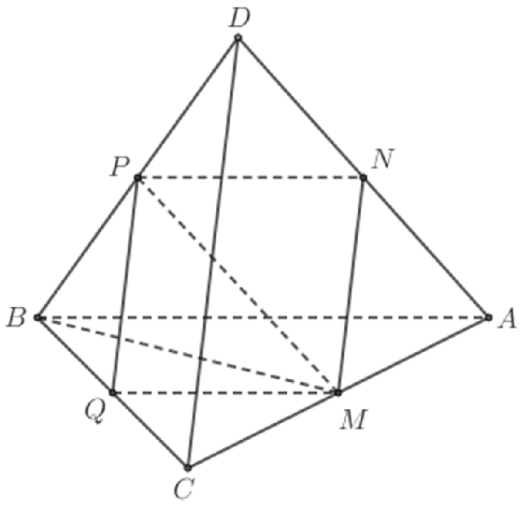
$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{SAB'C'}+V_{SAC'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}+\frac{SD'}{SD}\frac{SC'}{SC}\right)=\frac{SB'}{SB}\frac{SC'}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

Vậy $V_{SAB'C'D'}=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 44. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích là V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, AD, BD, BC. Thể tích khối chóp $AMNPQ$ là

A. $\frac{V}{6}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{V}{4}$. **D.** $\frac{V\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



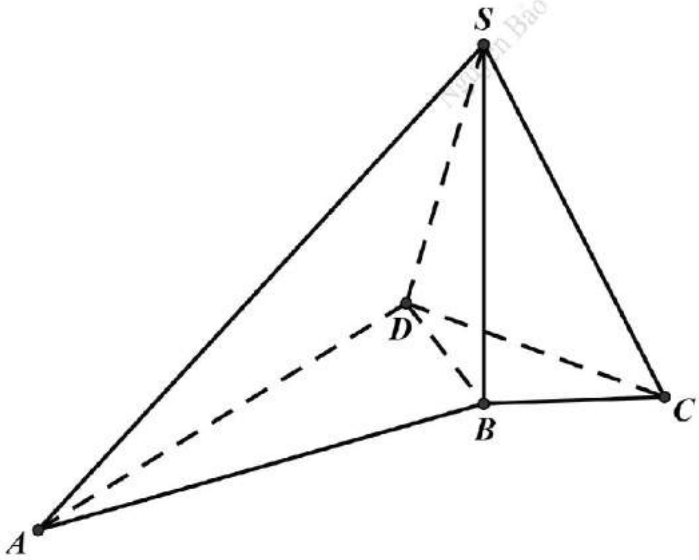
Ta có $V_{AMNPQ}=2V_{APMQ}$ (do $MNPQ$ là hình thoi), $AB\ //\ MQ\Rightarrow V_{APMQ}=V_{BPMQ}$

Mặt khác do P là trung điểm của BD nên $d\left(P,(ABC)\right)=\frac{1}{2}d\left(D,(ABC)\right)$, đồng thời

$S_{BQM}=\frac{1}{4}S_{ABC}\Rightarrow V_{BPMQ}=\frac{1}{3}d\left(P,(ABC)\right).S_{BQM}=\frac{1}{6}d\left(D,(ABC)\right).\frac{1}{4}S_{ABC}$

$=\frac{1}{8}.\frac{1}{3}d\left(D,(ABC)\right).S_{ABC}=\frac{V}{8}\Rightarrow V_{AMNPQ}=\frac{V}{4}$.

Câu 45. **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Cho hình đa diện như hình vẽ



Biết $SA=6$, $SB=3$, $SC=4$, $SD=2$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSD}=\widehat{DSA}=\widehat{BSD}=60°$. Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $30\sqrt{2}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Lời giải

Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA'=SB'=SC'=SD=2$. Ta có $A'B'=B'C'=C'D=DA'=2$. Khi đó hình chóp $S.A'B'D$ và hình chóp $S.CB'D$ là các hình chóp tam giác đều có tất cả các cạnh bằng 2.

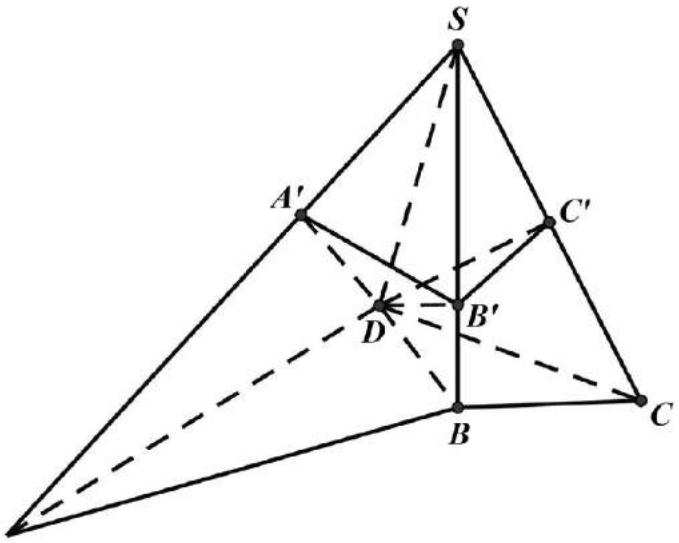
$V_{S.A'B'D}=V_{S.C'B'D}=\frac{2^3\sqrt{2}}{12}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác $\frac{V_{S.ABD}}{V_{S.A'B'D}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SD}{SD}=3.\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$, nên $V_{S.ABD}=\frac{9}{2}V_{S.A'B'D}=\frac{9}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}$.

$\frac{V_{S.CBD}}{V_{S.C'B'D}}=\frac{SC}{SC'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SD}{SD}=2.\frac{3}{2}=3$, nên $V_{S.CBD}=3V_{S.C'B'D}=3.\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$.

Thể tích khối đa diện $S.ABCD$ là

$V=V_{S.ABD}+V_{S.CBD}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.



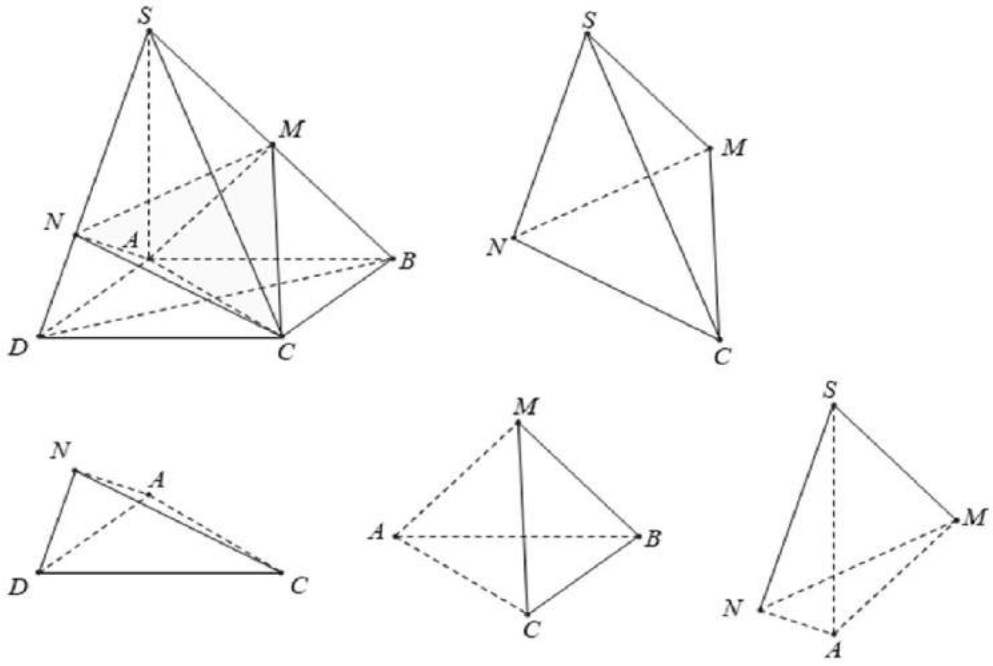
Câu 46. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB, N thuộc cạnh SD sao cho $SN=2ND$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ACMN$.

A. $V=\frac{1}{8}a^3$. **B.** $V=\frac{1}{6}a^3$. **C.** $V=\frac{1}{36}a^3$. **D.** $V=\frac{1}{12}a^3$.

Lời giải

Cách 1: Phân rã hình:

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}\cdot a^3=\frac{a^3}{3}$.



Thể tích tứ diện $SMNC$ là: $V_{SMNC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}V_{S.BDC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{1}{6}V$.

Thể tích tứ diện $NACD$ là: $V_{NADC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{1}{6}V$.

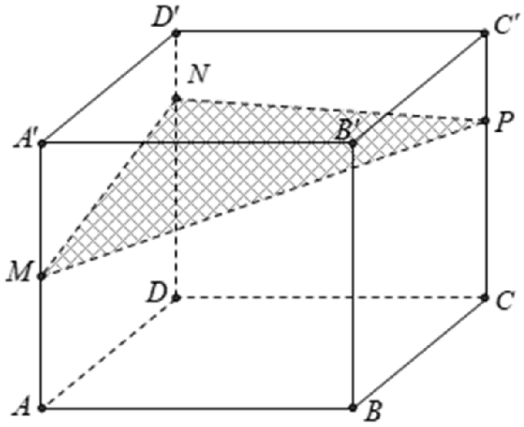
Thể tích tứ diện $MABC$ là: $V_{MABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{1}{4}V$.

Thể tích tứ diện $SAMN$ là: $V_{SAMN}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}V_{S.BDC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}V=\frac{1}{6}V$.

Mặt khác ta có: $V_{SMNC}+V_{NACD}+V_{MABC}+V_{SAMN}+V_{AMNC}=V_{S.ABCD}$

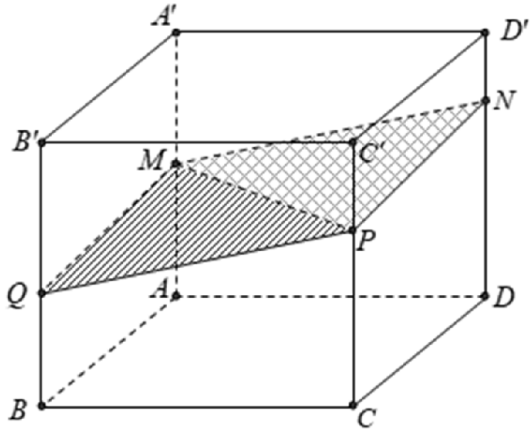
Suy ra $V_{AMNC}=V-\left(V_{SMNC}+V_{NACD}+V_{MABC}+V_{SAMN}\right)=V-\left(\frac{1}{6}V+\frac{1}{6}V+\frac{1}{4}V+\frac{1}{6}V\right)=\frac{1}{4}V=\frac{a^3}{12}$.

Câu 47. **(THPT Thạch Thanh 2 - Thanh Hóa - 2018)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M=MA$, $DN=3ND'$, $CP=2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$. **B.** $\frac{8440}{9}$. **C.** $\frac{7385}{18}$ **D.** $\frac{5275}{12}$.

Lời giải



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'.

Giả sử $\frac{A'M}{AA'}=x$, $\frac{C'P}{CC'}=y$, $\frac{D'N}{DD'}=z$, $\frac{B'Q}{BB'}=t$. Khi đó $x+y=z+t$.

$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}}=\frac{x+z+t}{3}\Rightarrow\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{x+z+t}{6}$

$$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}}=\frac{y+z+t}{3}\Rightarrow\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{y+z+t}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}}=\frac{1}{2}(x+y)$$

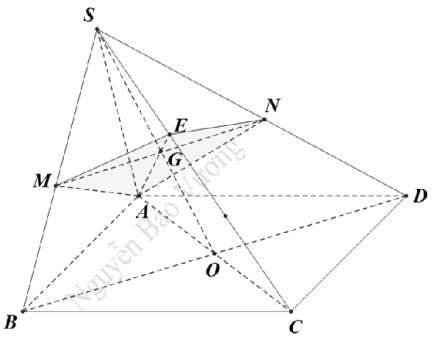
$$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}}=\frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'}+\frac{C'P}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'}=\frac{5}{12}.V_{ABCD.A'D'C'B'}=\frac{5275}{6}.$$

Câu 48. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có thể tích bằng V. Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC=2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AE và song song với BD, (α) cắt SB,SD lần lượt tại hai điểm M,N. Tính theo V thể tích của khối chóp $S.AMEN$.

A. $\frac{3V}{8}$. **B.** $\frac{V}{6}$. **C.** $\frac{3V}{16}$. **D.** $\frac{V}{9}$.

Lời giải



Gọi G là giao điểm của AE và SO.

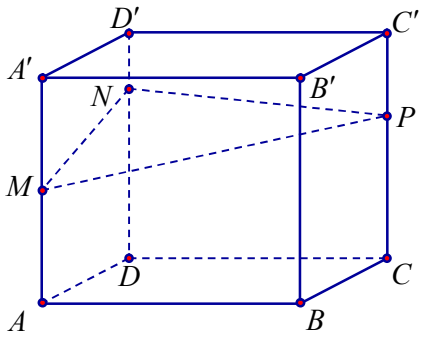
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SOC ta có: $\frac{AC}{AO}.\frac{GO}{GS}.\frac{ES}{EC}=1\Rightarrow\frac{GO}{GS}=1$

$$\Rightarrow\frac{SG}{SO}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}$$

Ta có: $\frac{V_{S.AMEN}}{V}=\frac{V_{S.AME}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.AEN}}{2V_{S.ACD}}=\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}+\frac{1}{2}.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

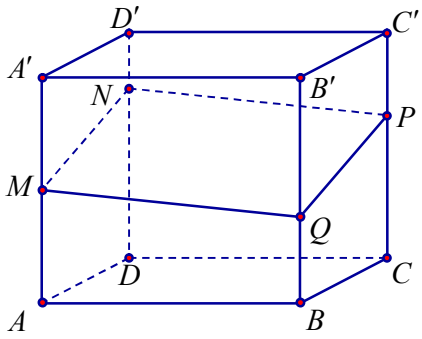
Vậy $V_{S.AMEN}=\frac{1}{6}V$.

Câu 49. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M=MA$; $DN=3ND'$; $CP=2PC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{7385}{18}$. **B.** $\frac{5275}{12}$. **C.** $\frac{8440}{9}$. **D.** $\frac{5275}{6}$.

Lời giải



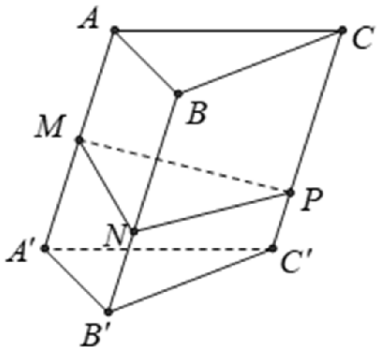
Ta có: $\frac{V_{MNPQ.A'B'C'D'}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{A'A}+\frac{C'P}{C'C}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$.

$V_{nho}=V_{MNPQ.A'B'C'D'}=\frac{5}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{5}{12}\cdot 2110=\frac{5275}{6}$.

Câu 50. **(Chuyên Bắc Ninh - 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2018. Gọi M là trung điểm AA'; N,P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BB', CC' sao cho $BN=2B'N$, $CP=3C'P$. Tính thể tích khối đa diện $ABC.MNP$.

A. $\frac{32288}{27}$. **B.** $\frac{40360}{27}$. **C.** $\frac{4036}{3}$. **D.** $\frac{23207}{18}$.

Lời giải

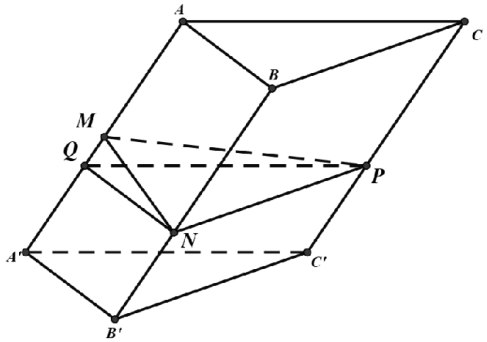


Ta có $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{23}{36}$. Vậy $V_{ABC.MNP}=\frac{23207}{18}$.

Câu 51. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $6a^3$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}$, $\frac{BN}{BB'}=\frac{CP}{CC'}=\frac{2}{3}$. Tính thể tích V' của đa diện $ABC.MNP$

A. $V'=\frac{11}{27}a^3$. **B.** $V'=\frac{9}{16}a^3$. **C.** $V'=\frac{11}{3}a^3$. **D.** $V'=\frac{11}{18}a^3$.

Lời giải



Lấy điểm $Q\in AA'$ sao cho $PQ//AC$.

Ta có $MQ=AQ-AM=\frac{1}{6}AA'$.

Dễ thấy $V_{ABC.MNP}=\frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$, $V_{M.QNP}=\frac{1}{12}.V_{ABC.A'B'C'}$.

Vậy $V'=V_{ABC.MNP}-V_{M.QNP}=\frac{11}{18}V=\frac{11}{3}a^3$.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 14 THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN DIỆN KHÁC

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M,N,P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36.

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ bằng.

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{64a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{128a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{48}$. **B.** $\frac{2a^3}{81}$. **C.** $\frac{a^3}{81}$. **D.** $\frac{a^3}{96}$.

Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SAD). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{9a^3}{32}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng:

A. $\frac{8a^3}{81}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{16a^3}{81}$.

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{11}{12}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Câu 11. **(Mã đề 104 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12. **(Mã 103 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Câu 13. **(Mã 102 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

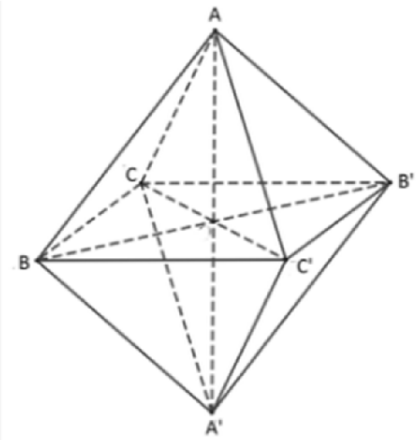
Câu 14. **(Mã đề 101 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M,N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $30\sqrt{3}$. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $27\sqrt{3}$. **D.** $21\sqrt{3}$.

Câu 15. **(Chuyên Hạ Long -2019)** thể tích của bát diện đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ là.

a. $6a^3$. **B.** $\sqrt{6}a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Ta có khối bát diện đều cạnh $a\sqrt{3}$ được tạo từ 2 khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$.

Chiều cao của khối chóp là: $h=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối chóp: $V_{chop}=\dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{3}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt).

Vậy thể tích khối bát diện là: $V=2V_{chop}=a^3\sqrt{6}$ (đvtt).

Câu 16. Cho một hình lập phương có cạnh bằng a. Tính theo a thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương.

A. $\dfrac{1}{4}a^3$. **B.** $\dfrac{1}{6}a^3$. **C.** $\dfrac{1}{12}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{8}a^3$.

Câu 17. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp đó là

A. $8a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 18. **(THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, BC=2a, AC'=3a$. Điểm N thuộc cạnh BB' sao cho $BN=2NB'$, điểm M thuộc cạnh DD' sao cho $D'M=2MD$. Mặt phẳng $\left(A'MN\right)$ chia hình hộp chữ nhật làm hai phần, tính thể tích phần chứa điểm C'.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $2a^3$. **D.** $3a^3$.

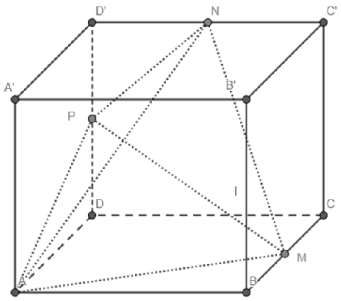
Câu 19. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $V=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V=2\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q,R,S là tâm các mặt của hình lập phương. Thể tích khối bát diện đều tạo bởi sáu đỉnh M,N,P,Q,R,S bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3}{6}$

Câu 21. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, $C'D'$, DD' (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp bằng 144, thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng



A. 15. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 18.

Câu 22. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 10. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trọng tâm của các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA. Thể tích của khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D là

A. 9. **B.** $\frac{50}{9}$. **C.** 30. **D.** $\frac{25}{3}$.

Câu 23. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'D'$, DD' và Q thuộc cạnh BC sao cho $QC=3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

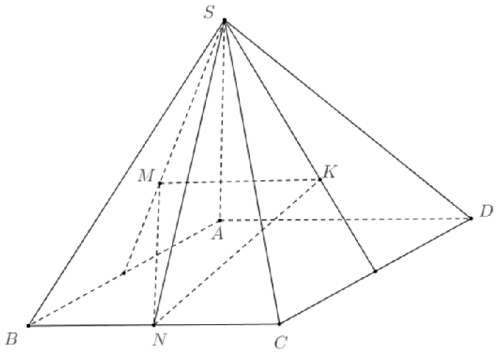
Câu 24. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC'. Thể tích khối đa diện $ABCSB'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI=\frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA'=2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'),(A'B'C'D')$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Câu 26. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=a$. M,K tương ứng là trọng tâm tam giác SAB, SCD; N là trung điểm BC. Thể tích khối tứ diện $SMNK$ bằng $\frac{m}{n}.a^3$ với $m,n\in\mathbb{N},(m,n)=1$. Giá trị $m+n$ bằng:

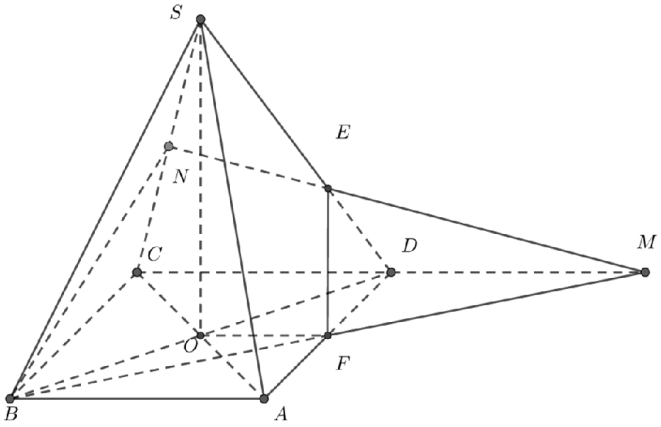


A. 28. **B** 12. **C.** 19. **D.** 32.

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có cạnh $4a$, $A'A=8a$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm cạnh $AB',B'C,BD'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,K là:

A. $12\sqrt{3}\,a^3$ **B.** $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}a^3$ **C.** $16\sqrt{3}\,a^3$ **D.** $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}a^3$

Câu 28. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần (như hình vẽ bên). Tỉ số thể tích giữa hai phần $\dfrac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}$ bằng



A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{7}{6}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Câu 29. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB,SC,SD tại M,N,P. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{108\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{125\pi}{6}$.

Câu 30. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AB=4$, $SA=SB=SC=12$. Gọi M,N,E lần lượt là trung điểm của AC,BC,AB. Trên cạnh SB lấy điểm F sao cho $\dfrac{BF}{BS}=\dfrac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

A. $\frac{8\sqrt{34}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{34}}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{34}}{9}$. **D.** $\frac{16\sqrt{34}}{9}$.

Câu 31. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là:

A. $\frac{V}{12}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{18}$.

Câu 32. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $BM = 2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD', DC, BC lần lượt tại N, P, Q. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện $CPQMNC'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{31}{162}$. **B.** $\frac{35}{162}$. **C.** $\frac{34}{162}$. **D.** $\frac{13}{162}$.

Câu 33. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 18. Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác BCD; (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa (P) và mặt phẳng (BCD) bằng 60^0. Các đường thẳng qua $B; C; D$ song song với AA_1 cắt (P) lần lượt tại $B_1; C_1; D_1$. Thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng?

A. $12\sqrt{3}$ **B.** 18 **C.** $9\sqrt{3}$ **D.** 12

Câu 34. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (SCD) sao cho tổng $Q = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + MS^2$ nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{11}{140}$. **B.** $\frac{22}{35}$. **C.** $\frac{11}{70}$. **D.** $\frac{11}{35}$.

Câu 35. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30^o, O là trọng tâm tam giác ABC. Một hình chóp đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60^o sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC'. Gọi V_1 là phần thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\frac{9}{16}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{27}{64}$. **D.** $\frac{9}{64}$.

Câu 36. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SC. Gọi E là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMN). Tính thể tích V của khối chóp $O.BMEN$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Câu 37. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Mặt bên tạo với đáy góc 60^0. Mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với đáy góc 30^0 và cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABMN$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Câu 38. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 8 và diện tích đáy bằng 11. Gọi M là trung điểm của AA', N là điểm trên cạnh BB' sao cho $BN=3B'N$ và P là điểm trên cạnh CC' sao cho $6CP=5C'P$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. $\dfrac{88}{3}$. **B.** 42. **C.** 44. **D.** $\dfrac{220}{3}$.

Câu 39. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác SAB và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S.

A. $V=8$. **B.** $V=24$. **C.** $V=36$. **D.** $V=12$.

Câu 40. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30^0, cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45^0. Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho?

A. $\dfrac{3\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. **B.** $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. **C.** $\dfrac{9\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. **D.** $\dfrac{27\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$.

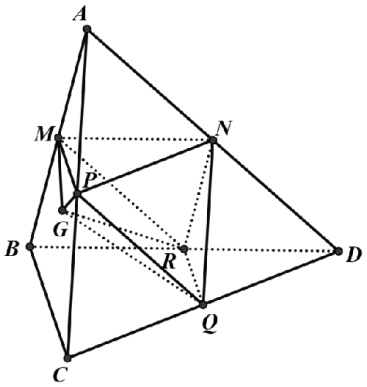
Câu 41. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $12a^2$; khoảng cách từ S tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $4a$. Gọi L là trọng tâm tam giác ACD; gọi T và V lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC. Mặt phẳng (LTV) chia hình chóp thành hai khối đa diện, hãy tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S.

A. $\dfrac{20a^3}{3}$. **B.** $8a^3$. **C.** $\dfrac{28a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{32a^3}{3}$.

Câu 42. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm đối xứng của của A qua D. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện có chứa đỉnh. Thể tích của khối đa diện (H) bằng

A. $\dfrac{7}{12}$. **B.** $\dfrac{4}{7}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{3}{7}$.

Câu 43. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi M,N,P,Q,R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V.



A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{V}{6}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{2V}{5}$.

Câu 44. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P là các điểm nằm trên cạnh $A'B', B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N = \frac{3}{4}B'C'$ và $BP = \frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{59}{12}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 14 THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN DIỆN KHÁC

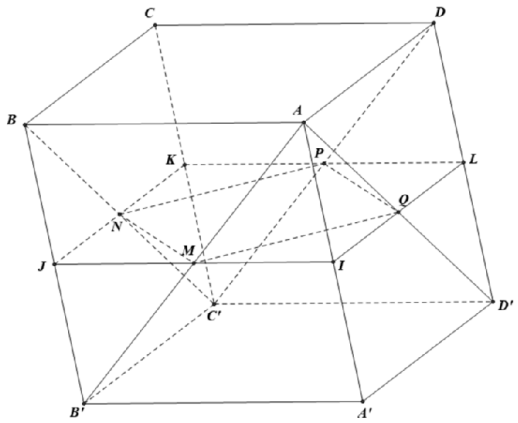
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M,N,P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B



Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 9.8 = 72$.

Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm các cạnh AA', BB', CC', DD' suy ra $V_{ABCD.IJKL} = 36$.

Do hình chóp $A.MIQ$ đồng dạng với hình chóp $A.B'A'D'$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên

$$V_{A.MQI} = \frac{1}{8}V_{A.B'A'D'} = \frac{1}{8}.\frac{1}{3}.8.\frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

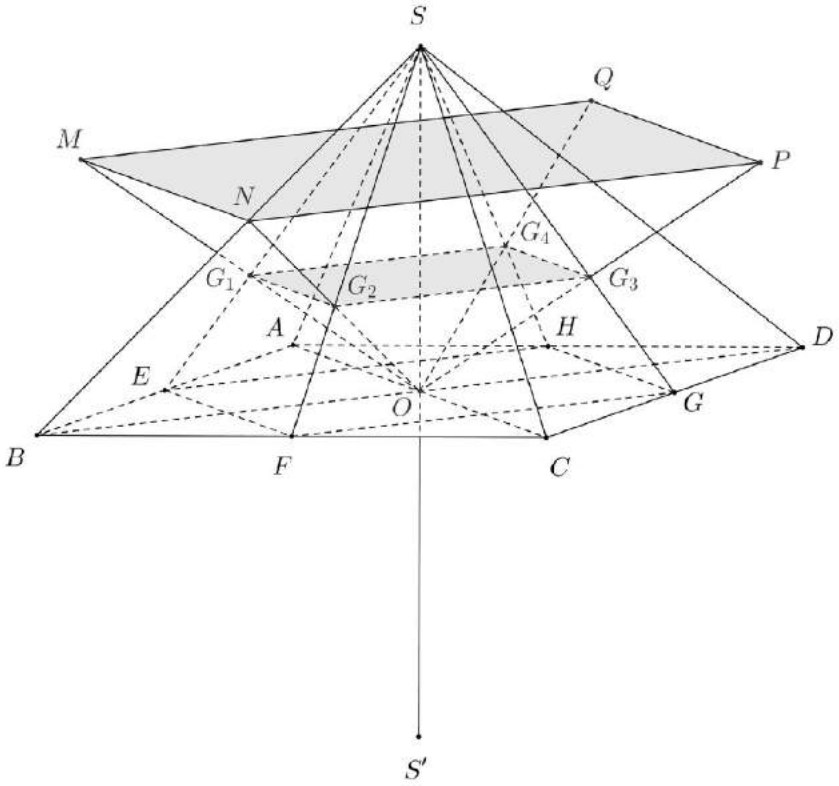
$$V_{ABCD.MNPQ} = V_{ABCD.IJKL} - 4V_{A.MIQ} = 36 - 4.\frac{3}{2} = 30.$$

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDA$.

E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\frac{4}{9}S_{EFGH} = 4.\frac{4}{9}.\frac{1}{2}EG.HF = \frac{8a^2}{9}$.

$$d\left(S',(MNPQ)\right) = d\left(S',(ABCD)\right) + d\left(O,(MNPQ)\right)$$
$$= d\left(S,(ABCD)\right) + 2d\left(O,(G_1G_2G_3G_4)\right)$$
$$= d\left(S,(ABCD)\right) + \frac{2}{3}d\left(S,(ABCD)\right)$$
$$= \frac{5}{3}d\left(S,(ABCD)\right) = \frac{5a\sqrt{14}}{6}$$

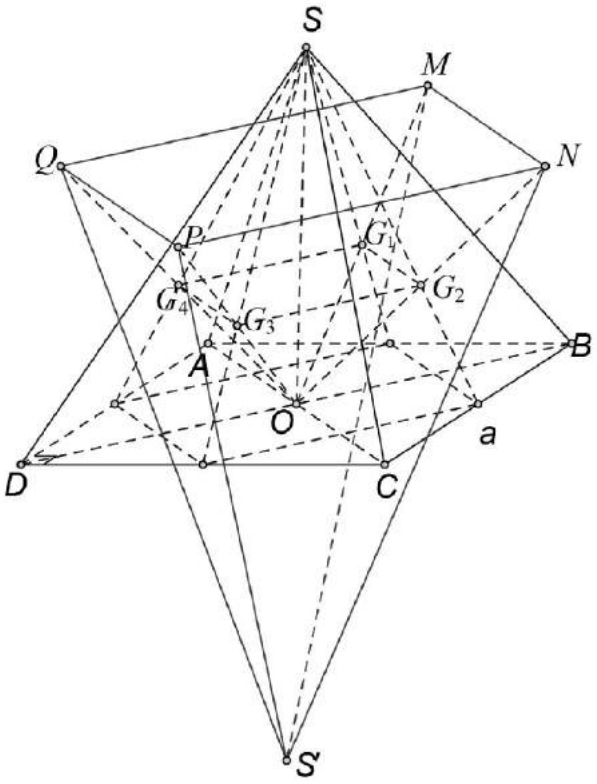
Vậy $V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a\sqrt{14}}{6}\cdot\frac{8a^2}{9} = \frac{20a^3\sqrt{14}}{81}$.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. **B.** $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. **C.** $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Ta gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCD, SDA thì

$$d\left(S',(MNPQ)\right)=\frac{5}{2}d\left(O,(MNPQ)\right)\Rightarrow V_{S'.MNPQ}=\frac{5}{2}V_{O.MNPQ}=\frac{5}{2}.8V_{O.G_1G_2G_3G_4}$$

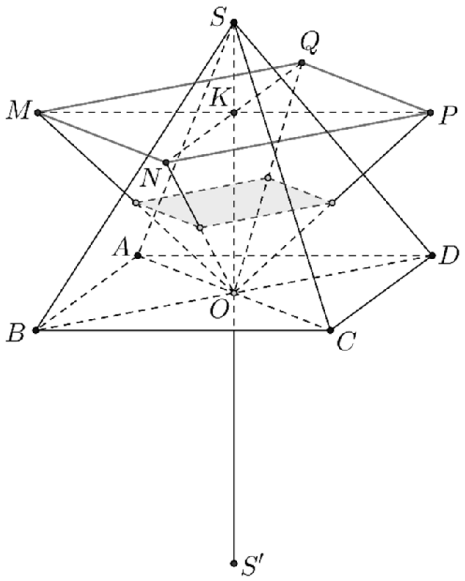
$$=10V_{S.G_1G_2G_3G_4}=10.\frac{2}{27}V_{S.ABCD}=\frac{20}{27}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{10}}{2}.a^2=\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}.$$

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'.MNPQ$ bằng.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $\frac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. **D.** $\frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $S'K = S'O + OK = SO + \frac{2}{3}SO = \frac{5a\sqrt{6}}{6}$.

, $S_{MNPQ} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} S_{ABCD} = \frac{8}{9}a^2$.

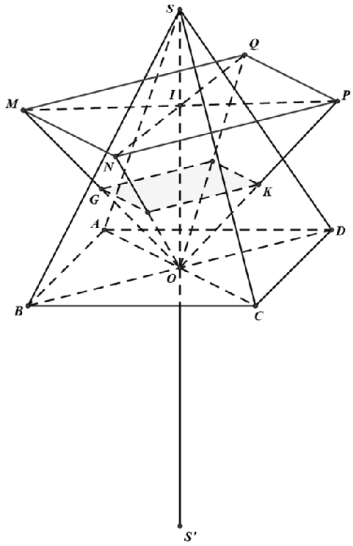
Vậy: $V_{S'.MNPQ} = \frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và tam giác SCD.

Suy ra $MP = 2GK = \frac{4}{3}a$, tương tự $NQ = \frac{4}{3}a$.

$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{8}{9}a^2$.

Ta có $(MNPQ)//(ABCD)$

$d\left(M,(ABCD)\right)=2d\left(G,(ABCD)\right)=\frac{2}{3}SO=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

$\Rightarrow d\left((MNPQ),(ABCD)\right)=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow d\left(S',(MNPQ)\right)=S'O+\frac{a\sqrt{2}}{3}=\frac{5a\sqrt{2}}{6}$

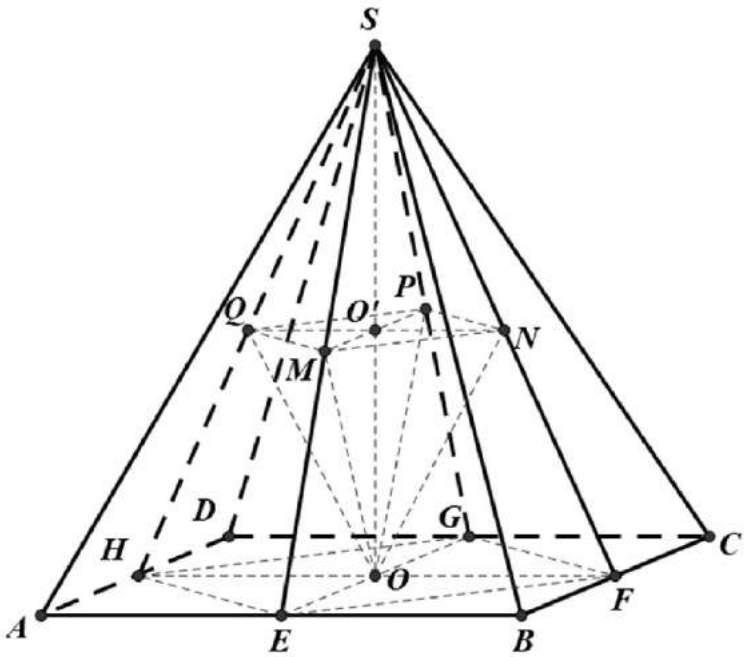
$\Rightarrow V_{S'MNPQ}=\frac{1}{3}.\frac{5a\sqrt{2}}{6}.\frac{8a^2}{9}=\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{4a^3}{3}$. **B.** $\frac{64a^3}{81}$. **C.** $\frac{128a^3}{81}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E,F,G,H lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD và DA. Gọi M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O lên các đường thẳng SE,SF,SG,SH ta suy ra M,N,P,Q lần lượt hình chiếu vuông góc của O mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ và (SDA).

Ta có $EFGH$ là hình vuông và $S_{EFGH}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ suy ra $V_{S.EFGH}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Các độ dài $SO=\sqrt{SA^2-\frac{1}{4}AC^2}=\sqrt{(2a\sqrt{3})^2-\frac{1}{4}(4a\sqrt{2})^2}=2a$ và $SE=\sqrt{SO^2+OE^2}=2a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SOE ta có $\frac{SM}{SE}=\frac{SO^2}{SE^2}=\frac{1}{2}$ suy ra $\frac{SN}{SF}=\frac{SP}{SG}=\frac{SQ}{SH}=\frac{1}{2}$.

Xét hai hình chóp $S.EFGH$ và $O.MNPQ$ ta có hai đường cao OO' và SO tương ứng tỷ lệ $\frac{OO'}{SO}=\frac{1}{2}$, đồng thời diện tích đáy $\frac{S_{MNPQ}}{S_{EFGH}}=\left(\frac{MN}{EF}\right)^2=\frac{1}{4}$.

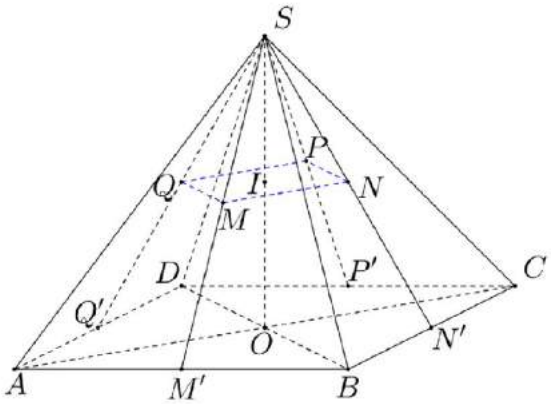
Do vậy $\frac{V_{O.MNPQ}}{V_{S.EFGH}}=\frac{1}{8}$ hay $V_{O.MNPQ}=\frac{1}{8}V_{S.EFGH}=\frac{1}{16}V_{S.ABCD}=\frac{1}{16}.\frac{1}{3}.2a.(4a)^2=\frac{2}{3}a^3$.

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{48}$. **B.** $\frac{2a^3}{81}$. **C.** $\frac{a^3}{81}$. **D.** $\frac{a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA.

Ta có $AB\perp OM'$ và $AB\perp SO$ nên $AB\perp(SOM')$.

Suy ra $(SAB)\perp(SOM')$ theo giao tuyến SM'.

Theo giả thiết ta có $OM\perp(SAB)$ nên $OM\perp SM'$, do đó M là hình chiếu vuông góc của O trên SM'.

Tương tự như vậy: N,P,Q là hình chiếu vuông góc của O lần lượt trên SN',SP',SQ'.

Ta có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}=OM'$.

Suy ra tam giác SOM' vuông cân tại O nên M là trung điểm của SM'.

Từ đó dễ chứng minh được $MNPQ$ là hình vuông có tâm I thuộc SO và nằm trong mặt phẳng song song với $(ABCD)$, với I là trung điểm của SO.

Suy ra $OI=\frac{1}{2}OS=\frac{a}{4}$.

Do đó $MN=\frac{1}{2}M'N'=\frac{1}{4}AC=\frac{\sqrt{2}a}{4}$.

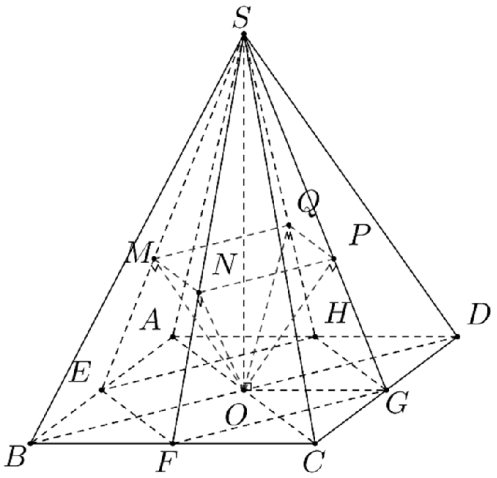
Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng $\frac{1}{3}S_{MNPQ}.OI=\frac{1}{3}.MN^2.OI=\frac{1}{3}.\frac{a^2}{8}.\frac{a}{4}=\frac{a^3}{96}$.

Câu 8. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SAD). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{9a^3}{32}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm của SM với AB, SN với BC, SP với CD, SQ với DA thì E, F, G, H là trung điểm của AB, BC, CD, DA thì

Ta có $\frac{SP}{SG} = \frac{SP.SG}{SG^2} = \frac{SO^2}{SG^2} = \frac{\frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow P$ là trung điểm SG.

Chứng minh tương tự ta cũng có M, N, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, DA.

Khi đó $\mathrm{d}(O,(MNPQ)) = \frac{1}{2}SO = \frac{3a}{4}$.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{4}S_{EFGH} = \frac{1}{8}S_{ABCD} = \frac{9a^2}{8}$.

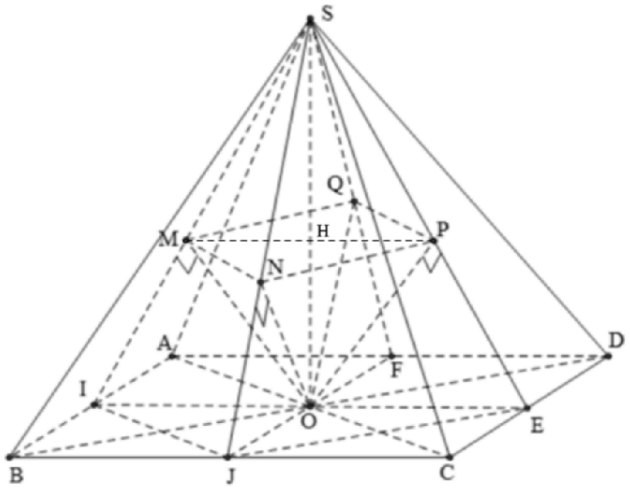
Vậy $V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{9a^2}{8} = \frac{9a^3}{32}$.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng:

A. $\frac{8a^3}{81}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{16a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I, J, E và F lần lượt là trung điểm AB, BC, CD và DA.

ΔSIA vuông tại $I \Rightarrow SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$

ΔSOI vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a.$

$\Rightarrow \Delta SOI$ vuông cân tại O.

$\Rightarrow$ M là trung điểm SI.

MN là đường trung bình $\Delta SIJ \Rightarrow MN = \frac{1}{2}IJ = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}2a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$S_{MNPQ} = MN^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}.$

Gọi $H = MP \cap SO \Rightarrow H$ là trung điểm SO.

$\Rightarrow d\left(O,\left(MNPQ\right)\right) = SH = \frac{1}{2}SO = \frac{a}{2}.$

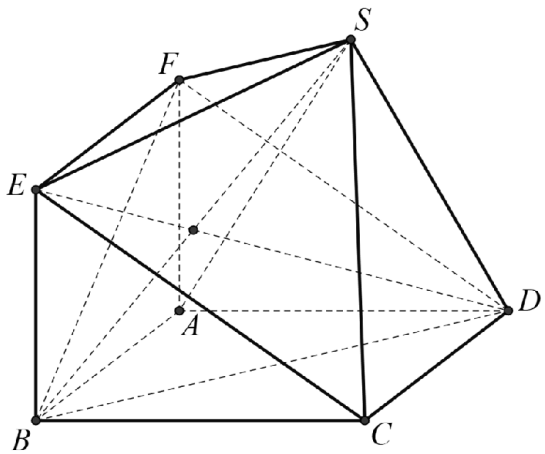
$V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}SH.S_{MNPQ} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{12}.$

Câu 10. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{11}{12}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có:ADF.BCE là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân

Dựa vào hình vẽ ta có:

$V_{ABCDSEF} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE} = V_{ADF.BCE} + V_{B.CDFE} = 2V_{ADF.BCE} - V_{BADE}$

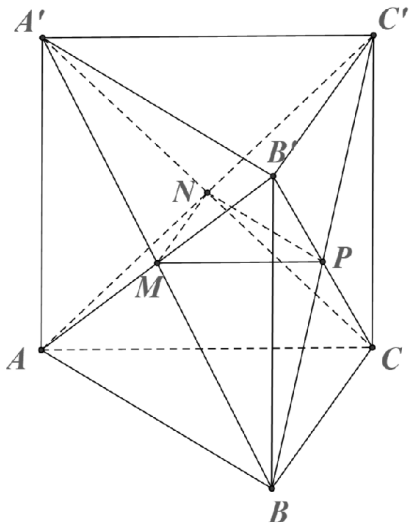
$V_{ADF.BCE} = AB.S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}; V_{BADE} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABE} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABCDSEF} = 2.\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Câu 11. **(Mã đề 104 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $8\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = 4.\frac{4^2.\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$.

Gọi thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P là V_1.

Ta có: $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC}$.

Dễ thấy $V_{A'ABC} = \frac{1}{3}V$ và $V_{AMNCB} = \frac{3}{4}V_{A'ABC}$ nên $V_{AMNCB} = \frac{1}{4}V$.

$V_{BA'B'C'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BMNP} = \frac{1}{8}V_{BA'B'C'}$ nên $V_{BMNP} = \frac{1}{24}V$.

$V_{A'BCB'} = V_{A'B'CC'} = \frac{1}{3}V$ và $V_{BNPC} = \frac{1}{4}V_{BA'B'C}$ nên $V_{BNPC} = \frac{1}{12}V$.

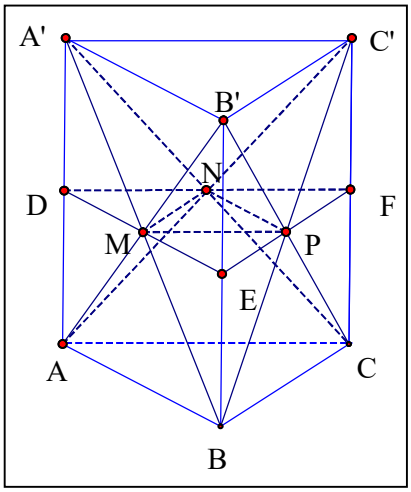
Vậy $V_1 = V_{AMNCB} + V_{BMNP} + V_{BNPC} = \frac{3}{8}V = 6\sqrt{3}$.

Câu 12. **(Mã 103 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Dễ chứng minh được $(DEF)//(ABC)$ và D,E,F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF}=\frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}=12\sqrt{3}$.

Ta có $V_{ABCPNM}=V_{ABC.DEF}-V_{ADMN}-V_{BMPE}-V_{CPMF}$.

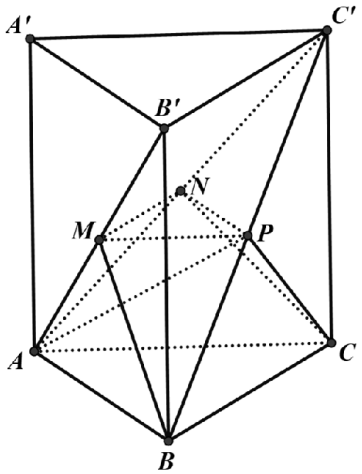
Mặt khác $V_{ADMN}=V_{BMPE}=V_{CPMF}=\frac{1}{12}V_{ABC.DEF}\Rightarrow V_{ABCPNM}=\frac{3}{4}V_{ABC.DEF}=9\sqrt{3}$.

Câu 13. **(Mã 102 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N và P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A',ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $\frac{40\sqrt{3}}{3}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $V_{ABC.A'B'C'}=8.\frac{\sqrt{3}}{4}.4^2=32\sqrt{3}$; $V_{C'.ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$; $V_{A.BC'B'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Khối đa diện cần tìm $V=V_{C.ABPN}+V_{P.AMN}+V_{P.ABM}$

Ta có $V_{C.ABPN}=\frac{3}{4}V_{C'.ABC}=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}$

Ta có $V_{PAMN}=\frac{1}{8}V_{ABC'B'}=\frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}$

Ta có $V_{PABM}=\frac{1}{4}V_{ABC'B'}=\frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$

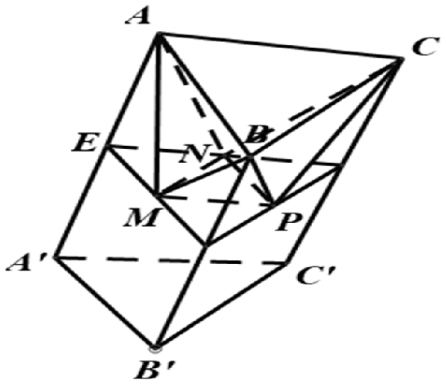
Vậy thể tích khối cần tìm $V=\frac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'}+\frac{1}{24}V_{ABC.A'B'C'}+\frac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'}=12\sqrt{3}$.

Câu 14. **(Mã đề 101 - BGD - 2019)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M,N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $30\sqrt{3}$. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $27\sqrt{3}$. **D.** $21\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Vì ΔABC đều có độ dài cạnh bằng 6 nên $S_{\Delta ABC}=6^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$.

Thể tích lặng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=h.S_{\Delta ABC}=8.9\sqrt{3}=72\sqrt{3}$.

Gọi E là trung điểm của cạnh AA'.

Thể tích khối chóp $A.EMN$ là $V_{A.EMN}=\frac{1}{3}d\left(A,(EMN)\right).S_{\Delta EMN}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}h.\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{24}V$.

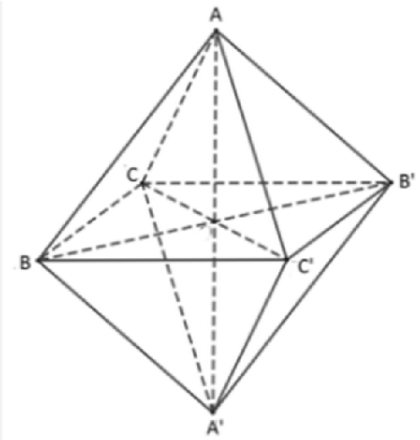
Thể tích khối đa diện $ABCMNP$ là:

$V_{ABCMNP}=\frac{1}{2}V-3V_{A.EMN}=\frac{1}{2}V-3.\frac{1}{24}V=\frac{3}{8}V=27\sqrt{3}$.

Câu 15. **(Chuyên Hạ Long -2019)** thể tích của bát diện đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ là.

a. $6a^3$. **B.** $\sqrt{6}a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Ta có khối bát diện đều cạnh $a\sqrt{3}$ được tạo từ 2 khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy và cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$.

Chiều cao của khối chóp là: $h=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối chóp: $V_{chop}=\dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{3}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$ (đvtt).

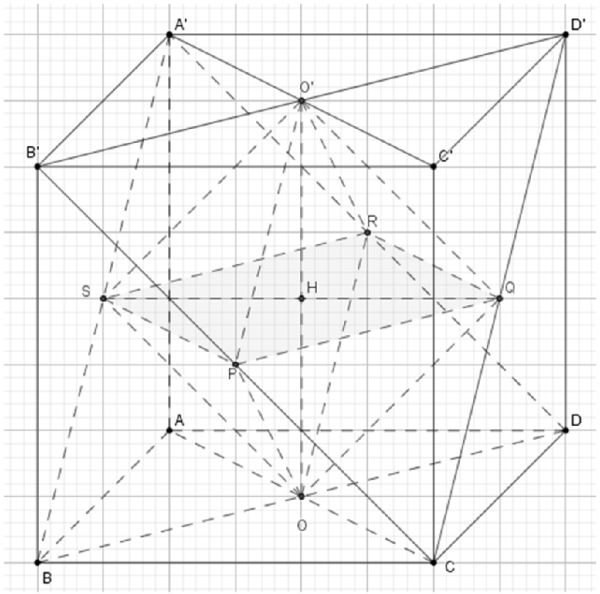
Vậy thể tích khối bát diện là: $V=2V_{chop}=a^3\sqrt{6}$ (đvtt).

Câu 16. Cho một hình lập phương có cạnh bằng a. Tính theo a thể tích của khối bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của hình lập phương.

A. $\dfrac{1}{4}a^3$. **B.** $\dfrac{1}{6}a^3$. **C.** $\dfrac{1}{12}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và tâm các mặt là P,Q,R,S,O,O' như hình vẽ.

Ta có PQ là đường trung bình của tam giác đều $B'CD'$ cạnh $a\sqrt{2}$ nên $PQ=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

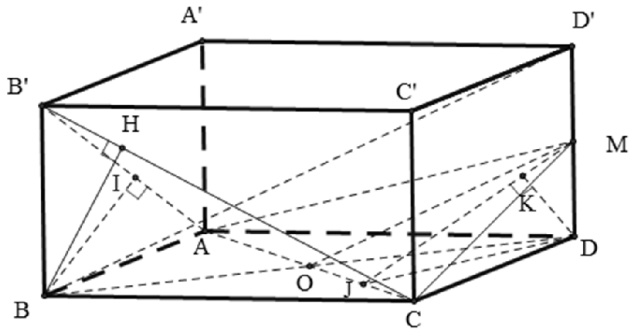
Do đó $S_{PQRS}=PQ^2=\dfrac{1}{2}a^2$ và $OO'=a$.

Vậy thể tích bát diện cần tìm là $V=\frac{1}{3}S_{PQRS}.OO'=\frac{1}{6}a^3$ (đvtt).

Câu 17. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCDA'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối hộp đó là

A. $8a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Đặt $AB=x$, $AD=y$, $AA'=z$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $B'C$, ta có BH là đoạn vuông góc chung của AB và $B'C$ nên $d\left(AB,B'C\right)=BH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4a^2}$. (1)

Gọi I là hình chiếu vuông góc của B trên AB', ta có BI là đoạn vuông góc chung của BC và AB' nên $d\left(BC,AB'\right)=BI\Rightarrow\frac{1}{BI^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{5}{4a^2}$. (2)

Gọi M là trung điểm của DD', O là giao điểm của AC và BD, ta có mặt phẳng $\left(ACM\right)$ chứa AC và song song với BD' nên $d\left(AC,BD'\right)=d\left(BD',\left(ACM\right)\right)=d\left(D',\left(ACM\right)\right)$.

Gọi J là hình chiếu vuông góc của D trên AC, K là hình chiếu vuông góc của D trên MJ, ta có $d\left(D',\left(ACM\right)\right)=d\left(D,\left(ACM\right)\right)=DK\Rightarrow\frac{1}{DK^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{4}{z^2}=\frac{3}{a^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{2}{z^2}=\frac{1}{2a^2}\Leftrightarrow z=2a\Rightarrow x=y=a$.

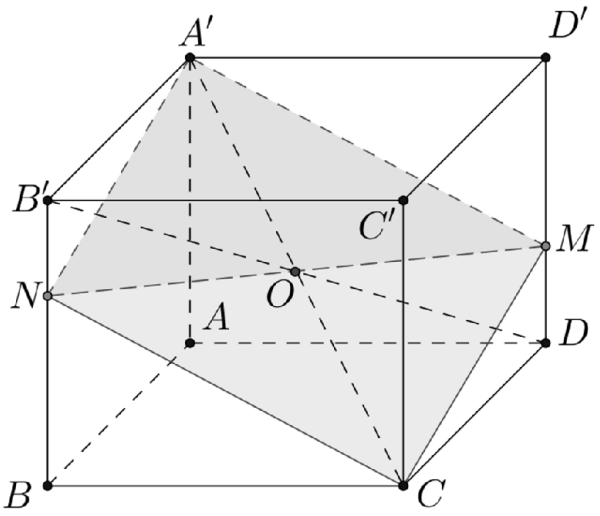
Thể tích khối hộp là $V=xyz=2a^3$.

Câu 18. **(THPT Ngô Gia Tự Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a,BC=2a,AC'=3a$. Điểm N thuộc cạnh BB' sao cho $BN=2NB'$, điểm M thuộc cạnh DD' sao cho $D'M=2MD$. Mặt phẳng $\left(A'MN\right)$ chia hình hộp chữ nhật làm hai phần, tính thể tích phần chứa điểm C'.

A. $4a^3$. **B.** a^3. **C.** $2a^3$. **D.** $3a^3$.

Lời giải

Chọn C



Nhận xét: $B'NDM$ là hình bình hành $\left(B'N = DM, B'N // DM\right)$

$\Rightarrow MN \cap B'D = O$ là trung điểm của mỗi đoạn nên O cũng là trung điểm của đường chéo $A'C$.

Vậy thiết diện tạo bởi mặt $\left(A'MN\right)$ và hình chóp là hình bình hành $A'NCM$.

Ta có: $C'A^2 = B'B^2 + BA^2 + BC^2 \Rightarrow B'B = 2a$.

Cách 1:

Thể tích phần chứa C' là

$$V = V_{A'.B'C'CN} + V_{A'.C'CMD} = \frac{1}{3}.A'B'.S_{B'C'CN} + \frac{1}{3}.A'D'.S_{C'D'MC}$$

$$= \frac{1}{3}.a.2a\frac{\frac{2a}{3}+2a}{2} + \frac{1}{3}.2a.a\frac{\frac{4a}{3}+2a}{2} = 2a^3.$$

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh

Gọi thể tích phần chứa C' là V'.

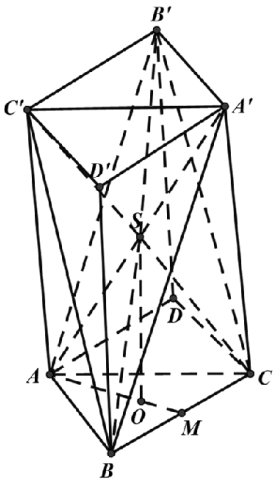
Ta có: $\frac{V'}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\frac{B'N}{B'B}+\frac{D'M}{D'D}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow V' = \frac{1}{2}.4a^3 = 2a^3$.

Cách 3: Nhận xét nhanh do đa diện chứa C' đối xứng với đa diện không chứa C' qua O nên thể tích của hai phần này bằng nhau, suy ra $V' = \frac{1}{2}.V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2a^3$.

Câu 19. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi D, D' theo thứ tự là đỉnh thứ tư của hình thoi $ABCD$, $A'B'C'D'$.

Thể tích của bát diện cần tìm:

$$V = V_{ABCD.C'D'A'B'} - V_{BC'D'A'} - V_{B'ACD} = V_{ABCD.C'D'A'B'} - \frac{1}{6}V_{ABCD.C'D'A'B'} - \frac{1}{6}V_{ABCD.C'D'A'B'}$$

$$= \frac{2}{3}V_{ABCD.C'D'A'B'}{}' = \frac{2}{3}.2SO.2S_{\Delta ABC}.(*)$$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có: $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAO} = 60° \Rightarrow SO = OA.\tan 60° = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = a$.

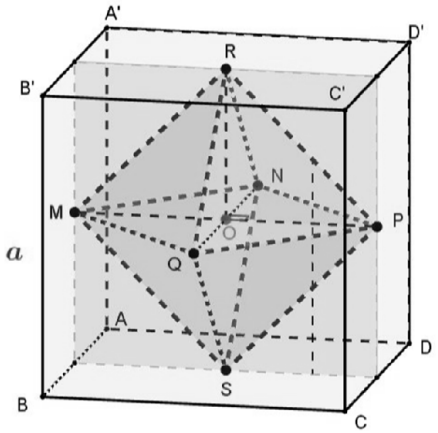
Do đó: $V = \frac{8}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q, R, S là tâm các mặt của hình lập phương. Thể tích khối bát diện đều tạo bởi sáu đỉnh M, N, P, Q, R, S bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3}{6}$

Lời giải

Chọn D



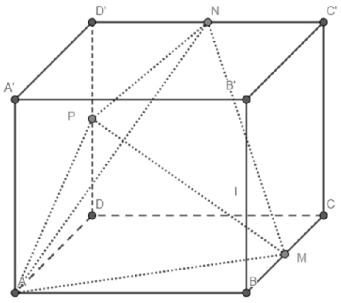
Ta có: dễ thấy $MNPQRS$ là bát giác đều nên $V = V_{R.MNPQ} + V_{S.MNPQ} = 2V_{R.MNPQ}$

Dễ thấy: $RO=\frac{a}{2}$

Lại có hình chóp đều $R.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng nhau nên: $MR=OR\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 2V_{R.MNPQ}=2.\frac{1}{3}.MN^2.OR=\frac{a^3}{6}$

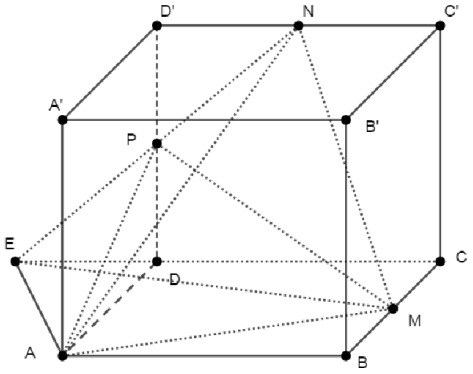
Câu 21. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, $C'D'$, DD' (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp bằng 144, thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng



A. 15. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 18.

Lời giải

Chọn A



$NP\cap CD=E$. Đặt $DC=2d$, $BC=2r$.

$S_{EMA}=S_{ECBA}-S_{EMC}-S_{ABM}=5dr-\frac{3}{2}dr-dr=\frac{5}{2}dr.$

$V_{NEAM}=\frac{1}{3}S_{EMA}.d(N,(EMA))=\frac{1}{3}S_{EMA}.CC'=\frac{5}{24}.4dr.CC'=\frac{5}{24}V_{ABCD.A'B'C'D'}=30.$

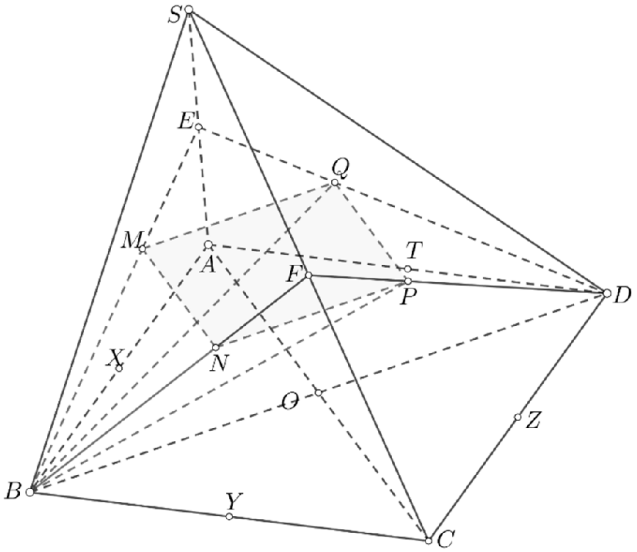
$V_{NPAM}=\frac{1}{2}V_{NEAM}=15.$

Câu 22. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao bằng 9 và đáy là hình bình hành có diện tích bằng 10. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trọng tâm của các mặt bên SAB, SBC, SCD và SDA. Thể tích của khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D là

A. 9. **B.** $\frac{50}{9}$. **C.** 30. **D.** $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có các đường thẳng BM, DQ, SA đồng quy tại trung điểm E của SA. Tương tự, các đường thẳng BN, DP, SC đồng quy tại trung điểm F của SC. Ta phân chia khối đa diện lồi có đỉnh là các điểm M, N, P, Q, B và D thành khối chóp $B.MNPQ$ và khối tứ diện $BDPQ$.

Cũng theo tính chất trọng tâm, ta có mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và $S_{MNPQ}=\frac{4}{9}S_{XYZT}=\frac{4}{9}.\frac{1}{2}S_{ABCD}=\frac{2}{9}S_{ABCD}$ (trong đó X, Y, Z, T lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA).

Hơn nữa,

$$d\left[B,(MNPQ)\right]=d\left[X,(MNPQ)\right]=\frac{1}{2}d\left[S,(MNPQ)\right]=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}d\left[S,(ABCD)\right]=\frac{1}{3}d\left[S,(ABCD)\right].$$

Do đó, $V_{B.MNPQ}=\frac{1}{3}.\frac{2}{9}V_{S.ABCD}=\frac{2}{27}V_{S.ABCD}\quad(1)$.

Lại có

$$\begin{aligned}V_{BDPQ}&=\frac{4}{9}V_{BDEF}\quad\left(\text{do } S_{DPQ}=\frac{4}{9}S_{DEF}\right)\\&=\frac{4}{9}.2V_{ODEF}\left(\text{do } d\left[B,(DEF)\right]=2d\left[O,(DEF)\right]\right)\\&=\frac{4}{9}.2.\frac{1}{4}V_{SACD}\left(\text{do } S_{OEF}=\frac{1}{4}S_{SAC}\right)\\&=\frac{4}{9}.2.\frac{1}{4}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{9}V_{S.ABCD}\quad(2)\end{aligned}$$

trong đó, O là tâm của hình bình hành $ABCD$.

Từ (1) và (2), ta được $V_{MNPQBD}=\left(\frac{2}{27}+\frac{1}{9}\right)V_{S.ABCD}=\left(\frac{2}{27}+\frac{1}{9}\right).\frac{1}{3}.9.10=\frac{50}{9}$ (đvtt).

Câu 23. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=2$, đáy $ABCD$ là hình thoi với ABC là tam giác đều cạnh 4. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'D'$, DD' và Q thuộc cạnh BC sao cho $QC=3QB$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

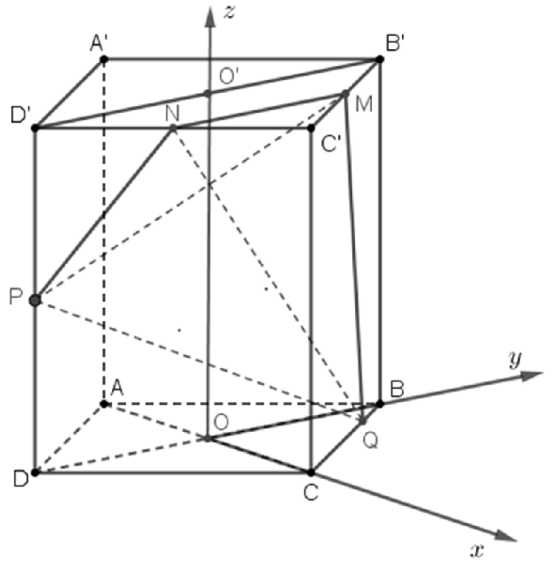
Lời giải

Chọn D

Gọi O và O' lần lượt là tâm đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

ΔABC đều cạnh 4, O là trung điểm $BC \Rightarrow OB = 2\sqrt{3}$, $OC = 2$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, tia Ox trùng tia OC, tia Oy trùng tia OB, tia Oz trùng tia OO'.



Khi đó: $C(2;0;0)$, $B(0;2\sqrt{3};0)$, $B'(0;2\sqrt{3};2)$, $C'(2;0;2)$, $D(0;-2\sqrt{3};0)$, $D'(0;-2\sqrt{3};2)$

M là trung điểm $B'C' \Rightarrow M(1;\sqrt{3};2)$.

N là trung điểm $C'D' \Rightarrow N(1;-\sqrt{3};2)$.

P là trung điểm $DD' \Rightarrow P(0;-2\sqrt{3};1)$.

Q thuộc cạnh BC sao cho $QC = 3QB \Rightarrow \overrightarrow{CQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{cases} x_Q - 2 = \frac{3}{4}(0-2) \\ y_Q - 0 = \frac{3}{4}(2\sqrt{3}-0) \\ z_Q - 0 = \frac{3}{4}(0-0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{1}{2} \\ y_Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z_Q = 0 \end{cases}$

Suy ra $Q\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right)$.

Ta có: $V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|$

$\overrightarrow{MN} = (0;-2\sqrt{3};0)$, $\overrightarrow{MP} = (-1;-3\sqrt{3};-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right] = (2\sqrt{3};0;-2\sqrt{3})$

$\overrightarrow{MQ} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-2\right)$.

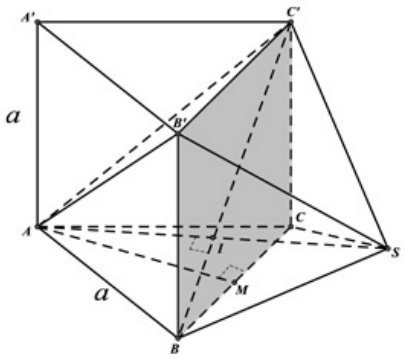
$\Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|2\sqrt{3}.\left(-\frac{1}{2}\right) + 0.\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-2\sqrt{3}\right).(-2)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi S là điểm đối xứng của A qua BC'. Thể tích khối đa diện $ABCSB'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Chia khối đa diện $ABCSB'C'$ thành 2 khối là khối chóp $A.BCC'B'$ và khối chóp $S.BCC'B'$

$V_{ABCSB'C'} = V_{ABCC'B'} + V_{S.BCC'B'}$

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp (BCC'B')$. Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.BCC'B'$ là:

$$V_{A.BCC'B'} = \frac{1}{3}AM.S_{BCC'B'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Thể tích khối chóp $S.BCC'B'$ là:

$$\frac{V_{S.BCC'B'}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{\frac{1}{3}d\left(S;(BCC'B')\right).S_{BCC'B'}}{\frac{1}{3}d\left(A;(BCC'B')\right).S_{BCC'B'}}$$

$$= \frac{d\left(S;(BCC'B')\right)}{d\left(A;(BCC'B')\right)} = \frac{SI}{AI} = 1.$$

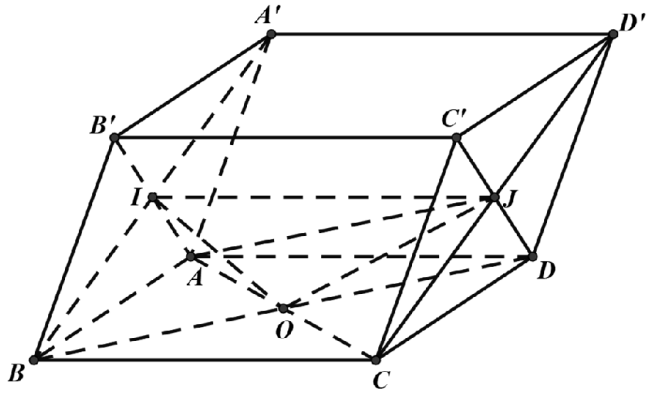
$$\Rightarrow V_{S.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow V_{ABCSB'C'} = V_{A.BCC'B'} + V_{S.BCC'B'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} + \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 25. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi I, J lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', CDD'C'$. Biết $AI = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AA' = 2a$ và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A'), (A'B'C'D')$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối tứ diện $AOIJ$.

A. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{64}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{48}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{192}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AI^2=\frac{AA'^2+AB^2}{2}-\frac{A'B^2}{4}\Rightarrow A'B^2=2\left(AA'^2+AB^2\right)-4AI^2=3a^2\Rightarrow A'B=a\sqrt{3}$

Do $A'B^2+AB^2=AA'^2$ nên tam giác $A'AB$ vuông tại B $\Rightarrow S_{A'AB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

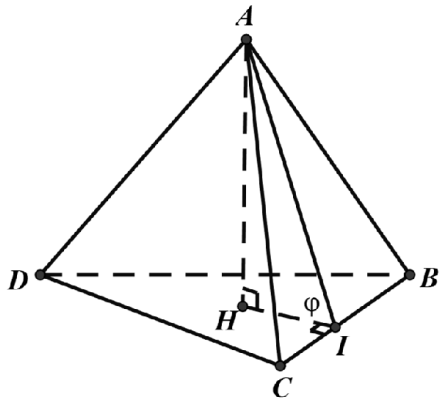
Theo đề góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABB'A'\right),\left(A'B'C'D'\right)$ bằng 60°, nên suy ra

$V_{A'ABC}=\frac{2S_{A'AB}.S_{ABC}\sin 60^\circ}{3AB}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$

$V_{AOIJ}=\frac{1}{3}d\left(O;(IAJ)\right).S_{IAJ}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}d\left(B;(B'AD)\right).\frac{1}{2}S_{B'AD}=\frac{1}{4}V_{B'ABD}=\frac{1}{4}V_{A'ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$

Bổ sung: *Công thức tính nhanh thể tích tứ diện theo góc giữa hai mặt phẳng*

Cho tứ diện ABCD có diện tích tam giác ABC bằng S_1, diện tích tam giác BCD là S_2 và góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) là φ. Khi đó ta có: $V_{ABCD}=\frac{2S_1S_2.\sin\varphi}{3BC}$



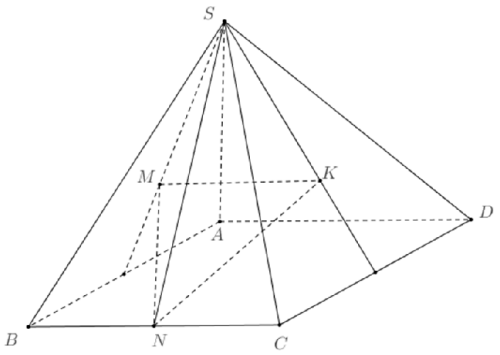
Chứng minh: Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD), kẻ HI ⊥BC tại I thì AI⊥BC và

$\left((ABC);(DBC)\right)=(AI;HI)=\widehat{AIH}=\varphi$; $AH=AI\sin\varphi$

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}AH.S_{DBC}=\frac{1}{3}AI\sin\varphi.S_2=\frac{1}{3}\frac{2S_{ABC}}{BC}.\sin\varphi.S_2=\frac{2S_1S_2\sin\varphi}{3BC}$

Câu 26. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=a$. M,K tương ứng là trọng tâm tam giác SAB,SCD; N là

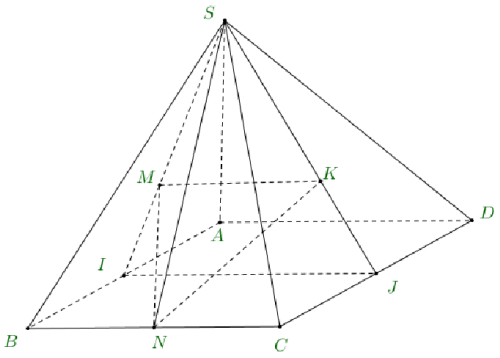
trung điểm BC. Thể tích khối tứ diện $SMNK$ bằng $\frac{m}{n}.a^3$ với $m,n\in\mathbb{N},(m,n)=1$. Giá trị $m+n$ bằng:



A. 28 . **B** 12. **C.** 19. **D.** 32.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$.

Gọi I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD. Ta có: ΔSMN đồng dạng với ΔSIJ theo tỉ số $\frac{2}{3}$. Do đó $V_{SMNK}=V_{P.SMN}=\left(\frac{2}{3}\right)^2V_{P.SIJ}=\frac{4}{9}V_{P.SIJ}$.

Mặt khác $S_{\Delta PIJ}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$. Do đo $V_{P.SIJ}=V_{S.PIJ}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{12}$

Nên $V_{SMNK}=\frac{4}{9}.\frac{a^3}{12}=\frac{a^3}{27}$.

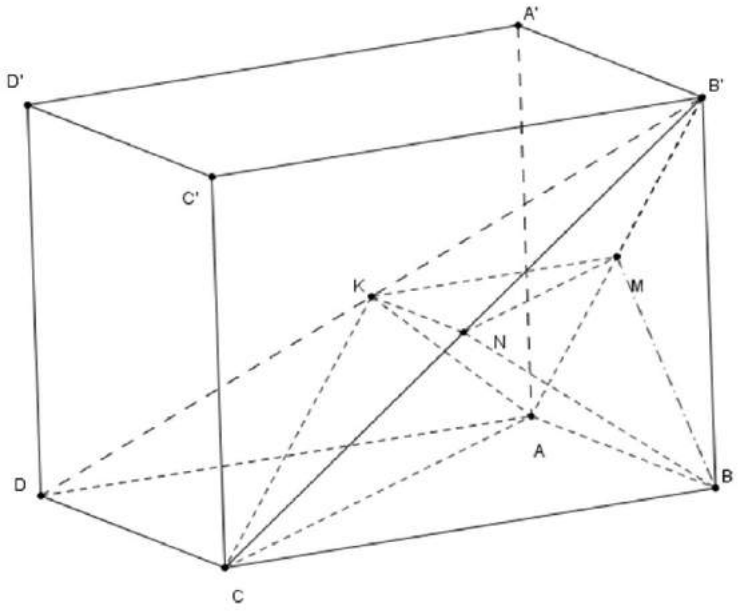
Vậy $m=1,n=27\Rightarrow m+n=28$.

Câu 27. **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi có cạnh $4a$, $A'A=8a$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm cạnh $AB',B'C,BD'$. Thể tích khối da diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,K là:

A. $12\sqrt{3}\,a^3$ **B.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}a^3$ **C.** $16\sqrt{3}\,a^3$ **D.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



$MN//AC; MN=\frac{1}{2}AC$, $MNCA$ là hình thang.

$V_{MNKABC}=V_{K.MNCA}+V_{B.MNCA}$

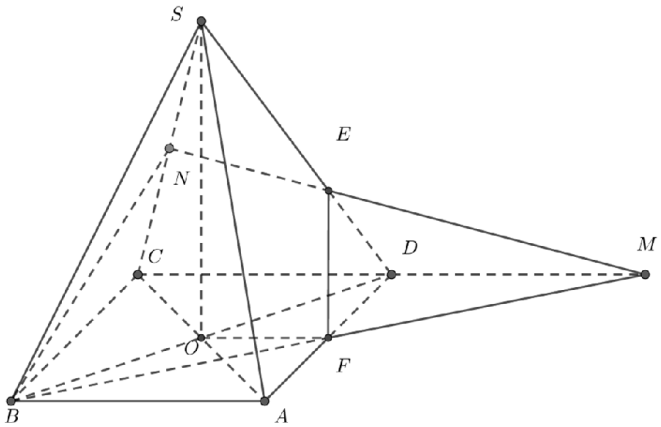
DK cắt (B'AC) tại B', $\frac{B'K}{B'D}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{d\left(K;(MNCA)\right)}{d\left(D;(MNCA)\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{K.MNCA}=\frac{1}{2}V_{D.MNCA}$

Mà: $V_{B.MNCA}=V_{D.MNCA}$ nên ta có: $V_{MNKABC}=\frac{1}{2}V_{B.MNCA}+V_{B.MNCA}=\frac{3}{2}V_{B.MNCA}$

Mặt khác: $S_{MNCA}=\frac{3}{4}S_{B'AC}\Rightarrow V_{B.MNCA}=\frac{3}{4}V_{B.B'AC}=\frac{3}{4}V_{B'.ABC}=\frac{3}{4}.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}=8\sqrt{3}a^3$

$V_{MNKABC}=\frac{3}{2}V_{B.MNCA}=\frac{3}{2}8\sqrt{3}\,a^3=12\sqrt{3}\,a^3$

Câu 28. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần (như hình vẽ bên). Tỉ số thể tích giữa hai phần $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}$ bằng



A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có N là trung điểm của SO, D là trung điểm của CM nên E là trọng tâm tam giác SCM.

Ký hiệu h,S,V tương ứng là chiều cao, diện tích đáy và thể tích khối chóp $S.ABCD$ ta có

$$S_{BCM}=S\Rightarrow V_{N.BCM}=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S=\frac{V}{2}.$$

Khi đó $\frac{V_{M.EDF}}{V_{M.NCB}}=\frac{ME}{MN}.\frac{MD}{MC}.\frac{MF}{MB}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow V_{M.EDF}=\frac{V}{2}.\frac{1}{6}=\frac{V}{12}.$

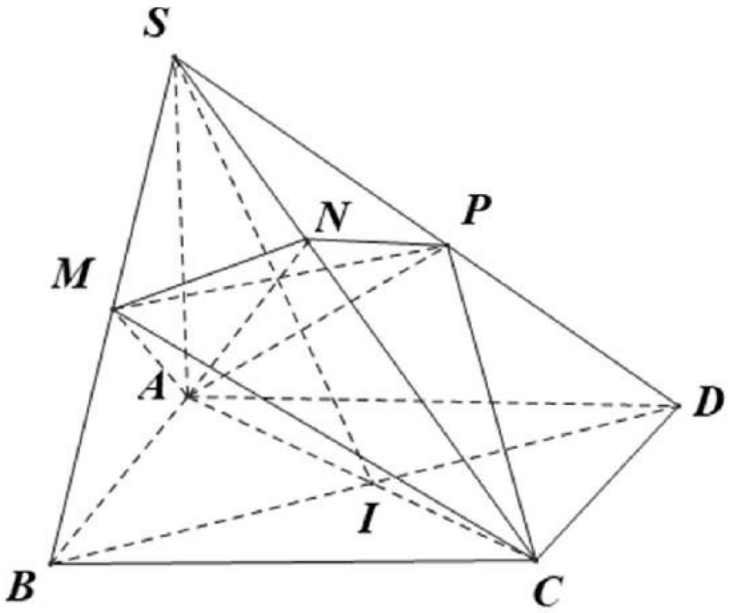
Như vậy $V_{BFDCNE}=\frac{V}{2}-\frac{V}{12}=\frac{5V}{12}\Rightarrow V_{SABFEN}=\frac{7V}{12}\Rightarrow\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}}=\frac{7}{5}.$

Câu 29. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=3$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB,SC,SD tại M,N,P. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $\frac{108\pi}{3}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases}SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp MA..$

Lại có $MA\perp SC\Rightarrow MA\perp(SBC)\Rightarrow MA\perp MC\ \ (1).$

Tương tự: $AP\perp PC\ \ (2).$

Mặt khác $AN\perp NC\ \ (3).$

Gọi I là trung điểm của AC, từ $(1)\ (2)\ (3)$ ta có $IN=IM=IC=IP(=IA)$. Mặt cầu ngoại tiếp $CMNP$ là mặt cầu tâm I, bán kính IA.

$$IA=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}{2}=2.$$

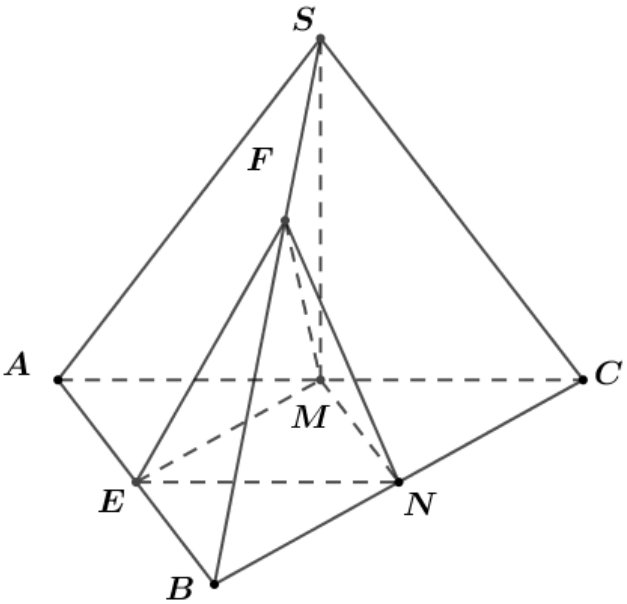
Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là: $V=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32\pi}{3}$.

Câu 30. **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, $AB=4$, $SA=SB=SC=12$. Gọi M,N,E lần lượt là trung điểm của AC,BC,AB. Trên cạnh SB lấy điểm F sao cho $\frac{BF}{BS}=\frac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

A. $\frac{8\sqrt{34}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{34}}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{34}}{9}$. **D.** $\frac{16\sqrt{34}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA=SB=SC$ nên hình chiếu của S lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC, suy ra $SM\perp(ABC)$.

Từ $AB=4\Rightarrow AC=4\sqrt{2}$.

Tam giác SAM vuông tại M nên $SM=\sqrt{SA^2-AM^2}=\sqrt{12^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{34}$.

Thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SM=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot SM=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{34}=\frac{16\sqrt{34}}{3}$.

Suy ra thể tích

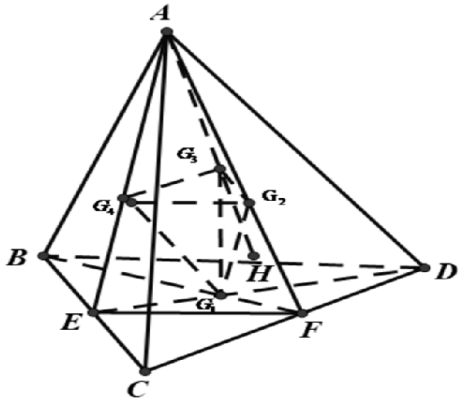
$V_{MNEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{MNE}\cdot d\left(F,(MNE)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{ABC}\cdot\frac{2}{3}\cdot SM=\frac{1}{12}\cdot V_{S.ABC}=\frac{1}{12}\cdot\frac{32\sqrt{34}}{3}=\frac{8\sqrt{34}}{9}$.

Câu 31. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi G_1,G_2,G_3,G_4 là trọng tâm của bốn mặt của tứ diện $ABCD$. Thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ là:

A. $\frac{V}{12}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{27}$. **D.** $\frac{V}{18}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H,E,F lần lượt là trung điểm BD,BC,CD

Ta có $\frac{AG_4}{AE}=\frac{AG_3}{AH}=\frac{2}{3}\Rightarrow G_3G_4//\text{HE}\quad(1)$

Tương tự $\frac{AG_3}{AF}=\frac{AG_2}{AH}=\frac{2}{3}\Rightarrow G_2G_3//\text{HF}(2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow(G_4G_2G_3)//(DBC)$

$\Rightarrow d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right)=d\left(\text{G}_2;(BCD)\right)=\frac{1}{3}d\left(A;(BCD)\right)$

Tam giác $\text{G}_2G_3G_4$ đồng dạng tam giác HEF là $\frac{G_2G_3}{HF}=\frac{AG_2}{AF}=\frac{2}{3}$

$S_{G_2G_3G_4}=\left(\frac{2}{3}\right)^2.S_{HEF}=\frac{4}{9}.\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{1}{9}S_{ABC}.$

Thể tích khối tứ diện $G_1\text{G}_2G_3G_4$ là:

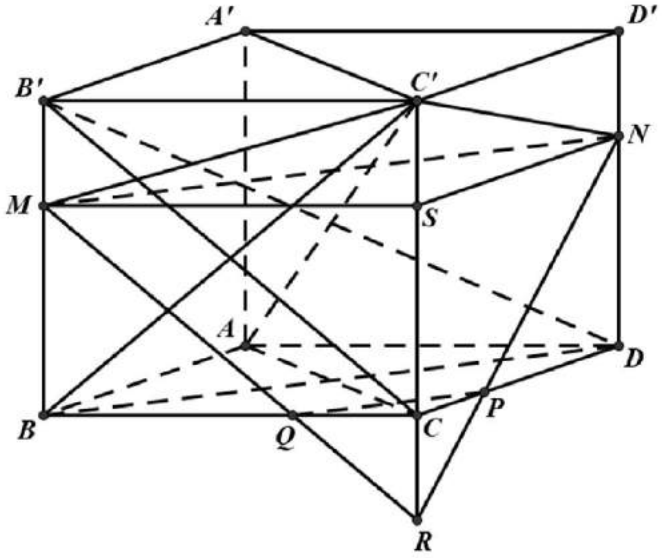
$V=\frac{1}{3}d\left(G_1;(G_2G_3G_4)\right).S_{G_2G_3G_4}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}d\left(A;(BCD)\right)\frac{1}{9}S_{ABC}=\frac{1}{27}V_{ABCD}=\frac{V}{27}.$

Câu 32. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' sao cho $BM=2MB'$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AC' cắt các cạnh DD',DC,BC lần lượt tại N,P,Q. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện $CPQMNC'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V}$

A. $\frac{31}{162}$. **B.** $\frac{35}{162}$. **C.** $\frac{34}{162}$. **D.** $\frac{13}{162}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết $(\alpha)\cap DD'=N,(\alpha)\cap CD=P,(\alpha)\cap BC=Q$. Từ tính chất của hình lập phương ta có $(ACC')\perp BD$ suy ra $BD\perp AC'$ do đó $BD//(\alpha)$, từ đây ta suy ra $MN//BD;PQ//BD$ do vậy ta có $DN=2ND'$.

Ta xác định vị trí $P,\ Q$ như sau: Ta có $\begin{cases}AB\perp B'C\\BC'\perp B'C\end{cases}\Rightarrow B'C\perp(ABC')\Rightarrow B'C\perp AC'$ vì vậy $(\alpha)//B'C$ do đó $MQ//B'C$, vậy ta được $BQ=2QC$, và theo trên $PQ//BD$ ta lại có $DP=2PC$.

Vậy các điểm M,N,P,Q hoàn toàn được xác định.

Gọi S là điểm trên cạnh CC' thỏa mãn $CS=2SC'$ và R là điểm trên đường thẳng CC' thỏa mãn $MB'CR$ là hình bình hành. Khi đó ta có R nằm trên mặt phẳng (α) và $(MNS)//(A'B'C'D')$

Đặt $V_0=V_{RCPQ};V_2=V_{C'MSN}$ khi đó $V_1=V_{RMNS}+V_{C'MSN}-V_{RCPQ}$

Đặt cạnh của hình lập phương là $AB=3x$ ta có

$$\begin{cases}V=(3x)^3=27x^3\\V_{RMNS}=\dfrac{1}{6}SN.SM.SR=\dfrac{9}{2}x^3\\V_{C'MSN}=\dfrac{1}{6}SM.SN.SC'=\dfrac{3x^3}{2}\\V_{RCPQ}=\dfrac{1}{6}CP.CQ.CR=\dfrac{x^3}{6}\end{cases}\text{ do đó }\frac{V_1}{V}=\frac{\frac{9}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{6}}{27x^3}=\frac{35}{162}$$

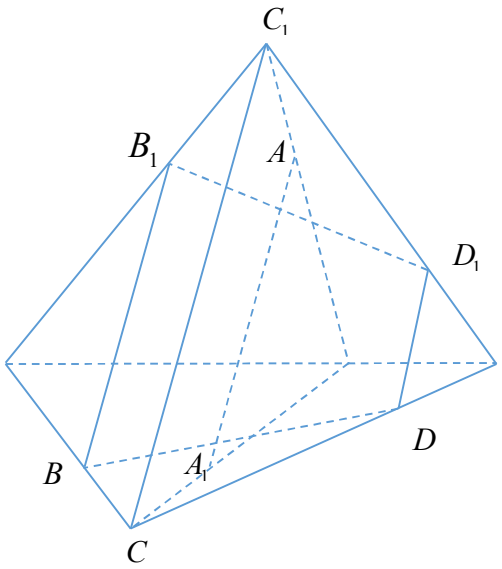
Vậy $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{35}{162}$.

Câu 33. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 18. Gọi A_1 là trọng tâm của tam giác BCD; (P) là mặt phẳng qua A sao cho góc giữa (P) và mặt phẳng (BCD) bằng 60^0. Các đường thẳng qua $B;C;D$ song song với AA_1 cắt (P) lần lượt tại $B_1;C_1;D_1$. Thể tích khối tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ bằng?

A. $12\sqrt{3}$ **B.** 18 **C.** $9\sqrt{3}$ **D.** 12

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết A_1 là trọng tâm tam giác BCD nên ta suy ra A cũng là trọng tâm tam giác $B_1C_1D_1$.

Do đó $V_{A.BCD}=3V_{A.A_1BC}=3V_{B.AA_1C}$ và $V_{A_1.B_1C_1D_1}=3V_{A_1.AB_1C_1}=3V_{B_1.AA_1C_1}$.

Mặt khác do quan hệ song song nên $\begin{cases} d_{[B;(AA_1CC_1)]}=d_{[B_1;(AA_1CC_1)]} \\ S_{\Delta AA_1C}=S_{\Delta AA_1C_1} \end{cases} \Rightarrow V_{B.AA_1C}=V_{B_1.AA_1C_1}$

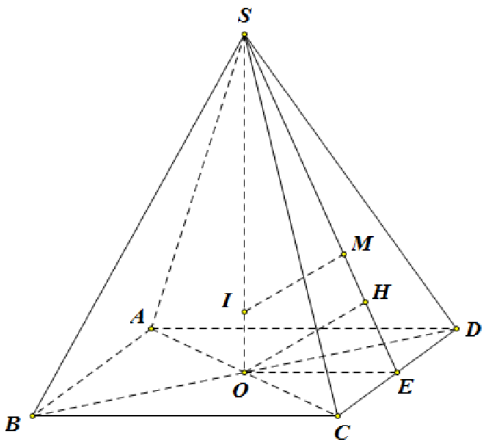
Vậy nên $V_{A_1.B_1C_1D_1}=V_{A.BCD}=18$

Câu 34. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (SCD) sao cho tổng $Q=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2+MS^2$ nhỏ nhất. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và V_2 là thể tích của khối chóp $M.ACD$. Tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\dfrac{11}{140}$. **B.** $\dfrac{22}{35}$. **C.** $\dfrac{11}{70}$. **D.** $\dfrac{11}{35}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và I là điểm trên đoạn thẳng SO sao cho $4\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IS}=\vec{0}$

Ta có: $Q=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)^2+\overrightarrow{MS}^2$

$=4\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{MS}^2+4OA^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)^2+4OA^2=5MI^2+4IO^2+IS^2+4OA^2.$

Vì $4IO^2+IS^2+4OA^2=const$ nên Q nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên (SCD).

Gọi E là trung điểm CD, H là hình chiếu của O trên $(SCD)\Rightarrow M,H\in SE$.

Ta có $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{2},SE=\dfrac{a\sqrt{7}}{2},SH=\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Vì $\dfrac{SM}{SH}=\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow SM=\dfrac{12a}{5\sqrt{7}}\Rightarrow ME=SE-SM=\dfrac{11a}{10\sqrt{7}}$.

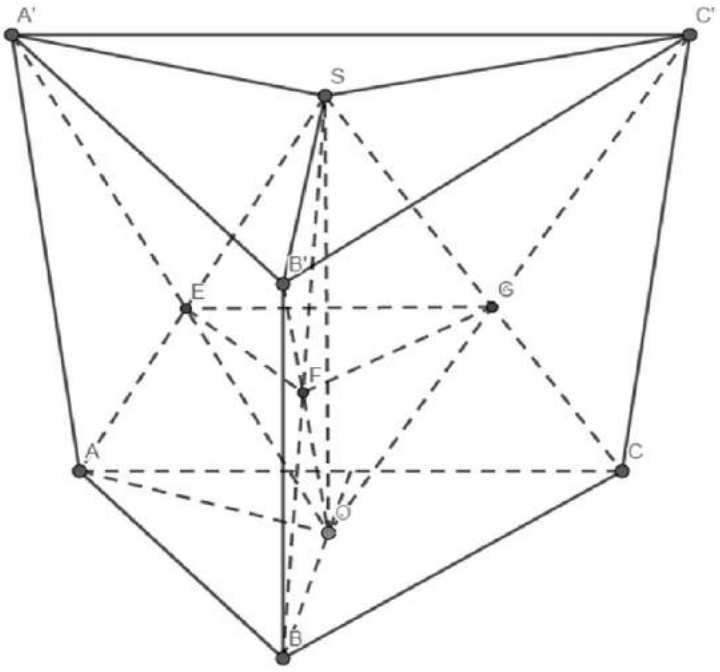
Ta có $\dfrac{d\left(M,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\dfrac{ME}{SE}=\dfrac{11}{35}\Rightarrow\ \dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{\frac{1}{3}d\left(M,(ABCD)\right).S_{ACD}}{\frac{1}{3}d\left(S,(ABCD)\right).S_{ABCD}}=\dfrac{11}{35}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{70}..$

Câu 35. **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30^o, O là trọng tâm tam giác ABC. Một hình chóp đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60^o sao cho mỗi cạnh bên SA,SB,SC lần lượt cắt các cạnh bên OA',OB',OC'. Gọi V_1 là phần thể tích phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$, V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{9}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{64}$. **D.** $\dfrac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $E=OA'\cap SA;F=OB'\cap SB;G=OC'\cap SC$

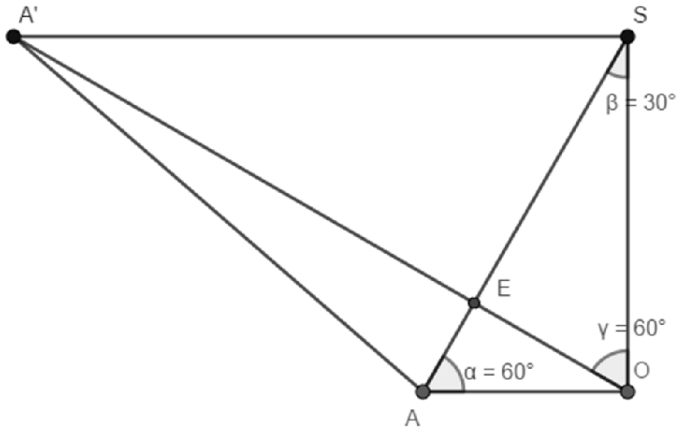
Theo hình vẽ thể tích $V_1=V_{SEFGO};V_2=V_{S.ABC}$

Đặt $SO=x$

Do $S.ABC$ là hình chóp đều và O là tâm tam giác ABC nên $SO\perp(ABC)$

Do $O.A'B'C'$ là hình chóp đều và S là tâm tam giác $A'B'C'$ nên $OS \perp (A'B'C')$

Từ đó ta có $(ABC)//(A'B'C') \Rightarrow OA//SA'$ và $SO \perp OA; OS \perp SA'$



Ta có theo dữ kiện bài toán ta có $\widehat{ASO} = 30^o; \widehat{A'OS} = 60^o$

Ta có

$$\frac{SE}{SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SE = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OE = \frac{x}{2}$$

$$\frac{SO}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{SO}{OA'} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA' = 2x$$

$$\frac{OA}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{SA}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{SA'}{SO} = \sqrt{3} \Rightarrow SA' = x\sqrt{3}$$

Ta có:

$$AB.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = OA \Rightarrow AB = OA.\sqrt{3} = x$$

$$A'B'.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = SA' \Rightarrow A'B' = SA'.\sqrt{3} = 3x$$

Ta có:

$$V_2 = V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.x.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^3\sqrt{3}}{12}$$

$$V_{O.A'B'C'} = \frac{1}{3}.x.\frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^3.3\sqrt{3}}{4}$$

Ta có:

$$\frac{V_{S.EFG}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SA}.\frac{SF}{SB}.\frac{SG}{SC} = \left(\frac{SE}{SA}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{2x\sqrt{3}}{3}}\right)^3 = \frac{27}{64} \Rightarrow V_{S.EFG} = \frac{27}{64}.\frac{x^3\sqrt{3}}{12}$$

$$\frac{V_{O.EFG}}{V_{O.A'B'C'}} = \frac{OE}{OA'}.\frac{OF}{OB'}.\frac{OG}{OC'} = \left(\frac{OE}{OA'}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x}{2}}{2x}\right)^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow V_{O.EFG} = \frac{1}{64}V_{O.A'B'C'} = \frac{1}{64}.\frac{x^3.3\sqrt{3}}{4}$$

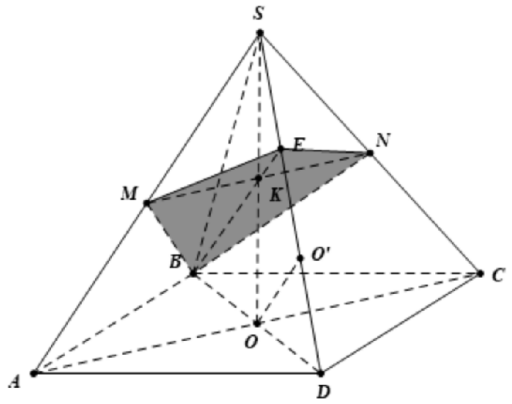
$$V_1 = V_{S.EFG} + V_{O.EFG} = \frac{3\sqrt{3}x^3}{64} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^3}{64}}{\frac{x^3\sqrt{3}}{12}} = \frac{9}{16}$$

Câu 36. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, SC. Gọi E là giao điểm của SD và mặt phẳng (BMN). Tính thể tích V của khối chóp $O.BMEN$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $K = MN \cap SO$, khi đó BK cắt SD tại E. Kẻ $OO' // BE$.

Do MN là đường trung bình của ΔSAC nên K là trung điểm của SO.

Suy ra $V_{O.BMEN} = V_{S.BMEN}$.

Ta có: $\frac{V_{S.BME}}{V_{S.BAD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{SE}{SD}$ và $\frac{V_{S.BNE}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SC}.\frac{SE}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{SE}{SD}$.

Suy ra $V_{S.BMEN} = V_{S.BME} + V_{S.BNE} = \frac{1}{2}.\frac{SE}{SD}.V_{S.ABCD}$.

Vì $OO' // BE \Rightarrow O'$ là trung điểm của ED.

Mặt khác: $KE // OO' \Rightarrow E$ là trung điểm của SO'.

Do đó $SE = EO' = O'D \Rightarrow \frac{SE}{SD} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $V_{S.BMEN} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$

Ta có: $S_{ABCD} = a^2$.

Xét ΔSOA vuông tại O có: $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $V_{S.BMEN} = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

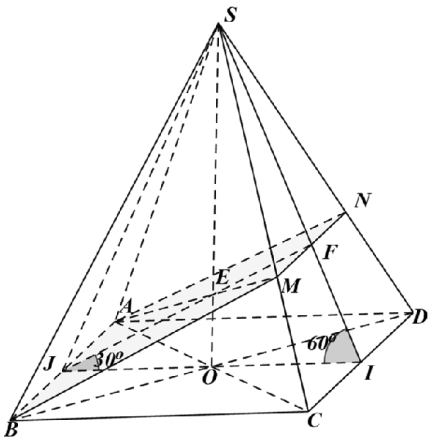
Câu 37. **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Mặt bên tạo với đáy góc 60^o. Mặt phẳng (P) chứa AB và tạo với đáy góc 30^o và cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABMN$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{48}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$ (vì $S.ABCD$ là hình chóp đều)



Gọi I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên DC, AB và gọi $SO\cap(P)=\{E\}\Rightarrow((SDC),(ABCD))=SOI=60^o$ và $((P),(ABCD))=EJO=30^o$.

Khi đó tam giác SIJ đều. Mà $EJO=30^o=\dfrac{1}{2}SJI\Rightarrow JE$ là phân giác của góc $SJI\Rightarrow F$ là trung điểm của SI (1) (với $JE\cap SI=\{F\}$). Mặt khác

$CD//AB\Rightarrow CD//(P)\Rightarrow CD//MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MN là đường trung bình trong tam giác $SBC\Rightarrow\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}$

Khi đó ta có $\begin{cases}\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow V_{S.ABM}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}\\ \dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.ACD}=\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}\end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABMN}=V_{S.ABM}+V_{S.AMN}=\dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}+\dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}=\dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$ $(*)$

Tam giác SIJ đều cạnh $a\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ $(2*)$

Thay $(2*)$ vào $(*)$ ta được $V_{S.ABMN}=\dfrac{3}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$

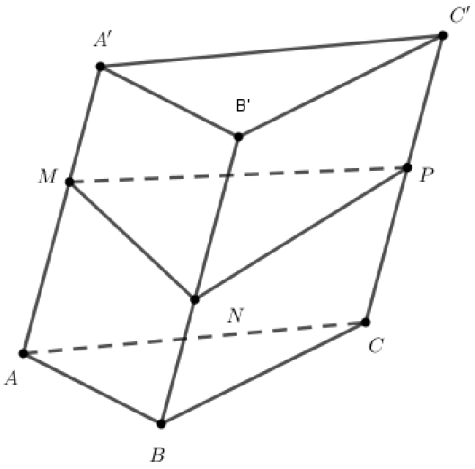
Câu 38. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao 8 và diện tích đáy bằng 11. Gọi M là trung điểm của AA', N là điểm trên cạnh BB' sao cho $BN=3B'N$ và P là điểm trên cạnh CC' sao cho $6CP=5C'P$. Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. $\dfrac{88}{3}$. **B.** 42. **C.** 44. **D.** $\dfrac{220}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:



Cho hình lăng trụ như hình vẽ, $V_{ABC.MNP}=\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right).V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh:

$V_{ABC.MNP}=V_{N.ACB}+V_{N.ACPM}$

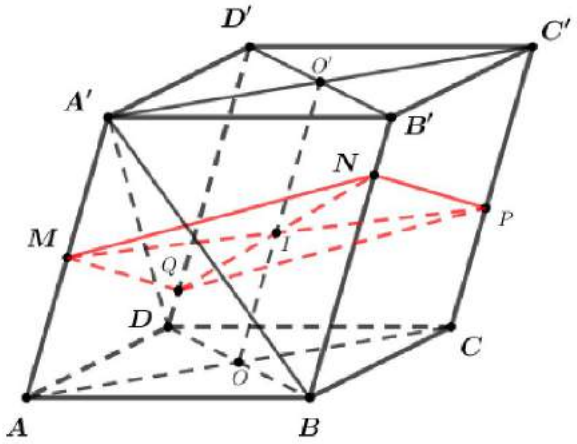
$V_{N.ACB}=\frac{BN}{BB'}.V_{B'.ACB}=\frac{BN}{BB'}.\frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$

$\frac{V_{N.ACPM}}{V_{B'.ACC'A'}}=\frac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}}=\frac{\frac{1}{2}.(CP+AM)}{AA'}=\frac{1}{2}.\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right)$

$\Rightarrow V_{N.ACPM}=\frac{1}{2}.\left(\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right).\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

Bây giờ ta áp dụng vào giải bài toán.



Ta có: $\begin{cases}(ADD'A')//(BCC'B')\\ MQ\subset(MNP)\cap(ADD'A')\Rightarrow NP//MQ\\ NP\subset(MNP)\cap(BCC'B')\end{cases}$, tương tự ta cũng có $MN//PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có OI là đường trung bình của hai hình thang $AMPC$ và $BNQD$ suy ra

$2OI=MA+PC=DQ+NB\Rightarrow\frac{MA}{AA'}+\frac{PC}{CC'}=\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{DD'}$

Dựa vào hình vẽ ta chia khối lăng trụ làm hai phần khi cắt bởi mặt phẳng $(BDD'B')$. Do đó $V_{A'D'B'.ADB} = V_{BD'C'.BDC} = 44$.

$$V_{ABCD.MNPQ} = V_{ABD.MNQ} + V_{BCD.NPQ}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}\right).V_{ABD.A'B'D'} + \frac{1}{3}\left(\frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}\right).V_{BCD.B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{DD'}\right).\frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$$

$$= \frac{1}{3.2}\left[3.\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right)\right].V_{ABC.A'B'C'}$$

$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{MA}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right).V_{ABC.A'B'C'}$$

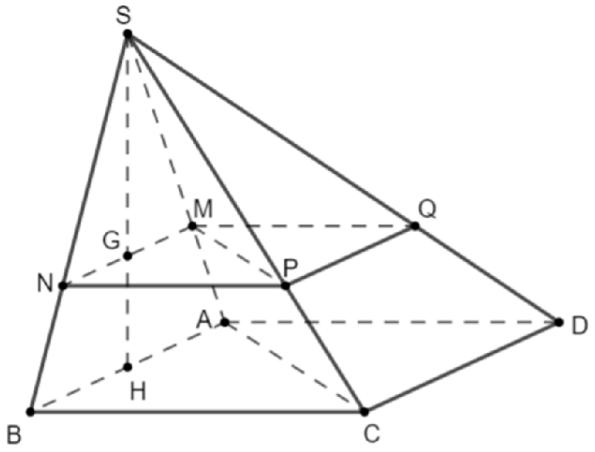
$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{11}\right).88 = 42$$

Câu 39. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, mặt bên (SAB) là một tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và có diện tích bằng $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (đvdt). Một mặt phẳng đi qua trọng tâm tam giác SAB và song song với mặt đáy $(ABCD)$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, tính thể tích V của phần chứa điểm S.

A. $V = 8$. **B.** $V = 24$. **C.** $V = 36$. **D.** $V = 12$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB. Do ΔSAB đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AB = 3\sqrt{3} \Rightarrow SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.AB^2.SH = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}\right)^2.\frac{9}{2} = \frac{81}{2}$ (đvtt).

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, qua G kẻ đường thẳng song song với AB, cắt SA và SB lần lượt tại M, N. Qua N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P, qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt SD tại Q. Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng đi qua G và song song với $(ABCD)$.

Khi đó $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{SG}{SH}=\frac{2}{3}$.

Có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{S.MNP}=\frac{8}{27}V_{S.ABC}=\frac{8}{27}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{4}{27}V_{S.ABCD}$.

Có $\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{S.MPQ}=\frac{8}{27}V_{S.ACD}=\frac{8}{27}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{4}{27}V_{S.ABCD}$.

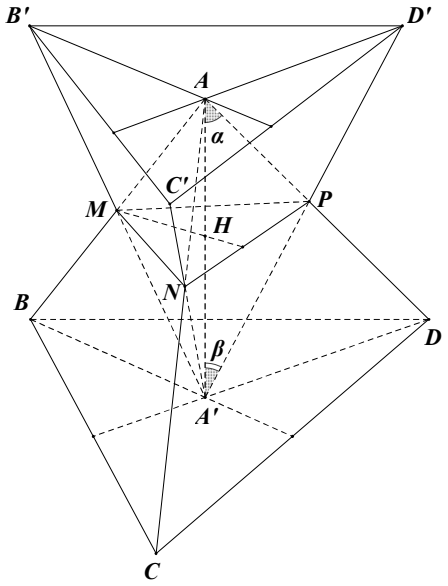
Vậy $V_{S.MNPQ}=V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}=\frac{4}{27}V_{S.ABCD}+\frac{4}{27}V_{S.ABCD}=\frac{8}{27}V_{S.ABCD}=\frac{8}{27}.\frac{81}{2}=12$ (đvtt).

Câu 40. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hai hình chóp tam giác đều có cùng chiều cao. Biết đỉnh của hình chóp này trùng với tâm của đáy hình chóp kia, mỗi cạnh bên của hình chóp này đều cắt một cạnh bên của hình chóp kia. Cạnh bên có độ dài bằng a của hình chóp thứ nhất tạo với đường cao một góc 30^0, cạnh bên của hình chóp thứ hai tạo với đường cao một góc 45^0. Tính thể tích phần chung của hai hình chóp đã cho?

A. $\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. **B.** $\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. **C.** $\frac{9\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$. **D.** $\frac{27\left(2-\sqrt{3}\right)a^3}{64}$.

Lời giải

Chọn C



Hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đều, có chung đường cao AA', A là tâm của tam giác $B'C'D'$ và A' là tâm của tam giác BCD.

Ta có: $(BCD)//(B'C'D')$; $AB=AC=AD=a$; $\widehat{BAA'}=\alpha$; $\widehat{AA'B'}=\beta$.

Do AB cắt $A'B'$ tại M nên $AB'//A'B$.

Gọi N là giao điểm của AC và $A'C'$; P là giao điểm của AD và $A'D'$.

Tương tự ta có: $AC'//A'C$, $AD'//A'D$.

Từ đó suy ra các cạnh của ΔBCD và $\Delta B'C'D'$ song song với nhau từng đôi một.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{MB}{MA}=\dfrac{A'B}{AB'} \\ \dfrac{NC}{NA}=\dfrac{A'C}{AC'} \\ AB'=AC';A'B=A'C \end{cases} \Rightarrow \dfrac{MB}{MA}=\dfrac{NC}{NA} \Rightarrow MN//BC.$

Tương tự ta có: $NP//CD$ và $MP//BD$.

Suy ra: ΔMNP là tam giác đều. Gọi H là giao điểm của OO' và (MNP), H là tâm của tam giác MNP.

Trong tam giác $AA'D$ có: $AA'=AD.\cos\alpha=a.\cos\alpha \ (1)$.

Đặt $x=MH$. Hai tam giác AHM và tam giác $A'HM$ vuông tại H cho:

$\begin{cases} AH=MH.\cot\alpha=x.\cot\alpha \\ A'H=MH.\cot\beta=x.\cot\beta \end{cases} \Rightarrow AA'=x(\cot\alpha+\cot\beta) \ (2).$

Từ (1) và (2) suy ra: $a.\cos\alpha=x(\cot\alpha+\cot\beta)\Leftrightarrow x=\dfrac{a.\cos\alpha}{\cot\alpha+\cot\beta}.$

Tam giác MNP đều có cạnh $MN=x\sqrt{3}$ nên:

$S_{\Delta MNP}=\dfrac{MN^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}x^2}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a^2\cos^2\alpha}{(\cot\alpha+\cot\beta)^2}$

Phần chung của hai hình chóp $A.BCD$ và $A'.B'C'D'$ là hai hình chóp đỉnh A và A' có chung nhau mặt đáy là tam giác MNP. Do đó thể tích của nó là:

$V=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta MNP}.(AH+A'H)=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta MNP}.AA'=\dfrac{a^3.\sqrt{3}.\cos^3\alpha}{4(\cot\alpha+\cot\beta)^2}$

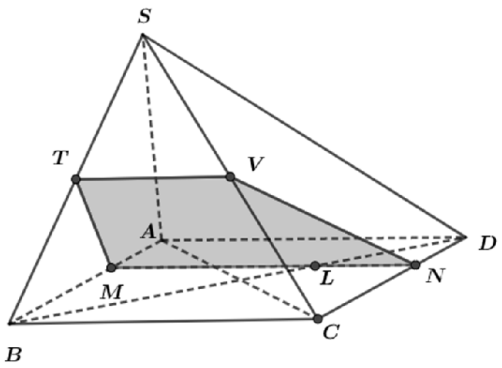
Với $\alpha=30°$ và $\beta=45°$ thì $V=\dfrac{9a^3}{32(\sqrt{3}+1)^2}=\dfrac{9(2-\sqrt{3})a^3}{64}.$

Câu 41. **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có diện tích bằng $12a^2$; khoảng cách từ S tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $4a$. Gọi L là trọng tâm tam giác ACD; gọi T và V lần lượt là trung điểm các cạnh SB và SC. Mặt phẳng (LTV) chia hình chóp thành hai khối đa diện, hãy tính thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S.

A. $\dfrac{20a^3}{3}$. **B.** $8a^3$. **C.** $\dfrac{28a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{32a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



$V = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}12a^2.4a = 16a^3$.

Mặt phẳng (LTV) cắt AB, CD ở M và N sao cho $MN//BC//TV$.

Đặt $V' = V_{S.ADNMTV} = V_{S.ABMN} + V_{S.TVMN}$

Ta có : $V_{S.ADNM} = \frac{1}{3}V$

Xét khối chóp $S.MNCB$ có đáy là hình bình hành :

$a = \frac{SM}{SM} = 1;\ b = \frac{SN}{SN} = 1;\ c = \frac{SB}{ST} = 2;\ d = \frac{SC}{SV} = 2$

Khi đó $\frac{V_{S.TVMN}}{V_{S.MNBC}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{3}{8} \Rightarrow V_{S.TVMN} = \frac{2}{3}V.\frac{3}{8} = \frac{1}{4}V$.

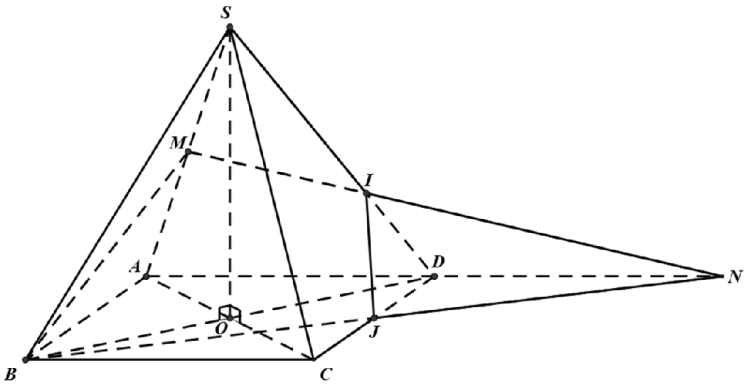
Do đó $V' = \frac{1}{3}V + \frac{1}{4}V = \frac{7}{12}V = \frac{7}{12}.16a^3 = \frac{28}{3}a^3$.

Câu 42. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA và N là điểm đối xứng của của A qua D. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện có chứa đỉnh. Thể tích của khối đa diện (H) bằng

A. $\frac{7}{12}$. **B.** $\frac{4}{7}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ ta có SO là chiều cao của hình chóp.

Trong mặt phẳng (SAD) gọi I là giao điểm của MN và SD ta suy ra I là trọng tâm của tam giác SAN do đó $\frac{SI}{SD} = \frac{NI}{NM} = \frac{2}{3}$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi J là giao điểm của BN và CD ta suy ra J là trung điểm của CD và BN.

Ta có $S_{\Delta ABN} = S_{ABCD}$ và $d(M,(ABCD)) = \frac{1}{2}SO$ suy ra $V_{MABN} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$ (1)

Từ giả thiết ta có $V_{(H)} = V_{S.ABCD} - V_{ABM.DJI}$. (2)

Xét trong khối chóp $N.ABM$ áp dụng công thức tính tỷ số thể tích ta có

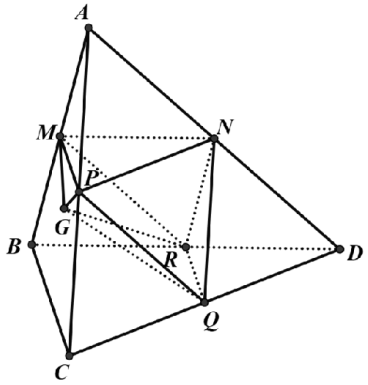
$\frac{V_{NDJI}}{V_{NABM}} = \frac{NI}{NM}.\frac{ND}{NA}.\frac{NJ}{NB} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow V_{NDJI} = \frac{1}{6}V_{NABM}$ do vậy $V_{ABM.DJI} = \frac{5}{6}V_{NABM} = \frac{5}{6}V_{MABN}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có thể tích của (H) là

$$V_{(H)} = V_{S.ABCD} - \frac{5}{6}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{7}{12}.$$

Vậy thể tích của khối đa diện (H) bằng $\frac{7}{12}$.

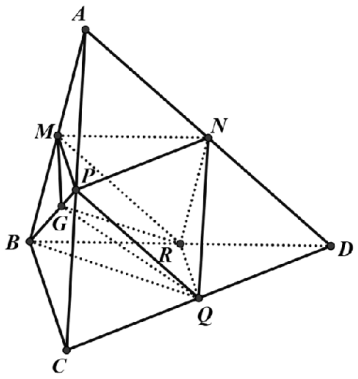
Câu 43. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, AC, DC, BD và G là trọng tâm tam giác ABC (như hình vẽ). Tính thể tích khối đa diện lồi $MNPQRG$ theo V.



A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{V}{6}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{2V}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{MNPQRG} = V_{G.MPQR} + V_{N.MPQR}$

$V_{G.MPQR} = \frac{1}{3}V_{B.MPQR} = \frac{2}{3}V_{B.PQR}$

$= \frac{2}{3}V_{P.BQR} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}V_{A.BQR}$

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{4}V_{A.BCD} = \frac{1}{12}V$

$V_{N.MPQR} = 2V_{N.MPR} = 2.V_{P.MNR}$

$= 2.\frac{1}{2}V_{C.MNR} = \frac{1}{4}V_{C.ABD}$

$= \frac{1}{4}V$.

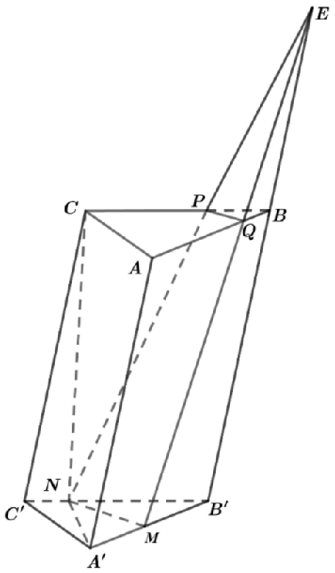
Vậy $V_{MNPQRG} = \frac{1}{12}V + \frac{1}{4}V = \frac{V}{3}$.

Câu 44. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 6. Gọi M, N và P là các điểm nằm trên cạnh $A'B', B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B'$, $B'N = \frac{3}{4}B'C'$ và $BP = \frac{1}{4}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCA'MNC'$ bằng

A. $\frac{23}{3}$. **B.** $\frac{23}{6}$. **C.** $\frac{59}{12}$. **D.** $\frac{19}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right) = \frac{3}{2}d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)$.

Mà ta lại có $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'N}{B'C'}.\frac{B'M}{B'A'} = \frac{3}{8}$.

Và $V_{E.MB'N} = \frac{1}{3}d\left(E,\left(MB'N\right)\right).S_{MB'N} = \frac{3}{16}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{9}{8}$.

Ta lại có $\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MNB'}} = \frac{EQ}{EM}.\frac{EP}{EN}.\frac{EB}{EB'} = \left(\frac{EB}{EB'}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Suy ra $V_{BQP.B'MN} = V_{E.MB'N} - V_{EBQP} = \frac{26}{27}V_{E.MB'N}$.

Vậy $V_{AQPCA'MNC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{BQP.B'MN} = 6 - \frac{26}{27}.\frac{9}{8} = \frac{59}{12}$.

---------- HẾT ----------

Chuyên đề 15 BÀI TOÁN CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Mã 102 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,23\text{m}^3$ **B.** $2,48\text{m}^3$ **C.** $1,57\text{m}^3$ **D.** $1,1\,\text{lm}^3$

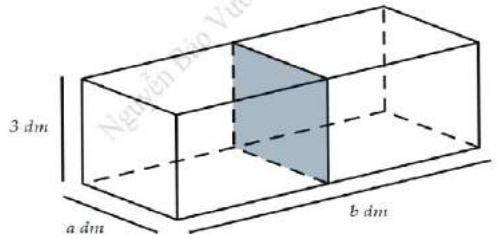
Câu 2. **(Mã 104 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5,5\ m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?:

A. $1,40\ m^3$ **B.** $1,01\ m^3$ **C.** $1,51\ m^3$ **D.** $1,17\ m^3$

Câu 3. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là $125m^3$. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

A. $3,12\,\text{m}$ **B.** $3,82\text{m}$ **C.** $3,62\text{m}$ **D** $3,42\text{m}$

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,\text{dm}^3$, chiều cao là $3\,\text{dm}$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



A. $a=\sqrt{24}\,\text{dm}\,;\ b=\sqrt{24}\,\text{dm}$. **B.** $a=6\,\text{dm}\,;\ b=4\,\text{dm}$.

C. $a=3\sqrt{2}\,\text{dm}\,;\ b=4\sqrt{2}\,\text{dm}$. **D.** $a=4\,\text{dm}\,;\ b=6\,\text{dm}$.

Câu 5. **(Mã 110 2017)** Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\sqrt{14}$ **B.** $x=3\sqrt{2}$ **C.** $x=\sqrt{6}$ **D.** $x=2\sqrt{3}$

Câu 6. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), giá trị $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=x$, $AD=1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $30°$. Tìm giá trị lớn nhất V_{max} của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V_{max}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V_{max}=\dfrac{1}{2}$. **D.** $V_{max}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 8. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2019. Ông A đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x là?

A. $h=2, x=4$. **B.** $h=\frac{\sqrt{3}}{2}, x=4$. **C.** $h=2,\ x=1$. **D.** $h=4,\ x=2$.

Câu 9. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB=BC=CD=DA=1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Câu 10. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có $SA=x, SB=y, AB=AC=SB=SC=1$. Thể tích khối chóp $SABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $x+y$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Câu 11. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $6\sqrt{6}$ **C.** $24\sqrt{3}$ **D.** $16\sqrt{2}$

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC=x$ $\left(0<x<a\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x=\frac{a\sqrt{m}}{n}$ $\left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m+2n=10$. **B.** $m^2-n=30$. **C.** $2n^2-3m<15$. **D.** $4m-n^2=-20$.

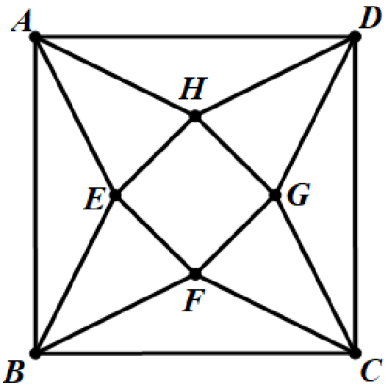
Câu 13. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=x$, $CD=y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị lớn nhất của $\frac{V_1}{V}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\frac{1}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 15. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $5cm$ (tham khảo hình vẽ).



Cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA và sau đó gò các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều. Thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng

A. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{8\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

Câu 16. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M,N lần lượt di động trên các tia $AC,B'D'$ sao cho $AM+B'N=a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 17. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại M,N. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $2\frac{AB}{AM}+3\frac{AD}{AN}=8$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{13}{16}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

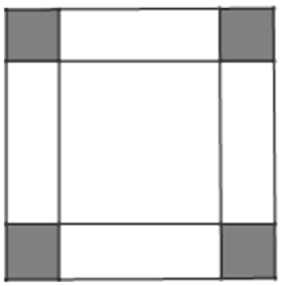
Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi P là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SD, SB lần lượt tại M và N. Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V'}{V}$.

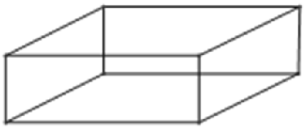
A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 20. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB=2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 21. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp(tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).





A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=6$.

Câu 22. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (Q) thay đổi song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại M, N, P. Qua M, N, P kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (ABC) tại M', N', P'. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ $MNP.M'N'P'$

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{8}{27}$.

Câu 23. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S di động không trùng với A. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt tại H, K. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 24. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A. $2\sqrt{6}a^3$. **B.** $8a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$. **D.** $\frac{7a^3}{12}$.

Câu 25. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AC, BD thỏa mãn $AC^2+BD^2=16$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB=BC\sqrt{5}$, $AC=2BC\sqrt{2}$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm O của cạnh AC. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 2. Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc α thay đổi. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$, trong đó $a,b\in\mathbb{N}^*$, a là số nguyên tố. Tổng $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 27. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=y$ $(y>0)$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM=x$ $(0<x<a)$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2+y^2=a^2$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 29. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 30. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi φ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Khi $\sin\varphi$ đạt giá trị lớn nhất, tính thể tích khối lăng trụ đã cho?

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt[4]{12}a^3}{4\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 15 BÀI TOÁN CỰC TRỊ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

DẠNG TOÁN DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Câu 1. **(Mã 102 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\text{m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $1,23\text{m}^3$ **B.** $2,48\text{m}^3$ **C.** $1,57\text{m}^3$ **D.** $1,11\text{m}^3$

Lời giải

Chọn C

Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7m^2$ nên có chiều cao $h=\dfrac{6,7-2x^2}{6x}$,

ta có $h>0$ nên $x<\sqrt{\dfrac{6,7}{2}}$.

Thể tích bể cá là $V(x)=\dfrac{6,7x-2x^3}{3}$ và $V'(x)=\dfrac{6,7-6x^2}{3}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên

x	0		$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$		$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$1,57m^3$	↘	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57\text{m}^3$.

Câu 2. **(Mã 104 2018)** Ông A dự định sử dụng hết $5,5\ m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?:

A. $1,40\ m^3$ **B.** $1,01\ m^3$ **C.** $1,51\ m^3$ **D.** $1,17\ m^3$

Lời giải

Chọn D

Gọi $x,2x,h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

Ta có $2x^2+2(xh+2xh)=5,5\Leftrightarrow h=\dfrac{5,5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện $0<x<\sqrt{\dfrac{5,5}{2}}$).

Thể tích bể cá $V=2x^2.\dfrac{5,5-2x^2}{6x}=\dfrac{1}{3}(5,5x-2x^3)$.

$V'=\dfrac{1}{3}(5,5-6x^2)$. $V'=0\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{5,5}{6}}$.

Lập BBT suy ra $V_{\max}=\dfrac{11\sqrt{33}}{54}\approx 1,17\ m^3$.

Câu 3. **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Người ta cần xây dựng một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích là $125m^3$. Đáy bể bơi là hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Tính

chiều rộng của đáy bể bơi để khi thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)?

A. $3,12\,\text{m}$ **B.** $3,82\text{m}$ **C.** $3,62\text{m}$ **D** $3,42\text{m}$

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều rộng hình hộp là a suy ra chiều dài là $3a$, chiều cao là h

$V = a.3a.h = 3a^2h \Rightarrow h = \dfrac{V}{3a^2} = \dfrac{125}{3a^2}$

Diện tích thi

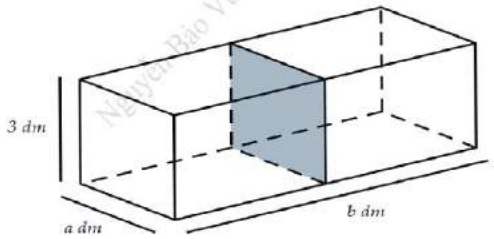
công $S_{tc} = a.3a + 2\left(a.h\right) + 2\left(3a.h\right) = 3a^2 + 2ah + 6ah = 3a^2 + 2a.\dfrac{125}{3a^2} + 6a.\dfrac{125}{3a^2} = 3a^2 + \dfrac{1000}{3a}$

Áp dụng BĐT Cosi ta có $3a^2 + \dfrac{1000}{3a} = 3a^2 + \dfrac{500}{3a} + \dfrac{500}{3a} \ge 3\sqrt[3]{3a^2.\dfrac{500}{3a}.\dfrac{500}{3a}} = \sqrt[3]{\dfrac{750000}{9}}$

Diện tích thi công nhỏ nhất khi $3a^2 = \dfrac{500}{3a} = \dfrac{500}{3a} \Leftrightarrow 9a^3 = 500 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\dfrac{500}{9}} \approx 3,82$

Ghi chú: Chúng ta có thể dung Phương pháp hàm số để tìm min của bài toán.

Câu 4. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,\text{dm}^3$, chiều cao là $3\,\text{dm}$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b (đơn vị dm) như hình vẽ. Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



A. $a = \sqrt{24}\,\text{dm};\ b = \sqrt{24}\,\text{dm}$. **B.** $a = 6\,\text{dm};\ b = 4\,\text{dm}$.

C. $a = 3\sqrt{2}\,\text{dm};\ b = 4\sqrt{2}\,\text{dm}$. **D.** $a = 4\,\text{dm};\ b = 6\,\text{dm}$.

Lời giải

Thể tích của bể cá: $V = 3ab = 72\,\text{dm}^3 \Leftrightarrow b = \dfrac{72}{3a} = \dfrac{24}{a}$, với $a,b > 0$.

Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$S = 3.3a + 2.3b + ab = 9a + 6.\dfrac{24}{a} + a.\dfrac{24}{a} = 9a + \dfrac{144}{a} + 24 \ge 2\sqrt{9a.\dfrac{144}{a}} + 24 \Leftrightarrow S \ge 96$.

$S = 96 \Leftrightarrow 9a = \dfrac{144}{a} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow b = 6$.

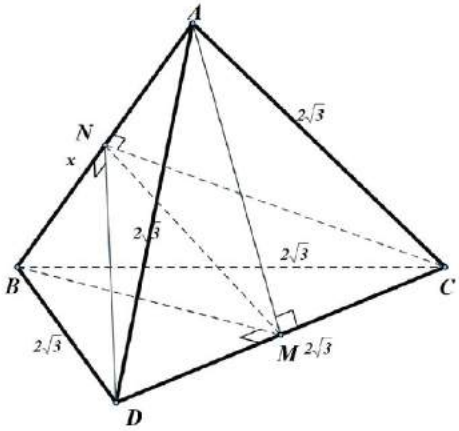
Vậy để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất thì $a = 4\,\text{dm};\ b = 6\,\text{dm}$.

Câu 5. **(Mã 110 2017)** Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x = \sqrt{14}$ **B.** $x = 3\sqrt{2}$ **C.** $x = \sqrt{6}$ **D.** $x = 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Ta có $\left.\begin{matrix} CD \perp MB \\ CD \perp MA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (MAB) \Rightarrow \begin{cases} CD \perp MN \\ CD \perp AB \end{cases}$.

Tam giác MAB cân tại M nên $MN \perp AB$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD) = \frac{1}{6} x.2\sqrt{3}.MN.\sin 90°$

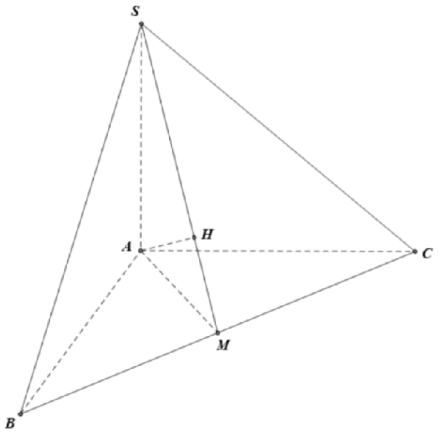
$= \frac{1}{6} x.2\sqrt{3}.\sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} x.\sqrt{36 - x^2} \le \frac{\sqrt{3}}{6}.\left[\frac{x^2 + (36 - x^2)}{2}\right] = 3\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{36 - x^2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Câu 6. **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), giá trị $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Đặt $SA = h, AB = AC = a$. Ta có

$d(A;(SBC)) = AH = 3; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2} \ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^4 h^2}} \Rightarrow a^2 h \ge 6$.

$\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SMA} = \alpha$.

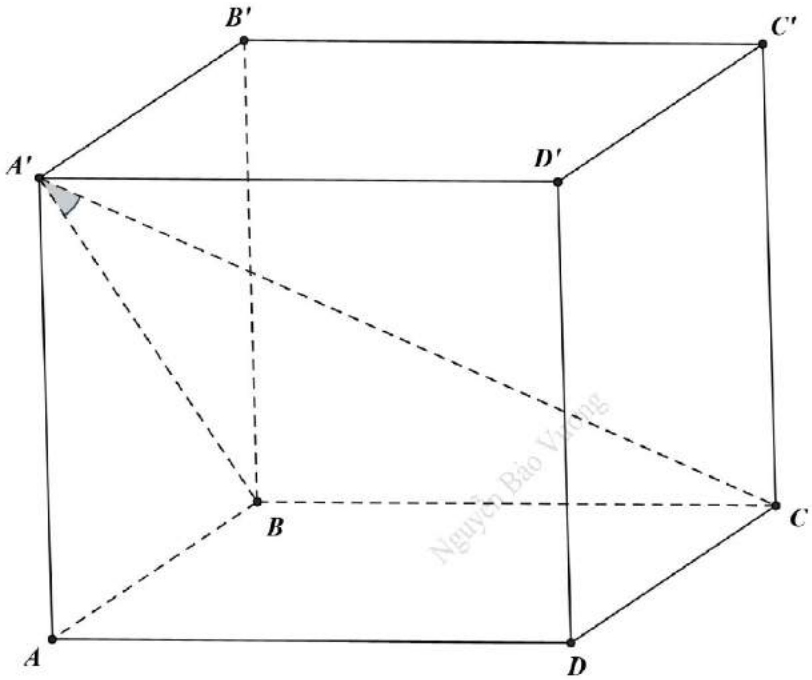
$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}a^2h\ge 1$. Thể tích nhỏ nhất bằng 1 khi $a=h\Rightarrow SM=a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{AM}{SM}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=x$, $AD=1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $30°$. Tìm giá trị lớn nhất V_{max} của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V_{max}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V_{max}=\frac{1}{2}$. **D.** $V_{max}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có $\left.\begin{matrix}BC\perp BB'\\BC\perp AB\end{matrix}\right\}\Rightarrow CB\perp(ABB'A')\Rightarrow A'B$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABB'A')\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ là góc $(A'B,A'C)=\widehat{BA'C}$ (vì $\widehat{BA'C}$ nhọn do $\Delta BA'C$ vuông tại B). Vậy $\widehat{BA'C}=30°$.

Ta có $A'B=\frac{BC}{\tan\widehat{BA'C}}=\frac{1}{\tan 30°}=\sqrt{3}$; $A'A=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{3-x^2}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB.AD.AA'=x\sqrt{3-x^2}\le\frac{x^2+(3-x^2)}{2}=\frac{3}{2}$.

Dấu $=$ xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{3-x^2}\Leftrightarrow x^2=3-x^2=x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ (vì $x>0$).

Vậy $V_{max}=\frac{3}{2}$.

Câu 8. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Nhân ngày quốc tế Phụ nữ 8 – 3 năm 2019. Ông A đã mua tặng vợ một món quà và đặt nó trong một chiếc hộp chữ nhật có thể tích là 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Để món quà trở nên đặc biệt và xứng tầm với giá trị của nó, ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, biết rằng độ dày của lớp mạ trên mọi điểm của chiếc hộp là không đổi và

như nhau. Gọi chiều cao và cạnh đáy của chiếc hộp lần lượt là h và x. Để lượng vàng trên hộp là nhỏ nhất thì giá trị của h và x là?

A. $h=2, x=4$. **B.** $h=\frac{\sqrt{3}}{2}, x=4$. **C.** $h=2,\ x=1$. **D.** $h=4,\ x=2$.

Lời giải

Ta có thể tích chiếc hộp: $V=x^2h=32$ (đvtt), với $x,h>0$. Suy ra $h=\frac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S=2x^2+8xh\ =2x^2+8x.\frac{32}{x^2}=2x^2+\frac{256}{x}$.

Cách 1

Ta có $2x^2+\frac{256}{x}=2x^2+\frac{128}{x}+\frac{128}{x}\geq 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{128}{x}.\frac{128}{x}}=96$ (BĐT AM-GM).

Đẳng thức xảy ra khi $2x^2=\frac{128}{x}$ hay $x=4$, khi đó $h=2$.

Cách 2.

Xét hàm số $f(x)=2x^2+\frac{256}{x}$ với $x>0$.

Ta có $f'(x)=4x-\frac{256}{x^2}=\frac{4x^3-256}{x^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-256\Leftrightarrow x=4$; $f(4)=96$.

BBT

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	96	↗	$+\infty$

Nguyễn Bảo Vương

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x=4$, khi đó $h=2$.

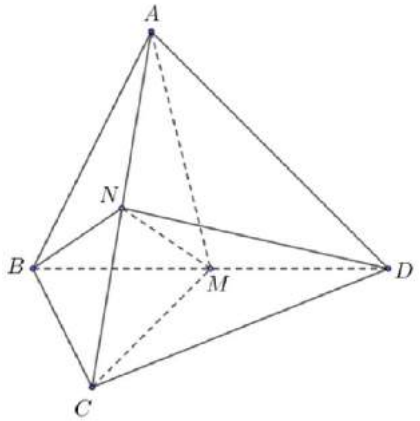
Vậy phương án A đúng.

Câu 9. **(THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019)** Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB=BC=CD=DA=1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC. Đặt $BD = 2x$, $AC = 2y$ $(x, y > 0)$.

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}$, $MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_{AMC} = \frac{1}{2}MN.AC = \frac{1}{2}y.\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.DB.S_{AMC} = \frac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.(1-x^2-y^2)} \le \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+1-x^2-y^2\right)^3}{27}}$$

$\Rightarrow V_{ABCD} \le \frac{2\sqrt{3}}{27}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

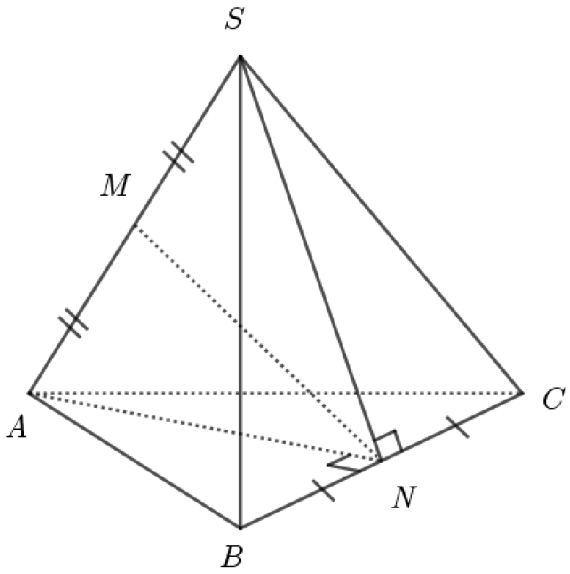
Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $\frac{2\sqrt{3}}{27}$.

Câu 10. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hình chóp $SABC$ có $SA = x, SB = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $SABC$ đạt giá trị lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$ **D.** $4\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và đặt $2a = x, 2b = y$.

$BC \perp AN, BC \perp SN \Rightarrow BC \perp (SAN)$

$V_{SABC} = V_{BSAN} + V_{CSAN} = 2V_{BSAN} = \frac{1}{3}BC.S_{SAN}$

$AN^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 1 - b^2 \Rightarrow MN^2 = AN^2 - MA^2 = 1 - b^2 - a^2$

$\Rightarrow S_{SAN} = \frac{1}{2}SA.NM = a\sqrt{1-a^2-b^2}$

$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}2ab\sqrt{1-a^2-b^2} \Rightarrow V^2{}_{SABC} = \frac{1}{9}.4a^2b^2.(1-a^2-b^2) \le \frac{4}{9}.\left(\frac{a^2+b^2+1-a^2-b^2}{3}\right)^3$

$\Rightarrow V^2{}_{SABC} \le \frac{4}{243}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a^2=b^2=1-a^2-b^2 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=y=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow x+y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 11. **(THPT Minh Châu Hưng Yên 2019)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $6\sqrt{6}$ **C.** $24\sqrt{3}$ **D.** $16\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

+) Gọi độ dài $AB=a, AD=b$ và $AA'=c$

Ta có tổng diện tích tất cả các mặt là 36 nên $2ab+2bc+2ca=36 \Leftrightarrow ab+bc+ca=18 \ (1)$

Do độ dài đường chéo AC' bằng 6 nên $a^2+b^2+c^2=36 \ (2)$

+) Thể tích khối hộp là $V=abc$

Ta có $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=72 \Leftrightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$

Từ $(1) \Leftrightarrow ab=18-c(a+b)=18-c\left(6\sqrt{2}-c\right)=c^2-6\sqrt{2}c+18$

Nên $V=abc=c^3-6\sqrt{2}c^2+18c=f(c), c\in\left(0;6\sqrt{2}\right)$

Ta có $f'(c)=3c^2-12\sqrt{2}c+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=3\sqrt{2} \\ c=\sqrt{2} \end{array}\right.$

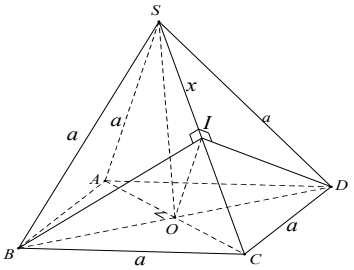
Lập bảng biến thiên ta được $\underset{(0;6\sqrt{2})}{Max}\, V=f\left(\sqrt{2}\right)=8\sqrt{2}$

Câu 12. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC=x \ \left(0<x<a\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng a. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x=\dfrac{a\sqrt{m}}{n} \ \left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m+2n=10$. **B.** $m^2-n=30$. **C.** $2n^2-3m<15$. **D.** $4m-n^2=-20$.

Lời giải



□ Gọi I là trung điểm SC, $O=AC\cap BD$.

Ta có $\begin{cases} BI\perp SC \\ DI\perp SC \end{cases} \Rightarrow BD\perp SC$

Mà $ABCD$ là hình thoi nên $BD\perp AC$

Khi đó, $BD\perp(SAC)$.

□ $V_{S.ABCD}=2V_{S.ABC}=2V_{B.SAC}$.

□ $AO^2=AB^2-BO^2=AB^2-\left(BI^2-OI^2\right)=AB^2-\left(SB^2-SI^2\right)+OI^2=\dfrac{x^2+a^2}{4}$

$\Rightarrow AC^2 = 4AO^2 = x^2 + a^2 = SA^2 + SC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

$\square$ $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = 2V_{B.SAC} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} BO \cdot \dfrac{1}{2} SA \cdot SC = \dfrac{1}{3} \dfrac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \cdot a \cdot x = \dfrac{ax\sqrt{3a^2 - x^2}}{6}$.

$\square$ Ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} = \sqrt{x^2 . \left(3a^2 - x^2\right)} \le \dfrac{x^2 + \left(3a^2 - x^2\right)}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} \le \dfrac{a^3}{4}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

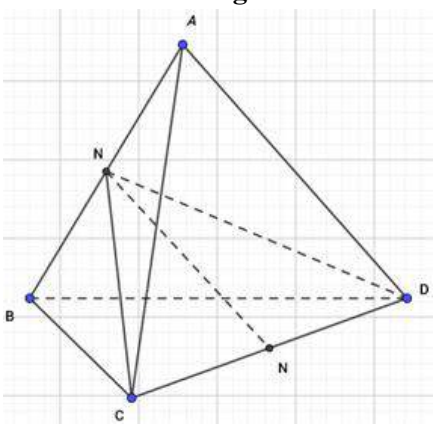
Vậy, thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow m = 6; n = 2$

$\Rightarrow m + 2n = 10$.

Câu 13. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Tam giác ADB, CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM \perp AB$ và $CM \perp AB$. Suy ra $AB \perp (MCD)$.

$V_{ABCD} = V_{B.MCD} + V_{A.MCD} = \dfrac{1}{3}.BM.S_{MCD} + \dfrac{1}{3}.AM.S_{MCD} = \dfrac{x}{3}.S_{MCD}$.

Tam giác $\Delta ABC = \Delta ABD (c.c.c)$ nên $CM = DM \Rightarrow MN \perp CD$.

$S_{MCD} = \dfrac{1}{2}.CD.MN = \dfrac{1}{2} y.\sqrt{MC^2 - CN^2} = \dfrac{1}{2} y.\sqrt{\left(BC^2 - BM^2\right) - CN^2} = \dfrac{1}{2} y \sqrt{4 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4}}$

$= \dfrac{1}{4} y \sqrt{16 - \left(x^2 + y^2\right)}$.

$V_{ABCD} = \dfrac{xy}{12} \sqrt{16 - \left(x^2 + y^2\right)} \le \dfrac{xy}{12} \sqrt{16 - 2xy} = \dfrac{1}{12} \sqrt{xy.xy.(16 - 2xy)}$

$\le \dfrac{1}{12} \sqrt{\left(\dfrac{xy + xy + (16 - 2xy)}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{12} \sqrt{\left(\dfrac{16}{3}\right)^3}$.

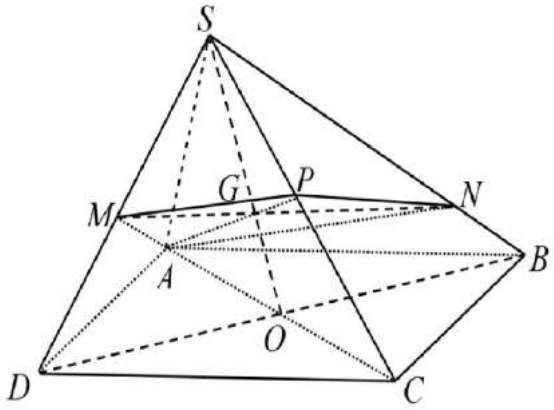
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x=y \\ xy=16-2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=\dfrac{16}{3} \end{cases}$.

Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy=\dfrac{16}{3}$.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $S.AMPN$. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{V_1}{V}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD$, $G=AP\cap SO$, suy ra G là trọng tâm tam giác SAC.

Gọi (P) là mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N.

Dễ thấy: $\begin{cases} (P)\cap(SBD)=MN \\ (P)\cap(SAC)=AP \\ (SBD)\cap(SAC)=SO \end{cases} \Rightarrow MN$, AP, SO đồng quy hay M, N, G thẳng hàng.

Đặt: $x=\dfrac{SM}{SD}$ $(0<x\le 1)$ và $y=\dfrac{SN}{SB}$ $(0<y\le 1)$.

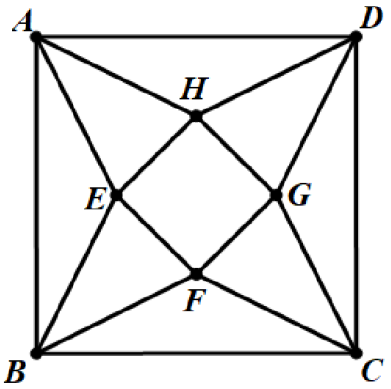
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_{S.AMP}}{V_{S.ADC}}+\dfrac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABP}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SP}{SC}+\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC}\right)=\dfrac{1}{4}(x+y)$.

Từ tỷ lệ: $\dfrac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBD}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S_{\Delta SMG}}{S_{\Delta SDO}}+\dfrac{S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBO}}\right)\Leftrightarrow \dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{SM}{SD}.\dfrac{SG}{SO}+\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SG}{SO}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{SM}{SD}+\dfrac{SN}{SB}\right)$.

$\Rightarrow xy=\dfrac{1}{3}(x+y)$. Lại có: $(x-1)(y-1)\ge 0\Rightarrow xy-(x+y)+1\ge 0$.

Từ đó suy ra: $-\dfrac{2}{3}(x+y)+1\ge 0$ hay $x+y\le\dfrac{3}{2}$. Vậy $\dfrac{V_1}{V}$ lớn nhất bằng $\dfrac{3}{8}$.

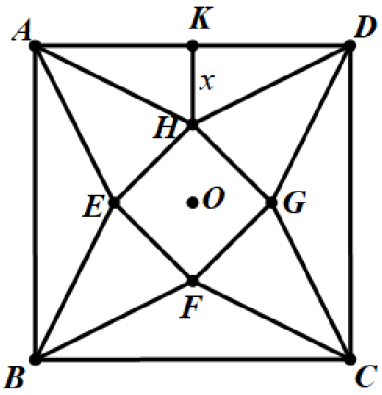
Câu 15. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm một hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $5cm$ (tham khảo hình vẽ).

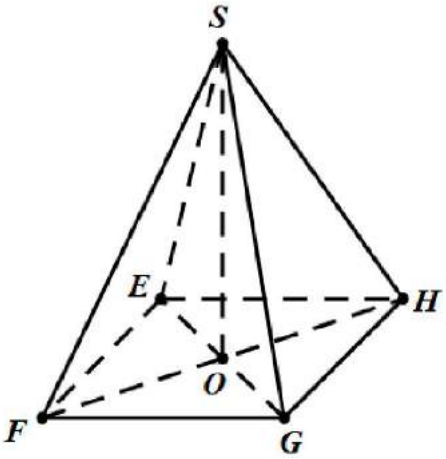


Cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA và sau đó gò các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành khối chóp tứ giác đều. Thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng

A. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{8\sqrt{10}}{3}$. **D.** $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải





Gọi K là trung điểm AD, đặt $HK = x, 0 < x \le \frac{5}{2}$.

Ta có $EF = FG = GH = HE = \left(\frac{5}{2} - x\right)\sqrt{2}$; $HD = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2}$.

Suy ra $SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{HD^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\frac{5}{2} - x\right)^2}$.

Ta có $V = \frac{1}{3}.2.\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + x^2 - \left(\frac{5}{2} - x\right)^2} = \frac{2}{3}.\left(\frac{5}{2} - x\right)^2.\sqrt{5x}$.

$\Rightarrow V' = \frac{2}{3}\left[-2\left(\frac{5}{2} - x\right)\sqrt{5x} + \left(\frac{5}{2} - x\right)^2 \frac{5}{2\sqrt{5x}}\right]$, $V' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$
V'		$+$	0	$-$	0
V		↗	$\frac{4\sqrt{10}}{3}$	↘	

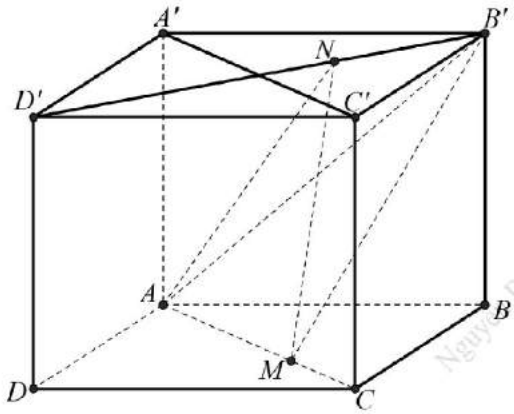
Dựa vào bảng biến thiên, ta có $V_{\max}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$ khi $x=\frac{1}{2}$.

Câu 16. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M,N lần lượt di động trên các tia $AC,B'D'$ sao cho $AM+B'N=a\sqrt{2}$ .Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{a^3}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{AB'MN}=\frac{1}{3}d\left(N,\left(AB'M\right)\right).S_{\Delta AB'M}$

Do $ACB'D'$ là tứ diện đều nên $\sin\left(\widehat{B'D',\left(AB'M\right)}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin\widehat{B'AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $V_{AB'MN}=\frac{1}{3}\left(B'N.\sin\left(\widehat{B'D',\left(AB'M\right)}\right)\right).\frac{1}{2}AB'.AM.\sin\widehat{B'AM}=\frac{a}{6}.AM.B'N$

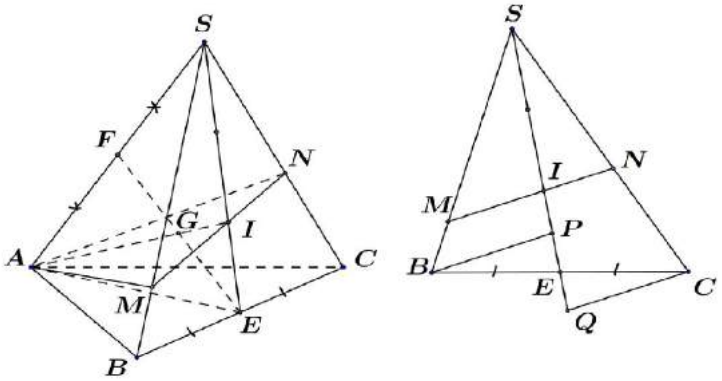
$\le\frac{a}{6}\left(\frac{AM+B'N}{2}\right)^2=\frac{a^3}{12}$

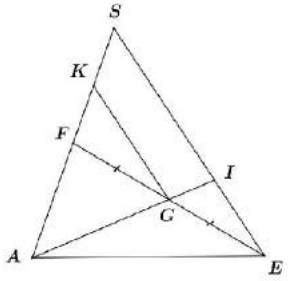
Vậy $\left(V_{AB'MN}\right)_{\max}=\frac{a^3}{12}$

Câu 17. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho tứ diện $SABC$ có G là trọng tâm tứ diện, mặt phẳng quay quanh AG cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại M,N. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ là?

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải





Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm BC,SA,EF suy ra G là trọng tâm tứ diện $SABC$. Điểm I là giao điểm của AG và SE. Qua I dựng đường thẳng cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại M,N. Suy ra (AMN) là mặt phẳng quay quanh AG thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kẻ $GK\ //\ SE,(K\in SA)$ suy ra K là trung điểm FS.

$\Rightarrow \dfrac{KG}{SI}=\dfrac{AK}{AS}=\dfrac{3}{4}$. Mà $\dfrac{KG}{SE}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{SI}{SE}=\dfrac{2}{3}$.

Cách 1:

Kẻ $BP\ //\ MN, CQ\ //\ MN$; $(P,Q\in SE)$.

Ta có: $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SI}{SP};\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SI}{SQ}$.

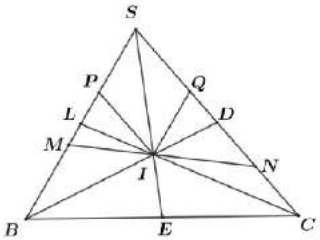
$\Rightarrow \Delta BEP=\Delta CEQ\Rightarrow E$ là trung điểm $PQ\Rightarrow SP+SQ=2SE$ (đúng cả trong trường hợp $P\equiv Q\equiv E$).

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=1.\dfrac{SI}{SP}.\dfrac{SI}{SQ}\overset{AM-GM}{\geq}\dfrac{SI^2}{\dfrac{(SP+SQ)^2}{4}}=\dfrac{SI^2}{SE^2}=\left(\dfrac{SI}{SE}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $SP=SQ=SE$. Hay $P\equiv Q\equiv E\Leftrightarrow MN\ //\ BC$.

Cách 2:

Ta chứng minh được $\dfrac{SB}{SM}+\dfrac{SC}{SN}=3$.



Thật vậy, qua I kẻ các đường thẳng lần lượt song song SB,SC cắt SC,SB tương ứng tại D,L.

Ta có: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{SB}{IQ}=\dfrac{DB}{DI}=3\\ \dfrac{IQ}{SM}=\dfrac{NI}{NM}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{SB}{IQ}.\dfrac{IQ}{SM}=3.\dfrac{NI}{NM}\Leftrightarrow \dfrac{SB}{SM}=\dfrac{3NI}{NM},\ (1).$

Lại có: $\left.\begin{array}{l}\dfrac{SC}{IP}=\dfrac{LC}{LI}=3\\ \dfrac{IP}{SN}=\dfrac{MI}{MN}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{SC}{IP}.\dfrac{IP}{SN}=3.\dfrac{MI}{MN}\Leftrightarrow \dfrac{SC}{SN}=\dfrac{3MI}{MN},\ (2).$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{SB}{SM}+\dfrac{SC}{SN}=3\left(\dfrac{NI}{NM}+\dfrac{MI}{MN}\right)=3.$

Đặt $x=\dfrac{SB}{SM};y=\dfrac{SC}{SN}$. Suy ra $x+y=3$.

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{xy}\overset{AM-GM}{\geq}\dfrac{1}{\dfrac{(x+y)^2}{4}}=\dfrac{4}{9}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow MN\ //\ BC$.

Cách 3:

Đặt $\dfrac{SB}{SM}=x;\ \dfrac{SC}{SN}=y$, với $x>0,\ y>0$.

Ta có $\overrightarrow{SI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SE}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC})=\dfrac{1}{3}(x\overrightarrow{SM}+y\overrightarrow{SN})=\dfrac{x}{3}\overrightarrow{SM}+\dfrac{y}{3}\overrightarrow{SN}$.

Do I, M, N thẳng hàng nên $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1\Leftrightarrow x+y=3$.

Ta có $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{xy}\geq\dfrac{1}{(\dfrac{x+y}{2})^2}=\dfrac{4}{9}.$

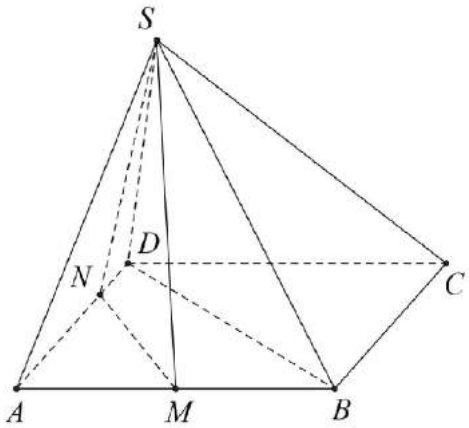
Vậy $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{4}{9}$ khi $x=y$, hay MN đi qua I và song song với BC.

Câu 18. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB và AD (M và N không trùng với A) sao cho $2\dfrac{AB}{AM}+3\dfrac{AD}{AN}=8$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\dfrac{V_1}{V}$.

A. $\dfrac{13}{16}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\frac{V_{SADB}}{V_{SANM}}=\frac{AD}{AN}.\frac{AB}{AM}\Leftrightarrow\frac{2.V_{SADB}}{V_{SANM}}=2.\frac{AD}{AN}.\frac{AB}{AM}$

$\Leftrightarrow\frac{V}{V-V_1}=2.\frac{AD}{AN}.\frac{AB}{AM}\Leftrightarrow\frac{V-V_1}{V}=\frac{1}{2.\frac{AD}{AN}.\frac{AB}{AM}}\Leftrightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{2.\frac{AD}{AN}.\frac{AB}{AM}-1}{2.\frac{AD}{AN}.\frac{AB}{AM}}$

Đặt $x=\frac{AD}{AN}\Rightarrow 2\frac{AB}{AM}=8-3x,(1\le x\le 2)$. Khi đó $\frac{V_1}{V}=\frac{x(8-3x)-1}{x(8-3x)}=1+\frac{1}{3x^2-8x}$

Đặt $f(x)=1+\frac{1}{3x^2-8x},(1\le x\le 2)$

Ta có: $f'(x)=-\frac{6x-8}{(3x^2-8x)^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{6x-8}{(3x^2-8x)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}\Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{16}$

Bảng biến thiên hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$			‖	$+$	0	$-$	‖		
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{5}$	$\nearrow$	$\frac{13}{16}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$		

Dựa vào bảng biến thiên ta được hàm số đạt giá trị lớn nhất là $\frac{13}{16}$ tại $x=\frac{4}{3}$.

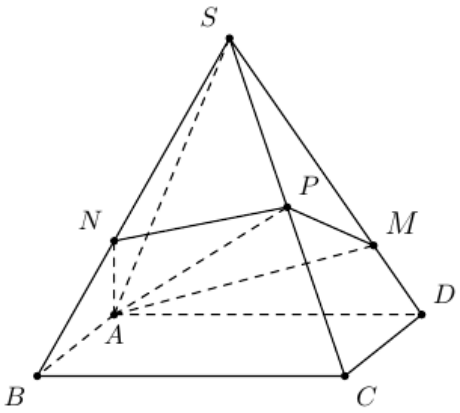
Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ là $\frac{13}{16}$.

Câu 19. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi P là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) chứa AP và cắt hai cạnh SD, SB lần lượt tại M và N. Gọi V' là thể tích của khối chóp $S.AMPN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Do (α) đi qua A, P, M, N nên bốn điểm này đồng phẳng.

Áp dụng công thức $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{a+b+c+d}{4.a.b.c.d}$ với $\frac{SA}{SA}=a$, $\frac{SC}{SP}=c$, $\frac{SD}{SM}=d$, $\frac{SB}{SN}=b$ thỏa mãn $a+c=b+d$.

Theo đề bài ta có: $\frac{SA}{SA}=1$, $\frac{SC}{SP}=2$ và đặt $\frac{SD}{SM}=d>0$, $\frac{SB}{SN}=b>0$.

Khi đó: $\frac{V'}{V}=\frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d}$ với $1+2=b+d\Leftrightarrow b+d=3$.

Vậy ta có: $\frac{V'}{V}=\frac{1+2+b+d}{4.1.2.b.d}\Leftrightarrow\frac{V'}{V}=\frac{1+2+3}{4.2.b.d}\Leftrightarrow\frac{V'}{V}=\frac{3}{4bd}$.

Theo bất đẳng thức cơ bản: $bd\le\frac{(b+d)^2}{4}=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{bd}\ge\frac{4}{9}$ suy ra $\frac{V'}{V}=\frac{3}{4bd}\ge\frac{3}{4}.\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $b=d\Leftrightarrow b=d=\frac{3}{2}$.

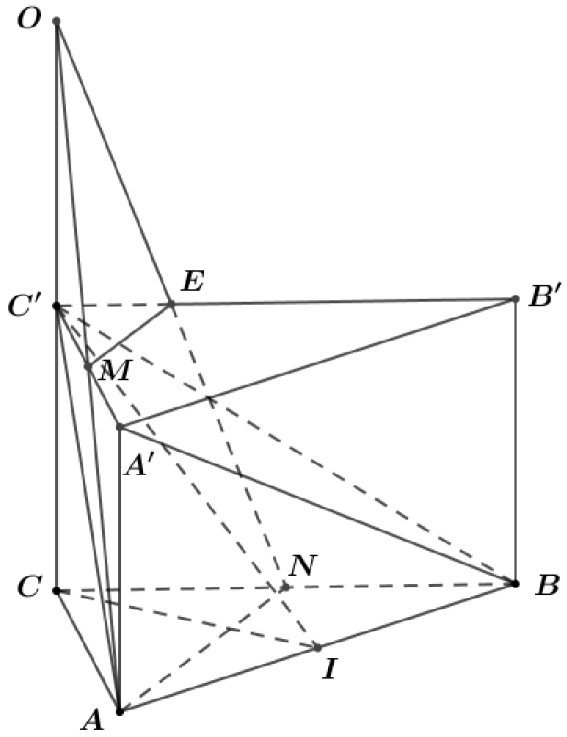
Vậy $\frac{V'}{V}$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 20. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB=2a$ và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $60°$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'C'$ và BC. Mặt phẳng (AMN) chia khối lăng trụ thành hai phần. Thể tích của phần nhỏ bằng

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **C.** $\frac{7\sqrt{6}a^3}{24}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm AB, suy ra $AB \perp (CIC')$ nên góc giữa $(C'AB)$ và (ABC) là góc $(CI, C'I)$, suy ra $\widehat{C'IC} = 60°$.

Tam giác $C'IC$ vuông tại C nên $C'C = CI \cdot \tan \widehat{C'IC} = \dfrac{AB}{2} \cdot \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot CI = a^2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = CC' \cdot S_{ABC} = a\sqrt{3} \cdot a^2 = a^3\sqrt{3}$.

Trong $(ACC'A')$, kéo dài AM cắt CC' tại O.

Suy ra $C'M$ là đường trung bình của ΔOAC, do đó $OC = 2CC' = 2a\sqrt{3}$.

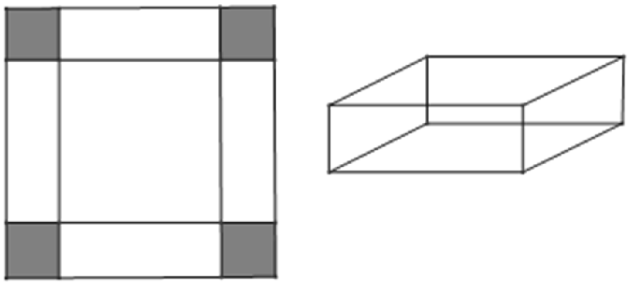
Thể tích khối chóp $V_{O.ACN} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ACN} \cdot OC = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot S_{ABC} \cdot 2CC' = \dfrac{1}{3} V$.

Thể tích khối chóp $V_{O.C'ME} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{C'ME} \cdot OC' = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8} S_{A'B'C'} \cdot OC' = \dfrac{1}{24} V$.

Do đó $V_{C'EM.CAN} = V_{O.ACN} - V_{O.C'ME} = \dfrac{1}{3} V - \dfrac{1}{24} V = \dfrac{7}{24} V = \dfrac{7}{24} \cdot a^3\sqrt{3} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Vậy phần thể tích nhỏ hơn là $V_{C'EM.CAN} = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 21. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp(tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



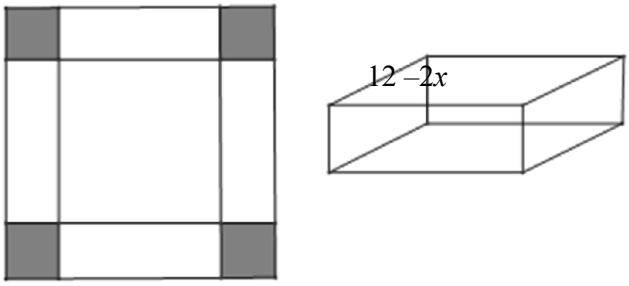
A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=6$.

Lời giải

Chọn A

Hình hộp có đáy của là hình vuông cạnh bằng $12-2x$, chiều cao bằng x.

Điều kiện $0<x<6$



Thể tích khối hộp là $V=(12-2x)^2.x=4(6-x)^2.x$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương $\sqrt[3]{(6-x)(6-x).2x}\le\dfrac{(6-x)+(6-x)+2x}{3}$

$\Leftrightarrow(6-x)(6-x).2x\le 4^3 \Leftrightarrow 4(6-x)^2.x\le 2.4^3 \Leftrightarrow V\le 128$ (hằng số).

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow 6-x=2x \Leftrightarrow x=2$.

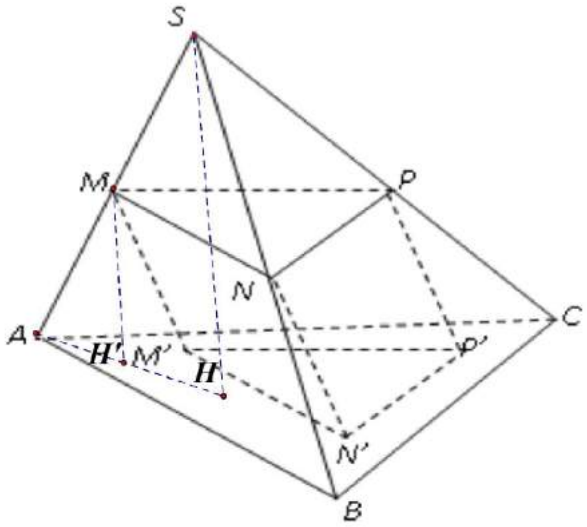
Vậy thể tích khối hộp lớn nhất khi $x=2$.

Câu 22. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp *S.ABC* có thể tích bằng 1. Mặt phẳng (*Q*) thay đổi song song với mặt phẳng (*ABC*) lần lượt cắt các cạnh *SA*, *SB*, *SC* tại *M*, *N*, *P*. Qua *M*, *N*, *P* kẻ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt mặt phẳng (*ABC*) tại *M*', *N*', *P*'. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối lăng trụ *MNP.M'N'P'*

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{8}{27}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $\frac{SM}{SA}=x\left(0<x<1\right)\Rightarrow\frac{SN}{SB}=x=\frac{SP}{SC}$

$\Rightarrow\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}NM.NP.\sin\widehat{MNP}}{\frac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC}}=\frac{NM}{BA}.\frac{NP}{BC}=x^2$

$\Rightarrow S_{\Delta MNP}=x^2.S_{\Delta ABC}$

Gọi chiều cao của hình chóp là SH , chiều cao của lăng trụ là MH' :

$\Rightarrow\frac{MH'}{SH}=\frac{AM}{AS}=1-x\Rightarrow MH'=\left(1-x\right)SH$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=1\Leftrightarrow SH.S_{\Delta ABC}=3$

$\Rightarrow V_{MNP.M'N'P'}=MH'.S_{\Delta MNP}=\left(1-x\right)SH.x^2.S_{\Delta ABC}=x^2.\left(1-x\right).SH.S_{\Delta ABC}=x^2.\left(1-x\right).3$

Xét hàm số: $f\left(x\right)=3x^2-3x^3$ với $x\in\left(0;1\right)$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=6x-9x^2\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (loai)\\x=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{4}{9}$	↘	

Vậy: $\max V_{MNP.M'N'P'}=\frac{4}{9}$.

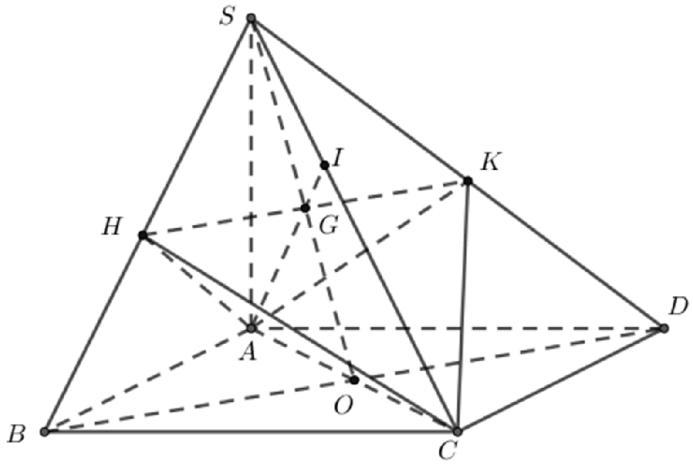
Câu 23. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A lấy điểm S di động không trùng với A. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt tại H, K. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



Ta có $V_{S.ABD} = \frac{1}{3}S_{ABD}.SA = \frac{a^2x}{6}$.

Lại có $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SD} = \left(\frac{SA}{SB}\right)^2.\left(\frac{SA}{SD}\right)^2 = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}$

$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}.V_{S.ABD} = \frac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Gọi $O = AC \cap BD, G = SO \cap HK, I = AG \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH, (AH \subset (SAB))$.

Lại có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp SC$.

Vì $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK), AI \subset (AHK) \Rightarrow SC \perp AI$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, đặt $SA = x > 0$ và có $AC = a\sqrt{2}$, $AI \perp SC$

$\Rightarrow \frac{IC}{IS} = \left(\frac{AC}{AS}\right)^2 = \frac{2a^2}{x^2} \Rightarrow CI = \frac{2a^2}{x^2}SI$.

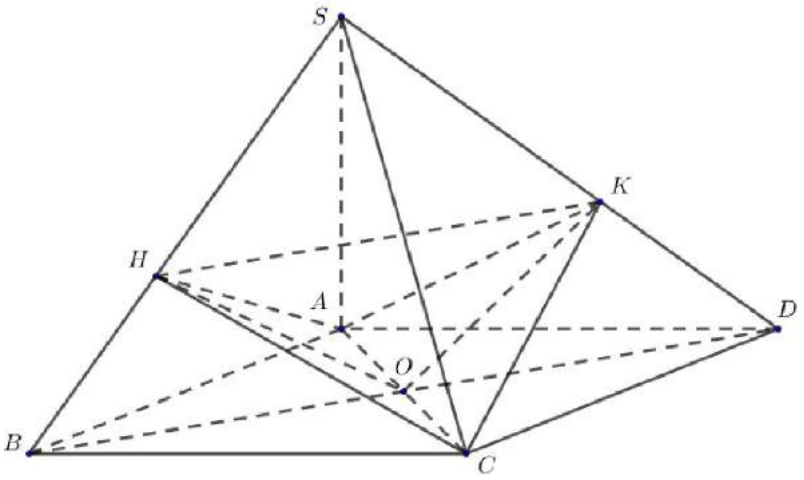
$\Rightarrow V_{ACHK} = \frac{1}{3}S_{AHK}.CI = \frac{1}{3}S_{AHK}.\frac{2a^2}{x^2}.SI = \frac{2a^2}{x^2}V_{S.AHK} = \frac{a^4}{3}.\frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Ta lại có $\left(x^2+a^2\right)^2 = \left(\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{3}+a^2\right)^2 \overset{AM-GM}{\geq} 16\frac{x^3a}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{16a}$ (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a\sqrt{3}$).

Suy ra $V_{ACHK} \le \frac{a^4}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{16a} \Leftrightarrow V_{ACHK} \le \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $x = SA = a\sqrt{3}$.

Cách 2:



Đặt $SA = x, x > 0 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^2x}{3} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^2x}{6}$.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm của $AC \Rightarrow d\left(A,\left(HOK\right)\right) = d\left(C,\left(HOK\right)\right)$

$\Rightarrow V_{AHOK} = V_{CHOK} \Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AHOK}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A, có $AH \perp SB \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2}$.

Tương tự trong tam giác SAD ta cũng có $\frac{SK}{SD} = \frac{x^2}{x^2+a^2}$.

Lại có $\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}} = \frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SD} = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2} \Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}.V_{S.ABD} = \frac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2}$.

Mặt khác $\frac{d\left(H,\left(ABCD\right)\right)}{d\left(S,\left(ABCD\right)\right)} = \frac{BH}{BS} = \frac{a^2}{x^2+a^2} \Rightarrow d\left(H,\left(ABCD\right)\right) = \frac{a^2x}{x^2+a^2}$

Mà $S_{ABO} = \frac{1}{2}S_{ABD} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow V_{H.ABO} = \frac{1}{3}S_{ABO}.d\left(H,\left(ABO\right)\right) = \frac{1}{12}.\frac{a^4x}{x^2+a^2}$.

Tương tự, ta có $V_{K.ADO} = \frac{1}{12}.\frac{a^4x}{x^2+a^2}$.

$$\Rightarrow V_{ACHK} = 2V_{AOHK} = 2\left(V_{S.ABD} - V_{S.AHK} - V_{HABO} - V_{KADO}\right) = 2\left(\frac{a^2x}{6} - \frac{a^2x^5}{6\left(x^2+a^2\right)^2} - \frac{1}{6}.\frac{a^4x}{x^2+a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow V_{ACHK} = \frac{a^4}{3}.\frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}.$$

Xét hàm số $f\left(x\right) = \frac{x^3}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(x\right) = \frac{x^2\left(3a^2-x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3}; f'\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = a\sqrt{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$a\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$f(a\sqrt{3})$	↘	

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = a\sqrt{3}$

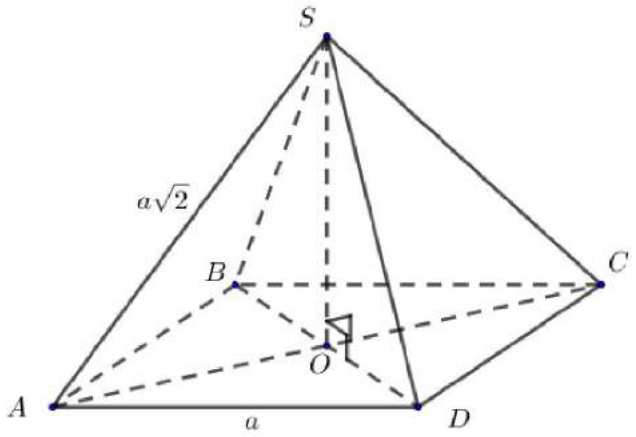
Vậy giá trị lớn nhất của V_{ACHK} bằng $\frac{a^4}{3}.\frac{\left(a\sqrt{3}\right)^3}{\left[\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2\right]^2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$ khi $SA = a\sqrt{3}$.

Câu 24. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Khối chóp có đáy là hình bình hành, một cạnh đáy bằng a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất là

A. $2\sqrt{6}a^3$. **B.** $8a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}a^3$. **D.** $\frac{7a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $AC \cap BD = O$.

Ta có $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình bình hành $ABCD$

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật.

Không mất tính tổng quát, giả sử $AD = a$ và đặt $AB = x, (x > 0) \Rightarrow OA = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}$.

Xét ΔSOA vuông tại O, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{x^2+a^2}{4}} \Leftrightarrow SO = \frac{1}{2}\sqrt{7a^2-x^2}$.

Lại có $S_{ABCD} = a.x$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{6}a.x.\sqrt{7a^2-x^2} \overset{AM-GM}{\leq} \frac{a}{6}.\frac{x^2+\left(7a^2-x^2\right)}{2} = \frac{7a^3}{12}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

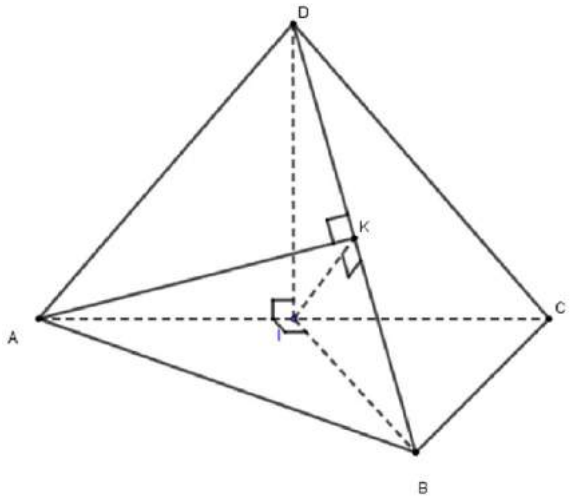
Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho là $\frac{7a^3}{12}$.

Câu 25. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AC, BD thỏa mãn $AC^2+BD^2=16$ và các cạnh còn lại đều bằng 6. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AC, BD.

Ta có: $AC\perp IB, AC\perp ID\Rightarrow AC\perp (BID)\Rightarrow V_{ABCD}=2.V_{ABID}$

$V_{ABID}=\frac{1}{3}AI.S_{IBD}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AC.\frac{1}{2}IK.BD$ (Do $IB=ID$ nên tam giác IBD cân tại I)

$BD=\sqrt{16-AC^2}$; $0<AC<4$

$IK^2=\frac{IB^2+ID^2}{2}-\frac{BD^2}{4}=ID^2-\frac{BD^2}{4}=AD^2-\frac{AC^2}{4}-\frac{BD^2}{4}=32\Rightarrow IK=4\sqrt{2}$

$V_{ABCD}=2.\frac{1}{12}.AC.4\sqrt{2}\sqrt{16-AC^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.AC.\sqrt{16-AC^2},(0<AC<4)$

Đặt $t=AC$, $(0<t<4)$.

Xét $f(t)=t\sqrt{16-t^2},(0<t<4)$

Ta có:

t	0		$2\sqrt{2}$		2
f'(t)		+	0	-	
f(t)		↗	8	↘	

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Tìm giá trị lớn nhất của thể tích, ta có thể dùng cách khác như sau:

Áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số: AC^2 và $16-AC^2$

Ta có: $AC^2+16-AC^2\ge 2\sqrt{AC^2(16-AC^2)}\Leftrightarrow AC.\sqrt{16-AC^2}\le 8$

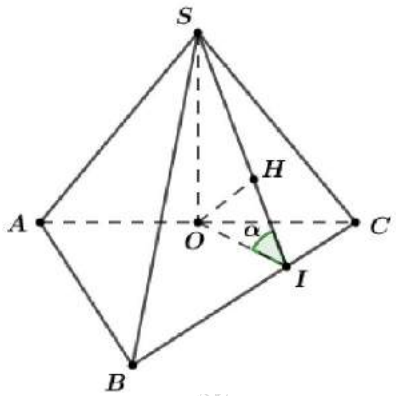
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AC^2=16-AC^2\Leftrightarrow AC=2\sqrt{2}$

Vậy thể tích khối tứ diện cần tìm đạt giá trị lớn nhất là $\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = BC\sqrt{5}$, $AC = 2BC\sqrt{2}$, hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm O của cạnh AC. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng 2. Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc α thay đổi. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$, trong đó $a,b \in \mathbb{N}^*$, a là số nguyên tố. Tổng $a+b$ bằng

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải



Áp dụng định lý Hê-rông trong tam giác ABC ta được diện tích $S_{ABC} = BC^2$.

Từ O kẻ $OI \perp BC$ tại I, suy ra góc tạo bởi (SBC) và (ABC) là $\widehat{SIO} = \alpha$.

Từ O kẻ $OH \perp SI$ tại H thì $d(A,(SBC)) = 2d(O,(SBC)) = OH \Rightarrow OH = 1$.

Tam giác OHI vuông tại H nên $OI = \frac{OH}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Tam giác SOI vuông tại O nên $SO = OI \cdot \tan\alpha = \frac{OH}{\sin\alpha} \cdot \tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

Mà diện tích

$S_{ABC} = BC^2 \Rightarrow 2OI = d(A,BC) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = 2BC \Rightarrow OI = BC \Rightarrow S_{ABC} = OI^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$.

Xét hàm số $f(x) = (1-x^2)x = -x^3 + x$ trên $(0;1)$, $f'(x) = -3x^2 + 1$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	

Suy ra $f(x) \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}, \forall x \in (0;1)$.

Do đó $(1-\cos^2 x)\cos x \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha} \ge \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

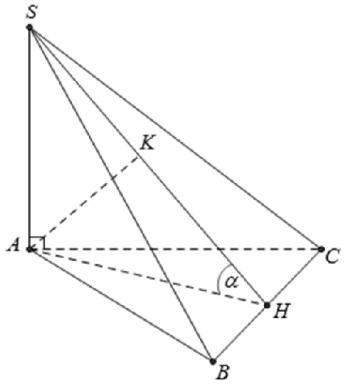
Vậy $a=3, b=2 \Rightarrow a+b=5$.

Câu 27. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ để thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ (vì tam giác ABC vuông cân tại A).

Ta có $\begin{cases} AH \perp BC (cmt) \\ SA \perp BC \left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH.$

Ta có $\begin{cases} (ABC) \cap (SBC) = BC \\ AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left((ABC),(SBC)\right) = (AH, SH) = \widehat{SHA} = \alpha.$

Kẻ $AK \perp SH$, với $K \in SH$.

Ta có $\begin{cases} AK \perp SH (gt) \\ AK \perp BC \left(BC \perp (SAH)\right) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AK = 3.$

Tam giác SHK vuông tại K có $AH = \dfrac{AK}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{\sin\alpha}$.

Tam giác SAK vuông tại K có $SA=\dfrac{AK}{\sin(90°-\alpha)}=\dfrac{3}{\cos\alpha}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A có H là trung điểm của $BC\Rightarrow BC=2AH=\dfrac{6}{\sin\alpha}$ và

$AB=AC=\dfrac{BC}{\sqrt{2}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}$.

Vậy $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}.\dfrac{6}{\sqrt{2}\sin\alpha}=\dfrac{9}{\sin^2\alpha}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{9}{\sin^2\alpha}.\dfrac{3}{\cos\alpha}=\dfrac{9}{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}$.

Xét hàm số $y=(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$ với $\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Đặt $t=\cos\alpha\Rightarrow t\in[0;1]\Rightarrow y=(1-t^2)t=t-t^3$

Suy ra $y'=1-3t^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in[0;1]\\ t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\notin[0;1]\end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=0, y(1)=0, y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

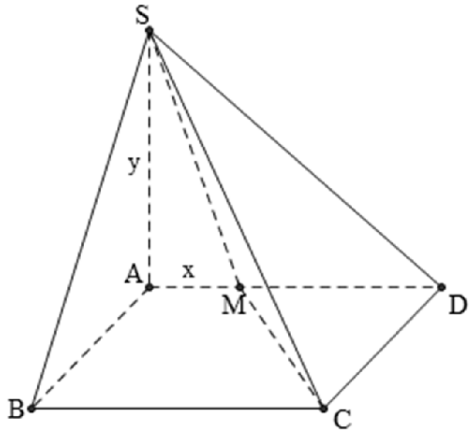
Vậy để thể tích khối chóp nhỏ nhất thì $(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$ lớn nhất bằng $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=y$ $(y>0)$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM=x$ $(0<x<a)$. Tính thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$, biết $x^2+y^2=a^2$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $S_{ABCM}=\dfrac{1}{2}(AM+BC).AB=\dfrac{1}{2}(x+a).a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCM$ là $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCM}=\dfrac{1}{3}y.\dfrac{1}{2}(ax+a^2)=\dfrac{a}{6}(xy+ay)$

$\Leftrightarrow V^2=\frac{a^2}{36}y^2(x+a)^2 \Leftrightarrow \frac{36}{a^2}V^2=(a^2-x^2)(x+a)^2$

Xét hàm số $f(x)=(a^2-x^2)(x+a)^2$ trên khoảng $(0;a)$.

Ta có: $f'(x)=-2x(x+a)^2+2(a^2-x^2)(x+a)=2(x+a)^2(a-2x)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$ (Vì $x>0$)

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{a}{2}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f\left(\frac{a}{2}\right)$	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra: $\max\limits_{(0;a)} f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=\left(a^2-\frac{a^2}{4}\right)\left(\frac{a}{2}+a\right)^2=\frac{27a^4}{16}$

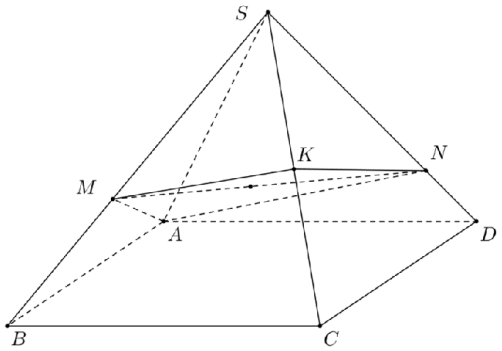
Vậy $V_{\max}=\sqrt{\frac{a^2}{36}.\max\limits_{(0;a)} f(x)}=\sqrt{\frac{a^2}{36}.\frac{27a^4}{16}}=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 29. **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trung điểm SC. Mặt phẳng chứa AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử $x=\frac{SM}{SB}$, $y=\frac{SN}{SD}$.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}V$.

$V_{S.AMKN}=V_{S.AMK}+V_{S.AKN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC}.V_{S.ABC}+\frac{SK}{SC}.\frac{SN}{SD}.V_{S.ACD}=\frac{1}{2}x.\frac{1}{2}V+\frac{1}{2}y.\frac{1}{2}V=\frac{1}{4}V.(x+y)$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{1}{4}(x+y)$.

Mặt khác, $V_{S.AMKN}=V_{S.AMN}+V_{S.KMN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.V_{S.ABD}+\frac{SK}{SC}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SD}.V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_1==\frac{1}{2}xy.V+\frac{1}{2}xy.\frac{1}{2}V=\frac{3xy}{4}V\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{3xy}{4}.$

Do đó $\frac{1}{4}(x+y)=\frac{3}{4}xy\Rightarrow x+y=3xy$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $3xy=x+y\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\geq\frac{2}{3}\Rightarrow xy\geq\frac{4}{9}$

Do đó $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}xy\geq\frac{3}{4}.\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y=3xy\\x=y\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{2}{3}.$

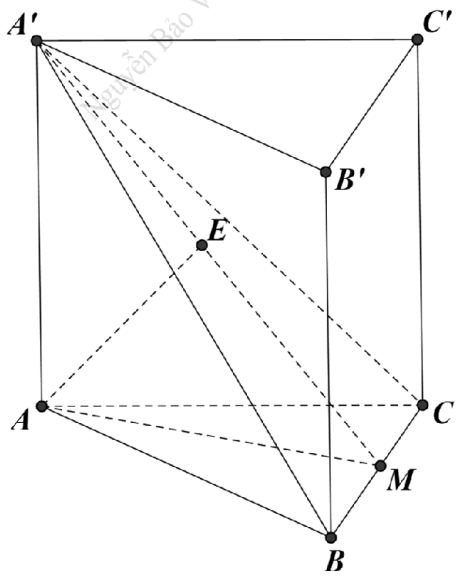
Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$ là $\frac{1}{3}$.

Câu 30. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi φ là góc giữa BC' và mặt phẳng $(A'BC)$. Khi $\sin\varphi$ đạt giá trị lớn nhất, tính thể tích khối lăng trụ đã cho?

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt[4]{12}a^3}{4\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D



Đặt $AA'=x\ (x>0)$

Gọi $h=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=d\left(C',\left(A'BC\right)\right).$

Dựng $AM\perp BC,\ AE\perp A'M\Rightarrow h=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=d\left(C',\left(A'BC\right)\right)=AE=\frac{A'A.MA.}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}$

Khi đó ta có $h=\frac{a\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+3a^2}}$ và $BC'=\sqrt{a^2+x^2}.$

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{h}{BC'} = \dfrac{a\sqrt{3}x}{\sqrt{4x^2+3a^2}\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\dfrac{\left(4x^2+3a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2}}}$

Ta có $\sin\varphi$ lớn nhất khi $\dfrac{\left(4x^2+3a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2}$ nhỏ nhất

Mà $\dfrac{\left(4x^2+3a^2\right)\left(x^2+a^2\right)}{x^2} = 4x^2 + \dfrac{3a^4}{x^2} + 7a^2 \ge 4a^2\sqrt{3} + 7a^2$ khi

Dấu bằng $4x^2 = \dfrac{3a^4}{x^2} \Rightarrow x = a\sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$, khi đó thể tích khối lăng trụ bằng $\dfrac{\sqrt[4]{27}a^3}{4\sqrt{2}}$.

---------- HẾT ----------

Nguyễn Bảo Vương