SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TỔ TOÁN TRƯỜNG THPT NGUYỄN DU

TOÁN 10

ĐỀ CƯƠNG

Học Kì 1

Học Sinh: ……………………

Năm học 2021-2022

MỤC LỤC

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP 1

BÀI 1. MỆNH ĐỀ 1

1.1. Tóm tắt lý thuyết 1

1.2. Phương pháp giải toán 2

BÀI 2. TẬP HỢP 9

2.1. Tóm tắt lý thuyết 9

2.2. Các dạng toán và bài tập 10

BÀI 3. Các phép toán trên tập hợp 13

3.1. Tóm tắt lý thuyết 13

3.2. Các dạng toán và bài tập 13

BÀI 4. Các tập hợp số 18

4.1. Tóm tắt lý thuyết 18

4.2. Các dạng toán và bài tập 19

CHƯƠNG 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 23

BÀI 1. Đại cương về hàm số 23

1.1. Tóm tắt lý thuyết 23

1.2. Dạng toán và bài tập 24

BÀI 2. Hàm số bậc nhất 31

2.1. Tóm tắt lý thuyết 31

2.2. Dạng toán và bài tập 33

BÀI 3. Hàm số bậc hai 37

3.1. Tóm tắt lý thuyết 37

3.2. Dạng toán và bài tập 38

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH 41

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH 41
1.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 41
1.2. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP 42
BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 43
2.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 43
2.2. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP 44
BÀI 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN 57
3.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 57
3.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 1 59
CHƯƠNG 4. BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH . 61
BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC 61
1.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 61
1.2. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP 62
HÌNH HỌC
CHƯƠNG 1. VECTƠ 73
BÀI 1. VEC-TƠ 73
1.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 73
1.2. CÁC VÍ DỤ 74
BÀI 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ 80
2.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 80
2.2. CÁC DẠNG TOÁN 81
BÀI 3. TÍCH CỦA VÉC-TƠ VỚI MỘT SỐ 88
3.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 88
3.2. CÁC DẠNG TOÁN 88
BÀI 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ 99
4.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 99

CHƯƠNG 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG 116

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC 116

1.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 116

BÀI 2. TÍCH VÔ HƯỚNG 119

2.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 119

2.2. CÁC DẠNG TOÁN 120

BÀI 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 125

3.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT 125

3.2. CÁC DẠNG TOÁN 126

PHẦN

ĐẠI SỐ

CHƯƠNG 1

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

BÀI 1 MỆNH ĐỀ

1.1 Tóm tắt lý thuyết

1. **Mệnh đề:**

Định nghĩa 1.
Mệnh đề là một khẳng định hoặc là **đúng** hoặc là **sai** và không thể vừa đúng vừa sai.

Ví dụ: "$2+3=5$" là MĐ đúng; "$\sqrt{2}$ là số hữu tỷ" là MĐ sai; "Mệt quá" không phải là MĐ.

2. **Mệnh đề chứa biến**
Ví dụ: Cho khẳng định " $2+n=5$ ". Khi thay mỗi giá trị cụ thể của n vào khẳng định trên thì ta được một mệnh đề. Khẳng định có đặc điểm như thế được gọi là mệnh đề chứa biến.

3. **Phủ định của một mệnh đề**
Phủ định của mệnh đề P ký hiệu là $\overline{P}$ là một mệnh đề thỏa mãn tính chất nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, còn nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.
Ví dụ: P: "3 là số nguyên tố" thì $\overline{P}$: "3 không là số nguyên tố".

4. **Mệnh đề kéo theo**
Mệnh đề "Nếu P thì Q " gọi là mệnh đề kéo theo, ký hiệu $P \Rightarrow Q$.
Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng đồng thời Q sai.
Ví dụ: Mệnh đề "$1>2$" là mệnh đề sai.
Mệnh đề "$\sqrt{3}<2 \Rightarrow 3<4$" là mệnh đề đúng.
Trong mệnh đề $P \Rightarrow Q$ thì
   - P: gọi là giả thiết (hay P là điều kiện đủ để có Q)
   - Q: gọi là kết luận (hay Q là điều kiện cần để có P)

5. **Mệnh đề đảo - hai mệnh đề tương đương**
Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

Chú ý

Mệnh đề đảo của một đề đúng chưa hẳn là một mệnh đề đúng.

Nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương nhau. Ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$.
Cách phát biểu khác:

- P khi và chỉ khi Q.
- P là điều kiện cần và đủ để có Q.
- Q là điều kiện cần và đủ để có P.

6. **Ký hiệu $\forall, \exists$: ($\forall$ đọc là với mọi; $\exists$ đọc là tồn tại)**
Ví dụ: P: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$": đúng Q: "$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 - 3n + 1 = 0$": sai

7. **Phủ định của mệnh đề với mọi, tồn tại**
Mệnh đề $P: \forall x \in X, T(x)$ có mệnh đề phủ định là $\exists x \in X, \overline{T(x)}$.

Chú ý

- Phủ định của "$a < b$" là "$a \geq b$".
- Phủ định của "$a = b$" là "$a \neq b$".
- Phủ định của "$a > b$" là "$a \leq b$".
- Phủ định của "a chia hết cho b" là "a không chia hết cho b".

Ví dụ: $P: \exists n \in \mathbb{Z}, n < 0$ phủ định của P là $\overline{P}: \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.

8. **Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học**

- Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng: "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là các mệnh đề chứa biến, X là tập hợp nào đó.
- Cho định lý: "$\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1), ($P(x)$) là giả thuyết, $Q(x)$ là kết luận.
- $P(x)$ là **điều kiện đủ** để có $Q(x)$; $Q(x)$ là **điều kiện cần** để có $P(x)$.
- Mệnh đề: "$\forall x \in X, Q(x) \Rightarrow P(x)$" (2) là mệnh đề đảo của định lí (1). Nếu mệnh đề (2) đúng thì nó được gọi là **định lí đảo** của định lí (1). Khi đó định lí (1) gọi là **định lí thuận**. Định lí thuận và đảo có thể viết gộp thành định lí: "$\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)$", đọc là $P(x)$ là điều kiện cần và đủ để có $Q(x)$.

1.2 Phương pháp giải toán

DẠNG 1. Xác định mệnh đề, tính đúng sai của mệnh đề

Căn cứ trên định nghĩa mệnh đề và tính đúng sai của chúng. Lưu ý rằng:

- $P, \overline{P}$ không cùng tính đúng sai.
- $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai.

- $P \Leftrightarrow O$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.
- $\forall x \in X, P(x)$ đúng khi $P(X_0)$ đúng với mọi $x_0 \in X$
- $\exists x \in X, P(x)$ đúng khi có $x_0 \in X$ sao cho $P(X_0)$ đúng.

Chú ý

1) Số nguyên tố là số tự nhiên chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Ngoài ra nó không chia hết cho bất cứ số nào khác. Số 0 và 1 không được coi là số nguyên tố. Các số nguyên tố từ 2 đến 100 là 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41;...
2) Ước và bội: Cho hai số $a, b \in \mathbb{N}$. Nếu a chia hết b, thì ta gọi a là bội của b và b là ước của a.
   - Ước chung lớn nhất (ƯCLN) của 2 hay nhiều số tự nhiên là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.
   - Bội chung nhỏ nhất (BCNN) của 2 hay nhiều số tự nhiên là số nhỏ nhất trong tập hợp các bội chung của các số đó.

Ví dụ 1.

Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Cố lên, sắp đến rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là 180°.

d) Số 5 là số nguyên dương.

A 4. **B** 1. **C** 3. **D** 2.

Lời giải.

....

Ví dụ 2.

Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay sai?

a) $\sqrt{2}$ không là số hữu tỉ.

b) Iran là một nước thuộc châu Âu phải không ?

c) Phương trình $x^2+5x+6=0$ vô nghiệm.

d) Chứng minh bằng phản chứng khó thật!

e) $x+4$ là một số âm.

f) Nếu n là số chẵn thì n chia hết cho 4.

g) Nếu chia hết cho 4 thì n là số chẵn.

h) $\exists n \in \mathbb{N}, n^3-n$ không là bội của 3.

i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-x+1>0$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

DẠNG 2. Xác định mệnh đề đảo, mệnh đề phủ định của một mệnh đề

- Mệnh đề phủ định của P là "không phải P".
- Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in X, P(x)$" là "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".
- Mệnh đề phủ định của "$\exists x \in X, P(x)$" là "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".
- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Ví dụ 3.

Tìm mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo đúng hay sai: "Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau".

Lời giải.

....

Ví dụ 4.

Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai:

a) $P = "\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0"$.

b) $Q =$ "Có một tam giác không có góc nào lớn hơn $60°$".

Lời giải.

....

....

DẠNG 3. Phát biểu định lí, định lí đảo dạng điều kiện cần, điều kiện đủ

- Một định lí thường có dạng $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Xác định $P(x), Q(x)$.
- Lấy $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng, chứng minh $Q(x)$ đúng.
- $P(x)$là điều kiện đủ để có $Q(x)$ hay $Q(x)$ là điều kiện cần để có $P(x)$.

Ví dụ 5.

Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" phát biểu các định lí sau:

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

b) Nếu $a+b>0$ thì ít nhất có một số a hay b dương.

Lời giải.

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng? Giải thích?

a) P :“$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$". sai

b) P :“$\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$". đúng

c) P :“$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$". sai

d) P :“$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \leq 1$". đúng

e) P :“$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$". sai

f) P :“$\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ". sai

Bài 2. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định?

Học sinh cần nhớ nguyên tắc phủ định của một mệnh đề (dòng trên phủ định với dòng dưới)

Mệnh đề P	Có	$>$	$<$	$=$	Chia hết	$\exists$
Mệnh đề phủ định $\overline{P}$	Không	$\leq$	$\geq$	$\neq$	Không chia hết	$\forall$

a) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$". 🔑 $\overline{P}$ đúng

b) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$". 🔑 $\overline{P}$ sai

c) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$". 🔑 $\overline{P}$ đúng

d) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$". 🔑 $\overline{P}$ sai

e) P : "$\exists x \in \mathbb{Q} : 4x^2 - 1 = 0$". 🔑 $\overline{P}$ sai

f) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$". 🔑 $\overline{P}$ sai

g) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 2 < 0$". 🔑 $\overline{P}$ sai

h) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 = (x-1)$". 🔑 $\overline{P}$ sai

i) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x < 2$ hoặc $x \geq 7$". 🔑 $\overline{P}$ sai

j) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5 \geq 0$". 🔑 $\overline{P}$ đúng

k) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x < \dfrac{1}{x}$". 🔑 $\overline{P}$ sai

l) P : "$\forall x \in \mathbb{R}, x < \dfrac{1}{x}$". 🔑 $\overline{P}$ đúng

Bài 3. Điền vào chỗ trống từ nối "và" hay "hoặc" để được mệnh đề đúng?

1) $\pi < 4 \ldots \pi > 5$. 🔑 hoặc

2) $a \cdot b = 0$ khi $a = 0 \ldots b = 0$. 🔑 hoặc

3) $a \cdot b \neq 0$ khi $a \neq 0 \ldots b \neq 0$. 🔑 và

4) $a \cdot b > 0$ khi $a > 0 \ldots b > 0 \ldots a < 0 \ldots b < 0$. 🔑 và/hoặc/và

5) Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 ... cho 3. 🔑 và

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

(A) Số π có phải là số nguyên không?.

(B) Số 4 là một số nguyên tố.

(C) Tam giác đều có 3 góc bằng nhau và bằng $60°$ phải không?.

(D) $a^2 + b^2 = c^2$.

Câu 2. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) 10 chia hết cho 2.
(B) 2 là một ước số của 10.
(C) 2 chia hết cho 10.
(D) 2 và 10 là hai số chẵn.

Câu 3. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

(A) 15 là số nguyên tố.
(B) $a = b + c$.
(C) $x^2 + x = 0$.
(D) $2n + 1$ chia hết cho 3.

Câu 4. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "14 là hợp số" là mệnh đề

(A) 14 là số nguyên tố.
(B) 14 chia hết cho 2.
(C) 14 không phải là hợp số.
(D) 14 chia hết cho 7.

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) 20 chia hết cho 5.
(B) 5 chia hết cho 20.
(C) 20 là bội số của 5.
(D) 5 chia hết 20.

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $5 + 4 < 10$.
(B) $5 + 4 > 10$.
(C) $\sqrt{2} - 1 < 0$.
(D) $5 + 4 \geq 10$.

Câu 7. Trong các câu sau, câu nào **không phải** là mệnh đề?

(A) $5 + 2 = 8$.
(B) $-2 \leq 0$.
(C) $4 - \sqrt{17} > 0$.
(D) $5 + x = 2$.

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu "33 là hợp số" thì "15 chia hết cho 25".

(B) Nếu "7 là số nguyên tố" thì "8 là bội số của 3".

(C) Nếu "20 là hợp số" thì "24 chia hết cho 6".

(D) Nếu "$3+9=12$" thì "$4>7$".

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

(A) Nếu a và b chia hết cho c thì $a+b$ chia hết cho c.

(B) Nếu hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

(C) Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

(D) Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

Câu 10. Trong các mệnh đề tương đương sau đây, mệnh đề nào **sai**?

(A) n là số nguyên lẻ khi và khi n^2 là số lẻ.

(B) n chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của n chia hết cho 3.

(C) $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $AC=BD$.

(D) ABC là tam giác đều khi và chỉ khi $AB=AC$ và $\widehat{A}=60°$.

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) $-\pi<-2 \Leftrightarrow \pi^2<4$.

(B) $\pi<4 \Leftrightarrow \pi^2<16$.

(C) $\sqrt{23}<5 \Rightarrow 2\sqrt{23}<2\cdot 5$.

(D) $\sqrt{23}<5 \Rightarrow (-2)\sqrt{23}>(-2)\cdot 5$.

Câu 12. Xét câu $P(n)$: "n chia hết cho 12". Với giá trị nào của n thì $P(n)$ là mệnh đề đúng?

(A) 48. (B) 4. (C) 3. (D) 88.

Câu 13. Với giá trị nào của biến số x sau đây thì mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^2-3x+2=0$" trở thành một mệnh đề đúng?

(A) 0. (B) 1. (C) -1. (D) -2.

Câu 14. Mệnh đề chứa biến: "$x^3-3x^2+2x=0$" đúng với giá trị nào của x?

(A) $x=0;\ x=2$. (B) $x=0;\ x=3$. (C) $x=0;\ x=2;\ x=3$. (D) $x=0;\ x=1;\ x=2$.

Câu 15. Cho mệnh đề P: "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2-1\neq 0$", Q: "$\exists n\in\mathbb{Z}, n=n^2$". Xét tính đúng, sai của hai mệnh đề P,Q.

(A) P đúng và Q sai. (B) P sai và Q đúng. (C) P,Q đều đúng. (D) P,Q đều sai.

Câu 16. Với số thực x bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\forall x, x^2\le 16 \Leftrightarrow x\le \pm 4$.

(B) $\forall x, x^2\le 16 \Leftrightarrow -4\le x\le 4$.

(C) $\forall x, x^2\le 16 \Leftrightarrow x\le -4, x\ge 4$.

(D) $\forall x, x^2\le 16 \Leftrightarrow -4<x<4$.

Câu 17. Với số thực x bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\forall x, x^2>5 \Rightarrow x>\sqrt{5}$ hoặc $x<-\sqrt{5}$.

(B) $\forall x, x^2>5 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$.

(C) $\forall x, x^2>5 \Rightarrow x>\pm\sqrt{5}$.

(D) $\forall x, x^2>5 \Rightarrow x\ge\sqrt{5}$ hoặc $x\le -\sqrt{5}$.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\forall x\in\mathbb{R}, x\le x^2$.

(B) $\forall x\in\mathbb{R}, |x|<3 \Leftrightarrow x<3$.

(C) $\forall n\in\mathbb{N}, n^2+1$ chia hết cho 3.

(D) $\exists a\in\mathbb{Q}, a^2=2$.

Câu 19. Với giá trị nào của x mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$2x^2-1<0$" là mệnh đề đúng?

(A) 0. (B) 5. (C) 1. (D) $\sqrt{2}$.

Câu 20. Cho mệnh đề $P(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là

A $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$. **B** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$. **C** $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$. **D** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Câu 21. Trong các câu sau, câu nào đúng?

A Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 > 0$".

B Phủ định của mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4" là mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 4".

C Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \neq x - 1$" là mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 = x - 1$".

D Phủ định của mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$" là mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n$".

Câu 22. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$: "$x^2 + 3x + 1 > 0$ với mọi x" là

A Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 > 0$. **B** Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 \leq 0$.

C Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 = 0$. **D** Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 < 0$.

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. C	5. B	6. A	7. D	8. C	9. C	10. C
11. A	12. A	13. B	14. D	15. B	16. B	17. A	18. A	19. A	20. D
21. B	22. B								

BÀI 2
TẬP HỢP

2.1 Tóm tắt lý thuyết

1) **Tập hợp**

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa mà chỉ mô tả.
- Có hai cách xác định tập hợp:
  - Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{\dots;\dots;\dots;\dots\}$.

Ví dụ 1.

$X=\{0;1;2;3;4\}$.

  - Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

Ví dụ 2.

$X=\left\{n\in\mathbb{Z}:3<n^2<36\right\}$.

- Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

Ví dụ 3.

Phương trình $x^2+x+1=0$ không có nghiệm. Ta nói tập hợp các nghiệm của phương trình này là tập hợp rỗng, tức $S=\varnothing$.

2) **Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau**

- Tập hợp con: $A\subset B\Leftrightarrow(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$
  - $A\subset A,\forall A$ và $\varnothing\subset A,\forall A$.
  - $A\subset B,B\subset C\Rightarrow A\subset C$.
- Tập hợp bằng nhau $A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset B\\B\subset A.\end{cases}$
- Nếu tập A có n phần tử thì A có 2^n tập con.

3) **Một số tập hợp con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$.**
Tập hợp con của $\mathbb{R}:\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Trong đó

- $\mathbb{N}^*$: là tập hợp số tự nhiên không có số 0.
- $\mathbb{N}$: là tập hợp số tự nhiên.

- $\mathbb{Z}$: là tập hợp số nguyên.
- $\mathbb{Q}$: là tập hợp số hữu tỷ.
- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$: là tập hợp số thực.

2.2 Các dạng toán và bài tập

Ví dụ 4.

Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \left(2x^2 - 5x + 3\right)\left(4 - x^2\right) = 0\right\}$.

Lời giải.

....

....

....

....

Ví dụ 5.

Viết tập hợp $A = \{2; 6; 12; 20; 30\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Lời giải.

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó?

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 20$ và x chia hết cho $3\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 \le x < 10\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -\sqrt{7} < x < \sqrt{15}\}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{N} : 14 - 3x > 0\}$.

e) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : 15 - 2x > 0\}$.

f) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : 20 - 2x \ge 0\}$.

g) $A = \{x \in \mathbb{N}^* : |x - 1| \le 3\}$.

h) $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x + 2| \le 1\}$.

i) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x = \dfrac{1}{2^n} \ge \dfrac{1}{32}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

j) $A = \left\{x : x = \dfrac{1}{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ và } x \ge \dfrac{1}{8}\right\}$.

k) $A = \{x : x = 4k, k \in \mathbb{Z}$ và $-4 \le x < 12\}$.

l) $A = \left\{x : x = 2n^2 - 1, \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } x < 9\right\}$.

m) $A = \{x \in \mathbb{N} : x$ là số nguyên tố và $x < 11\}$.

n) $A = \{x \in \mathbb{N} : x$ là bội chung của 4 và 6$\}$.

Bài 2. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \left(x^2 - 4x + 3\right)(2x + 1) = 0\right\}$.

Bài 3. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : 2x^3 - 7x^2 - 5x = 0\right\}$.

Bài 4. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{N}:\left(x^4-8x^2-9\right)\left(x^2-16\right)=0\right\}$.

Bài 5. Viết tập hợp $A=\{2;3;5;7\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Bài 6. Viết tập hợp $A=\left\{1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Bài 7. Viết tập hợp $A=\{9;36;81;144\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Bài 8. Viết tập hợp $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{12};\frac{1}{20};\frac{1}{30}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Bài 9. Viết tập hợp $A=\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\frac{1}{81};\frac{1}{234}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Bài 10. Viết tập hợp $A=\{3;6;9;12;15\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Bài 11. Viết tập hợp $A=\{3;6;12;24;48\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $A\neq\{A\}$. B. $\varnothing\subset A$. C. $A\subset A$. D. $A\in A$.

Câu 2. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "7 là số tự nhiên" ?

A. $7\subset\mathbb{N}$. B. $7\in\mathbb{N}$. C. $7<\mathbb{N}$. D. $7\le\mathbb{N}$.

Câu 3. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "$\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ"?

A. $\sqrt{2}\neq\mathbb{Q}$. B. $\sqrt{2}\not\subset\mathbb{Q}$. C. $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. D. $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

Câu 4. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2+x+1=0\right\}$.

A. $X=\{\varnothing\}$. B. $X=\varnothing$. C. $X=\{0\}$. D. $X=0$.

Câu 5. Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0\right\}$. Các phần tử của tập A là

A. $A=\{1\}$. B. $A=\{-1;1\}$. C. $A=\left\{\pm\sqrt{2};\pm1\right\}$. D. $A=\{-1\}$.

Câu 6. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X=\left\{x\in\mathbb{N}:(x+2)\left(2x^2-5x+3\right)=0\right\}$

A. $X=\{-2;1\}$. B. $X=\{1\}$. C. $X=\left\{-2;1;\frac{3}{2}\right\}$. D. $X=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 7. Các phần tử của tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid 2x^2-5x+3=0\right\}$ là

A. $A=\{0\}$. B. $A=\{1\}$. C. $A=\left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $A=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 8. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid x^4-6x^2+8=0\right\}$.

A. $X=\{-2;2\}$. B. $X=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$. C. $X=\{\sqrt{2};2\}$. D. $X=\{-2;-\sqrt{2};\sqrt{2};2\}$.

Câu 9. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid\left(x^2-x-6\right)\left(x^2-5\right)=0\right\}$.

A. $X=\{\sqrt{5};3\}$. B. $X=\{-\sqrt{5};-2;\sqrt{5};3\}$.

C. $X=\{-2;3\}$. D. $X=\{x\in\mathbb{Q}\mid-\sqrt{5}\le x\le3\}$.

Câu 10. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $M=\{x\in\mathbb{N}$ sao cho $\sqrt{x}$ là ước của 8}

A. $M=\{1;2;4;8\}$. B. $M=\{0;1;2;4;8\}$. C. $M=\{1;4;16;64\}$. D. $M=\{0;1;4;16;64\}$.

Câu 11. Số phần tử của tập hợp $A=\left\{k^2+1|k\in\mathbb{Z},|k|\le2\right\}$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 12. Cho tập hợp $X=\{0;1;2;a;b\}$. Số phần tử của tập X là

A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.

Câu 13. Cho tập hợp $X = \{2;3;4\}$. Tập X có bao nhiêu tập hợp con?

(A) 3. (B) 6. (C) 8. (D) 9.

Câu 14. Tập $A = \{0;2;4;6\}$ có bao nhiêu tập hợp con có đúng hai phần tử?

(A) 4. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. C	4. B	5. B	6. B	7. D	8. A	9. C	10. C
11. C	12. C	13. C	14. B						

BÀI 3
CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

3.1 Tóm tắt lý thuyết

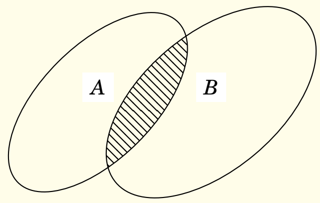
1) **Giao của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B.

Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch trong hình).

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

(**Cách nhớ:** giao là lấy phần chung)



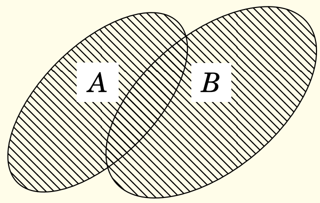
2) **Hợp của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B.

Kí hiệu: $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$ hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$.

(**Cách nhớ:** hợp là lấy hết)



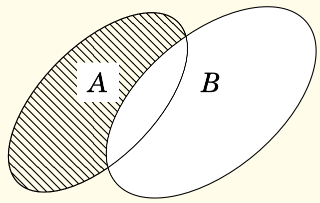
3) **Hiệu của hai tập hợp**

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B.

Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$ hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$.

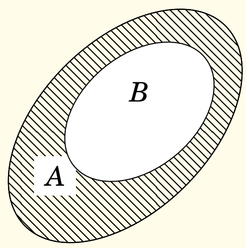
(Cách nhớ: hiệu thuộc A mà không thuộc B)



4) **Phần bù của hai tập hợp**

Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A.

Kí hiệu $\mathrm{C}_A B = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).



3.2 Các dạng toán và bài tập

Ví dụ 1.

Cho $A = \{1;2;4;5;6\}$ và $B = \{1;2;5;7;9;11\}$.
Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp.

1) $A \cap B =$

2) $A \cup B =$

3) $A \setminus B =$

4) $B \setminus A =$

5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$

6) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $A = \{1;2;3;4;5\}$ và $B = \{1;3;5;7;9;11\}$.
Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp.

1) $A \cap B =$ $\{1;3;5\}$

2) $A \cup B =$ $\{1;2;3;4;5;7;9;11\}$

3) $A \setminus B =$ $\{2;4\}$

4) $B \setminus A =$ $\{2;4;7;9;11\}$

5) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$ $\{2;4;7;9;11\}$

6) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$ $\{2;4;7;9;11\}$

Bài 2. Cho $A = \{1;2;3;4\}$, $B = \{2;4;6;8\}$ và $C = \{3;4;5;6\}$. Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp.

1) $A \cup B =$ $\{1;2;3;4;6;8\}$

2) $B \cup C =$ $\{2;3;4;5;6;8\}$

3) $C \cup A =$ $\{1;2;3;4;5;6\}$

4) $A \cap B =$ $\{2;4\}$

5) $B \cap C =$ $\{4;6\}$

6) $C \cap A =$ $\{3;4\}$

7) $A \setminus B =$ $\{1;3\}$

8) $B \setminus C =$ $\{2;8\}$

9) $C \setminus A =$ $\{5;6\}$

10) $(A \cup B) \cap C =$ $\{3;4;6\}$

Bài 3. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

1) $A \cap B =$ $\{0;1\}$

2) $A \cup B =$ $\{-1;0;1;2;3\}$

3) $A \setminus B =$ $\{2;3\}$

4) $B \setminus A =$ $\{-1\}$

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \left(x^2 - 4\right)\left(2x^2 - 5x\right) = 0\right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6$ và x là số chẵn$\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

1) $A \cap B =$ $\{2\}$

2) $A \cup B =$ $\{-2;0;2;4;6\}$

3) $A \setminus B =$ $\{-2;0\}$

4) $B \setminus A =$ $\{4;6\}$

Bài 5. Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{N} \big| 1 \leq x < 7\}$, $A = \left\{x \in \mathbb{N} \big| \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) = 0\right\}$, $B = \{2;3;5\}$. Hãy xác định các tập hợp sau

1) $C_E A =$ $\{1;2;4;6\}$

2) $C_E B =$ $\{1;4;6\}$

Bài 6. Cho các tập hợp $A = \{2;3;5\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(x^2 - 9\right)\left(x^2 - x - 6\right) = 0\right\}$ và $E = \{x \in \mathbb{Z} \big| |x| \leq 3\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

1) $A \cap B =$ $\{3\}$

2) $A \cup B =$ $\{-3;-2;2;3;5\}$

3) $A \setminus B =$ $\{2;5\}$

4) $B \setminus A =$ $\{-3;-2\}$

5) $A \cap E =$ $\{2;3\}$

6) $B \cap E =$ $\{-3;-2;3\}$

7) $(A \cup B) \setminus (A \cap E) =$ $\{-3;-2;5\}$

8) $C_E(A \cap E) =$ $\{-3;-2;-1;0;1\}$

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \dfrac{3x+8}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} \| x+2 | < 5\}$. Hãy thực hiện các phép toán sau

1) $A \cap B =$ $\{-6;-2;0\}$

2) $A \cup B =$ $\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;4\}$

3) $A \setminus B =$ $\{4\}$

4) $B \setminus A =$ $\{-5;-4;-3;-1;1;2\}$

Bài 8. Hãy xác định các tập A và B thỏa mãn đồng thời điều kiện

1) $A \cap B = \{1;2;3\}$, $A \setminus B = \{4;5\}$ và $B \setminus A = \{6;9\}$.

2) $A \cap B = \{0;1;2;3;4\}$, $A \setminus B = \{-3;-2\}$ và $B \setminus A = \{6;9;10\}$.

3) $A \setminus B = \{1;5;7;8\}$, $A \cap B = \{3;6;9\}$ và $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} | 0 < x \le 10\}$.

Bài 9. Cho tập hợp $X = \{1;2;3;4;5;6\}$ và hai tập hợp A, B thỏa mãn $A \subset X$, $B \subset X$ sao cho $A \cup B = \{1;2;3;4\}$, $A \cap B = \{1;2\}$. Tìm các tập C sao cho $C \cup (A \cap B) = A \cup B$? $\{3;4\}$, $\{1;3;4\}$, $\{2;3;4\}$, $\{1;2;3;4\}$

Bài 10. Mỗi học sinh lớp 10C đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả hai môn thể theo này. Hỏi lớp 10C nói trên có tất cả bao nhiêu học sinh? 35

Bài 11. Trong số 45 học sinh lớp $10A_1$ có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 20 bạn xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa học lực giỏi, vừa hạnh kiểm tốt. Hỏi

1) Lớp $10A_1$ có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng thì bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt. 25

2) Lớp $10A_1$ có bao nhiêu bạn chưa được xếp loại học lực giỏi và chưa có hạnh kiểm tốt? 20

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

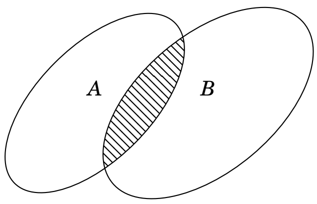
Câu 1. Cho hai tập hợp $X = \{1;2;4;7;9\}$ và $Y = \{-1;0;7;10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Câu 2.

Cho A và B là hai tập hợp bất kỳ. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên là tập hợp nào?

A. $A \cup B$. B. $B \setminus A$. C. $A \setminus B$. D. $A \cap B$.



Câu 3. Cho các tập hợp $A = \{1;2;3;4\}$ và $B = \{2;4;5;8\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$?

A. $\{1;2;3;4;5;8\}$. B. $\{1;2;3;5;8\}$. C. $\{1;2;3;4;5;6;8\}$. D. $\{1;3;4;5;8\}$.

Câu 4. Cho hai tập hợp $M = \{0;1;2;3;4\}$ và $N = \{0;2;4;6;8\}$. Khi đó tập hợp $M \cap N$ là

(A) $\{6;8\}$. (B) $\{1;3\}$. (C) $\{0;2;4\}$. (D) $\{0;1;2;3;4;6;8\}$.

Câu 5. Cho hai tập hợp $A\{a;b;1;2\}$ và $B = \{a;b;c;1;3\}$. Tập hợp $A \cap B$ là

(A) $\{a;b;1\}$. (B) $\{a;b;2\}$. (C) $\{a;b;3\}$. (D) $\{2;3;c\}$.

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x \le 3\}$ và $B = \{0;1;2;3\}$. Tập $A \cap B$ là

(A) $\{1;2;3\}$. (B) $\{-3;-3;-2;0;1;2;3\}$. (C) $\{0;1;2\}$. (D) $\{0;1;2;3\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = \{2;4;6;9\}$ và $B = \{1;2;3;4\}$. Khi đó tập hợp $A \setminus B$ là

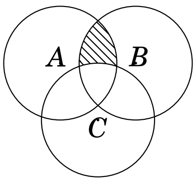
(A) $\varnothing$. (B) $\{6;9;1;3\}$. (C) $\{1;2;3;5\}$. (D) $\{6;9\}$.

Câu 8. Cho tập hợp $A = \{0;2;4;6;8\}$ và $B = \{3;4;5;6;7\}$. Tập $A \setminus B$ là

(A) $\{0;6;8\}$. (B) $\{0;2;8\}$. (C) $\{3;6;7\}$. (D) $\{0;2\}$.

Câu 9.

Các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần gạch chéo trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



(A) $A \cap B \cap C$. (B) $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

(C) $(A \cup B) \setminus C$. (D) $(A \cap B) \setminus C$.

Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$. Khi đó tập $A \cap B$ là

(A) $\{2\}$. (B) $\{4;5\}$. (C) $\{2;4\}$. (D) $\{3\}$.

Câu 11. Cho ba tập hợp $A = \{1;2;3;4;5;6;9\}$, $B = \{0;2;4;6;8;9\}$ và $C = \{3;4;5;6;7\}$. Tích các phần tử của tập hợp $A \cap (B \setminus C)$ bằng

(A) 18. (B) 11. (C) 2. (D) 7.

Câu 12. Cho hai tập hợp A và B thỏa $A \cup B = \{1;2;3;4;5\}$ và $A \cap B = \{2\}$ và $A \setminus B = \{4;5\}$. Khi đó tập hợp B có thể là

(A) $\{3\}$. (B) $\{1;2;3\}$. (C) $\{2;3\}$. (D) $\{2;5\}$.

Câu 13. Lớp $10A$ có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả hai môn và 17 học sinh không giỏi môn nào. Số học sinh của lớp $10A$ là

(A) 37. (B) 42. (C) 47. (D) 32.

Câu 14. Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp. Trong đó có 12 cán bộ phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó?

(A) 42. (B) 31. (C) 55. (D) 43.

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. C	5. A	6. D	7. D	8. B	9. D	10. A
11. A	12. B	13. A	14. D						

BÀI 4
CÁC TẬP HỢP SỐ

4.1 Tóm tắt lý thuyết

1) **Các tập hợp số đã học**

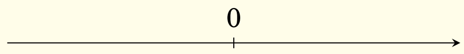
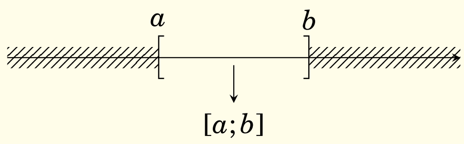
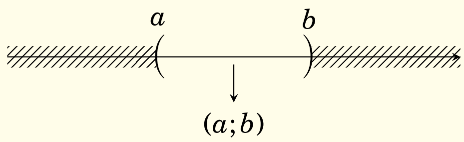
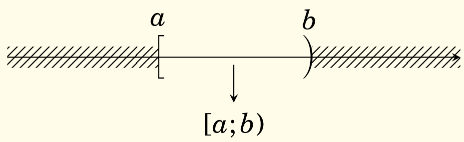
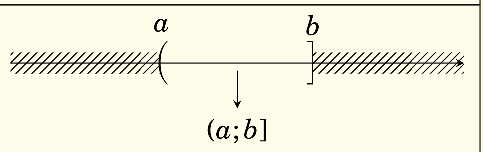
1.1 Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$.
Tập hợp các số tự nhiên khác 0: $\mathbb{N}^*$

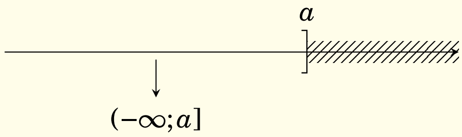
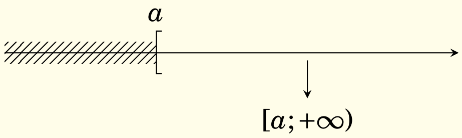
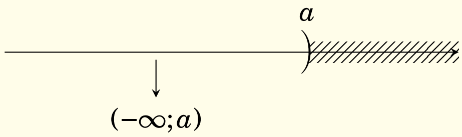
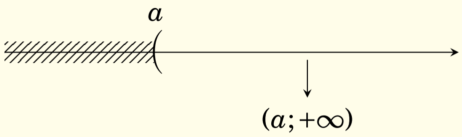
1.2 Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z}$.
Tập hợp các số $-1;-2;-3;\ldots$ là các số nguyên âm, ký hiệu $\mathbb{Z}^- = \{\ldots;-3;-2;-1\}$.
Tập hợp các số $1;2;3;\ldots$ là các số nguyên dương, ký hiệu $\mathbb{Z}^+ = \{1;2;3;\ldots\}$.
Vậy $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm.

1.3 Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.
Số hữu tỉ biểu diễn được dưới dạng một phân số $\frac{a}{b}$, trong đó $a,b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.
Số hữu tỉ còn được biểu diễn bởi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

1.4 Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.
Tập hợp các số thực gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ (căn).

2) **Các tập hợp con thường dùng của** $\mathbb{R}$.

Tên gọi	**Kí hiệu**	**Tập hợp**	**Biểu diễn trên trục số** *(Phần không bị gạch chéo)*
Tập số thực	$(-\infty;+\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn	$[a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng	$(a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng	$[a;b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
Nửa khoảng	$(a;b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	

Nửa khoảng	$(-\infty; a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
Nửa khoảng	$[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng	$(-\infty; a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
Khoảng	$(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	

Ký hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực, ký hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực.
Ta có thể viết $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ và gọi là khoảng $(-\infty; +\infty)$.
Học sinh cần phân biệt sự khác nhau giữa tập hợp và đoạn, khoảng, nửa khoảng.

4.2 Các dạng toán và bài tập

Ví dụ 1.

Hãy xác định $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số trong mỗi trường hợp sau:

1) $A = [-4; 4)$, $B = [1; 7)$.

2) $A = [3; +\infty)$, $B = (0; 4)$.

3) $A = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$, $B = [-3; 4]$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số.

1) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x>5\}$.

2) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<0$ hay $x\ge 2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-4\le x<3\}$.

3) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|<2\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x+1|<3\}$.

Bài 2. Cho hai tập hợp $A=[m;m+2)$ và $B=(5;6)$ với $m\in\mathbb{R}$.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset B$. $m\in\varnothing$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B\subset A$. $4\le m\le 5$

3) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$. $m\ge 6$, $m\le 3$

Bài 3. Cho hai tập hợp $A=(3m-1;3m+7)$ và $B=(-1;1)$ với $m\in\mathbb{R}$.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B\subset A$. $-2\le m\le 0$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$. $m\ge\frac{2}{3}$, $m\le-\frac{8}{3}$

Bài 4. Cho hai tập hợp $A=(2;7-m)$ và $B=(m-1;+\infty)$ khác rỗng $(m\in\mathbb{R})$.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset B$. $m\le 3$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$. $m\ge 4$

3) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cup B=(1;+\infty)$. $m=2$

Bài 5. Cho hai tập hợp $A=(-\infty;m)$ và $B=[3m-1;3m+3]$ khác rỗng $(m\in\mathbb{R})$.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$. $m\ge\frac{1}{2}$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B\subset A$. $m<-\frac{3}{2}$

3) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset C_{\mathbb{R}}B$. $m\ge\frac{1}{2}$

4) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $C_{\mathbb{R}}A\cap B=\varnothing$. $m<-\frac{3}{2}$

Bài 6. Cho hai tập hợp $A=(m-1;4]$ và $B=(-2;2m+2)$ khác rỗng $(m\in\mathbb{R})$.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B\ne\varnothing$. $-2<m<5$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset B$. $1<m<5$

3) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B\subset A$. $-2<m\le-1$

4) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\varnothing\ne(A\cap B)\subset(-1;3)$. $0\le m\le\frac{1}{2}$

Bài 7. Cho hai tập hợp $A=\left[m-1;\frac{m+1}{2}\right]$ và $B=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ khác rỗng $(m\in\mathbb{R})$.

1) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\subset B$. $m<-5$

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $A\cap B=\varnothing$. $-1\le m<3$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R} | 2 \le x < 5\}$. Hãy viết tập hợp M dưới dạng khoảng, đoạn?

(A) $M = [2;5)$. (B) $M = (2;5)$. (C) $M = [2;5]$. (D) $M = (2;5]$.

Câu 2. Kết quả của $[-4;1) \cup (-2;3]$ là

(A) $(-2;1)$. (B) $[-4;3]$. (C) $(-4;2]$. (D) $(1;3]$.

Câu 3. Cho hai tập hợp $A = [-2;3]$ và $B = (1;+\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

(A) $[-2;+\infty)$. (B) $(1;3]$. (C) $[1;3]$. (D) $(1;3)$.

Câu 4. Cho hai tập hợp $A = (-3;3)$ và $B = (0;+\infty)$, khi đó $A \cup B$ là

(A) $(-3;+\infty)$. (B) $[-3;+\infty)$. (C) $[-3;0)$. (D) $(0;3)$.

Câu 5. Kết quả của phép toán $(-\infty;1) \cap [-1;2)$ là

(A) $(1;2)$. (B) $(-\infty;2)$. (C) $[-1;1)$. (D) $(-1;1)$.

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = (1;9)$ và $B = [3;+\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

(A) $[1;+\infty)$. (B) $(9;+\infty)$. (C) $(1;3)$. (D) $[3;9)$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = [-1;3]$ và $B(2;5)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

(A) $B \setminus A = [3;5)$. (B) $A \cap B(2;3]$. (C) $A \setminus B = [-1;2]$. (D) $A \cup B = [-1;5]$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = (-\infty;5]$ và $B = (0;+\infty)$, khi đó $A \cap B$ là

(A) $[0;5)$. (B) $(0;5)$. (C) $(0;5]$. (D) $(-\infty;+\infty)$.

Câu 9. Cho hai tập hợp $A = (-\infty;2]$ và $B = (0;+\infty)$, khi đó $A \setminus B$ là

(A) $(-\infty;0]$. (B) $(2;+\infty)$. (C) $(0;2]$. (D) $(-\infty;0)$.

Câu 10. Phần bù của $[-2;1)$ trong $\mathbb{R}$ là

(A) $(-\infty;1]$. (B) $(-\infty;-2) \cup [1;+\infty)$. (C) $(-\infty;-2)$. (D) $(2;+\infty)$.

Câu 11. Phần bù của tập hợp $(-\infty;-2)$ trong $(-\infty;4)$ là

(A) $(-2;4)$. (B) $(-2;4]$. (C) $[-2;4)$. (D) $[-2;4]$.

Câu 12. Cho tập hợp $A = \left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

(A) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right] \cup \left(\sqrt{5};+\infty\right)$. (B) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

(C) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{5};+\infty\right)$. (D) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup \left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 13. Tập $(-\infty;-3) \cap [-5;2)$ bằng

(A) $[-5;-3)$. (B) $(-\infty;-5]$. (C) $(-\infty;-2)$. (D) $(-3;-2)$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \le 2\}$ và $B = (-1;3)$. Chọn khẳng định đúng?

(A) $A \cap B = (-1;2]$. (B) $A \setminus B = (-3;-1)$.

(C) $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty;-1) \cup [3;+\infty)$. (D) $A \cup B = \{-2;-1;0;1;2\}$.

Câu 15. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | a \ge -1\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, khi đó $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là

(A) $(-\infty;-1) \cup [3;+\infty)$. (B) $(-1;3]$. (C) $(-\infty;-1] \cup (3;+\infty)$. (D) $[-1;3)$.

Câu 16. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \le 5\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} | -2 \le x \le 4\}$. Khi đó $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$ bằng

(A) $[-2;3)$. (B) $[3;5]$. (C) $(-\infty;1]$. (D) $[-2;5]$.

Câu 17. Cho hai tập hợp $A = (-1;3)$ và $B = [0;5]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ là

(A) $(-1;3)$. (B) $[-1;3]$. (C) $(-1;3) \setminus \{0\}$. (D) $(-1;3]$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | |x| < 2\}$. Khi đó $A \cap B$ là

A $(-1;2)$. **B** $[0;2)$. **C** $(-2;3)$. **D** $[-1;2)$.

Câu 19. Cho hai tập hợp $M = [-3;6]$ và $N = (-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

A $(-\infty;-2) \cup [3;6]$. **B** $(-\infty;-2) \cup [3;+\infty)$. **C** $[-3;-2) \cup (3;6]$. **D** $(-3;-2) \cup (3;6)$.

Câu 20. Cho ba tập hợp $A = (-\infty;1]$, $B = [1;+\infty)$ và $C = (0;1]$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A $(A \cup B) \setminus C = (-\infty;0] \cup (1;+\infty)$. **B** $A \cap B \cap C = \{-1\}$.

C $A \cup B \cup C = (-\infty;+\infty)$. **D** $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. A	5. C	6. D	7. A	8. C	9. A	10. B
11. C	12. D	13. A	14. A	15. A	16. B	17. A	18. D	19. C	20. B

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

BÀI 1

ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

1.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1.

Cho $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, $\mathscr{D} \neq \varnothing$. Hàm số f xác định trên $\mathscr{D}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathscr{D}$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.

- $\mathscr{D}$ được gọi là tập xác định của hàm số.
- x được gọi là biến số (đối số) của hàm số f.
- $f(x)$ được gọi là giá trị của hàm số f tại x.

1.1.1 Cách cho hàm số

Cho bằng bảng, biểu đồ, công thức $y = f(x)$

1.1.2 Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy với mọi $x \in D$

1.1.3 Chiều biến thiên của hàm số

1) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

2) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a;b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi xuống, hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi lên.

1.1.4 Tính chẵn lẻ của hàm số

1) Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = f(x).$$

2) Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

⚠.

- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

1.2 Dạng toán và bài tập

DẠNG 1. Xác định hàm số và điểm thuộc đồ thị

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathscr{D}$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in \mathscr{D}$ gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Để biết điểm $M(a;b)$ có thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ không, ta thế $x = a$ vào biểu thức $f(x)$.
  - Nếu $f(a) = b$ thì điểm $M(a;b)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.
  - Nếu $f(a) \neq b$ thì điểm $M(a;b)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 1.

Cho hàm số $f(x)$. Hãy tìm hàm số $g(x)$ trong các trường hợp sau

a) Cho $f(x) = x - 2x^2$. Tìm $g(x) = f(x-1)$

b) Cho $f(x) = x - 3x^2$. Tìm $g(x) = f(2-x)$

c) Cho $f(x) = x^2 - 2x$. Tìm $g(x) = f(x^2+1)$

d) Cho $f(x) = x^2 - 4x$. Tìm $g(x) = f(1-x^2)$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Hãy tìm hàm số $y=f(x)$, biết rằng:

a) $f(x+2)=2x-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x-1)=x^2-3x+3, \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f(x+1)=x^2+2x+4, \forall x\in\mathbb{R}$.

d) $f(1-2x)=4x^2-8x+2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi } x\geq 2 \\ x^2-2 \text{ khi } x<2 \end{cases}$. Tính giá trị của hàm số đó tại:

a) $x=3$.

b) $x=-1$.

c) $x=2$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-4 \text{ khi } x\geq 0 \\ x^2-4x+1 \text{ khi } x<0 \end{cases}$. Tìm tất cả các tham số m để $f(m^2)+f(-2)=18$?

$m=3$ hoặc $m=-3$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1 \text{ khi } x\geq 0 \\ x^3-2x \text{ khi } x<0 \end{cases}$. Tìm tất cả các tham số m để $f((m+1)^2)+f(-3)=3$?

$m=4$ hoặc $m=-6$

Bài 5. Cho hàm số $y=3x^2-2x+1$. Các điểm sau đây có thuộc đồ thị hàm số không ?

a) $M(-1;6)$.

b) $N(1;1)$.

c) $P(0;1)$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\dfrac{5x^3-7x^2+8}{3x+2}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) các điểm có tung độ bằng 4.

$M(0;4), N(-1;4), P(12/5;4)$

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x-m}{2x+m}$. Tìm các giá trị m để hàm số qua điểm $M\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$?

$m=2$

DẠNG 2. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 1. Ghi điều kiện để hàm số $y=f(x)$ xác định. Thường gặp ba dạng sau:

- Hàm số phân thức: $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} Q(x)\neq 0$.
- Hàm số chứa căn bậc chẵn trên tử số $y=\sqrt[2n]{P(x)} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} P(x)\geq 0$.
- Hàm số chứa căn thức dưới mẫu số $y=\dfrac{P(x)}{\sqrt[2n]{P(x)}} \xrightarrow{\text{ĐKXĐ}} Q(x)>0$.

Bước 2. Thực hiện phép toán trên tập hợp (thường là phép giao) để suy ra $\mathscr{D}$.

Chú ý

$A.B\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\neq 0 \\ B\neq 0 \end{cases}$. Căn bậc lẻ (như căn $\sqrt[3]{x}$) luôn xác định, nghĩa là không có điều kiện.

Khi tìm điều kiện luôn trả lời ba câu hỏi: Có mẫu không ? Có căn không ? Căn nằm ở đâu ?

Ví dụ mẫu 1

Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2+x-6}$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-3;2\}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2+x-6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -3. \end{cases}$

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-3;2\}$. □

Ví dụ 2.

Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{5x+2}{x^2+5x-14}$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-7;2\}$

Lời giải.

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2019x}{(4-x^2)(x^2+1)}$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$

Bài 2. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2020x+2021}{(x-1)(x^2+2x+2)}$

$\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Bài 3. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x^2-2x}+\sqrt{x-1}$

$\mathscr{D}=[1;+\infty)\backslash\{2\}$

Bài 4. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2020}{-x^2+3x}+\sqrt{2x-4}$

$\mathscr{D}=[2;+\infty)\backslash\{3\}$

Bài 5. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{-x+4}}{x^2-3x}$

$\mathscr{D}=(-\infty,4]\backslash\{0;3\}$

Bài 6. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2-10x}$

$\mathscr{D}=(-\infty,5]\backslash\{0\}$

Bài 7. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}}+\sqrt{2x+4}$

$\mathscr{D}=[-2,3)$

Bài 8. Tìm tập xác của hàm số $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

$\mathscr{D}=(-1,2]$

Bài 9. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{x^2-1}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-4}$

$\mathscr{D}=[-2,3]\backslash\{-1;1\}$

Bài 10. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{x+5\sqrt{2x+8}}{x^2-3x-10}-\dfrac{2020}{\sqrt{3-x}}$

$\mathscr{D}=[-4,3)\backslash\{-2\}$

Bài 11. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{3x+5}{(2x+x^2)\sqrt{x+1}}$

$\mathscr{D}=(-1,+\infty)\backslash\{0\}$

Bài 12. Tìm tập xác của hàm số $y=\dfrac{2020x-2021}{(x^2+3x)\sqrt{x+1}}$

$\mathscr{D}=(-1,+\infty)\backslash\{0\}$

Bài 13. Tìm tập xác của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{(x-3)\sqrt{8-x}}$

$\mathscr{D}=[1,8)\backslash\{3\}$

Bài 14. Tìm tập xác của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{2x-6}{(x-4)\sqrt{5-x}}$

$\mathscr{D}=[1,8)\backslash\{3\}$

DẠNG 3. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

Để xét tính chẵn, lẻ của hàm số ta thực hiện các bước sau

1) Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=f(x)$.

2) Xét $\mathscr{D}$ có là tập đối xứng hay không? ($\mathscr{D}$ là tập đối xứng khi $\forall x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}$).

   - $\exists x\in\mathscr{D}$ sao cho $-x\notin\mathscr{D}$ thì ta kết luận hàm số không phải hàm số chẵn, cũng không phải hàm số lẻ.
   - Nếu $\forall x\in\mathscr{D}$ thì $-x\in\mathscr{D}$ thì ta sang bước kế tiếp.

3) Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, tính $f(-x)$,

   - Nếu $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in\mathscr{D}$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn.
   - Nếu $f(-x)=-f(x)$, $\forall x\in\mathscr{D}$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chú ý

$(-x)^{2n}=x^{2n}$; $(-x)^{2n+1}=-x^{2n+1}$; $|-x|=|x|$; $\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$.

Ví dụ mẫu 2

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=(2x-2)^{2020}+(2x+2)^{2020}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Với mọi $-x\in\mathscr{D}$, ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-2x-2)^{2020}+(-2x+2)^{2020}\\ &= [-(2x+2)]^{2020}+[-(2x-2)]^{2020}\\ &= (2x+2)^{2020}+(2x-2)^{2020}\\ &= (2x-2)^{2020}+(2x+2)^{2020}=f(x). \end{aligned}$$

Kết luận: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

□

Ví dụ 3.

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=(5x+1)^{2018}+(1-5x)^{2018}$.

Lời giải.

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+2$.

Bài 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=-2x^3+3x-\sqrt[3]{x}$.

Bài 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Bài 4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{x^{2020}+4}{x^{2021}}$.

Bài 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=|x+2|-|x-2|$.

Bài 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-|x|}{\sqrt[3]{x}}$.

Bài 7. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|x+3|+|x-3|}{|x+3|-|x-3|}$.

Bài 8. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{|x-1|-|x+1|}$.

Bài 9. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|2-x|-|2+x|}{x^2-1}$.

Bài 10. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{|3-x|-|x+3|}{x^2-4}$.

Bài 11. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}}{x^2-9}$.

Bài 12. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+7}}{x^2-16}$.

DẠNG 4. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

1) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$.

Hàm số $y=f(x)$ gọi là **đồng biến** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến** trên khoảng $(a;b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

2) **Tỉ số Newton:** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và xét tỉ số $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì $T > 0$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ thì $T < 0$.

3) **Phương pháp xét tính đơn điệu của hàm số:**

- Phương pháp 1: Dùng định nghĩa.
- Phương pháp 2: Dùng tỉ số Newton.

Chú ý

- Khi gặp hàm số chứa biểu thức bậc hai trở lên → thường dùng tỉ số Newton.
- Khi gặp hàm số chứa biểu thức bậc nhất → thường dùng định nghĩa.

Ví dụ 4.

Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) $f(x) = 2x - x^2 + 1$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) $f(x) = x^2 + 10x + 9$ trên khoảng $(-5; +\infty)$.

d) $f(x) = -2x^2 + 4x$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x-2}$ trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

b) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}$ trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

c) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty;1)$.

d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

f) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ trên khoảng $(0;2)$.

Bài 2. Xét sự biến thiên (đồng biến và nghịch biến) của các hàm số sau:

a) $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}$ trên khoảng $(4;+\infty)$.

b) $f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(x)=\sqrt{5-x}$ trên khoảng $(-\infty;2)$.

d) $f(x)=|2x-4|+x$ trên khoảng $(-\infty;2)$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=(m-2)x+5$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

b) $y=(m+1)x+m$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

c) $f(x)=\dfrac{m}{x-2}$ đồng biến trên $(-\infty;2)$.

d) $f(x)=\dfrac{m+1}{x}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

BÀI 2
HÀM SỐ BẬC NHẤT

2.1 Tóm tắt lý thuyết

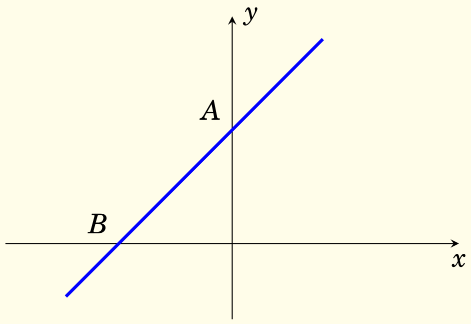
2.1.1 Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

a) Trường hợp $a > 0$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;b)$ và $B\left(-\frac{b}{c};0\right)$

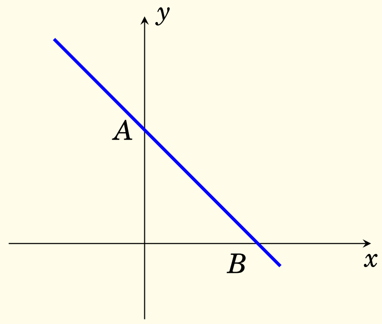


b) Trường hợp $a < 0$

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Bảng biến thiên

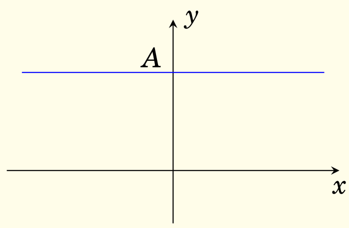
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$ $\searrow$	$-\infty$

- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;b)$ và $B\left(-\frac{b}{c};0\right)$



2.1.2 Hàm hằng $y = b$

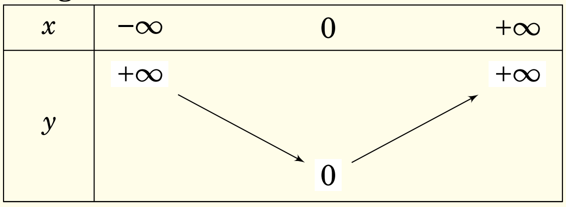
- TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- Hàm số là hàm chẵn và không đổi trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua $A(0;b)$ và song song với trục Ox



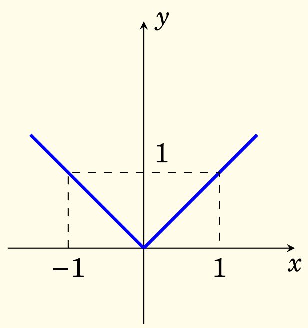
2.1.3 Hàm số $y=|x|$

Ta có: $y=|x|=\begin{cases} x \text{ nếu } x\geq 0 \\ -x \text{ nếu } x<0 \end{cases}$

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
- Bảng biến thiên



- Đồ thị
  Đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0;0)$; $A(-1;1)$ và $B(1;1)$.



Đối với hàm số $y=|ax+b|$, $(a>0)$ thì ta có $y=|ax+b|=\begin{cases} ax+b \text{ nếu } x\geq -\dfrac{b}{a} \\ -(ax+b) \text{ nếu } x<-\dfrac{b}{a} \end{cases}$.

Do đó, để vẽ đồ thị hàm số $y=|ax+b|$, ta vẽ hai đường thẳng $y=ax+b$ và $y=-ax-b$, rồi xóa đi hai phần nằm ở phía dưới trục hoành Ox.

Chú ý

Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d' = a'x + b'$, khi đó:

- $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $d \cap d' \Leftrightarrow a \neq a'$
- Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ có hệ số góc bằng k dạng $d: y = k(x - x_A) + y_A$
- Trục hoành $Ox: y = 0$, trục tung $Oy: x = 0$
- Phương trình phân giác góc phần tư thứ I, III là $y = x$; góc phần tư thứ II, IV là $y = -x$
- Để tọa độ giao điểm của hai đường thẳng, ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm

2.2 Dạng toán và bài tập

DẠNG 1. Khảo sát sự biến thiên, tương giao và đồng quy

Ví dụ 1.

Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \begin{cases} 4 & \text{khi } x > 2 \\ x + 2 & \text{khi } x \leqslant 2 \end{cases}$.

b) $y = \begin{cases} 2 & \text{khi } x \geqslant -1 \\ x + 3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau, dựa vào đồ thị hàm số hãy lập bảng biến thiên:

a) $y=\begin{cases} -x & \text{khi } x\leqslant -1 \\ 1 & \text{khi } -1<x<2 \\ x-1 & \text{khi } x\geqslant 2 \end{cases}$.

b) $y=\begin{cases} x+1 & \text{khi } -2\leqslant x\leqslant 1 \\ -2x+4 & \text{khi } 1<x\leqslant 2 \\ 2x-4 & \text{khi } 2<x\leqslant 4 \end{cases}$.

Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau và tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ nhỏ nhất:

a) $y=2x+|x-1|$.

b) $y=3x+|x-2|$.

Bài 3. Vẽ đồ thị và từ đồ thị lập thành bảng biến thiên và cho biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3;3]$:

a) $y=|2-x|+|x+1|$.

b) $y=|x-2|+|2x+4|$.

Bài 4. Vẽ đồ thị và từ đồ thị lập thành bảng biến thiên và cho biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4;4]$:

a) $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$.

b) $y=\sqrt{x^2-4x+4}-3\sqrt{x^2-2x+1}$.

Bài 5. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến? nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

Chú ý

Hàm số $y=ax+b$ đồng biến khi $a>0$, nghịch biến khi $a<0$.

a) $y=(2m+3)x-m+1$.

b) $y=(2m+5)x+m+3$.

c) $y=mx-3-x$.

d) $y=(m-1)x-2m-2x$.

Bài 6. Tìm điểm để đường thẳng sau luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào ***(điểm cố định)***?

a) $y=(2m+3)x-m+1$.

b) $y=(2m+5)x+m+3$.

c) $y=3mx-6m+2$.

d) $y=(m-1)x-2m$.

DẠNG 2. Xác định phương trình đường thẳng

Cần nhớ : Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$.

Khi đó : $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ và $d \perp d' \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Ví dụ 2.

Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm m để đồ thị hàm số $d: y = (m-2)x + m$.

a) Đi qua gốc tọa độ O. $m = 0$

b) Đi qua điểm $M(-2;3)$. $m = 1$

c) Song song với đường thẳng $d_1: y = x\sqrt{2}$. $m = 2 + \sqrt{2}$

d) Vuông góc với đường thẳng $d_2: y = -x$. $m = 3$

e) Đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_3: x + y = -1$ và $d_4: x - 2y + 4 = 0$. $m = 3$

f) Cắt đường thẳng $d_5: 3x - y - 4 = 0$ tại điểm có hoành độ bằng 2. $m = 2$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các cặp hàm số sau song song, vuông góc với nhau?

a) $d_1: y = (3m-1)x + m, d_2: y = 2x - 1$. $m = 1; m = \frac{1}{6}$

b) $d_1: y = (m^2 - m)x + 2, d_2: y = m + 2x$. $m = -1; m \in \varnothing$

Bài 2. Xác định các tham số a và b để đồ thị hàm số $(d): y = ax + b$.

a) Đi qua hai điểm $A(-1;-20)$ và $B(3;8)$. $a = 7; b = -14$

b) Đi qua hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;2)$. $a=\frac{-1}{2};b=\frac{5}{2}$

c) Đi qua $M(-5;4)$ và song song với Oy. $x=-5$

d) Đi qua $M(-12;-5)$ và song song với Oy. $x=-12$

e) Đi qua $N(\sqrt{2};1)$ và song song với Ox. $y=1$

f) Đi qua $P(2;-3)$ và vuông góc với Ox. $y=-3$

g) Đi qua điểm $I(-3;2)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất. $a=-1;b=-1$

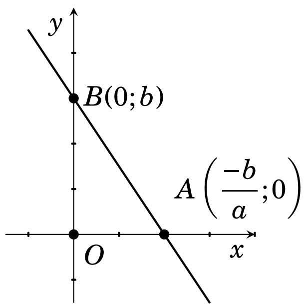
h) Đi qua điểm $K(-2;3)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ tư. $a=1;b=5$

i) Đi qua điểm $A(1;-1)$ và song song với đường thẳng $d: y=2x+7$. $a=2;b=-3$

j) Đi qua $M(1;-2)$ và có hệ số góc $k=-\frac{1}{3}$. $a=\frac{-1}{3};\frac{-5}{3}$

⚠.

Xét đường thẳng $d: y=ax+b$.



- $A=d\cap Ox: y=0\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\Rightarrow A\left(-\frac{b}{a};0\right)\Rightarrow OA=\left|-\frac{b}{a}\right|=\frac{|b|}{|a|}$.
- $B=d\cap Oy: x=0\Rightarrow y=b\Rightarrow B(0;b)\Rightarrow OB=|b|$.

1) Tam giác OAB vuông cân $\Leftrightarrow OA=OB\Leftrightarrow \frac{|b|}{|a|}=|b|\Leftrightarrow |a|=1\Leftrightarrow a=\pm1$.

2) Diện tích $S_{OAB}=S_0\Rightarrow \frac{1}{2}OA.OB=S_0\Rightarrow b^2=2|a|.S_0$.

Bài 3. Tìm đường thẳng d đi qua điểm M cho trước và chắn trên hai trục tọa độ một tam giác vuông cân trong các trường hợp sau:

a) Qua $M(1;2)$. $y=x+1; y=-x+3$ b) Qua $M(-3;1)$. $y=x+4; y=-x-2$

Bài 4. Định tham số m để đường thẳng d chắn trên 2 trục tọa độ tam giác có diện tích cho trước, biết:

a) $d: y=x+2m$ và $S=1$. $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $d: y=2x+4m$ và $S=4$. $m=\pm1$

BÀI 3
HÀM SỐ BẬC HAI

3.1 Tóm tắt lý thuyết

3.1.1 Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.
Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ được gọi là một ***Parabol***.

SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

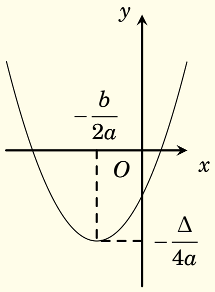
Hàm số $y = ax^2 + bx + c$

$a > 0$

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

☑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

☑ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

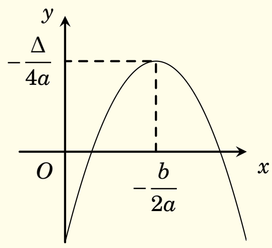


$a < 0$

x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f\,y$	$-\infty$ ↗	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↘ $+\infty$

☑ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

☑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.



☑ Tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

☑ Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Chú ý

- Khi $a>0$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $y_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}$ tại $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Khi $a<0$ hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}$ tại $x=-\dfrac{b}{2a}$.

3.2 Dạng toán và bài tập

DẠNG 1. Xác định và khảo sát sự biến thiên của parabol $(\mathscr{P})$

CÁC BƯỚC VẼ PARABOL: $(P): y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

B1. Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

B2. Xác định trục đối xứng $\Delta: x=-\dfrac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.

B3. Lập bảng giá trị, xác định các điểm thuộc (P).

B4. Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để nối các điểm đó lại.

Ví dụ 1.

Xác định parabol (P): $y=ax^2+bx-3$ có đỉnh là $I(3;6)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định parabol (P)

1) (P): $y=ax^2+bx-3$ có đỉnh là $I(-1;-5)$.

Vậy (P): $y=2x^2+4x-3$.

2) (P): $y=-x^2+bx+c$ đi qua điểm $M(1;6)$ và có hoành độ đỉnh bằng 2.

Vậy (P): $y=-x^2+4x+3$.

3) (P): $y = ax^2 - 4x + c$ đi qua điểm $M(2;3)$ và có hoành độ đỉnh bằng 1.

Vậy (P): $y = 2x^2 - 4x + 3$.

4) (P): $y = ax^2 + bx + 5$ đi qua điểm $M(3;2)$ và có trục đối xứng $x = 2$.

Vậy (P): $y = x^2 - 4x + 5$.

5) (P): $y = -2x^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(5;9)$ và có trục đối xứng $x = 3$.

Vậy (P): $y = -2x^2 + 12x - 1$.

6) (P): $y = x^2 + bx + c$ đi qua hai điểm $M(6;5)$ và $N(1;-5)$.

Vậy (P): $y = x^2 - 5x - 1$.

7) (P): $y = ax^2 + 3x + c$ đi qua hai điểm $M(3;2)$ và $N(-1;-2)$.

Vậy (P): $y = -x^2 + 3x + 2$.

8) (P): $y = ax^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có tung độ đỉnh bằng -2.

Vậy (P): $y = 3x^2 - 6x + 1$.

9) (P): $y = ax^2 + bx + 7$ đi qua điểm $A(3;1)$ và có tung độ đỉnh bằng 9.

Vậy (P): $y = -2x^2 + 4x + 7$.

10) (P): $y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục Oy tại điểm $M(0;3)$.

Vậy (P): $y = x^2 - 4x + 3$.

11) (P): $y = ax^2 + 8x + c$ có hoành độ đỉnh bằng 4 và cắt trục Ox tại điểm $M(1;0)$.

Vậy (P): $y = -x^2 + 8x - 7$.

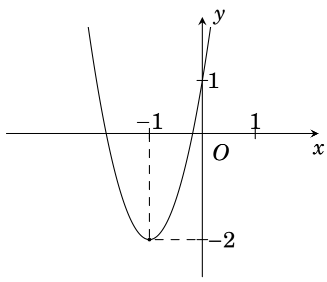
12) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(2;5)$, $B(3;8)$ và $C(0;5)$.

Vậy (P): $y = x^2 - 2x + 5$.

13) (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(-1;-8)$, $B(3;-8)$ và $C(0;-2)$.

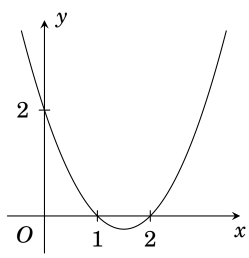
Vậy (P): $y = -2x^2 + 4x - 2$.

14) (P): $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị:



Vậy (P): $y = 3x^2 + 6x + 1$.

15) (P): $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị:



Vậy (P): $y = x^2 - 3x + 2$.

16) (P): $y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y	$+\infty$ $\searrow$	-1 $\searrow$	-5 $\nearrow$	$+\infty$

Vậy (P): $y = x^2 - 4x - 1$.

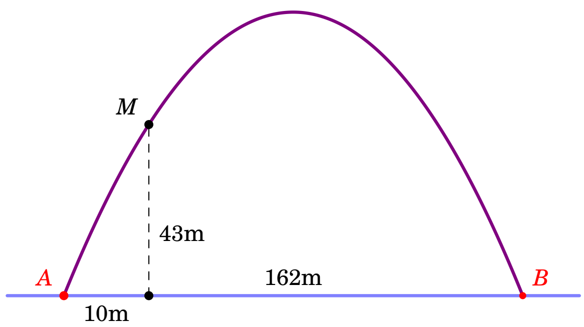
17) (P): $y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$	6 $\searrow$	2 $\searrow$	$-\infty$

Vậy (P): $y = -x^2 + 4x + 2$.

Bài 2. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\dfrac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5m$ (như hình vẽ) có chiều cao h của cổng?

Bài 3. Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng theo phương vuông góc với đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy xác tính độ cao của cổng Arch (tính từ mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).



Bài 4. Cho parabol (P): $y = x^2 - 2x - 3$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (P).

b) Biện luận và giải phương trình: $-x^2 + 2x + m - 1 = 0$.

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1

ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

1.1 Tóm tắt lý thuyết

1.1.1 Phương trình một ẩn

1) Cho 2 hàm số $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ có tập xác định lần lượt là $\mathscr{D}_f$ và $\mathscr{D}_g$. Đặt $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$.
Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là phương trình một ẩn, x gọi là ẩn và $\mathscr{D}$ gọi tập xác định của phương trình.

2) $x_0 \in \mathscr{D}$ gọi là 1 nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x_0) = g(x_0)$" là một mệnh đề đúng.

1.1.2 Phương trình tương đương

1) Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

2) Nếu $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) = g_2(x)$ thì viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

Định lí 1.
Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ và $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên $\mathscr{D}$. Khi đó trên miền $\mathscr{D}$, phương trình tương đương với mỗi phương trình sau:

(1): $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$.

(2): $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ với $h(x) \neq 0, \forall x \in \mathscr{D}$.

1.1.3 Phương trình hệ quả

1) $f_1(x) = g_1(x)$ có tập nghiệm là S_1 được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ có tập nghiệm S_2 nếu $S_1 \subset S_2$.

2) Khi đó: $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

Định lí 2.
Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho: $f(x)=g(x) \Rightarrow [f(x)]^2=[g(x)]^2$.

Chú ý

1) Nếu hai vế của 1 phương trình luôn cùng dấu thì khi bình phương 2 vế của nó, ta được một phương trình tương đương.

2) Nếu phép biến đổi tương đương dẫn đến phương trình hệ quả, ta phải thử lại các nghiệm tìm được vào phương trình đã cho để phát hiện và loại bỏ nghiệm ngoại lai.

1.2 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

Ví dụ 1.

Giải phương trình $\dfrac{x^2-x-4}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}$.

Lời giải.

....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $x-\sqrt{2-x}=5-\sqrt{2-x}$. $S=\varnothing$.

b) $\sqrt{3-x}+x=\sqrt{3-x}+1$. $S=\{1\}$.

c) $x+\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}+2$ $S=\{2\}$

d) $\sqrt{3x-12}+2=\sqrt{4-x}+2x$ $S=\varnothing$

e) $\dfrac{\sqrt{4x+12}}{x+3}+x=\sqrt{-x-3}+1$. $S=\varnothing$

f) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{9}{\sqrt{x-1}}$ $S=\{3\}$

g) $x^2-\sqrt{1-x}=\sqrt{x-2}+3$ $S=\varnothing$

h) $5x-\sqrt{x-7}=\sqrt{7-x}+35$ $S=\{7\}$

i) $x+1+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x+5}{x+3}$ $S=\{0\}$

j) $2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}$ $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

k) $\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}$ $S=\{5\}$

l) $\dfrac{2x^2-x-3}{\sqrt{2x-3}}=\sqrt{2x-3}$ $S=\{0\}$

m) $\left(x^2-6x+5\right)\sqrt{x-3}=0$. $S=\{3;5\}$

n) $(x+1)(\sqrt{4x+1}-1)=0$. $S=\{0\}$

BÀI 2
PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

2.1 Tóm tắt lý thuyết

2.1.1 Giải và biện luận phương trình $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b$ (1)

Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{b}{a}$.
$a=0$	$b=0$	(1) có vô số nghiệm.
	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm.

2.1.2 Cách giải của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ (2)

$\Delta=b^2-4ac$	Kết luận
$\Delta>0$	(2) có 2 nghiệm phẩn biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta=0$	(2) có nghiệm kép $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$.
$\Delta<0$	(2) vô nghiệm.

2.1.3 Định lí viet

1) Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

2) Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $u\cdot v=P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0$.

2.1.4 Phương trình quy về phương trình bậc nhất và bậc hai cơ bản

1) Phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối.

a) $|A|=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B \end{array}\right. \end{cases}$

b) $|A|=|B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B \\ A=-B. \end{array}\right.$

2) Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn.

a) $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 (\text{ hoặc } A \geq 0) \\ A=B. \end{cases}$

b) $\sqrt{A}=B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A=B^2. \end{cases}$

2.2 DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn

Cách giải và biện luận phương trình $ax = b$.

- **Trường hợp 1:** $a \neq 0$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{b}{a}$.
- **Trường hợp 2:** $a = 0$. Giải để tìm tham số, thế tham số vào phương trình $ax = b$.
  - Nếu được $0x = 0$ thì phương trình có vô số nghiệm (tập nghiệm $S = \mathbb{R}$).
  - Nếu được $0x = b$ $(b \neq 0)$ thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ mẫu 3

Giải và biện luận: $m(mx-1) = 9x+3$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow m^2x - m = 9x + 3 \Leftrightarrow m^2x - 9x = m + 3 \Leftrightarrow \left(m^2-9\right)x = m+3$.

1) Với $m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.
   - Khi $m = 3$ thì $(*)$ trở thành $0x = 6$, suy ra phương trình vô nghiệm.
   - Khi $m = -3$ thì $(*)$ trở thành $0x = 0$, suy ra phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
2) Với $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.
   $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{m+3}{m^2-9} = \dfrac{1}{m-3}$.
3) Kết luận:
   - $m = 3$: Phương trình vô nghiệm.
   - $m = -3$: PT nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
   - $m \neq \pm 3$: PT có nghiệm $x = \dfrac{1}{m-3}$.

□

Ví dụ 1.

Giải và biện luận: $m^2x + 2 = m + 4x$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận: $\left(m^2-2m-8\right)x=4-m$.

Bài 2. Giải và biện luận: $\left(4m^2-2\right)x=1+2m-x$.

DẠNG 2. Bài toán tìm tham số trong phương trình bậc nhất $ax+b=0$

1) Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0$.

2) Để phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (vô số nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0. \end{cases}$

3) Để phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0. \end{cases}$

4) Để (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ có nghiệm duy nhất hoặc có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Chú ý

Có nghiệm là trường hợp ngược lại của vô nghiệm. Do đó, tìm điều kiện để (1) có nghiệm, thông thường ta tìm điều kiện để (1) vô nghiệm, rồi lấy kết quả ngược lại.

Ví dụ mẫu 4

Tìm các tham số thực m để phương trình $\left(m^2-5\right)x=2+m-x$ vô nghiệm. $m=2$

Lời giải.

Ta có $\left(m^2-5\right)x=2+m-x \Leftrightarrow \left(m^2-4\right)x=m+2$ (1).

(1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-4=0 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\pm 2 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m=2$ thì phương trình vô nghiệm. □

Ví dụ 2.

Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $m(mx-1)=(4m-3)x-3$. $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 3. \end{cases}$

Lời giải.

....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm các tham số thực m để phương trình $m^2(x-1)=2(2x-m-4)$ vô nghiệm. $m=2$

Bài 2. Tìm các tham số thực m để phương trình $\left(m^2-5\right)x=2+m-x$ vô nghiệm. $m=2$

Bài 3. Tìm các tham số thực m để phương trình $\left(m^2-3m\right)x+4=4x+m$ vô nghiệm. $m=1$

Bài 4. Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $mx-1=x+m$. $m\neq -1$

Bài 5. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất $m(m-1)x=m^2-1$ (1). $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq 1 \end{cases}$

Bài 6. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $m^2(mx-1)=2m(2x+1)$. $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq \pm 2 \end{cases}$

Bài 7. Tìm tham số m để phương trình có vô số nghiệm: $m^2(x-1)=2(mx-2)$. $m=2$

Bài 8. Tìm tham số m để phương trình sau có vô số nghiệm: $\left(m^2+2m-3\right)x=m-1$ (1). $m=1$

Bài 9. Tìm tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$: $m^2(mx-1)=2m(2x+1)$. $m\in\{-2;0\}$

Bài 10. Tìm các tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$: $\left(m^2-5m\right)x+1=m-4x$. $m=1$

Bài 11. Tìm các tham số m để phương trình sau có nghiệm.

a) $\dfrac{3x-m}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+1}=\dfrac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$. $m>-\frac{2}{3}$

b) $\dfrac{2mx-1}{\sqrt{x-1}}-2\sqrt{x-1}=\dfrac{m+1}{\sqrt{x-1}}$. $1<m<2$

c) $\dfrac{3x-m-1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=\dfrac{2x+2m-3}{\sqrt{x-1}}$. $m>1$

d) $\dfrac{x-m}{\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x-2}=\dfrac{mx}{\sqrt{3x-2}}$. $\frac{2}{5}<m<4$

Bài 12. Tìm các tham số m để phương trình sau có nghiệm nguyên

a) $(m-2)x=m+1$ $m\in\{-1;1;3;5\}$

b) $m(x+3)=x-m$ $m\in\{-3;-1;0;2;3;5\}$

DẠNG 3. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$

Phương pháp:

Bước 1. Biến đổi phương trình về đúng dạng $ax^2+bx+c=0$.

Bước 1. Nếu hệ số a chứa tham số, ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $a=0$. Ta giải và biện luận phương trình $bx=c$.
- Trường hợp 2: $a\neq 0$. Ta lập $\Delta=b^2-4ac$. Khi đó
  - Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\Delta}{2a}$.
  - Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$.
  - Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Bước 1. Kết luận.

Chú ý

Nếu hệ số a có chứa tham số m thì ta cần chia ra hai trường hợp, cụ thể

- Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$.
- Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=0.\end{cases}$

Ví dụ mẫu 5

Giải và biện luận phương trình bậc hai $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta=b^2-4ac=[-2(m-1)]^2-4\cdot 1\cdot(m^2-3)=16-8m$.

- Nếu $\Delta>0\Leftrightarrow m<2$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\dfrac{2(m-1)\pm\sqrt{16-8m}}{2}=(m-1)\pm\sqrt{4-2m}$.
- Nếu $\Delta=0\Leftrightarrow m=2$ thì phương trình có nghiệm kép $x=m-1=1$.
- Nếu $\Delta<0\Leftrightarrow m>2$ thì phương trình vô nghiệm.

$\square$

Ví dụ 3.

Giải và biện luận phương trình bậc hai $x^2-2(m+3)x+m^2=0$.

Lời giải.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận phương trình bậc hai $mx^2 - 2(m-1)x + m - 5 = 0$.

Bài 2. Giải và biện luận phương trình bậc hai $(m^2 + m - 2)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0$.

Bài 3. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. $m > -6$

Bài 4. Tìm m để phương trình $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m = 2$ có hai nghiệm phân biệt. $m < 3$ và $m \neq -1$

Bài 5. Tìm tham số m để phương trình sau $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó? $m = -\frac{3}{4}, x = \frac{3}{4}$

Bài 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ vô nghiệm? $m < 0$

Bài 7. Tìm tham số m để phương trình sau $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ có nghiệm? $m \leq \frac{13}{4}$

Bài 8. Tìm tham số m để phương trình sau $(m^2 - 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm? $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$

DẠNG 4. Định lý Vi-ét và các bài toán liên quan

Định lý Vi-ét

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $u \cdot v = P$ thì u, v là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$, $(S^2 - 4P \geq 0)$.

Ứng dụng định lý Vi-ét

1) Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm phương trình bậc hai:
   - ☑ $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$, $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$, $x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP, \ldots$
   - ☑ $|x_1 - x_2| = a > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = a^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = a^2$.

2) Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai:
   - ☑ Phương trình có 2 nghiệm trái dấu: $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$.

- Phương trình có 2 nghiệm dương: $0 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm âm: $x_1 \le x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm âm phân biệt: $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0. \end{cases}$
- Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu: $\left[\begin{array}{l} x_1 \le x_2 < 0 \\ 0 < x_1 \le x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0. \end{cases}$

Chú ý

Nếu đề bài yêu cầu so sánh hai nghiệm x_1, x_2 cới số α, thường có ba cách làm sau:

- Đặt ẩn phụ $t = x - \alpha$ để đưa về so sánh 2 nghiệm t_1, t_2 với số 0 như trên.
- Biến đổi: $\left[\begin{array}{l} x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow x_1 - a < 0 < x_2 - a \Leftrightarrow (x_1 - a)(x_2 - a) < 0 \\ a < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > a \\ x_2 > a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - a > 0 \\ x_2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - a)(x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 - 2a > 0. \end{cases} \end{array}\right.$
- Định lí đảo tam thức bậc hai (tham khảo).

Ví dụ mẫu 6

Tìm tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0\,(*)$ vô nghiệm.

Lời giải.

Trường hợp 1. $a = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Thay vào phương trình $(*)$ ta được $-6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{6}$.

Suy ra phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{1}{6}$ nên $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2. $a \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 0$.

Ta có $\Delta' = (m+3)^2 - m(m+1) = 5m + 9$. Phương trình $(*)$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 5m + 9 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{5}.$$

Vậy $m < -\dfrac{9}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Ví dụ 4.

Tìm tham số m để phương trình $(2-m)x^2-4x+3=0\,(*)$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.

Tìm tham số m để phương trình $(2m-1)x^2-2(m-1)x-1=0\,(*)$ có hai nghiệm phân biệt. Tính hai nghiệm này.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tham số m để phương trình có một nghiệm cho trước. Tính nghiệm còn lại?

a) $x^2-(2m-3)x+m^2-4=0 \to x=-7$

$m=-2, x=0,\ m=-12, x=-20$

b) $(m-4)x^2+x+m^2+1-4m=0 \to x=-1$

$m=-1, x=\frac{6}{5}$

c) $mx^2-(m+2)x+m-1=0 \to x=2$ $m=\frac{5}{3}, x=\frac{1}{5}$

d) $x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0 \to x=0$

$m=0, x=-2,\ m=3, x=4$

Bài 2. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

a) $(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$ $-1<m<2$

b) $(m-2)x^2+2mx+m+1=0$ $-1<m<2$

c) $(m+2)x^2-mx+m-2=0$ $-2<m<2$

d) $mx^2+4(m-3)x+m-5=0$ $0<m<5$

e) $(m+1)x^2+2(m+4)x+m+1=0$ $m\in\varnothing$

f) $x^2-2(m-1)x+m^2-4m+3=0$ $1<m<3$

Bài 3. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu?

a) $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$ $m\in(-\infty;0)\cup(3;4]$.

b) $mx^2+2(m+3)x+m=0$ $m\in\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)\setminus\{0\}$

c) $(m-1)x^2+2(m+1)x+m=0$ $m\in\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup(1;+\infty)$

d) $(m-1)x^2+2(m+2)x+m-1=0$ $m\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$

Bài 4. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt?

a) $x^2-3x+m-1=0$ $1<m<\frac{13}{4}$

b) $3x^2-10x-3m+1=0$ $-\frac{22}{9}<m<\frac{1}{3}$

c) $x^2+(2m-3)x+m^2+2=0$ $m<\frac{1}{12}$

d) $(m+2)x^2-2(m-1)x+m-2=0$ $m\in(-\infty;-2)\cup\left(2;\frac{5}{2}\right)$

Bài 5. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt?

a) $mx^2+2(m+3)x+m=0$ $m>0$

b) $(m+1)x^2+2(m+4)x+m+1=0$ $m>-1$

c) $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$ $m\in\varnothing$

d) $(m+1)x^2-2mx+m-3=0$ $m\in\varnothing$

Bài 6. Cho $x^2-(2m-3)x+m^2-4=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=17$. $m=0$

Bài 7. Cho $x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=8$. $m=2$

Bài 8. Cho $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=0$. $m=-\sqrt{3};m=\sqrt{3};m=1$

Bài 9. Cho $x^2+(2m+1)x-m-1=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+1$. $m=-\frac{3}{4};m=-1$

Bài 10. Cho $x^2-4x+m-1=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3+x_2^3=40$. $m=3$

Bài 11. Cho $(m+1)x^2-(2m-3)x+m=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3|x_1-x_2|=2$. $m=\frac{1}{2};m=-\frac{77}{2}$

Bài 12. Cho phương trình $x^2-2(1-m)x+m^2+3=0$. Tìm tất cả các tham số m để phương trình

1) Có 1 nghiệm bằng 6. Tìm nghiệm còn lại? $m=-3;x=2$ và $m=-9;x=14$

2) Biểu thức $A=2(x_1+x_2)-x_1x_2$ đạt GTLN? GTLN: 5

Bài 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+3m-25=0$. Tìm tất cả các tham số m để phương trình

1) Có 1 nghiệm là -3. Tìm nghiệm còn lại? $m=1,x=7$ và $m=-10,x=-15$

2) Có 2 nghiệm thỏa $2(x_1+x_2)-x_1x_2=29$? $m=0,m=1$

Bài 14. Cho phương trình $x^2+(2m+3)x+m^2-3=0$. Tìm tham số m để phương trình

1) Có 1 nghiệm là -2. Tìm nghiệm còn lại? $m=-1 \to x=-2$ và $m=5; x=-11$

2) Có 2 nghiệm $2(2x_1-x_2)(2x_2-x_1)+136=0$? $m=1; m=23$

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $(m+2)x^2-2(m+4)x+m+5=0$.

1) Có nghiệm kép. Tìm nghiệm kép đó? $m=-6, x=\frac{1}{2}$

2) Có hai nghiệm phân biệt thỏa $9\left(x_1^2+x_2^2\right)=4$? $m=-5, m=-\frac{38}{7}$

Bài 16. Cho phương trình $(m-1)x^2-2(m+4)x+m+1=0$.

1) Tìm tham số m để phương trình có nghiệm? $m \in \left[-\frac{17}{8};+\infty\right)$

2) Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu sao cho $|x_1|=\dfrac{2}{|x_2|}$? $m=\frac{1}{3}$

3) Tìm giá trị nguyên âm của m sao cho phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 đều là số nguyên?

$m=-1$

Bài 17. Cho phương trình $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ phân biệt và $2x_1=5x_2$? $m=\frac{14}{9}, m=-7$

Bài 18. Cho phương trình: $mx^2-4mx+4m-3=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và $x_1=3x_2$? $m=3$

Bài 19. Cho phương trình: $2x^2-(m+3)x+m-1=0$.

1) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=2$. Tìm nghiệm còn lại. $m=1 \Rightarrow x=0$

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=3$. $m=3$

Bài 20. Cho phương trình: $x^2-2mx+3m-2=0$.

1) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu. $m<\frac{2}{3}$

2) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=4+x_1+x_2$. $m=0$

Bài 21. Cho phương trình $(m-2)x^2+(2m-1)x+m=0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2+5x_1x_2=2$. $m=\frac{7}{5}$

Bài 22. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2-3x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2=2x_1x_2+1$. $m=\pm\sqrt{13}$

Bài 23. Tìm m để $mx^2-(2m+5)x+m+11=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+3(x_1+x_2)=22$.

$m=1, m=-\frac{25}{16}$.

Bài 24. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+2(m-2)=0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và tìm tham số m để biểu thức $A=\left|(x_1+x_2)^2-8x_1x_2+1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$\min A=1$ khi $m=3$

DẠNG 5. Phương trình chứa ẩn dưới dấu trị tuyệt đối

Nhóm 1: Phương trình $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$ hoặc $\sqrt{A^2} = |B| \Leftrightarrow |A| = |B|$ hoặc $\sqrt{A} = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A \geqslant 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Ví dụ 6.

Giải các phương trình sau:

1) $|2x+1| = |x^2-3x-4|$ $S = \left\{\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$

2) $|x^2+2x| = |x^2+2|$ $S = \{1\}$

3) $|6-x^2| - |2-3x^2| = 0$ $S = \{\pm\sqrt{2}\}$

4) $|5x^2-3x-2| - |x^2-1| = 0$ $S = \left\{1; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right\}$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các phương trình sau:

1) $|5x+1| = 2x-3$. $S = \varnothing$

2) $|3x-4| = |x-2|$. $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$

3) $|3x^2-2x| = |6-x^2|$. $S = \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$

4) $|x^2-2x| = |2x^2-x-2|$. $S = \left\{2; -\frac{1}{2}\right\}$

5) $|x^2-2x| - |x^2-4| = 0$. $S = \{2; -1\}$

6) $|x^2-3x+2|-|2x^2+5x-18|=0$. $S=\left\{-10;2;-\dfrac{8}{3}\right\}$

7) $\sqrt{x^2-6x+9}=|x^2-9|$. $S=\{3;-2;-4\}$

8) $\sqrt{4x^2+4x+1}=|x^2-3x-4|$. $S=\left\{\dfrac{5\pm3\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$

9) $\sqrt{x+4}=|x+2|$. $S=\{0;-3\}$

10) $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$. $S=\left\{3;-\dfrac{1}{2}\right\}$

11) $\sqrt{2x^2-4x-2}=|x-1|$. $S=\{-1;3\}$

12) $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$. $S=\mathbb{R}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\left|2x^2-3x-5\right|-5x=5$. $S=\{-1;0;5\}$.

b) $\left|2x^2-13x-20\right|=16+x$. $S=\{-2;9;3\pm\sqrt{11}\}$.

c) $\left|x^2-8x+4\right|=x-4$. $S=\{7;8\}$.

d) $\left|x^2-6x+5\right|=x+5$. $S=\{0;7\}$.

Bài 3. Giải các phương trình

a) $\left|2x^2-3x-5\right|=5x+5$. $S=\{-1;0;5\}$.

b) $\left|5x^2-3x-4\right|=3x-4$. $S=\varnothing$.

c) $\left|x^2+5x-9\right|=2x+1$. $S=\{1;2\}$.

d) $\left|x^2-4x+2\right|=x-2$. $S=\{3;4\}$.

e) $\left|x^2-5x+7\right|-2x+5=0$. $S=\{3;4\}$.

f) $\left|x^2-x-3\right|=x+1$. $S=\{1+\sqrt{5};\sqrt{2}\}$.

Bài 4. Giải các phương trình

a) $x^2-x|x-1|=x$. $S=[1;+\infty)\cup\{0\}$.

b) $|x-2|=x^2-4x+2$. $S=\{0;4\}$.

c) $|3x-5|=2x^2+x-3$. $S=\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\}$.

d) $(x+1)|x-3|=4(x-2)$. $S=\{-1-2\sqrt{3};-1+2\sqrt{3};5\}$.

e) $\dfrac{4x^2+2x+|2x+1|}{4x+3}=2x+1$. $S=\left\{-2;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

f) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{1}{|x+1|}=\dfrac{2x-1}{x^2+x}$. $S=\{3\}$.

DẠNG 6. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Ví dụ 7.

Giải phương trình $\sqrt{3x^2-8x+5}-\sqrt{11-x}=0$. $x=-\dfrac{2}{3}, x=3$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 8.

Giải phương trình $\sqrt{x-3}=3\sqrt{x^2-9}$. $x=3$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2-1+\sqrt{2x+3}}=\sqrt{x^2+x-1}$. $x=3$

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2+6x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{x^3+\sqrt{x-2}}$. $x=3$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2-x+2}=|3x-4|$. $S=\left\{2;\frac{7}{8}\right\}$

b) $\sqrt{3x^2+1}=|x+1|$. $S=\{0;1\}$

c) $\sqrt{2x^2-3x+12}=2\sqrt{-x^2+x+3}$. $S=\left\{0;\frac{7}{6}\right\}$

d) $\sqrt{x^2-3x-2}=\sqrt{x-3}$. $S=\{2+\sqrt{3}\}$

e) $\sqrt{x^2-3x+18}=\sqrt{14x+2}$. $S=\{1;16\}$

f) $\sqrt{x^2-5x+2}=\sqrt{-x-1}$. $S=\varnothing$

g) $3\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+8x-11}$. $S=\{2\}$

h) $\sqrt{x-1}=2\sqrt{2x+5}$. $S=\varnothing$

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+7x-2}=x+1$. $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Bài 5. Giải phương trình $-6+\sqrt{25x^2-10x+1}=x$. $S=\left\{-\frac{5}{6};\frac{7}{4}\right\}$

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x-4}-x=1$. $S=\varnothing$

Bài 7. Giải phương trình $(x-2)\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)=0$. $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{5x^2-25x+31}=5-2x$. $S=\{2\}$

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+7}=x+2$. $S=\{1;3\}$

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt{-2x^2+5x-3}-1+2x=0$. $S=\varnothing$

Bài 11. Giải phương trình $\sqrt{8x^2-6x+1}=4x-1$. $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$. $S=\{3\}$

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$. $S=\{3\}$

Bài 14. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+9x+7}=x+1$. $x=-1$

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{4x-3}=x-2$. $x=7$

Bài 16. Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+16}=4-2x$. $x=0$

Bài 17. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-2x-5}=x-1$. $x=\sqrt{3}$

Bài 18. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1}=2x-1$. $x=\frac{4}{3}$

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{x^2+24x-48}=2x-1$. $S=\left\{\frac{7}{3};7\right\}$

Bài 20. Giải phương trình $(x+1)\left(\sqrt{4x+1}-1\right)=0$. $x=0$

Bài 21. Giải phương trình $\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{2-x}-x\right)=0$. $x=1$

Bài 22. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$. $x=2$

Bài 23. Giải phương trình: $\sqrt{12x+4}-\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}$. $x=5$

Bài 24. Giải phương trình: $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$. $x=2,\ x=4$

Bài 25. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$.

b) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}=2$.

c) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}=1$.

d) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+7}=2$.

e) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-2}=3$.

f) $\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$.

g) $\sqrt{3x+1}=8-\sqrt{x+1}$.

h) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$.

i) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

j) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-4}$.

k) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}$.

l) $\sqrt{4x^2-7x-2}=2\sqrt{x^2-x+1}-1$.

m) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$.

n) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$.

o) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$.

p) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$.

q) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

r) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

s) $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$.

t) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Bài 26. Giải các phương trình sau

a) $3\sqrt{x^2-4x+5}+x^2-4x+1=0$.

b) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x+11}=4$.

c) $3\sqrt{x^2+2x-3}=2x^2+4x-5$.

d) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

e) $(x-2)(x+3)+\sqrt{x^4-2x^3+2x^2-x}=-4$.

f) $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2=2$.

BÀI 3
HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

3.1 Tóm tắt lý thuyết

3.1.1 Hệ phương trình gồm các phương trình bậc nhất và bậc hai

Để giải các hệ phương trình dạng này, ta chủ đạo sử dụng phương pháp thế và phương pháp cộng đại số thông thường, đôi khi kết hợp thêm giải pháp đặt ẩn phụ để làm gọn bài toán.

Ví dụ 1.

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2-y^2=2x-1-y \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2+2x-y^2=1 \\ y^2+4x=8 \end{cases}$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.

Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} 2x^3+4x^2+x^2y=9-2xy \\ x^2+y=6-4x \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2x^2-xy-1=0 \end{cases}$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 27. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x^2+y^2=17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ y^2-x^2+2x+2y+4=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+14y^2=1+4xy \end{cases}$

4) $\begin{cases} (3x+y-1)(x-2y-1)=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$

Bài 28. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ x^2 + 3xy + 4y^2 = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$

3.2 Hệ phương trình đối xứng loại 1

Định nghĩa 1.
Hệ phương trình đối xứng loại 1 của hai ẩn x, y là hệ mà khi ta thay thế x bởi y và y bởi x thì ta được hệ mới không thay đổi (thứ tự các phương trình trong hệ giữ nguyên).

Phương pháp:

- Đặt điều kiện nếu cần;
- Đặt $x + y = S; xy = P$ $(S^2 \geq 4P)$. Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P;
- Giải hệ ta tìm được S, P;
- x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

!. Chú ý:

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P;\ x^3 + y^3 = S^3 - 3SP.$$

Ví dụ 3.

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 - 3xy = -1. \end{cases}$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+2y+2xy=5, \\ x^2+4y^2=5. \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2y^2+6xy^2=9, \\ x^2+4y^4=5. \end{cases}$

Bài 31. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{y}=2, \\ x+2y=2. \end{cases}$

Bài 32. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=2, \\ 2x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=3. \end{cases}$

Bài 33. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=4y-1, \\ x^3+x^2y+x-3y=0. \end{cases}$

CHƯƠNG 4

BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1

BẤT ĐẲNG THỨC

1.1 Tóm tắt lý thuyết

1. Kiến thức cơ bản

Điều kiện		***Nội dung***	
Cộng hai vế với số bất kỳ		$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$	(1)
Nhân hai vế	một số dương: $c>0$	$a<b \Leftrightarrow ac<bc$	
	một số âm: $c<0$	$a<b \Leftrightarrow ac>bc$	
Cộng theo vế các bất đẳng thức cùng chiều		$\begin{cases} a>b \\ c>d \end{cases} \Leftrightarrow a+c>b+d$	(3)
Nhân từng vế bất dẳng thức khi biết nó dương		$\begin{cases} a>b>0 \\ c>d>0 \end{cases} \Leftrightarrow ac>bd$	(4)
Nâng lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a<b \Leftrightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}$	$(5a)$
	Mũ chẵn	$0<a<b \Leftrightarrow a^{2n}<b^{2n}$	$(5b)$
Lấy căn hai vế	$a>0$	$a<b \Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$	$(6a)$
	a bất kỳ	$a<b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$	$(6b)$
Nghịch đảo	Nếu a,b cùng dấu: $ab>0$	$a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$	$(7a)$
	Nếu a,b trái dấu: $ab<0$	$a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$	$(7b)$

2. Bất đẳng thức Cauchy(AM-GM)

1) Với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ thì ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

2) Với $\forall a \geq 0, b \geq 0$ thì ta có

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Hoặc có thể viết $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và $abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$.

3) Tổng quát với n số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ thì ta có

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

3. Bất đẳng thức Bunhiacopxki (Cauchy Schawarz)

1) Với $\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$ thì

$$(ax+by)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$$

hoặc

$$|ax+by| \le \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)} \qquad (4.1)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ $(a, b \neq 0)$.

2) Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$ và $a, b > 0$ thì

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \ge \frac{(x+y)^2}{a+b}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$.

1.2 Dạng toán và bài tập

DẠNG 1. Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương

Phương pháp giải

- Ta có thể áp dụng tương tự cho bộ ba số $(x;y;z)$ và $(a;b;c)$.
- Để chứng minh bằng phương pháp tương đương, có thể làm theo hai ý tưởng
  + Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết là luôn đúng.
  + Sử dụng một bất dẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.
- Một số bất đẳng thức luôn đúng

  a) $A^2 \ge 0$.

  b) $A^2+B^2 \ge 0$.

  c) $AB \ge 0$ với $A, B \ge 0$.

  d) $A^2+B^2 \ge \pm 2AB$.

Ví dụ mẫu 7

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+1 \ge ab+a+b$

Lời giải.

Đặt $S=a^2+b^2+1-ab-a-b$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2S &= 2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b = \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(a^2-2a+1\right)+\left(b^2-2b+1\right) \\ &= (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0, \forall a,b,c. \end{aligned}$$

Suy ra $S \geq 0$.
Hay $a^2+b^2+1-ab-a-b \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2+1 \geq ab+a+b$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$. □

Ví dụ 1.

Cho $a,b,c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2 \geq ab-bc-ca$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 2.

Chứng minh rằng: $a^2+b^2+4 \geq ab+2(a+b), \forall a,b \in \mathbb{R}$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....

Ví dụ 3.

Chứng minh rằng với $\forall a \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $a^4-4a+3 \geq 0$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.

Chứng minh rằng với mọi $a^2+b^2>0$ thì ta luôn có $a^2+ab+2b^2+\dfrac{ab^3}{a^2-ab+b^2}>0$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.

Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $\dfrac{a^4+b^4+1}{2} \geq a^2b^2-a^2+b^2$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 6.

Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 7.

Chứng minh rằng $a^4+b^4 \geq ab^3+a^3b$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 8.

Chứng minh rằng $x^5+y^5-x^4y-xy^4 \geq 0$, $\forall x+y \geq 0$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 9.

Chứng minh rằng $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$, $\forall a \geq 0; b \geq 0$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 34. Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

a) $(a+b)^2 \geq 4ab$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$.

b) $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$, $\forall a; b \geq 0$.

c) $a+b+\dfrac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$, $\forall a; b \geq 0$.

d) $a+b+c+\dfrac{3}{4} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, $\forall a; b; c \geq 0$.

e) $a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.

f) $a^4 \pm a+1 > 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

g) $a^4+3 \geq 4a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

h) $a^2+b^2+4 \geq ab+2a+2b$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.

i) $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc$, $\forall a\ ,b,\ c \in \mathbb{R}$.

j) $4a^4+5a^2 \geq 8a^3+2a-1$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

k) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 6abc$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.

l) $a^4+b^4+c^2+1 \geq 2a(ab^2-a+c+1)$, $\forall a; b; c \in \mathbb{R}$.

m) $x^2+y^2+5 > xy+x+3y$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$.

n) $4a^2+4b^2+6a+3 \geq 4ab$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$.

o) $x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4 > 0$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$.

p) $x^2+y^2+xy-3x-3y+3 \geq 0$, $\forall x; y \in \mathbb{R}$.

q) $x^2+y^2+xy-5x-4y+7 \geq 0$, $\forall x,\ y$.

r) $x^2+4y^2+3z^2+14 > 2x+12y+6z$, $\forall x,\ y,\ z$.

s) $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$.

t) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, $\forall x,\ y, z \in \mathbb{R}$.

u) $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z)$, $\forall x,\ y,\ z$.

v) $ab+2bc+3ca \leq 0$, $\forall a+b+c=0$.

DẠNG 2. Các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy

Ví dụ 10.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{8}{x-2}$ với $x>2$.

$\min\limits_{(2;+\infty)} y=5$ khi $x=6$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 11.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$.

$\min\limits_{(1;+\infty)} y=\dfrac{5}{2}$ khi $x=3$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 12.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-2+\dfrac{2}{x+2}$ với $x>-2$.

$\min\limits_{(-2;+\infty)} y=2\sqrt{2}-4$ khi $x=\sqrt{2}-2$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 13.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{3}{x-2}$ với $x > 2$.

$\min\limits_{(2;+\infty)} y = \dfrac{20}{3}$ khi $x = \dfrac{7}{2}$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 14.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 1}{3x-2}$ với $x > \dfrac{2}{3}$.

$\min\limits_{\left(\frac{2}{3};+\infty\right)} y = \dfrac{11}{3}$ khi $x = \dfrac{5}{3}$

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 35. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+8)}{x}$ với $x>0$.

$\min\limits_{(0;+\infty)} y=18$ khi $x=4$

Bài 36. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=9x+\dfrac{3x+1}{x-1}$ với $x>1$.

$\min\limits_{(1;+\infty)} y=24$ khi $x=\dfrac{5}{3}$

Bài 37. Với $x>0$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\frac{x+4}{x}+\frac{3x-10}{x+2}$$

.

$\min\limits_{(0;+\infty)} y=2$ khi $x=\dfrac{2}{3}$

Bài 38. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{4}{1-x}+\dfrac{1}{x}$ với $0<x<1$.

$\min\limits_{(0;1)} y=9$ khi $x=\dfrac{1}{3}$

Bài 39. Với $0<x<1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1-x}$.

$\min\limits_{(0;1)} y=2\sqrt{2}+3$ khi $x=\sqrt{2}-1$

Bài 40. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{5}{1-5x}\quad \text{với}\quad 0<x<\frac{1}{5}.$$

$\min\limits_{\left(0;\frac{1}{5}\right)} y=20$ khi $x=\dfrac{1}{10}$

Bài 41. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x)=\frac{6}{x}+\frac{2}{2-x}\quad \text{với}\quad 0<x<2.$$

$\min\limits_{(0;2)} y=2\sqrt{3}+4$ khi $x=3-\sqrt{3}$

Bài 42. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y=\frac{9}{2x-4}-\frac{32}{x};\quad \forall x\in(0;2)$$

$\max\limits_{(0;2)} y=-\frac{121}{4}$ khi $x=\frac{16}{11}$

Bài 43. Với $x>0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=3x+\frac{4}{x^2}$.

$\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ khi $x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

Bài 44. Với $x>0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=5x+\frac{100}{x^2}$.

$\min\limits_{(0;+\infty)} y=15\sqrt[3]{5}$ khi $x=2\sqrt[3]{5}$

Bài 45. Với $x>0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=5x+\frac{15}{x^3}$

$\min\limits_{(0;+\infty)} y=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ khi $x=\sqrt{3}$

Bài 46. Với $x>0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y=2x^2+\frac{4}{x}$

$\min\limits_{(0;+\infty)} y=6$ khi $x=1$

Ví dụ 15.

Với $x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]$, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x(5-2x)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 16.

Với $x\in\left[0;\frac{9}{5}\right]$, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=4x(9-5x)$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 47. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x)=(2x-1)(5-3x)$, biết rằng $\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{3}$.

Bài 48. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x(1-2x)^2$, biết rằng $0<x<\frac{1}{2}$

Bài 49. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}$.

Bài 50. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$.

Bài 51. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+2\sqrt{6-x}$.

Bài 52. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{6-x}$.

Bài 53. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}}{xy}$.

Bài 54. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{xy}{\sqrt{(x-4)(y-1)}},\forall x>4,y>1$.

Bài 55. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{1-x^3}},\forall x\in(0;1)$.

Bài 56. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{16c^2}{a+b}\ge\dfrac{64c-a-b}{9}$.

PHẦN

HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1

VECTƠ

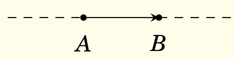
BÀI 1 VEC-TƠ

1.1 Tóm tắt lý thuyết

1.1.1 Khái niệm véc-tơ

- Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu véc-tơ có điểm đầu A, điểm cuối B là $\overrightarrow{AB}$.
- Giá của véc-tơ là đường thẳng chứa véc-tơ đó.
- Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.

Ví dụ: véc-tơ $\overrightarrow{AB}$

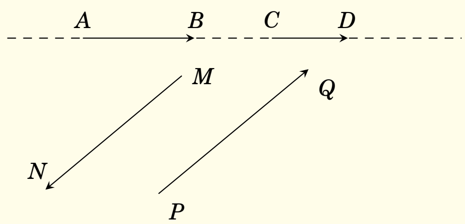


- Điểm đầu A;
- Điểm cuối B;
- Phương (giá): Đường thẳng qua hai điểm A, B;
- Hướng từ A đến B.

1.1.2 Hai véc-tơ cùng phương

Định nghĩa 1.
Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Các ví dụ



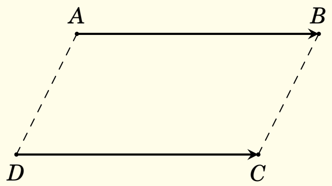
$\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{PQ}$.

Nhận xét.

- Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

1.1.3 Hai véc-tơ bằng nhau

Định nghĩa 2.
Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ cùng hướng với } \overrightarrow{CD} \\ AB = CD. \end{cases}$$

1.1.4 Véc-tơ-không

Định nghĩa 3.
Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, kí hiệu là $\vec{0}$.

1.2 Các ví dụ

Ví dụ mẫu 8

Cho hai điểm phân biệt A, B. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua A và B; Có bao nhiêu véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A hoặc B.

Lời giải.

- Có một đường thẳng đi qua A và B.
- Có 2 véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A hoặc B: $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

□

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, AC.

a) Nêu các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là A, B, C.

b) Nêu các véc-tơ bằng $\overrightarrow{PQ}$.

c) Nêu các véc-tơ đối của $\overrightarrow{PQ}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.

Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lược là trung điểm của các cạnh BC, AB.

a) Các véc-tơ nào cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$.

b) Các véc-tơ nào ngược hướng với $\overrightarrow{BC}$.

c) Nêu các các véc-tơ bằng nhau.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm các véc-tơ khác $\vec{0}$ thỏa

a) Có điểm đầu và điểm cuối là A, B, C, D.

b) Các véc-tơ bằng nhau có điểm đầu hoặc điểm cuối là O.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy chỉ ra các véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là một trong bốn điểm A, B, C, D. Trong số các véc-tơ trên, hãy chỉ ra

a) Các véc-tơ cùng phương.

b) Các cặp véc-tơ cùng phương nhưng ngược hướng.

c) Các cặp véc-tơ bằng nhau.

Bài 2. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O.

a) Tìm các véc-tơ khác véc-tơ-không và cùng phương với $\overrightarrow{AO}$.

b) Tìm các véc-tơ bằng với các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

c) Tìm các véc-tơ bằng với các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu là O, D, C.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

a) Tìm các véc-tơ bằng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm các véc-tơ bằng với các véc-tơ $\overrightarrow{OA}$.

c) Vẽ các véc-tơ bằng với $\overrightarrow{OA}$ có điểm cuối là các điểm A, B, C, D.

Bài 4. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó?

Bài 5. Cho năm điểm A,B,C,D,E,D phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó?

Bài 6. Cho tam giác ABC có A',B',C' lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{A'B'}$.

b) Tìm các véc-tơ bằng với $\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{C'A'}$.

Bài 7. Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C. Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,CD,AD,BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{QN},\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{PN}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Véc-tơ là một đoạn thẳng

A. Có hướng.
B. Có hướng dương và hướng âm.
C. Có hai đầu mút.
D. Thỏa mãn ba tính chất trên.

Câu 2. Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

A. Hai véc-tơ bằng nhau.
B. Hai véc-tơ đối nhau.
C. Hai véc-tơ cùng hướng.
D. Hai véc-tơ cùng phương.

Câu 3. Hai véc-tơ đối nhau khi và chỉ khi

A. Cùng hướng và có độ dài bằng nhau.
B. Song song và có độ dài bằng nhau.
C. Cùng phương và có độ dài bằng nhau.
D. Ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

Câu 4. Hai véc-tơ bằng nhau khi và chỉ khi

A. Cùng hướng và cùng độ dài.
B. Cùng phương.
C. Cùng hướng.
D. Có cùng độ dài.

Câu 5. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Khi đó khẳng định nào sau đây **sai**?

A. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
B. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
C. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
D. A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $AC=BC$.

Câu 6. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
B. Có ít nhất hai véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
C. Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
D. Không có véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.

Câu 7. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
B. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
C. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
D. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài.

Câu 8. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài cùng chúng không bằng nhau.

(B) Hai véc-tơ không bằng nhau thì độ dài cùng chúng không cùng phương.

(C) Hai véc-tơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song nhau.

(D) Hai véc-tơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

Câu 9. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương.

(B) Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

(C) Véc-tơ không là véc-tơ không có giá.

(D) Điều kiện đủ để hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Câu 10. Cho hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) Không có véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(B) Có vô số véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(C) Có một véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

(D) Có hai véc-tơ nào cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 11. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Có vô số vectơ $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.

(B) Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = \vec{a}$.

(C) Có duy nhất một $\vec{u}$ mà $\vec{u} = -\vec{a}$.

(D) Không có vectơ $\vec{u}$ nào mà $\vec{u} = \vec{a}$.

Câu 12. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

(B) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

(C) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

(D) Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

Câu 13. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Hai vectơ cùng phương thì bằng nhau.

(B) Hai vectơ ngược hướng thì có độ dài không bằng nhau.

(C) Hai vectơ cùng phương và cùng độ dài thì bằng nhau.

(D) Hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài thì bằng nhau.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định **sai**?

(A) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

(B) $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(D) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Câu 15. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) Vectơ là một đường thẳng có hướng.

(B) Vectơ là một đoạn thẳng.

(C) Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

(D) Vectơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Câu 16. Cho vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) Được gọi là vectơ suy biến.

(B) Được gọi là vectơ có phương tùy ý.

(C) Được gọi là vectơ không, kí hiệu là $\vec{0}$.

(D) Là vectơ có độ dài không xác định.

Câu 17. Vectơ có điểm đầu D và điểm cuối E được kí hiệu như thế nào là đúng?

(A) DE.

(B) ED.

(C) $\left|\overrightarrow{DE}\right|$.

(D) $\overrightarrow{DE}$.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$, khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
(B) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.
(C) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
(D) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 19. Cho tam giác ABC có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 6.

Câu 20. Cho tam giác đều ABC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BC}$.
(C) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.
(D) $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BC}$.

Câu 21. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng.
(B) Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.
(C) Hai vectơ cùng phương thì có giá song song nhau.
(D) Hai vectơ cùng hướng thì có giá song song nhau.

Câu 22. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, M là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\forall M$, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$.
(B) $\exists M$, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$.
(C) $\forall M$, $\overrightarrow{MA}\neq\overrightarrow{MB}\neq\overrightarrow{MC}$.
(D) $\exists M$, $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$.

Câu 23. Cho hai điểm phân biệt A, B. Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B là

(A) 2. (B) 6. (C) 13. (D) 12.

Câu 24. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AC}=a$.
(B) $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$.
(C) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a$.
(D) $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

Câu 25. Gọi C là trung điểm của đoạn AB. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.
(B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
(C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.
(D) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\overrightarrow{CB}$.

Câu 26. Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
(B) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
(C) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ gọi là bằng nhau khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình vuông.
(D) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Câu 27. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D?

(A) 4. (B) 8. (C) 10. (D) 12.

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. D	4. A	5. D	6. C	7. A	8. C	9. B	10. A
11. A	12. B	13. D	14. A	15. C	16. D	17. D	18. B	19. D	20. A
21. B	22. C	23. A	24. C	25. B	26. D	27. D			

BÀI 2
TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

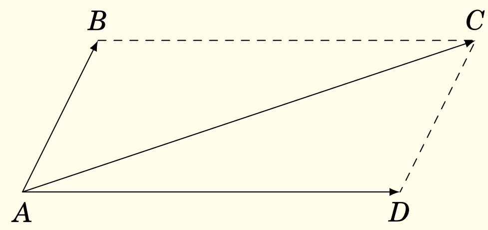
2.1 Tóm tắt lý thuyết

2.1.1 Tổng của hai vectơ

- Qui tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C ta có $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$.
- Quy tắc ba điểm còn được gọi là hệ thức Charles dùng để cộng các vectơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều vectơ như sau:

$$\overrightarrow{A_1A_n}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

- Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\end{cases}$.



- **Chú ý:** Quy tắc hình bình hành dùng để **cộng các vectơ chung gốc.**
- Các tính chất:
  - $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
  - $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
  - $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

2.1.2 Hiệu của hai vectơ

- Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Tổng của vectơ $\vec{a}$ với vectơ đối $-\vec{a}$ là vectơ $\vec{0}$. Nghĩa là $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.
- Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Lưu ý. Vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

2.2 Các dạng toán

DẠNG 1. Chứng minh đẳng thức vectơ

Ta sử dụng các quy tắc sau.

- Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, chèn điểm C.
- Quy tắc ba điểm (phép trừ vectơ): $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.
- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành $ABCD$, ta luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Chú ý: Về mặt thực hành, ta có thể lựa chọn một trong các hướng sau để thực hiện biến đổi.

- ***Hướng 1:*** Biến đổi một vế thành vế còn lại (Vế trái (VT) $\Rightarrow$ Vế phải (VP) hoặc ngược lại).
  - Nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện đơn giản biểu thức.
  - Nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.
- ***Hướng 2:*** Biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- ***Hướng 3:*** Biến đổi đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ mẫu 9

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. □

Ví dụ 1.

Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

DẠNG 2. Tính độ dài của vectơ tổng

Phương pháp: Để tính $\left|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}\right|$ ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1. Biến đổi và rút gọn biểu thức véctơ $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$ dựa vào qui tắc ba điểm, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm,.... sao cho $\vec{v}$ là đơn giản nhất.

Bước 2. Tính độ dài (mô-đun) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

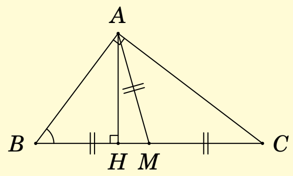
Chú ý

Một số kiến thức hình học phẳng thường được sử dụng

- Chiều cao tam giác đều $=$ cạnh $\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
- Đường chéo hình vuông $=$ cạnh $\cdot \sqrt{2}$.

Cho tam giác ABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

- Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \begin{cases} BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}. \end{cases}$



- Trung tuyến $AM = \dfrac{1}{2}BC$.
- $AB^2 = BH \cdot BC$ và $AC^2 = CH \cdot BC$.
- $\dfrac{1}{HA^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB \cdot HC$.
- $\sin \widehat{ABC} = \dfrac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \dfrac{AC}{BC}$; $\quad \cos \widehat{ABC} = \dfrac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \dfrac{AB}{BC}$; $\quad \tan \widehat{ABC} = \dfrac{\text{đối}}{\text{kề}} = \dfrac{AC}{AB}$.

Ví dụ mẫu 10

Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng 10. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

- Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=10$.

- Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
  Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=10$.

□

Ví dụ 4.

Cho tam giác ABC vuông tại A, có cạnh $AB=5$ và $AC=12$. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành tâm O. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Bài 2. Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Cho 5 điểm A, B, C, D, E tùy ý. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

Bài 4. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

c) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

d) Nếu $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Bài 5. Cho 7 điểm A, B, C, D, E, F, G. Chứng minh rằng.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{GF}$.

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{0}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=AC=2$ (cm). Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Bài 7. Cho tam giác đều ABC cạnh a, trong tâm G. Tính các giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$. b) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$. c) $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

Bài 8. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=5(\text{cm}), \text{BC}=10(\text{cm})$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$?

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=60^0, BC=2(\text{cm})$. Tìm $|\overrightarrow{AB}|,|\overrightarrow{AC}|,|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|,|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$?

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại B có $\widehat{A}=30°, AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính $|\overrightarrow{AC}|,|\overrightarrow{AI}|,|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|,|\overrightarrow{BC}|$?

Bài 11. Cho hình thang vuông tại A và D có $AB=AD=a, \widehat{C}=45°$. Tính $\left|\overrightarrow{CD}\right|,|\overrightarrow{BD}|$?

Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ACEF$.

a) Dựng các điểm M,N sao cho $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FN}=\overrightarrow{BD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MN}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC.

a. Xác định các điểm D và E sao cho: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$.

b. Chứng minh C là trung điểm của đoạn thẳng ED.

Bài 14. Cho hình bình hành $ABCD$.

a. Hãy xác định các điểm M,P sao cho $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AB}$.

b. Chứng minh rằng B là trung điểm của đoạn thẳng DP.

Bài 15. Cho 4 điểm A,B,C,D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AD$ và BC có cùng trung điểm.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ, BCPQ, CARS$. Chứng minh $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{0}$

Bài 17. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ đều là 100 N và $\widehat{AMB}=60°$. Tìm cường độ và hướng của $\overrightarrow{F}_3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Chọn phát biểu **sai**?

A. Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}, k\neq 0$.

B. Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{BC}, k\neq 0$.

C. Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}, k\neq 0$.

D. Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Câu 2. Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạnAB.

A. $OA=OB$. B. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$. C. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

Câu 3. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. C. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC đều có độ dài canh bằng a. Độ dài $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ bằng

A. a. B. $2a$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Cho tam giácABC, trọng tâm là G. Phát biểu nào là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AC}|$.

B. $|\overrightarrow{GA}|+|\overrightarrow{GB}|+|\overrightarrow{GC}|=0$.

C. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=\overrightarrow{AC}$.

D. $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}|=0$.

Câu 7. Điều kiện nào dưới đây là điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB .

A. $OA=OB$. B. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$. C. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$. C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3$; $BC=5$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 10. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ bằng

A. a. B. $2a$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Cho bốn điểm A,B,C,D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{AC}$. D. $2\overrightarrow{DC}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,AC,BC. Khi đó $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{PB}$. C. $\overrightarrow{AP}$. D. $\overrightarrow{MN}$.

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

A. $2a\sqrt{2}$. B. $3a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $2a$.

Câu 15. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và có $AB = 3$, $AC = 4$. Véc-tơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

A. $\sqrt{13}$. B. $2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $2a$. D. a.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB = 4a$ và $AD = 3a$. Khi đó độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ bằng

A. $7a$. B. $6a$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $5a$.

Câu 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Phát biểu nào là đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.
B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
C. $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right| = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 20. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. B	4. C	5. A	6. D	7. D	8. D	9. B	10. A
11. A	12. C	13. D	14. A	15. B	16. A	17. D	18. D	19. D	20. B

BÀI 3
TÍCH CỦA VÉC-TƠ VỚI MỘT SỐ

3.1 Tóm tắt lý thuyết

3.1.1 Tích của một số đối với một véc-tơ

Định nghĩa 1.
Cho một số thực $k \neq 0$ và một véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.
Tích $k \cdot \vec{a}$ là một véc-tơ có cùng hướng $\vec{a}$ và $|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$ khi $k > 0$.
Tích $k \cdot \vec{a}$ là một véc-tơ có ngược hướng $\vec{a}$ và $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|$ khi $k < 0$.

Tính chất.

- $k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$.
- $(k+h)\cdot\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$.
- $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.
- $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$.

Định lí 1.
Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\left(\vec{b} \neq \vec{0}\right)$ cùng phương là tồn tại một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

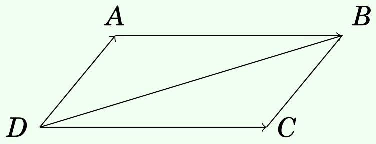
3.1.2 Trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

- I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.
- I là trung điểm AB và M là điểm bất kì, ta luôn có $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.
- G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm bất kì $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

3.2 Các dạng toán

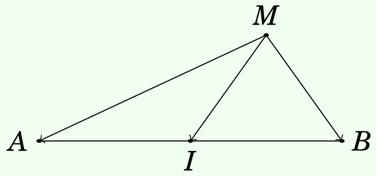
DẠNG 1. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

1. Quy tắc ba điểm: Chèn C vào véc-tơ $\overrightarrow{AB}$
   - Cộng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$ (chèn giữa).
   - Trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ (C cuối - C đầu).
2. Quy tắc hình bình hành: Cho hình bình hành $ABCD$ (quy tắc đường chéo hbh):



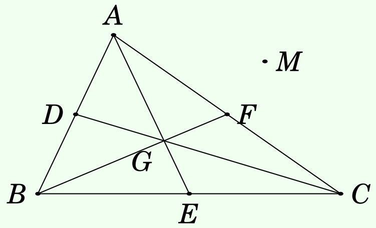
$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}.$$

3. Tính chất trung điểm: Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ.



$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.$$

4. Tính chất trọng tâm: G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ.



✔ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

✔ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

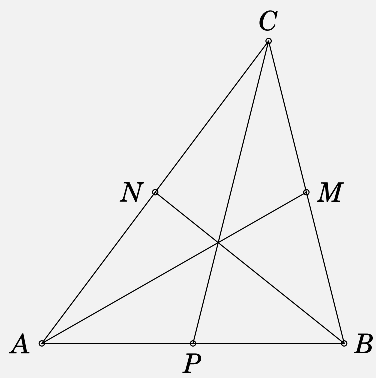
Ví dụ mẫu 11

Cho tam giác ABC có 3 trung tuyến là AM, BN, CP. Chứng minh

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

✍ Lời giải.



1) Ta có $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}\right) = \vec{0}$.

2) Vì P là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$. Khi đó ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM}$.
Mà PM là đường trung bình trong tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ suy ra $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

□

Ví dụ 1.

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AC, BD. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$$

.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{ED}$.

Bài 2. Cho các điểm bất kì. Hãy chứng minh đẳng thức

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

e) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

f) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

g) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

h) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

i) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$.

j) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Bài 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{IJ}$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm các đoạn AD, BC.

1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{MN}$.

3) Gọi I là trung điểm MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và I là trung điểm AM.

1) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

2) Với điểm O bất kỳ. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OI}$

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD. Chứng minh:

1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{AB}$.

3) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EC}$.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm CD. Lấy N trên đoạn BM sao cho $BN=2MN$. Chứng minh rằng

1) Chứng minh rằng: $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{MN}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$.

3) Chứng minh rằng: $3\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}$.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD.

1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm BC và AB, điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC=2NA$ và gọi K là trung điểm MN.

1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm DE và I là trung điểm BC.

1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC với I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA. Gọi D thuộc đoạn BC sao cho $3BD=2BC$ và M là trung điểm AD.

1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

2) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{HB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

c) Chứng minh $\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{OA}$.

d) Chứng minh $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

e) Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

f) Chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Bài 15. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF$, $BCGH$, $CDIJ$, $DAKL$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{IL}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{EL}-\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GJ}$.

Bài 16. Chứng minh rằng các tam giác ABC, $A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi đẳng thức sau được thỏa mãn $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

DẠNG 2. Xác định điểm thỏa điều kiện cho trước

- Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{v}$, trong đó A là điểm cố định, $\vec{v}$ là một vectơ cố định.
- Lấy điểm A là gốc dựng véc-tơ bằng $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

Ví dụ 2.

Cho tam giác ABC. Hãy xác định vị trí điểm M thỏa điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

DẠNG 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ (1).
  Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:
  - Sử dụng các quy tắc biến đổi véc-tơ.
  - Xác định (tính) véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

  Chú ý:
  - Dựa vào lời bình 3, ta có thể suy luận được phát biểu sau: “Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC}=\alpha\overrightarrow{MA}+(1-\alpha)\overrightarrow{MB}$ với điểm M

tùy ý và số thực α bất k". Đặc biệt khi $0 \le \alpha \le 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k.

- Để chứng minh $AB \parallel CD$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$.

Ví dụ 3.

Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 4.

Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $BM = \dfrac{2}{3}BC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.

Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy tính các véc-tơ sau theo $\vec{a}$, $\vec{b}$.

a) $\overrightarrow{DI}$ với I là trung điểm BC.

b) $\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm tam giác CDI.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 6.

Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N là điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Biểu thị (phân tích) véc-tơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Bài 2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi I là điểm đối xứng của B qua G và M là trung điểm của BC.

1) Phân tích $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2) Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

3) Phân tích $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{MI} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

4) Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AI}$. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AI}$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD và G là trọng tâm tam giác BCI. Hãy phân tích $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{7}{6}\overrightarrow{AB}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$. Gọi J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

1) Phân tích $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

2) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến là AK và BM. Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.
$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA}$. Chứng minh các điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi P, Q, lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh các điểm P, Q, G thẳng hàng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó $\overrightarrow{GA}$ bằng

(A) $2\overrightarrow{GM}$. (B) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. (C) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. (D) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến AM. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

(A) $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.
(C) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MG}$.

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

(A) $\overrightarrow{AC}$. (B) $2\overrightarrow{AC}$. (C) $3\overrightarrow{AC}$. (D) $5\overrightarrow{AC}$.

Câu 4. Nếu có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì

(A) điểm B trùng với điểm C.
(B) tam giác ABC là tam giác đều.
(C) điểm A là trung điểm của đoạn BC.
(D) tam giác ABC là tam giác cân.

Câu 5. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1, trọng tâm G. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $ABCD$ là hình bình hành.
(B) $DA=BC$.
(C) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
(D) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Câu 7. Cho ba điểm M,N,P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Cặp véc-tơ cùng hướng là

(A) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. (B) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. (C) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. (D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 8. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$. (B) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. (C) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. (D) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3, AD=4$. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

(A) 6. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3, BC=5$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ bằng

(A) 6. (B) 8. (C) 13. (D) 4.

Câu 11. Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. (B) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MB}$. (C) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 12. Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. (B) $\left|\overrightarrow{AH}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\overrightarrow{HC}\right|$. (C) $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}$. (D) $\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{HC}\right|$.

Câu 13. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Kết luận nào sau đây đúng?

(A) Không xác định được $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.
(B) $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$.
(C) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
(D) $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}$.

Câu 14. Cho tam giác MNP vuông tại M và $MN=3\,\text{cm}, MP=4\,\text{cm}$. Độ dài của $\overrightarrow{NP}$ bằng

(A) $4\,\text{cm}$. (B) $5\,\text{cm}$. (C) $6\,\text{cm}$. (D) $3\,\text{cm}$.

Câu 15. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a và góc A bằng 60°. Kết luận nào đúng?

(A) $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$. (B) $|\overrightarrow{OA}|=a$. (C) $|\overrightarrow{OA}|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $|\overrightarrow{OA}|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$. (B) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. (C) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$. (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}$.

Câu 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$. (B) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

(C) $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$.

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3, BC=5$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$.

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 3.

Câu 19. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, O. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$. (B) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$. (C) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Câu 20. Điều kiện cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB là

(A) $OA=OB$. (B) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$. (C) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{BO}$. (D) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|$ bằng

(A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) a. (C) $2a$. (D) $a\sqrt{3}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB=3, AC=4$. Véc-tơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

(A) $2\sqrt{13}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\sqrt{13}$.

Câu 23. Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ bằng

(A) $a\sqrt{3}$. (B) $2a$. (C) $2a\sqrt{3}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC. Hỏi $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng véc-tơ nào?

(A) $\overrightarrow{PB}$. (B) $\overrightarrow{AP}$. (C) $\overrightarrow{MN}$. (D) $\overrightarrow{AM}$.

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$, giao điểm của hai đường chéo là O. Tìm mệnh đề **sai**?

(A) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$. (B) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

(C) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$.

Câu 26. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Phát biểu nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|$. (B) $\left|\overrightarrow{GA}\right|+\left|\overrightarrow{GB}\right|+\left|\overrightarrow{GC}\right|=0$.

(C) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\overrightarrow{AC}$. (D) $\left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=0$.

Câu 27. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào **sai**?

(A) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. (B) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

(C) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$. (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Câu 28. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ bằng

(A) $\overrightarrow{AC}$. (B) $2\overrightarrow{DC}$. (C) $\vec{0}$. (D) $\overrightarrow{BD}$.

Câu 29. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. (C) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. (D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 30. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

(A) $a\sqrt{2}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $2a$. (D) a.

Câu 31. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{5}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 32. Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB=4a$ và $AD=3a$. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

A. $5a$. B. $6a$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $7a$.

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $A\sqrt{2}$. B. $2a$. C. $2a\sqrt{2}$. D. $3a$.

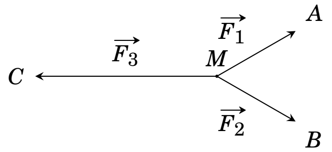
Câu 34. Cho tam giác đều ABC cạnh $4a$. Độ dài $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

A. $2a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $4a\sqrt{3}$.

Câu 35. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên.

Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $100N$ và $\widehat{AMB}=60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ bằng

A. $50\sqrt{2}N$. B. $50\sqrt{3}N$. C. $25\sqrt{3}N$. D. $100\sqrt{3}N$.



Câu 36. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a, tâm O và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Giá trị $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|$ bằng

A. $A\sqrt{2}$. B. $2a$. C. 0. D. A.

Câu 38. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Giá trị của $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. B. a. C. $\dfrac{a}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2a$, $BD=a$. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$ bằng

A. $a\sqrt{5}$. B. $5a$. C. $3a$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 40. Cho tam giác ABC, E là điểm trên đoạn BC sao cho $BE=\dfrac{1}{4}BC$. Tìm khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. B	4. A	5. B	6. C	7. A	8. D	9. D	10. D
11. A	12. D	13. C	14. B	15. C	16. C	17. D	18. A	19. C	20. D
21. B	22. A	23. B	24. B	25. B	26. D	27. D	28. C	29. B	30. A
31. A	32. A	33. C	34. D	35. D	36. A	37. A	38. B	39. A	40. A

BÀI 4
HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

4.1 Tóm tắt lý thuyết

4.1.1 TRỤC TỌA ĐỘ

Định nghĩa 1.

- Trục tọa độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một véc-tơ đơn vị $\vec{e}$. Kí hiệu $(O;\vec{e})$.

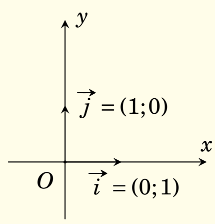
  - Điểm O gọi là gốc tọa độ.
  - Hướng của véc-tơ đơn vị là hướng của trục.

- Tọa độ của vec-tơ trên trục: $\vec{u} = (a) \Leftrightarrow \vec{u} = a \cdot \vec{e}$.
- Tọa độ của điểm trên trục: $\overrightarrow{OM} = k \cdot \vec{e}$. Ta nói số k là tọa độ của điểm M trên trục.
- Độ dài đại số của véc-tơ trên trục: $\overline{AB} = a \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{e}$.
- Chú ý
  - Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$.
  - Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
  - Nếu hai điểm A và B trên trục $(O;\vec{e})$ có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.
  - Với 3 điểm A, B, C tùy ý trên trục, ta có $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

4.1.2 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Định nghĩa 2.

Hệ trục tọa độ Oxy là hệ gồm hai trục Ox, Oy vuông góc với nhau.
Trong đó Ox là trục hoành, Oy là trục tung, O là gốc tọa độ và $\vec{i} = (0;1)$, $\vec{j} = (1;0)$ là hai véc-tơ đơn vị.



4.1.3 TỌA ĐỘ VÉC-TƠ

Định nghĩa 3.
$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ví dụ 1.

$\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u}(\ldots;\ldots)$ hoặc $\vec{a} = 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a}(\ldots;\ldots)$.

4.1.4 TỌA ĐỘ ĐIỂM

Định nghĩa 4.
$M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ví dụ 2.

$\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow A(\ldots;\ldots)$ hoặc $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} \Leftrightarrow B(\ldots;\ldots)$.

Tính chất. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó ta có các tính chất sau

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$
- $k\vec{a} = (kx_1; kx_2)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
- $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
- $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = k\vec{b}$

$\longrightarrow$ (hai véc-tơ bằng nhau khi hoành = hoành và tung = tung)

$\longrightarrow$ (± hai véc-tơ = (hoành ± hoành ; tung ± tung)

$\longrightarrow$ (nhân phân phối)

$\longrightarrow$ (tích hai véc-tơ = hoành · hoành + tung · tung)

$\longrightarrow$ (mô-đun của véc-tơ = căn hoành bình + tung bình)

$\longrightarrow$ (cos của góc giữa hai véc-tơ = $\dfrac{\text{tích vô hướng}}{\text{tích độ dài}}$)

$\longrightarrow$ (hai véc-tơ cùng phương thì véc-tơ này gấp k lần véc-tơ kia)

Tính chất. Cho tam giác ABC có $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$. Khi đó

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$ $\longrightarrow$ (nhớ: $B-A$)
- I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$ $\longrightarrow$ (nhớ: $I=\dfrac{A+B}{2}$)
- G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{G} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+x_C}{3}\end{cases}$ $\longrightarrow$ (nhớ: $G=\dfrac{A+B+C}{3}$)

DẠNG 1. Bài toán cơ bản

Ví dụ 3.

Cho ba điểm $A(-2;1)$, $B(2;-3)$, $C(0;3)$.

1) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
$\overrightarrow{AB}=(4;-4)$, $\overrightarrow{BC}=(-2;6)$, $\overrightarrow{CA}=(-2;-2)$, $AB=4\sqrt{2}$, $BC=2\sqrt{10}$, $CA=2\sqrt{2}$

2) Tìm chu vi của tam giác ABC. $P=4\sqrt{2}+2\sqrt{10}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

3) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC. $G\left(0;\frac{1}{3}\right)$

4) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. $M(0;-1)$, $N(1;0)$

5) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$. $E(2;-11)$

6) Tìm điểm $F\in Ox$ để A, B, F thẳng hàng. $F(-1;0)$

Lời giải.

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ba điểm $A(-2;-1)$, $B(-1;4)$, $C(3;0)$.

1) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

$\overrightarrow{AB}=(1;5)$, $\overrightarrow{BC}=(4;-4)$, $\overrightarrow{CA}=(-5;-1)$, $AB=\sqrt{26}$, $BC=4\sqrt{2}$, $CA=\sqrt{26}$

2) Tìm chu vi của tam giác ABC. $P=2\sqrt{26}+4\sqrt{2}$

3) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC. $G(0;1)$

4) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. $M\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, $N(1;2)$

5) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EB}$. $E\left(-\frac{11}{2};\frac{11}{2}\right)$

6) Tìm điểm $F\in Oy$ để A, C, F thẳng hàng. $F\left(0;-\frac{3}{5}\right)$

Bài 2. Cho ba điểm $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(-1;-5)$.

1) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
$\overrightarrow{AB}=(6;3)$, $\overrightarrow{BC}=(-3;-9)$, $\overrightarrow{CA}=(-3;6)$, $AB=3\sqrt{5}$, $BC=3\sqrt{10}$, $CA=3\sqrt{5}$

2) Tìm chu vi của tam giác ABC. $P=6\sqrt{5}+3\sqrt{10}$

3) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC. $G(-1;0)$

4) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. $M\left(-1;\frac{5}{2}\right)$, $N\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

5) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{CB}$. $E(17;34)$

6) Tìm điểm $F\in Oy$ để A, B, F thẳng hàng. $F(0;3)$

Bài 3. Cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(0;4)$, $C(3;2)$.

1) Tính $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ và AB, BC, CA. Chứng tỏ A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
$\overrightarrow{AB}=(-1;6)$, $\overrightarrow{BC}=(3;-2)$, $\overrightarrow{CA}=(-2;-4)$, $AB=\sqrt{37}$, $BC=\sqrt{13}$, $CA=2\sqrt{5}$

2) Tìm chu vi của tam giác ABC. $P=\sqrt{37}+\sqrt{13}+2\sqrt{5}$

3) Tìm tọa độ trọng tâm G của ABC. $G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$

4) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. $M\left(\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{3}{2};3\right)$

5) Tìm điểm E thỏa mãn $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$. $E(-5;2)$

6) Tìm điểm $F\in Ox$ để A, C, F thẳng hàng. $F(2;0)$

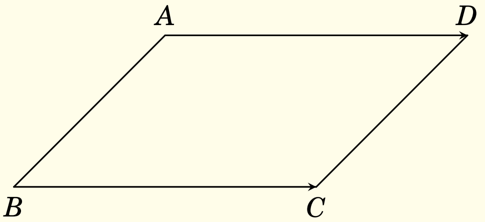
DẠNG 2. Tìm điểm đặc biệt

Nhóm 1: TÌM ĐỈNH THỨ TƯ CỦA HÌNH BÌNH HÀNH

Cần nhớ: Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành, ta làm theo các bước:

☑ Gọi $D(x,y)$ và tính $\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(\cdots\cdots;\cdots\cdots)\\ \overrightarrow{BC}=(\cdots\cdots;\cdots\cdots).\end{cases}$

☑ Sử dụng $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Hoành } = \text{Hoành}\\ \text{Tung} = \text{Tung}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=?\\ y=?\end{cases}$



Lưu ý: Có thể tìm trung điểm của AC từ đó suy ra tọa độ điểm D.

Ví dụ 4.

Cho ba điểm $A(-6;2), B(2;6), C(7,-8)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành.

$D(-1;-12)$; $I\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 5.

Cho ba điểm $A(-4;1), B(2;4), C(-1;-5)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành.

$D(-7;-8)$; $I\left(-\frac{5}{2};-2\right)$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ba điểm $A(4;3), B(-1;2), C(5;-2)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành.

$D(10;1)$, $I\left(\frac{9}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $A(-2;1)$,$B(4;1)$ và $C(-2;7)$. Tìm tọa độ của điểm D để $ABDC$ là hình vuông.

$D(4;7)$.

Bài 3. Cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(9;3)$. Tìm điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. $D(7;1)$.

Bài 4. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(5;1)$, $C(3;-2)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. $D(-3;-2)$.

Bài 5. Cho ba điểm $A(-2;-1)$, $B(1;3)$, $C(10;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành. $D(7;-1)$, $I(4;1)$.

Bài 6. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(7;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành. $D(5;1)$, $I(3;2)$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $A(-1;0)$, $B(2;3)$ và $C(5;0)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình vuông.

$D(2;-3)$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có $A(4;0)$, $B(0;4)$ và $C(0;-4)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình vuông.

$D(-4;0)$.

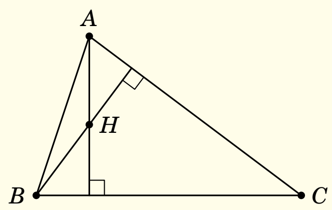
Nhóm 2: TÌM TỌA ĐỘ TRỰC TÂM

Cần nhớ

Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC).

Phương pháp làm:

Giải hệ phương trình $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0.\end{array}\right.$



Ví dụ 6.

Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

$H\left(\frac{26}{33};\frac{146}{33}\right)$.

Lời giải.

....

Ví dụ 7.

Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(2;4)$, $B(0;2)$, $C(-1;3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

$H(0;2)$.

Lời giải.

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(-2;-1)$, $B(3;0)$, $C(-1;4)$. Tìm tọa độ điểm H là trực tâm của tam giác ABC.

$H\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(1;2)$, $B(3;4)$, $C(-2;5)$. Tìm tọa độ điểm M để gốc tọa độ O là trực tâm của tam giác ABM.

$M(-11;11)$.

Bài 3. Cho tam giác ABC, biết là $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

$H\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Bài 4. Cho tam giác ABC, biết tọa độ các đỉnh là $A(2;5)$, $B(-3;-2)$, $C(5;-1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

$H\left(\frac{43}{17};\frac{13}{17}\right)$.

Bài 5. Cho tam giác ABC với $A(1;-4)$, $B(-2;3)$ và $H\left(\frac{17}{8};\frac{13}{8}\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm C.

$C(3;2)$.

Bài 6. Cho tam giác ABC với $A(4;-1)$, $C(-2;2)$ và $H\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm B.

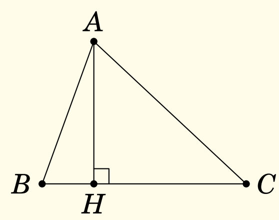
$B(-2;-4)$.

Nhóm 3: TÌM TỌA ĐỘ CHÂN ĐƯỜNG CAO

Cần nhớ

Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC).

Phương pháp: $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ B, H, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương.} \end{cases}$



Ví dụ 8.

Cho tam giác ABC với $A(1;-3)$, $B(-5;6)$ và $C(0;1)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A đến BC. Tính diện tích tam giác ABC.

$H\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ví dụ 9.

Cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$ và $C(2;-2)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh B đến AC. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Tìm chân đường cao kẻ từ C đến AB. Biết $A(0;4)$, $B(-2;1)$, $C(0;2)$. $H\left(\frac{-12}{13};\frac{34}{13}\right)$

Bài 8. Tìm chân đường cao H kẻ từ B đến AC. Biết $A(-2;1)$, $B(0;6)$, $C(0;-4)$. $H\left(\frac{-100}{29};\frac{134}{29}\right)$

Bài 9. Cho tam giác ABC có $A(3;-1)$, $B(6;0)$ và $C(1;5)$. Tìm M trên đường thẳng BC sao cho AM có độ dài ngắn nhất. $M(5;1)$

Bài 10. Cho tam giác ABC có $A(1;5)$, $B(-5;2)$ và $C(-1;9)$. Tìm M trên đường thẳng BC sao cho AM có độ dài ngắn nhất. $M\left(\frac{-29}{13};\frac{89}{13}\right)$

Nhóm 4. TÌM TÂM ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP TAM GIÁC

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là giao điểm của của ba đường trung trực của tam giác ABC.

Chú ý

- Nếu tam giác ABC là tam giác vuông thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trung điểm cạnh huyền của tam giác ABC.
- Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.

Ví dụ 10.

Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$. $I\left(\frac{7}{2};7\right)$

Lời giải.

....

....

....

....

Ví dụ 11.

Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(9;-1)$. $I(4;-1)$

Lời giải.

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

a) Tính chu vi của tam giác ABC. $6+6\sqrt{5}$

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;-1)$, $B(0;5)$, $C(-3;7)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;1)$, $B(3;5)$, $C(8;-1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $I\left(\frac{79}{22};\frac{9}{22}\right)$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(1;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $I(1;3)$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C lập thành tam giác. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=64$

b) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn BC, tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC. $I\left(\frac{9}{2};-1\right)$, $G(1;0)$

c) Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. $D(-1;-12)$

d) Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$. $H\left(\frac{26}{33};\frac{146}{33}\right)$

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;4)$, $B(0;2)$, $C(-1;3)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tính độ dài đường trung tuyến CM của tam giác ABC. $CM=2$

c) Tìm D để B là trọng tâm của tam giác ACD. $D(1;-1)$

d) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC. $H(0;2)$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\triangle ABC$ có $A(-2;0)$, $B(5;3)$, $C(3;-2)$.

1) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông cân.

2) Tìm điểm E sao cho A là trung điểm của BE. $E(-9;-3)$

3) Tìm toạ độ điểm M, N sao cho M, N chia đoạ AB thành 3 đoạn bằng nhau. $M\left(\frac{1}{3};1\right)$ và $N\left(\frac{8}{3};2\right)$

4) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành. $D(-4;-5)$

5) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp I và trực tâm H của tam giác ABC. $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $I(3;-2)$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

1) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

2) Tìm M là trung điểm của AC và tính độ dài trung tuyến BM của tam giác ABC.
$M(5;5)$, $BM=5\sqrt{2}$.

3) Gọi N là điểm trên cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC}$. Tính diện tích tam giác ABN.
$S_{\triangle ABN}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{75}{4}$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;4)$, $B(-6;1)$, $C(-2;8)$.

1) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $I\left(-4;\frac{9}{2}\right)$, $R=\frac{\sqrt{65}}{2}$.

2) Tìm toạ độ điểm M thuộc Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M. $M\left(-3+\sqrt{5};0\right)$ hoặc $M\left(-3-\sqrt{5};0\right)$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC với $A(0;2)$, $B(0;-3)$, $C(2;-1)$.

1) Tìm tọa độ điểm G thỏa $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$. $G\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

2) Tìm tọa độ điểm $D\in Ox$ để $ABCD$ là hình thang với hai đáy là AB, CD. $D(2;0)$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;4)$, $B(-3;-1)$, $C(1;-1)$ và G là trọng tâm tam giác ABC.

1) Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BC}$. $M(4;2)$

2) Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. $I(-1;-2)$

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;2)$, $B(1;0)$, $C(3;-3)$.

1) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC. $H(13;12)$

2) Tìm $D\in Oy$ để $ABCD$ là hình thang đáy lớn BC. Không có điểm D thỏa mãn giả thiết.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;-1)$, $B(1;1)$ và $C(2;-7)$.

1) Tam giác ABC là tam giác gì? Tính diện tích tam giác ABC. ABC vuông và $S_{ABC}=13$

2) Gọi H là chân đường cao xuất phát từ A của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm H. $H\left(\frac{6}{5};-\frac{3}{5}\right)$

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $B(5;-3)$ và $C(2;0)$.

1) Chứng minh $\triangle ABC$ vuông. Tính diện tích và chu vi tam giác ABC. $P_{ABC} = 2\sqrt{5}+4\sqrt{2}$ và $S_{ABC} = 3$

2) Xác định tọa độ chân đường cao H kẻ từ C của tam giác ABC. $H\left(\frac{7}{5};-\frac{6}{5}\right)$

3) Tìm điểm M thuộc đường thẳng $d: x+2y+1=0$ sao cho $AM = \sqrt{5}$. $M(3;-2)$ hoặc $M(-1;0)$

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;2)$, $B(6;0)$ và $C(5;7)$.

1) Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

2) Tìm tọa độ đỉnh D sao cho $ADBC$ là hình thoi. Tính diện tích hình thoi này.

3) Xác định tọa độ tâm I và bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi $ADBC$.

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;3)$, $B(-1;-1)$ và $C(6;6)$.

1) Hãy tính độ dài 3 cạnh của tam giác ABC rồi tính chu vi và diện tích của tam giác.
$AB = 5$, $BC = 7\sqrt{2}$, $CA = 5$, $P_{ABC} = 10+7\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{7}{2}$

2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc vủa B lên cạnh AC. $\left(-\frac{46}{25};\frac{3}{25}\right)$

3) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC. Từ đó chứng minh ba điểm I, H, G thẳng hàng. $G\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right)$, $H(-22;27)$, $I\left(\frac{29}{2};-\frac{19}{2}\right)$

4) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng AH sao cho M cách đều A và C. $M\left(\frac{29}{2};-\frac{19}{2}\right)$

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;3)$, $B(-5;2)$, $C(-2;-2)$.

1) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. $H\left(-\frac{74}{25};-\frac{18}{25}\right)$

2) Tìm tọa độ điểm M sao cho tam giác ABM vuông cân tại M. $M(-1;-1)$ hoặc $M(-2;6)$

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có $A(9;-2)$, $B(2;-3)$ và $C(7;2)$.

1) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên BC. $H(9;-2)$

2) Tìm tọa độ điểm M trên trục tung sao cho tam giác BCM vuông tại B. $M(0;-1)$

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác $ABCD$ có $A(1;3)$, $B(-1;1)$, $C(3;-3)$, $D(3;1)$.

1) Chứng minh $ABCD$ là một hình thang vuông tại A và B.

2) Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho M cách đều A và B. $M(2;0)$

3) Tìm tọa độ điểm I sao cho tam giác IBC vuông cân tại I. $I(4;2)$ hoặc $I(-1;-3)$

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$.

1) Chứng minh tam giác ABC vuông cân tại A.

2) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC. $P_{ABC} = 4+4\sqrt{2}$, $S_{ABC} = 4$

3) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho tam giác AMB vuông tại B. $M(0;4)$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(3;1)$.

1) Chứng minh tam giác OAB vuông cân. Tính chu vi và diện tích tam giác OAB.
$P_{ABC} = 2\sqrt{5} + \sqrt{10}$, $S_{ABC} = \frac{5}{2}$

2) Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $OABD$ là hình vuông. $D(2;-1)$

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(-6;4)$, $B(0;7)$, $C(3;1)$.

1) Chứng minh tam giác ABC vuông cân. Tính diện tích tam giác ABC. $S_{ABC} = \frac{45}{2}$

2) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông đáy $AD = 3BC$. $D(3;-14)$

3) Tìm tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho $CE \parallel AB$. $E(1;0)$

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-1;1)$, $B(1;2)$, $C(3;2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC. $H(-1;10)$

b) Tìm tọa độ điểm D thuộc Ox sao cho $T = \left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} - 3\overrightarrow{CD}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. $D(9;0)$

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(-2;4)$, $B(2;-6)$, $C(3;6)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính diện tích tam giác ABC. $S = 29$

b) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC. $H\left(\frac{14}{5};\frac{18}{5}\right)$

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. $M(0;-1)$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$.

a) Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên BC. $H(8;4)$

b) Gọi N là trung điểm của AB. Tính CN. $CN = \frac{5\sqrt{10}}{2}$

c) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. $M\left(\frac{15}{2};0\right)$

Bài 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm

a) P thuộc Ox sao cho $PA + PB$ nhỏ nhất. $P\left(\frac{5}{3};0\right)$

b) Q thuộc Oy sao cho $|QA - QB|$ lớn nhất. $Q(0;-1)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy, toạ độ $\vec{i}$ là

(A) $\vec{i} = (1;0)$. (B) $\vec{i} = (1;1)$. (C) $\vec{i} = (0;0)$. (D) $\vec{i} = (0;1)$.

Câu 2. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (3;-4)$ và $\vec{v} = (-1;2)$. Toạ độ của véc-tơ $\vec{u} + 2\vec{v}$ là

(A) $(1;0)$. (B) $(0;1)$. (C) $(-4;6)$. (D) $(4;-6)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (-1;3)$ và $\vec{b} = (5;-7)$. Tọa độ véc-tơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ là

(A) $(13;-29)$. (B) $(-6;10)$. (C) $(-13;23)$. (D) $(6;-19)$.

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1;5)$ và $\vec{b} = (-2;1)$. Tính $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

(A) $\vec{c} = (7;13)$. (B) $\vec{c} = (1;17)$. (C) $\vec{c} = (-1;17)$. (D) $\vec{c} = (1;16)$.

Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Toạ độ của véc-tơ $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ là

(A) $(2;7)$. (B) $(1;-1)$. (C) $(3;-5)$. (D) $(-3;5)$.

Câu 6. Tìm toạ độ véc-tơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ và $\vec{v}=(2;-3)$.

(A) $(-2;3)$. (B) $(2;3)$. (C) $(2;-3)$. (D) $(-2;-3)$.

Câu 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(4;10)$ và $\vec{b}=(2;x)$. Nếu hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì

(A) $x=6$. (B) $x=7$. (C) $x=4$. (D) $x=5$.

Câu 8. Cho hai véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

(A) $x=-1$. (B) $x=2$. (C) $x=\frac{1}{4}$. (D) $x=-\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-5;0)$ và $\vec{b}=(4;x)$. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.

(A) $x=-1$. (B) $x=-5$. (C) $x=4$. (D) $x=0$.

Câu 10. Cho hai véc-tơ $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=m\vec{j}+\vec{i}$. Nếu hai véc-tơ cùng phương thì

(A) $m=-\frac{2}{3}$. (B) $m=-\frac{3}{2}$. (C) $m=-6$. (D) $m=6$.

Câu 11. Cho $A(-2m;-m)$, $B(2m;m)$. Với giá trị nào của m thì đường thẳng AB đi qua O?

(A) $m=5$. (B) $\forall m\in\mathbb{R}$. (C) Không có m. (D) $m=3$.

Câu 12. Cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(3;4)$. Tìm toạ độ điểm M trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

(A) $M\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$. (B) $M\left(\frac{17}{7};0\right)$. (C) $M(1;0)$. (D) $M(4;0)$.

Câu 13. Cho $A(0;-2)$, $B(-3;1)$. Tìm toạ độ giao điểm M của AB với trục $x'Ox$.

(A) $M(0;-2)$. (B) $M(-2;0)$. (C) $M(2;0)$. (D) $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 14. Cho hai điểm $A(-2;-3)$, $B(4;7)$. Tìm điểm $M\in y'Oy$ thẳng hàng với A và B.

(A) $M(0;1)$. (B) $M\left(0;-\frac{1}{3}\right)$. (C) $M\left(0;\frac{4}{3}\right)$. (D) $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Câu 15. Cho hai véc-tơ $\vec{u}=(2x-1;3)$ và $\vec{v}=(1;x+2)$. Có hai giá trị x_1, x_2 của x để $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$. Giá trị của tích số $x_1\cdot x_2$ bằng

(A) $-\frac{5}{3}$. (B) $-\frac{5}{2}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{5}{3}$.

Câu 16. Cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(4;7)$. Toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

(A) $(6;4)$. (B) $(2;10)$. (C) $(3;2)$. (D) $(8;-21)$.

Câu 17. Cho hai điểm $B(3;2)$ và $C(5;4)$. Toạ độ trung điểm M của BC là

(A) $M(4;3)$. (B) $M(2;2)$. (C) $M(2;-2)$. (D) $M(-8;3)$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $A(3;-5)$, $B(9;7)$, $C(11;-1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Tìm toạ độ $\overrightarrow{MN}$ là

(A) $(10;6)$. (B) $(5;3)$. (C) $(2;-8)$. (D) $(1;-4)$.

Câu 19. Cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3)$, $B(5;4)$, $C(-1;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác có tọa độ là

(A) $(2;2)$. (B) $(1;1)$. (C) $(4;4)$. (D) $(3;3)$.

Câu 20. Cho ba điểm $A(5;-2)$, $B(0;3)$, $C(-5;-1)$. Khi đó trọng tâm tam giác ABC là

(A) $G(1;-1)$. (B) $G(10;0)$. (C) $G(0;0)$. (D) $G(0;11)$.

Câu 21. Cho tam giác ABC có $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác là

(A) $(\sqrt{2};3)$. (B) $(3;3)$. (C) $(-3;4)$. (D) $(4;0)$.

Câu 22. Cho tam giác ABC với $A(-3;6)$, $B(9;-10)$ và có $G\left(\frac{1}{3};0\right)$ là trọng tâm. Tọa độ C là

A. $C(5;-4)$. B. $C(5;4)$. C. $C(-5;4)$. D. $C(-5;-4)$.

Câu 23. Cho tam giác ABC với $A(-2;2)$, $B(3;5)$ và trọng tâm là gốc O. Tọa độ đỉnh C là

A. $C(-1;-7)$. B. $C(2;-2)$. C. $C(-3;-5)$. D. $C(1;7)$.

Câu 24. Cho tam giác ABC với $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tọa độ đỉnh C là

A. $C(-6;-3)$. B. $C(-3;6)$. C. $C(6;-3)$. D. $C(-6;3)$.

Câu 25. Cho hai điểm $A(5;2)$ và $B(10;8)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(15;10)$. B. $(2;4)$. C. $(5;6)$. D. $(50;16)$.

Câu 26. Cho hai điểm $A(1;4)$ và $B(3;5)$. Khi đó, kết quả nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BA}=(1;2)$. B. $\overrightarrow{AB}=(2;1)$. C. $\overrightarrow{AB}=(4;9)$. D. $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$.

Câu 27. Cho ba điểm $A(3;5)$, $B(6;4)$ và $C(5;7)$. Tìm tọa độ điểm D biết $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

A. $D(4;3)$. B. $D(6;8)$. C. $D(-4;-2)$. D. $D(8;6)$.

Câu 28. Cho hai điểm $M(1;6)$ và $N(6;3)$. Tìm điểm P thỏa $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{PN}$.

A. $P(0;11)$. B. $P(6;5)$. C. $P(2;4)$. D. $P(11;0)$.

Câu 29. Cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

A. $\left(-1;\frac{8}{3}\right)$. B. $\left(1;\frac{2}{5}\right)$. C. $(1;2)$. D. $(2;-2)$.

Câu 30. Cho $A(-4;0)$, $B(-5;0)$, $C(3;0)$. Tìm điểm $M\in Ox$ thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-5;0)$. B. $M(-2;0)$. C. $M(2;0)$. D. $M(-4;0)$.

Câu 31. Cho ba điểm $A(2;5)$, $B(1;1)$, $C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

A. $E(-3;-3)$. B. $E(-2;-3)$. C. $E(3;-3)$. D. $E(-3;3)$.

Câu 32. Cho ba điểm $A(-5;6)$, $B(-4;-1)$ và $C(4;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-3;10)$. B. $D(-3;-10)$. C. $D(3;10)$. D. $D(3;-10)$.

Câu 33. Cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tọa độ điểm D là

A. $D(-2;3)$. B. $D(2;-3)$. C. $D(2;3)$. D. $D(-2;-3)$.

Câu 34. Cho hai véc-tơ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{v}=-5\vec{i}-\vec{j}$. Gọi $(a;b)$ là tọa độ của $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$ thì tích ab bằng

A. 63. B. -57. C. 57. D. -63.

Câu 35. Cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;2)$ và $C(-2;1)$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ là

A. $(-1;2)$. B. $(4;0)$. C. $(-5;-3)$. D. $(1;1)$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tọa độ A là

A. $(1;-10)$. B. $(1;5)$. C. $(-3;-1)$. D. $(-2;-7)$.

Câu 37. Cho ba véc-tơ $\vec{a}=(5;3)$, $\vec{b}=(4;2)$ và $\vec{c}=(2;0)$. Khẳng định nào **đúng**?

A. $\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}$. B. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. C. $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$. D. $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

Câu 38. Cho ba véc-tơ $\vec{a}=(x;2)$, $\vec{b}=(-5;1)$ và $\vec{c}=(x;7)$. Tìm x biết $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

A. $x=5$. B. $x=-15$. C. $x=3$. D. $x=15$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-3;3)$ và $C(8;0)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng

A 3. **B** 1. **C** 6. **D** 2.

Câu 40. Cho điểm $M(3;-4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox, Oy. Khẳng định nào **đúng**?

A $\overrightarrow{OM_1} = (-3;0)$.

B $\overrightarrow{OM_2} = (0;4)$.

C $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3;-4)$.

D $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3;-4)$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. C	5. C	6. A	7. D	8. D	9. D	10. B
11. B	12. B	13. B	14. D	15. B	16. C	17. A	18. D	19. A	20. C
21. B	22. C	23. A	24. A	25. C	26. B	27. D	28. D	29. A	30. B
31. A	32. C	33. B	34. B	35. D	36. C	37. A	38. D	39. C	40. D

CHƯƠNG 2

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

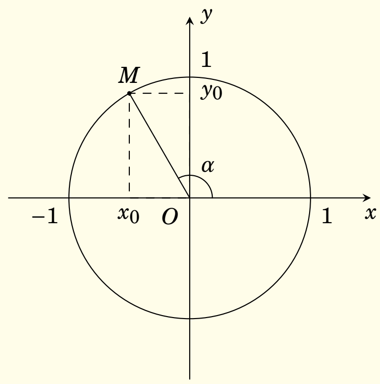
BÀI 1
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1.

Cho $\widehat{xOM} = \alpha$ với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$. Giả sử $M(x_0; y_0)$.

- $\cos\alpha = x_0$
- $\sin\alpha = y_0$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} (x_0 \ne 0)$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha} (y_0 \ne 0)$



Nhận xét: $\forall \alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ ta có:

- $-1 \le \cos\alpha \le 1$ và $-1 \le \sin\alpha \le 1$.
- $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \ne 90^\circ$.
- $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \ne 0^\circ$ và $\alpha \ne 180^\circ$.

1.1.1 Dấu của các giá trị lượng giác

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	+	+	+	+
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	−	−	−

1.1.2 Tính chất

Hai góc bù nhau là hai góc có tổng số đo bằng 180°, chẳng hạn α và $180^\circ - \alpha$, khi đó ta có quan hệ giữa các góc bù nhau như sau:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$.
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$.

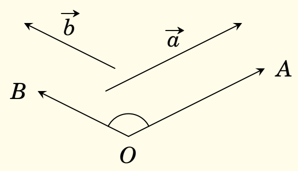
1.1.3 Từ định nghĩa ta có các hệ thức cơ bản sau

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}.$
- $\tan x \cdot \cot x = 1.$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
- $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}.$

1.1.4 Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Ta có:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \widehat{AOB} \text{ với } \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$



Đặc biệt:

- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

Ví dụ 1.

Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin(A + B) = \sin C.$

b) $\cos(A + B) = -\cos C.$

Lời giải.

....

....

....

Ví dụ 2.

Không sử dụng máy tính bỏ túi. Chứng minh:

a) $\sin 105^\circ = \sin 75^\circ.$

b) $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ.$

Lời giải.

....

....

....

Ví dụ 3.

Cho góc x, với $\cos x = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 3\sin^2 x + \cos^2 x$.

Lời giải.

....
....
....
....

Ví dụ 4.

Cho hình vuông $ABCD$. Tính

a) $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right)$.

b) $\sin\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right)$.

c) $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

Lời giải.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

BÀI 2
TÍCH VÔ HƯỚNG

2.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1.
Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\cdot\vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

⚠.

- $\vec{0}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{0}=0.$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^\circ=|\vec{a}|^2.$

2.1.1 Tính chất

Với $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và $\forall k\in\mathbb{R}$, ta có:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$
- $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$
- $(k\vec{a})\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\left(k\vec{b}\right).$
- $\vec{a}^2\geq 0, \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}.$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}^2.$

2.1.2 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2)$. Khi đó:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2.$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2=0.$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$
- $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$, với $\vec{a}\neq 0$, $\vec{b}\neq 0$.
- $\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$

2.2 Các dạng toán

DẠNG 1. Tính tích vô hướng và tính góc

- Sử dụng định nghĩa bằng cách đưa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ về cùng chung gốc để xác định chính xác góc $\alpha = \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ sau đó dùng công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.
- Nếu đề bài cho dạng tọa độ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- Trong tam giác ABC, nếu biết độ dài 3 cạnh thì

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).$$

⚠. Khi tính tích vô hướng của hai vectơ ta thường:

- Biến đổi các vectơ về chung gốc để việc tìm góc giữa hai vectơ dễ dàng hơn.
  Ví dụ: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Đưa về các vectơ cùng phương hoặc vuông góc.
  Ví dụ: Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông) thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

Tính góc giữa hai vectơ:

- Góc giữa hai vectơ: $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$, với $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$.
- Các góc của tam giác ABC:
  - $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$;
  - $\cos B = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC}$;
  - $\cos C = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB}$.

Chú ý

- Diện tích tam giác đều $S_{\triangle \text{đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2 \times \sqrt{3}}{4}$ suy ra chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh} \times \sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích hình vuông $S_{\text{hình vuông}} = \text{cạnh}^2$ suy ra đường chéo hình vuông $= \text{cạnh} \times \sqrt{2}$.

Ví dụ 1.

Cho $\triangle ABC$ đều, cạnh bằng 4cm. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ví dụ 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(2;5)$ và $C(-3;1)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và tính góc $\widehat{BAC}$ của $\triangle ABC$.

Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

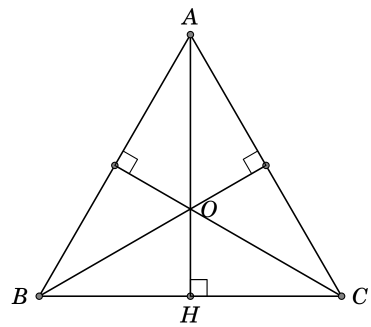
Bài 1.

Cho tam giác đều ABC cạnh a, tâm O.

1) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$. $\frac{a^2}{2}; -\frac{a^2}{2}$

2) Tính $(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$. 0

3) Tính $(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC})$. $\frac{a^2}{2}$

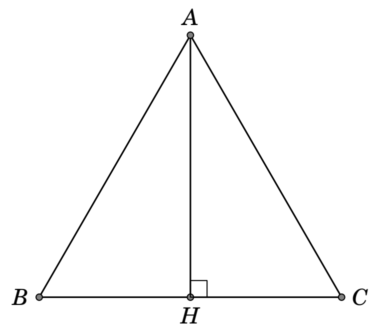


Bài 2.

Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH.

1) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AH}$. $\frac{a^2}{2}; \frac{-3a^2}{4}$

2) Tính $z=\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)$. $-\frac{13a^2}{4}$



Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O.

1) Hãy tìm $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

2) Hãy tính $z=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

3) Hãy tính $\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{AB}$, với N là điểm trên cạnh BC.

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC}=60^\circ$.

a) Hãy tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}$.

b) Hãy tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Bài 5. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$, đường cao $AB=2a$.

1) Hãy tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ $-4a^2$

2) Hãy tính $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ $3a^2,\ -a^2$

3) Gọi I là trung điểm của CD. Hãy tính góc giữa AI và CD 90°

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB=2$, $AC=3$, $\widehat{BAC}=60^\circ$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và độ dài cạnh BC $3,\ BC=\sqrt{7}$

b) Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính độ dài AM $AM=\dfrac{2\sqrt{13}}{3}$

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB=a\sqrt{2}$, $BC=5a$, $\widehat{ABC}=135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $2AM=3CM$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$. Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ và tính độ dài đoạn BM.

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB=2$, $AC=3$, $\widehat{BAC}=120\circ$.

1) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và độ dài đường trung tuyến AM $-3,\ AM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

2) Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD $AD=\dfrac{6}{5}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB=2a$, $BC=a\sqrt{7}$, $AC=3a$. Gọi M là trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN=2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM=DN$.

a) Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{2}{9}$

b) Tìm $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD $3a^2,\ \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Bài 10. Tính góc giữa hai véc-tơ trong các trường hợp sau

a) $\begin{cases}\vec{a}=(1;-2)\\ \vec{b}=(-1;-3)\end{cases}$ 45°

b) $\begin{cases}\vec{a}=(3;-4)\\ \vec{b}=(4;3)\end{cases}$ 90°

c) $\begin{cases}\vec{a}=(2;-5)\\ \vec{b}=(3;7)\end{cases}$ 135°

Bài 11. Cho hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có cùng độ dài bằng 1 và thoả mãn $|2\vec{u}-3\vec{v}|=4$. Tính $\cos(\vec{u},\vec{v})$. $-\dfrac{1}{4}$

Bài 12. Cho hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ có cùng độ dài bằng 1 và thoả mãn $|2\vec{u}-3\vec{v}|=3$. Tính $\cos(\vec{u},\vec{v})$. $\dfrac{1}{3}$

Bài 13. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc-tơ đó bằng 60°. Xác định cô-sin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$. $-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

Bài 14. Cho 2 véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $|\vec{a}|=6$, $\left|\vec{b}\right|=3$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng

a) $\vec{a}\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$. $72-9\sqrt{2}$ b) $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$. $-108+9\sqrt{2}$

Bài 15. Cho hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thoả mãn $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=\sqrt{2}$ và $|\vec{u}-3\vec{v}|=3$. Tính $|2\vec{u}+\vec{v}|$. $\sqrt{26}$

Bài 16. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=1$ và $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$ và $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{3}$

DẠNG 2. Chứng minh vuông góc

- Dùng tính chất tích vô hướng

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{0}\\ \vec{b}=\vec{0}\\ \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0.\end{array}\right.$$

- Dùng tính chất tích vô hướng trong hệ trục tọa độ

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2=0.$$

Ví dụ 3.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Chứng minh $\vec{a}\perp\vec{b}$ với $\vec{a}=(1;-2)$, $\vec{b}=(6;3)$.

Lời giải.

....

....

....

Ví dụ 4.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(6;m)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(6;-2)$, $\vec{c}=(m+2;-4)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a}\perp\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $BC = 5$.

a) Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$. 0

b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. -9

c) Gọi D, E, F là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BF} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh $DE \perp AF$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Dựng bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Goi M là trung điểm của đoan BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC. Chứng minh $BI \perp AJ$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, M là trung điểm của đoạn HD. Chứng minh $AM \perp DB$.

Bài 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$, dựng $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC. Chứng minh $BM \perp MN$.

Bài 6. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$.

Bài 7. Chứng minh với bốn điểm A, B, C, D bất kỳ ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

(Hệ thức Euler - có thể dùng hệ thức này để chứng minh ba đường cao đồng quy).

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2.$$

BÀI 3
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

3.1 Tóm tắt lý thuyết

3.1.1 Hệ thức lượng trong tam giác vuông

a) $b^2 = a \cdot b'$.

b) $c^2 = a \cdot c'$.

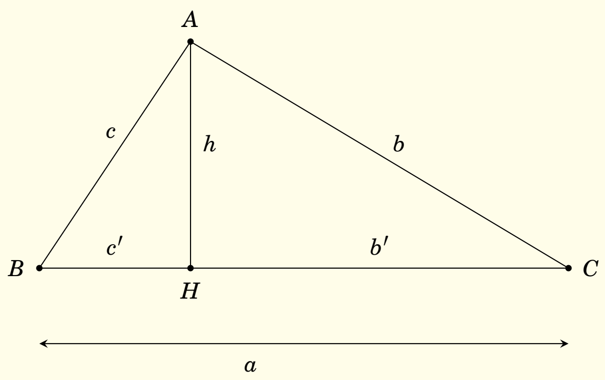
c) $a^2 = b^2 + c^2$.

d) $h^2 = b' \cdot c'$.

e) $a \cdot h = b \cdot c$.

f) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.

g) $\dfrac{b'}{c'} = \dfrac{b^2}{c^2}$.



3.1.2 Hệ thức lượng trong tam giác thường

a) Định lí côsin $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \dfrac{\cdots}{\cdots} \\ \cos B = \dfrac{\cdots}{\cdots} \\ \cos C = \dfrac{\cdots}{\cdots} \end{cases}$

b) Định lí sin $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

c) Trung tuyến $\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2\left(c^2+a^2\right)-b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}. \end{cases}$

d) Công thức tính diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Trong đó $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; R; r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

3.1.3 Bán kính đường tròn nội tiếp (nâng cao)

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $r = (p-a)\tan\dfrac{A}{2} = (p-b)\tan\dfrac{B}{2} = (p-c)\tan\dfrac{C}{2}$.

Chú ý

- Nếu $\triangle ABC$ đều thì $\begin{cases} p = \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3b}{2} = \dfrac{3c}{2} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ \end{cases}$ nên $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\triangle ABC$ vuông thì $r = \dfrac{\text{tổng hai cạnh góc vuông} - \text{cạnh huyền}}{2}$.

3.1.4 Độ dài đường phân giác (nâng cao)

Độ dài đường phân giác $\begin{cases} l_a^2 = \dfrac{4bc}{(b+c)^2} \cdot p(p-a) \\ l_b^2 = \dfrac{4ca}{(c+a)^2} \cdot p(p-b) \\ l_c^2 = \dfrac{4ab}{(a+b)^2} \cdot p(p-c). \end{cases}$

3.2 Các dạng toán

DẠNG 1. Tính các giá trị cơ bản

Phương pháp:Học thuộc các công thức ở trên

Ví dụ 1.

Cho tam giác ABC, hãy tính h_a, R, r và số đo các góc trong các trường hợp sau

a) $AB = 6$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

b) $BC = 8$, $AB = 5$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

c) $AB = 20$, $AC = 16$, $BC = 12$.

d) $BC = 19$, $AC = 15$, $AB = 6$.

e) $BC = 12$, $AC = 13$, $m_a = AM = 8$.

f) $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $BC = 10$, $3r = 5\sqrt{3}$.

Lời giải.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, $\widehat{A} = 30^\circ$. Tính độ dài BC, bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 4$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

1) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

2) Tính độ dài cạnh AC.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60°$.

1) Tìm độ dài cạnh BC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

2) Tính diện tích tam giác ABC và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120°$, $\widehat{B} = 30°$, diện tích tam giác ABC bằng $9\sqrt{3}$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

Bài 5. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 7$ và góc $\widehat{B} = 60°$.

a) Tính cạnh BC, bán kính R.

b) Trên đoạn AC, BC lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $CD = CE = 4$. Tính đoạn DE.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{7}$ và $BC = 4$.

a) Tính góc B, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và diện tích tam giác ABC.

b) Tính độ dài đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC.

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Tính độ dài BC, diện tích tam giác ABC, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\widehat{BAC} = 60°$. Gọi M là trung điểm của AB và E là trên AC thỏa $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$.

a) Tính CM và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle AMC$.

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $BC = 6$ và góc $\widehat{B} = 120°$.

a) Tính AC và diện tích tam giác ABC.

b) Tính đường cao AH và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

c) Tính độ dài đường phân giác trong BD của tam giác ABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là các đường cao tương ứng xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 = 2c^2$. Chứng minh $m_a + m_b + m_c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$.

Bài 12. Cho tam giác ABC không vuông ở A, chứng minh $S = \dfrac{1}{4}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)\tan A$.

Bài 13. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và trung tuyến $AM = \dfrac{c}{2}$.

a) Chứng minh $2b^2 = a^2 - c^2$.

b) Chứng minh $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$.

Bài 14. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $(p - a)(p - b)(p - c) \le \dfrac{1}{8}abc$.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{r}{R} \le \dfrac{1}{2}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\ge 2\sqrt{3}$.

Bài 16. Chứng minh rằng nếu $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Bài 17. Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thỏa hệ thức $\sin A=2\sin B\cos C$ thì tam giác ABC cân.

Bài 18. Chứng minh rằng nếu $a=2b\cos C$ và $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a}=a^2$ thì tam giác ABC đều.

Bài 19. Tam giác ABC có đặc điểm gì nếu $\frac{1+\cos B}{\sin B}=\frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$. ΔABC cân tại C

Bài 20. Tam giác ABC có chiều cao $h_a=\sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Bài 21. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có $S=\frac{1}{6}(ch_a+bh_c+ah_b)$ thì nó là tam giác đều.

Bài 22. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều nếu thỏa mãn:

$$2(a^3+b^3+c^3)=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2).$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC. Trung tuyến AM có độ dài bằng

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. B. $\sqrt{3a^2-2b^2-2c^2}$. C. $\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. D. $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$.

Câu 2. Trong tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$. B. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
C. $a^2=b^2+c^2+bc\cos A$. D. $a^2=b^2+c^2-bc\cos A$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, p là nửa chu vi và S là diện tích tam giác đã cho. Xét hai mệnh đề sau đây:

(i) $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

(ii) $16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Trong hai mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

A. (i) và (ii). B. Không có. C. (i). D. (ii).

Câu 4. Diện tích tam giác có ba cạnh lần lượt là $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ và 1 bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=AC=30cm$. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G. Diện tích tam giác GFC bằng

A. $50\sqrt{2}\text{cm}^2$. B. 75cm^2. C. $15\sqrt{105}\text{cm}^2$. D. 50cm^2.

Câu 6. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $5,12,13$. Độ dài đường cao ứng với cạnh lớn nhất bằng

A. 12. B. $\frac{120}{30}$. C. $\frac{30}{13}$. D. $\frac{60}{13}$.

Câu 7. Tam giác có ba cạnh là $9,10,11$. Đường cao lớn nhất của tam giác bằng

A. $\frac{60\sqrt{2}}{9}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{70}$. D. $4\sqrt{4}$.

Câu 8. Cho tam giác với ba cạnh $a=13, b=14, c=15$. Đường cao h_c bằng

A. $5\frac{3}{5}$. B. 12. C. $10\frac{1}{5}$. D. $11\frac{1}{5}$.

Câu 9. Tam giác ABC có tổng hai góc B và C bằng $135°$ và độ dài cạnh BC bằng a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng

(A) $a\sqrt{3}$. (B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60°, b = 10$ và $c = 20$. Diện tích tam giác ABC bằng

(A) $50\sqrt{5}$. (B) 50. (C) $50\sqrt{2}$. (D) $50\sqrt{3}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC biết $BC = 5\sqrt{5}, AC = 5\sqrt{2}$ và $AB = 5$. Số đo của góc $\widehat{BAC}$ bằng

(A) $135°$. (B) $45°$. (C) $30°$. (D) $120°$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm và $CA = 9$ cm. Giá trị $\cos A$ bằng

(A) $-\dfrac{2}{3}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Câu 13. Tam giác ABC có $AC = 3\sqrt{3}, AB = 3$ và $BC = 6$. Số đo góc $\widehat{ABC}$ bằng

(A) $60°$. (B) $45°$. (C) $30°$. (D) $120°$.

Câu 14. Tam giác ABC có góc B tù, $AB = 3, AC = 4$ và có diện tích bằng $3\sqrt{3}$. Góc A có số đo bằng

(A) $30°$. (B) $60°$. (C) $45°$. (D) $120°$.

Câu 15. Tam giác ABC có $AB = 12, AC = 13, \widehat{BAC} = 30°$. Diện tích tam giác ABC bằng

(A) $39\sqrt{3}$. (B) $78\sqrt{3}$. (C) 39. (D) 78.

Câu 16. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 105°, \widehat{ABC} = 45°$ và $AC = 10$. Độ dài cạnh AB bằng

(A) $5\sqrt{6}$. (B) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$. (C) $5\sqrt{2}$. (D) $10\sqrt{2}$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có $a = 2, b = \sqrt{6}$ và $c = \sqrt{3}+1$. Góc B gần bằng

(A) $115°$. (B) $75°$. (C) $60°$. (D) $53°32'$.

Câu 18. Cho tam giác DEF có $DE = DF = 10$ cm và $EF = 12$ cm. Gọi I là trung điểm của cạnh EF. Đoạn thẳng DI có độ dài bằng

(A) 8 cm. (B) 4 cm. (C) 6,5 cm. (D) 7 cm.

Câu 19. Tam giác ABC có $AB = 9, BC = 10$ và $CA = 11$. Gọi M là trung điểm BC và N là trung điểm AM. Độ dài BN bằng

(A) 5. (B) $\sqrt{34}$. (C) 6. (D) $4\sqrt{2}$.

Câu 20. Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 8$ và $CA = 6$. Gọi G là trọng tâm tam giác. Độ dài đoạn thẳng AG bằng

(A) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. (B) $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$. (C) $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{58}}{3}$.

Câu 21. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5, AC = 8$ và diện tích bằng 12. Độ dài cạnh BC bằng

(A) $2\sqrt{3}$. (B) 4. (C) 5. (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 22. Tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng

(A) $4S$. (B) $6S$. (C) $2S$. (D) $3S$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. A	5. B	6. D	7. A	8. D	9. D	10. D
11. A	12. C	13. A	14. B	15. C	16. C	17. C	18. A	19. B	20. D
21. C	22. B								