

Ngày thi : Thứ Bảy 4/12/2021

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

**Bài 1. (5 điểm)** Tìm hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa

$$f(xf(y) + f(x)) = f(x) + xy + x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Bài 2. (5 điểm)** Cho dãy số  $(u_n)$  thỏa  $u_1 = 2, u_2 = 1$  và  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n u_{n-1}}{n}}$  với mọi  $n \geq 2$ .

Xét dãy số  $(v_n)$  xác định bởi  $v_n := u_1 + u_2 + \dots + u_n, \forall n \geq 1$ . Chứng minh dãy  $(v_n)$  hội tụ.

**Bài 3. (5 điểm)** Cho  $p$  là số nguyên tố,  $n$  là số nguyên dương thỏa  $2 < p < n$ . Gọi  $A$  là tập hợp các đa thức  $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  có tất cả các hệ số thuộc tập  $\{1; 2; \dots; n!\}$  và  $P(m)$  chia hết cho  $p$  với mọi số nguyên dương  $m$ .

a) Chứng minh tổng  $a_1 + a_p + a_{2p-1} + \dots + a_{1+k(p-1)}$  chia hết cho  $p$  với mọi  $k = \left[ \frac{n-1}{p-1} \right]$

(xem  $a_n = 1$ ), kí hiệu  $[x]$  là phần nguyên của  $x$ .

b) Tính số phần tử của  $A$  theo  $n$  và  $p$ .

**Bài 4. (5 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  có  $(I)$  là đường tròn nội tiếp. Một đường thẳng qua  $A$  cắt  $(I)$  tại  $M, N$ . Gọi  $T$  là giao điểm của các tiếp tuyến với  $(I)$  tại  $M, N$ .

a) Chứng minh rằng nếu  $AT \parallel BC$  thì  $MN$  đi qua trung điểm  $K$  của  $BC$ .

b) Gọi  $D$  là tiếp điểm của  $(I)$  với  $AB$  và  $E$  là giao điểm của  $DM$  với  $AC$ . Trên  $EN$  lấy điểm  $F$  thỏa  $TF$  vuông góc  $AI$ . Chứng minh rằng khi đường thẳng  $AMN$  thay đổi, giao điểm  $P$  của  $MF$  và  $DN$  thuộc một đường thẳng cố định.

HẾT

Ngày thi : Thứ Ba 7/12/2021

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian giao đề

**Bài 1. (5 điểm)** Cho  $n$  số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của chúng là 1. Ta xây dựng

$$y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, y_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Đặt  $T = \max_k y_k - \min_k y_k$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $T$ .

**Bài 2. (5 điểm)** Cho tập  $X = \{1; 2; \dots; 20\}$ . Tập con  $A$  của  $X$  được gọi là tập “tránh 2” nếu với mọi  $x, y$  thuộc  $A$  thì  $|x - y|$  khác 2. Tìm số các tập con “tránh 2” của  $X$  có 5 phần tử.

**Bài 3. (5 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $D$  trên cạnh  $BC$ . Các đường tròn  $(ABD)$ ,  $(ACD)$  lần lượt cắt  $AC, AB$  tại  $E, F$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn  $(AEF)$ .

- Chứng minh  $ID$  vuông góc  $BC$ .
- Gọi  $H$  là giao điểm của  $ID$  với  $EF$  và  $K$  là điểm thỏa mãn  $\angle HBK = \angle HCK = 90^\circ$ . Các đường tròn  $(IBK)$ ,  $(ICK)$  lần lượt cắt  $IC, IB$  tại  $M, N$ . Chứng minh tâm  $J$  của đường tròn  $(IMN)$  thuộc trung trực  $BC$ .

**Bài 4. (5 điểm)** Cho  $p$  là số nguyên tố. Với mọi số nguyên  $a$ , đặt

$$q := 1 + a + a^2 + \dots + a^{p-1}.$$

Chứng minh  $(1 - a)(1 - a^2) \dots (1 - a^{p-1}) - p$  chia hết cho  $q$ .

HẾT