ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA NĂM 2021

MÃ ĐỀ 101

Môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

A. $(-\infty;\log_3 2)$. **B.** $(\log_3 2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;\log_2 3)$. **D.** $(\log_2 3;+\infty)$.

Câu 2: Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x=-2$ thì $\int_1^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;5)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases}x=-2+3t\\ y=4-t\\ z=5+4t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-1+4t\\ z=4+5t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=3-2t\\ y=1+4t\\ z=4+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-1+4t\\ z=4+5t\end{cases}$.

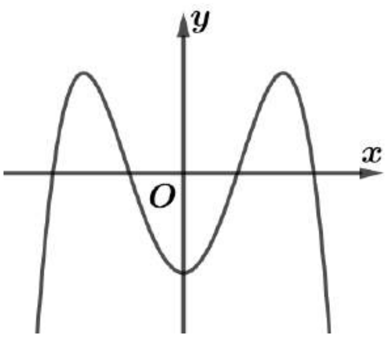
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-2x^4+4x^2-1$. **B.** $y=-x^3+3x-1$.

C. $y=2x^4-4x^2-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -3.

Câu 8: Với n là số nguyên dương bất kì, $n\ge 4$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $A_n^4=\dfrac{(n-4)!}{n!}$. **B.** $A_n^4=\dfrac{4!}{(n-4)!}$. **C.** $A_n^4=\dfrac{n!}{4!(n-4)!}$. **D.** $A_n^4=\dfrac{n!}{(n-4)!}$.

Câu 9: Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -2.

Câu 10: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{2}}$ là

A. $y'=\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. **C.** $y'=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=\dfrac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

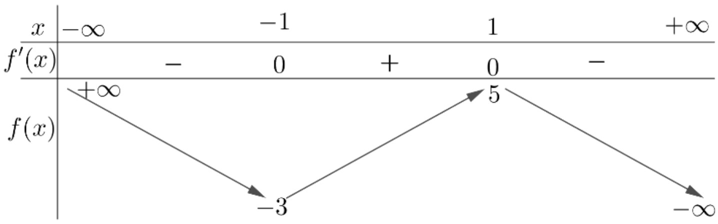
A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+4x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+4x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+4x+C$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$ là

A. $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;-5)$.

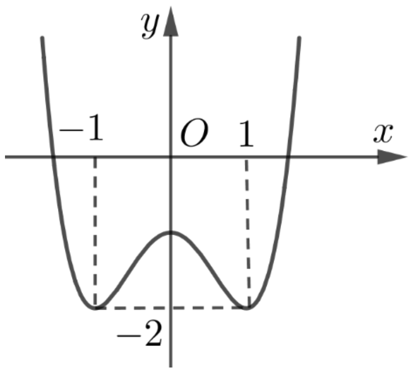
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\log_3(5x)=2$ là:

A. $x=\frac{8}{5}$. **B.** $x=9$. **C.** $x=\frac{9}{5}$. **D.** $x=8$.

Câu 16: Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=4$ thì $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 36. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17: Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

A. $5a^3$. **B.** a^3. **C.** $125a^3$. **D.** $25a^3$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y=9^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 19: Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S=16\pi R^2$. **B.** $y=4\pi R^2$. **C.** $S=\pi R^2$. **D.** $S=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 20: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Câu 22: Cho khối chóp có diện tích đáy $B=5a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{5}{6}a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** $5a^3$. **D.** $\frac{5}{3}a^3$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-y+2z-1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-3;1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;-1;2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;1;2)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(3;1;-2)$.

Câu 24: Cho khối trụ có bán kính đáy $r=6$ và chiều cao $h=3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 108π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 54π.

Câu 25: Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. -6. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

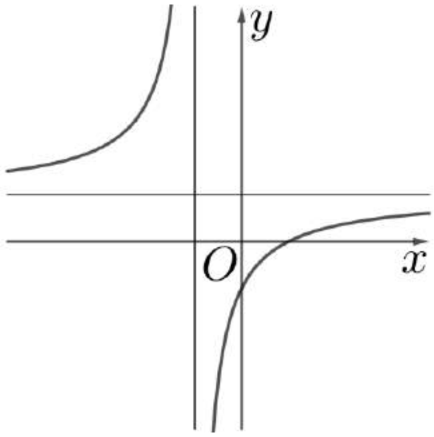
A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-2x+C$.

Câu 28: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_2 = 3+4i$. **B.** $z_3 = -3+4i$. **C.** $z_4 = -3-4i$. **D.** $z_1 = 3-4i$.

Câu 29: Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y' < 0,\ \forall x \neq -1$. **B.** $y' > 0,\ \forall x \neq -1$. **C.** $y' < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 30: Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

A. $\frac{7}{44}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{22}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Câu 31: Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x = 0$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{4}$. **D.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(4;1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

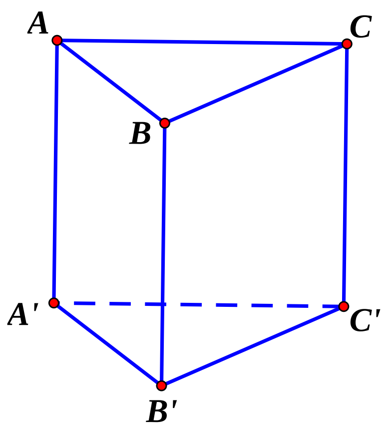
A. $3x + y + 2z - 17 = 0$. **B.** $3x + y + 2z - 3 = 0$.

C. $5x + y + 2z - 5 = 0$. **D.** $5x + y + 2z - 25 = 0$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $iz = 5 + 4i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z} = 4 + 5i$. **B.** $\overline{z} = 4 - 5i$. **C.** $\overline{z} = -4 + 5i$. **D.** $\overline{z} = -4 - 5i$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên. Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' là



A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 37: Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b = 64$. **B.** $a^3b = 36$. **C.** $a^3 + b = 64$. **D.** $a^3 + b = 64$.

Câu 38: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_0^2 \left[2f(x) - 1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

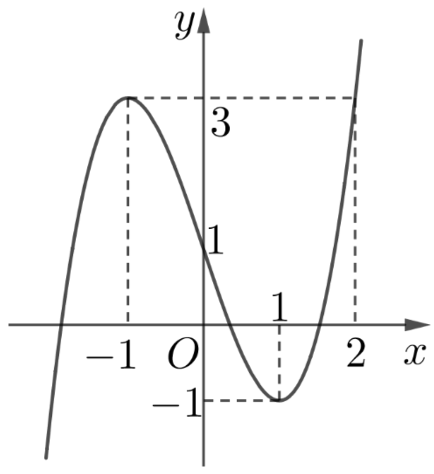
Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & khi\ \ x \ge 1 \\ 3x^2 + 4 & khi\ \ x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2} - 9^x\right)\left[\log_3(x+25) - 3\right] \le 0$

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Câu 41: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f(x)\right) = 1$ là



A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 42: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60^0 ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 44: Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 1$ và $|w| = 2$. Khi $|z + i\overline{w} - 6 - 8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z - w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$. **B.** $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$. **D.** $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x}$.

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 48: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$, $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{53}$.

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

HẾT

NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT QUỐC GIA NĂM 2021

MÃ ĐỀ 101

Môn: Toán

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

BẢNG ĐÁP ÁN VÀ GIẢI CHI TIẾT

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	B	D	D	A	D	D	A	C	C	A	C	A	C	B	C	A	B	A	B	D	B	A	B
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	B	B	B	A	C	D	B	B	A	C	A	A	A	C	D	D	B	D	C	D	C	D	D	A

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

A. $(-\infty;\log_3 2)$. **B.** $(\log_3 2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;\log_2 3)$. **D.** $(\log_2 3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$.

Câu 2: Nếu $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -2$ thì $\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$$\int\limits_1^4 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_1^4 g(x)\mathrm{d}x = 3-(-2) = 5.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:

A. $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=9$. **B.** $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=3$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3 là $(x-1)^2+(y+4)^2+z^2=9$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;5)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-t \\ z=5+4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua $M(3;-1;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;4;5)$ là: $\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1+4t \\ z=4+5t \end{cases}$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

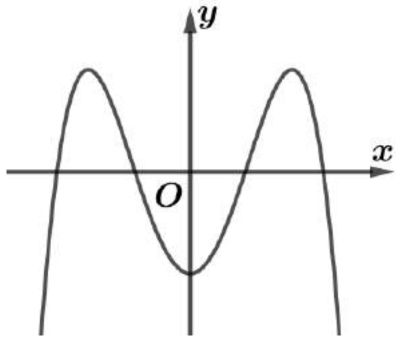
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy $f'(x)=0$ có 4 nghiệm là $x=-2; x=-1; x=1; x=4$ và $f'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm đó nên hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 6: Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-2x^4+4x^2-1$. **B.** $y=-x^3+3x-1$.

C. $y=2x^4-4x^2-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên loại đáp án B và D.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên loại đáp án C.

Câu 7: Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_M;y_M)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ và trục Oy

Ta có $x_M=0 \Rightarrow y_M=-3$.

Câu 8: Với n là số nguyên dương bất kì, $n\ge 4$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $A_n^4=\dfrac{(n-4)!}{n!}$. **B.** $A_n^4=\dfrac{4!}{(n-4)!}$. **C.** $A_n^4=\dfrac{n!}{4!(n-4)!}$. **D.** $A_n^4=\dfrac{n!}{(n-4)!}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Phần thực của $z=5-2i$ là 5.

Câu 10: Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{2}}$ là

A. $y'=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y'=\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. **C.** $y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có trên khoảng $(0;+\infty)$ $y'=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=x^2+4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+4x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+4x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+4x+C$.

Lời giải

Chọn C

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+4)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+4x+C$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ vecto $\overrightarrow{OA}$ là

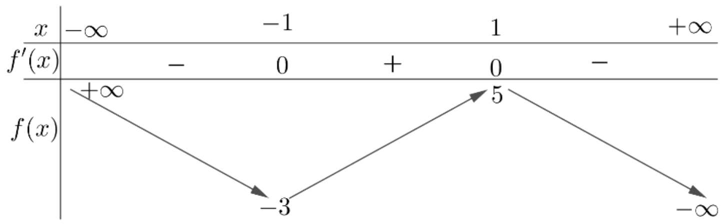
A. $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;-5)$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{OA}=(x_A-x_O;_A y_A-y_O;z_A-z_O)\Rightarrow\overrightarrow{OA}=(-2;3;5)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

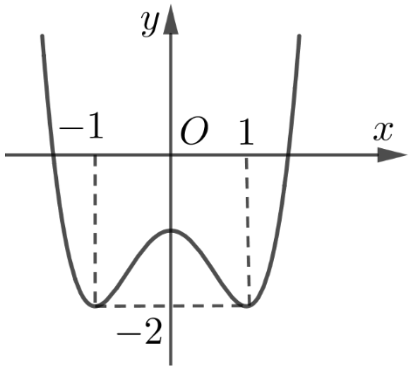
A. -1. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào BBT ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -3.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15: Nghiệm của phương trình $\log_3(5x) = 2$ là:

A. $x = \frac{8}{5}$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = \frac{9}{5}$. **D.** $x = 8$.

Lời giải

Chọn C

$\log_3(5x) = 2 \Leftrightarrow 5x = 3^2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$.

Câu 16: Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 36. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3.4 = 12$.

Câu 17: Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ bằng

A. $5a^3$. **B.** a^3. **C.** $125a^3$. **D.** $25a^3$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối lập phương cạnh $5a$ là $V = (5a)^3 = 125a^3$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số mũ $y = a^x$, với a dương và khác 1 luôn có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 19: Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $S = 16\pi R^2$. **B.** $y = 4\pi R^2$. **C.** $S = \pi R^2$. **D.** $S = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S = 4\pi R^2$.

Câu 20: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 21: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_a a = \frac{1}{4}$.

Câu 22: Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{5}{6}a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** $5a^3$. **D.** $\frac{5}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối chóp đã cho $V = \frac{1}{3}.B.h = \frac{1}{3}.5a^2.a = \frac{5}{3}a^3$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1} = (-3;1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2} = (3;-1;2)$. **C.** $\overrightarrow{n_3} = (3;1;2)$. **D.** $\overrightarrow{n_4} = (3;1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Vecto pháp tuyến của mặt phẳng $(P): 3x - y + 2z - 1 = 0$ là $\overrightarrow{n_2} = (3;-1;2)$.

Câu 24: Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 6$ và chiều cao $h = 3$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 108π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 54π.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối trụ đã cho $V = \pi r^2 h = \pi.6^2.3 = 108\pi$.

Câu 25: Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z+w=4+2i+3-4i=7-2i$.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=9$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. -6. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Công bội $q=\frac{u_2}{u_1}=3$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=e^x+2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-2}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x+2)\mathrm{d}x=e^x+2x+C$.

Câu 28: Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

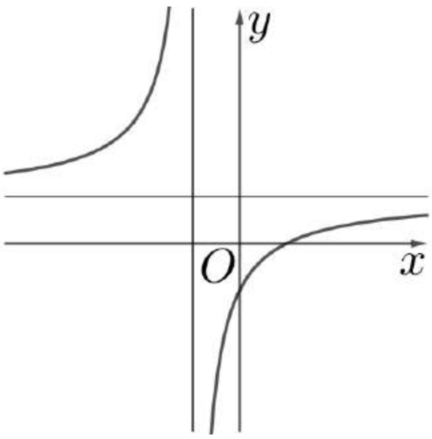
A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_3=-3+4i$. **C.** $z_4=-3-4i$. **D.** $z_1=3-4i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3+4i$.

Câu 29: Biết hàm số $y=\frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'<0,\ \forall x\neq -1$. **B.** $y'>0,\ \forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dựa vào đồ thị, ta có: Hàm số $y=\frac{x+a}{x+1}$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

$\Rightarrow y' > 0, \forall x \neq -1$.

Câu 30: Từ một hộp chứa 12 quả bóng gồm 5 quả màu đỏ và 7 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả. Xác suất để lấy được 3 quả màu xanh bằng

A. $\frac{7}{44}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{22}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^3$.

Biến cố "lấy được ba quả màu xanh" có số phần tử: $n(A) = C_7^3$

Xác suất cần tìm là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{44}$.

Câu 31: Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x = 0$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = f(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0;3] \end{array}\right.$$.

Ta có $f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(3) = -18$.

Vậy hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z + 1 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là:

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+2}{4}$. **D.** $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Lời giải

Chọn D

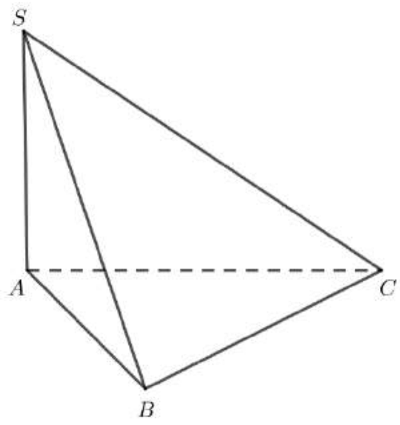
Đường thẳng đi qua $M(-1;3;2)$ và vuông góc với (P) có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{n_P} = (1;-2;4)$. Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Suy ra: $d(C;(SAB)) = BC = AB = 2a$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$ và $B(4;1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x+y+2z-17=0$.

B. $3x+y+2z-3=0$.

C. $5x+y+2z-5=0$.

D. $5x+y+2z-25=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;2) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;2)$.

Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB là $3(x-1)+y+2z=0 \Leftrightarrow 3x+y+2z-3=0$.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn $iz=5+4i$. Số phức liên hợp của z là

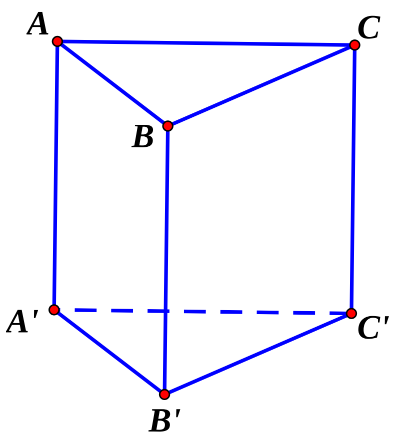
A. $\bar{z}=4+5i$. **B.** $\bar{z}=4-5i$. **C.** $\bar{z}=-4+5i$. **D.** $\bar{z}=-4-5i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $iz=5+4i \Rightarrow z=\dfrac{5+4i}{i} \Rightarrow z=4-5i \Rightarrow \bar{z}=4+5i$.

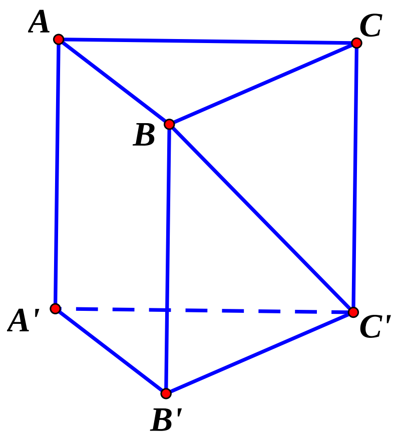
Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng AA' và BC' là



A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\left(AA', BC'\right) = \left(BB', BC'\right) = B'BC$.

Tam giác $B'BC$ vuông cân tại B' nên $B'BC = 45^{\circ}$.

Câu 37: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3 b = 64$. **B.** $a^3 b = 36$. **C.** $a^3 + b = 64$. **D.** $a^3 + b = 64$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow \log_2\left(a^3 b\right) = 6 \Leftrightarrow a^3 b = 2^6 \Leftrightarrow a^3 b = 64$.

Câu 38: Nếu $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int\limits_0^2 \left[2f(x) - 1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$\int\limits_0^2 \left[2f(x) - 1\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 2f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^2 1\mathrm{d}x = 8$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & khi\ \ x \ge 1 \\ 3x^2 + 4 & khi\ \ x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & khi\ \ x \ge 1 \\ 3x^2 + 4 & khi\ \ x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1 & khi\ \ x \ge 1 \\ x^3 + 4x + C_2 & khi\ \ x < 1 \end{cases}$.

Vì $F(0)=2 \Rightarrow C_2=2 \Rightarrow F(x)=\begin{cases} x^2+5x+C_1 & khi\ \ x\geq 1 \\ x^3+4x+2 & khi\ \ x<1 \end{cases}$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+5x+C_1\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+4x+2\right)$

$\Leftrightarrow 1+5+C_1=1+4+2$

$\Leftrightarrow C_1=1$

$\Rightarrow F(x)=\begin{cases} x^2+5x+1 & khi\ \ x\geq 1 \\ x^3+4x+2 & khi\ \ x<1 \end{cases}$.

Vậy $F(-1)+2F(2)=-3+2.15=27$.

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\leq 0$

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x>-25$.

Đặt $A(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right], x>-25$.

$3^{x^2}-9^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

$\log_3(x+25)-3=0 \Leftrightarrow x=2$.

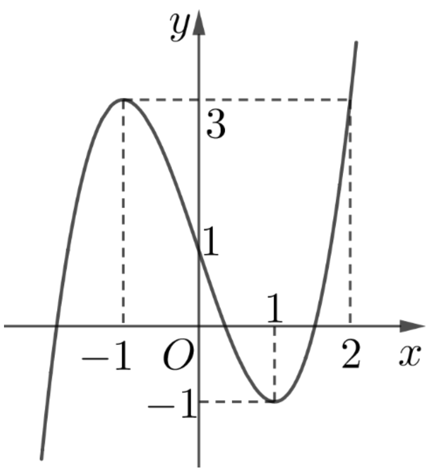
Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, $A(x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-24;-23;...;0;2\}$ (do $x\in\mathbb{Z}$).

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 41: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

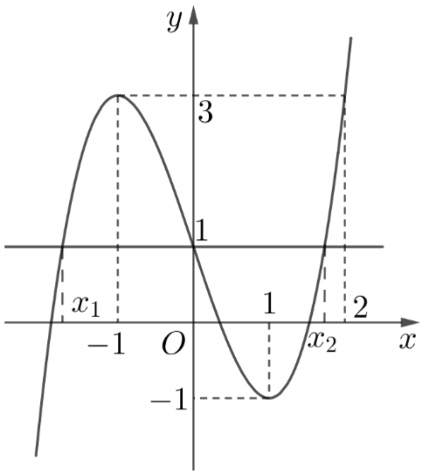


A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có



$$f\left(f\left(x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=x_1 \text{ và } x_1<-1 & (1) \\ f(x)=0 & (2) \\ f(x)=x_2 \text{ và } 1<x_2<2 & (3) \end{array}\right.$$

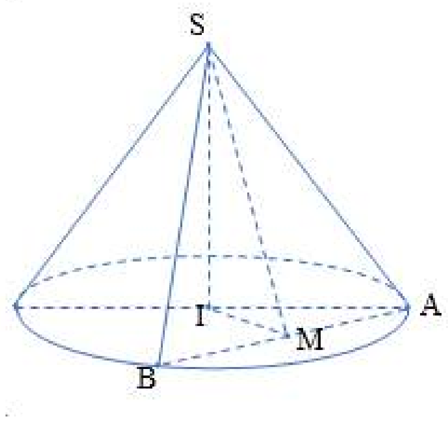
Dựa vào đồ thị, (1) có đúng 1 nghiệm, (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt và 7 nghiệm trên phân biệt nhau.

Câu 42: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60^0 ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm đáy nón. Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA.

Gọi M là trung điểm của AB. Suy ra $SMI=60^0$.

Do tam giác SAB đều cạnh $4a$ $\Rightarrow SM=\dfrac{4a\sqrt{3}}{2}=2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI=3a; IM=a\sqrt{3}$.

Xét ΔIMA vuông tại M ta có $IA=\sqrt{IM^2+MA^2}=\sqrt{3a^2+(2a)^2}=a\sqrt{7}$.

Khi đó $S_{xq}=\pi rl=\pi a\sqrt{7}.4a=4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 43: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$\Delta'=(m+1)^2-m^2=2m+1$.

+) Nếu $\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 2m+1\ge 0\Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó $|z_0|=7\Leftrightarrow z_0=\pm 7$.

Thế $z_0=7$ vào phương trình ta được: $m^2-14m+35=0\Leftrightarrow m=7\pm\sqrt{14}$ (nhận).

Thế $z_0=-7$ vào phương trình ta được: $m^2+14m+63=0$, phương trình này vô nghiệm.

+) Nếu $\Delta'<0\Leftrightarrow 2m+1<0\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1,z_2\notin\mathbb{R}$ thỏa $z_2=\overline{z_1},|z_1|=|z_2|=7$. Khi đó $z_1.z_2=|z_1|^2=m^2=7^2$ hay $m=7$ (loại) hoặc $m=-7$ (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m=7\pm\sqrt{14}$ và $m=-7$.

Câu 44: Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$|w|=2\Rightarrow|i\overline{w}|=2$

$|z+i\overline{w}|\le|z|+|i\overline{w}|=3$

$P=|z+i\overline{w}-6-8i|\ge|-6-8i|-|z+i\overline{w}|=10-3=7$.

Suy ra: $P_{\min}=7$ khi $\begin{cases}z=k.i\overline{w},(k\ge 0)\\-6-8i=h.(z+i\overline{w}),(h\le 0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\h=-\frac{10}{3}\\z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\\overline{w}=\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\w=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i\end{cases}$.

Vậy $|z-w|=\left|\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i-\left(\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i\right)\right|=\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+z-4=0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-4}$. **B.** $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-4}$. **D.** $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm A của d và (P) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow A(0;1;2).$$

Lấy điểm $B(1;2;1)\in d$. Gọi H là hình chiếu của B trên (P).

$\Rightarrow$ Phương trình $BH: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$

Do $H=BH\cap(P)$ nên tọa độ điểm H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{4}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right).$$

Gọi d' là hình chiếu vuông góc của d trên $(P) \Rightarrow d'$ đi qua A và H

$\Rightarrow d'$ có một vector chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-4)$.

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-4}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)=3x^2+2ax+b$;

$f''(x)=6x+2a$;

$f'''(x)=6$;

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6 nên không giảm tổng quát, $g(x)$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2 và $g(x_1)=-3$, $g(x_1)=6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)+6$

$\Leftrightarrow f(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+6$

$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0$

$\Leftrightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là:

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)dx\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln 12-\ln 3\right|=2\ln 2.$$

Câu 47: Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x}$.

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

□ **Khi** $y\le 0$, vì $xy>-1$ và $x>\dfrac{1}{3}$ nên ta có $y>-3$.

Với $y=0$, phương trình thành: $27^{3x^2-9x}-1=0$ vô nghiệm vì $27^{3x^2-9x}-1<27^0-1=0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$

Với $y=-1$, phương trình thành: $27^{3x^2-10x}-(1-x)=0$, có nghiệm vì $g_1(x)=27^{3x^2-10x}-(1-x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ và $g_1\left(\dfrac{1}{3}\right).g_1(3)<0$.

Với $y=-2$, phương trình thành: $27^{3x^2-11x}-(1-2x)=0$, có nghiệm vì $g_2(x)=27^{3x^2-11x}-(1-2x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ và $g_2\left(\dfrac{1}{3}\right).g_2(3)<0$.

 Khi $y \ge 1$, xét trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$, ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{9x} \Leftrightarrow 3x^2 - 9x = \log_{27}(1+xy) - xy$$
$$\Leftrightarrow 3x - 9 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 9 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$.

Ta có $g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy)\ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \ge 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3};3\right]$.

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$. Vì thế phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};3\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(3) < 0$. Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

$$g(3) = -\frac{\log_{27}(1+3y)}{3} + y > -\frac{3y}{3\ln 27} + y > 0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 8 < 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 9$ (do y là số nguyên dương).

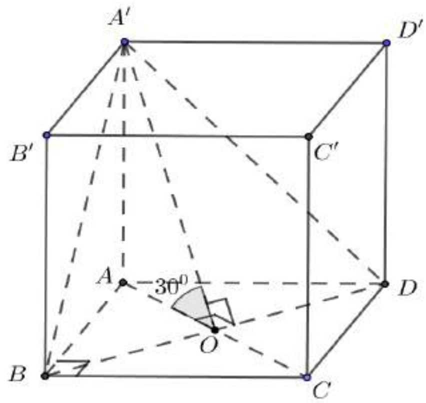
Vậy $y \in \{-2;-1;1;2;...;9\}$ hay có 11 giá trị y thỏa đề.

Câu 48: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $BD \perp OA$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$

Lại có $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$. Do đó $\left((A'BD),(ABCD)\right) = A'OA = 30^0$ (Hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a$ nên $OA = a$ và $AB = AD = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA = a$ và $A'OA = 30^0$ nên $AA' = OA.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V = AB.AD.AA' = a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;-4)$, $B(-2;1;2)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{53}$.

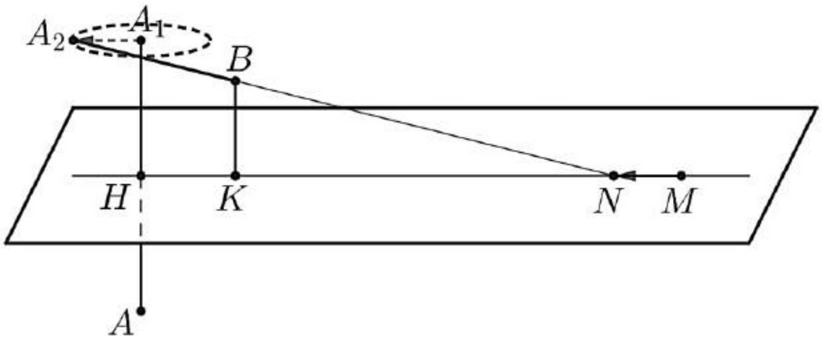
Lời giải

Chọn D

Vì $z_A.z_B < 0$ nên A, B nằm khác phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (Oxy)

$\Rightarrow H(1;-3;0),\ K(-2;1;0)$.



Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua $(Oxy) \Rightarrow A_1(1;-3;4)$.

Gọi A_2 thỏa $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow A_1A_2 = 2$

$\Rightarrow A_2 \in$ đường tròn (C) nằm trong mặt phẳng song song với (Oxy) và có tâm A_1, bán kính $R = 2$.

Khi đó: $|AM - BN| = |A_1M - BN| = |A_2N - BN| \le A_2B$

Dấu "=" xảy ra và A_2B đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{HK}$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = -\frac{|\overrightarrow{A_1A_2}|}{|\overrightarrow{HK}|}\overrightarrow{HK} = \left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};0\right) \Rightarrow A_2\left(\frac{11}{5};-\frac{23}{5};4\right) \Rightarrow A_2B = \sqrt{53}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{53}$.

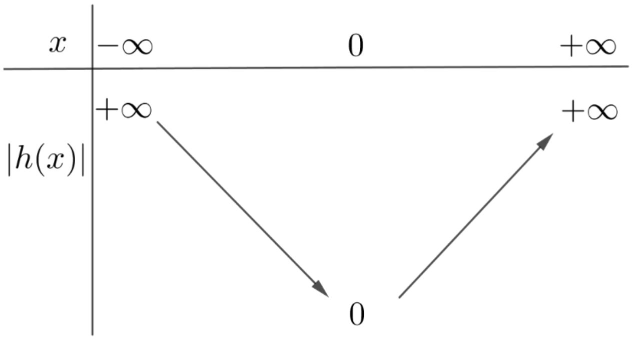
Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3+5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có BBT của hàm $y = |h(x)| = |x^3 + 5x|$ như sau



Ta có $g'(x)=\left|x^3+5x\right|'.f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)$. Rõ ràng $x=0$ là điểm cực trị của hàm số $y=\left|h(x)\right|$.

Ta có: $f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+5x\right|+m=7\\ \left|x^3+5x\right|+m=3\\ \left|x^3+5x\right|+m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+5x\right|=7-m\\ \left|x^3+5x\right|=3-m\\ \left|x^3+5x\right|=-3-m\end{array}\right.$.

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $7-m>0\Leftrightarrow m<7\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.