

**ĐỊNH LÝ VIÈTE.** Cho phương trình  , có các nghiệm là  ( kể cả nghiệm bội). Khi đó:



**Thí dụ 1.** *Cho phương trình  với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có* 3 *nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng*.

***Lời giải*.** *Điều kiện cần*: Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt là  theo thứ tự lập thành cấp số cộng, suy ra: 

Theo định lý Viète thì 

Từ (1) và (2) được  Thay  vào phương trình: .

*Điều kiện đủ*: • Với  phương trình là:

 (thỏa mãn).

• Với  phương trình là:

 (không thỏa mãn).

*Kết luận*: .

**Thí dụ 2.** *Gọi  là một điểm thuộc  biết tiếp tuyến của* (*C*) *tại M cắt* (*C*) *tại điểm * (*khác M*). *Tìm giá trị nhỏ nhất của* 

***Lời giải*.**

Giả sử tuyến của (*C*) tại  là . Khi đó ta có phương trình hoành độ giao điểm:



Theo đề bài  có hai nghiệm  trong đó nghiệm  là nghiệm kép (do  là tiếp điểm).

Theo định lý Viète thì



dẫn đến: 



Đẳng thức xảy ra khi . Vậy 

**Thí dụ 3.** *Cho hàm số*

**

*có các điểm cực trị là  và . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình  có ba nghiệm phân biệt*.

***Lời giải.*** Không mất tổng quát ta chỉ cần xét với .

Một tính chất của đồ thị hàm số bậc ba: *Điểm uốn  là trung điểm của hai điểm cực trị*, do đó:



Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi chỉ khi .

Áp dụng định lý Viète cho trường hợp nghiệm bội của phương trình suy ra:



Tương tự cho trường hợp nghiệm bội của phương trình suy ra:



Do đó:



***Lưu ý*:***Những kết quả hay nhầm **hoặc là .*

**Thí dụ 4.** *Cho hàm số  có đồ thị* (*C*) *đi qua các điểm . Các đường thẳng  cắt đồ thị lần lượt tại các điểm * (*khác *)*. Xác định các hệ số  biết tổng các hoành độ của  bằng* 5.

***Lời giải*.** Dễ thấy Parabol đi qua ba điểm  có phương trình là . Suy ra ba điểm  là giao của  và đồ thị .

Nên 

 (\*).

Áp dụng định lý Viète ta được:



Suy ra:





Vậy .

*Kết luận*: 

**Thí dụ 5.** *Cho hàm số . Biết đường thẳng  cắt* (*C*) *tại ba điểm phân biệt . Các tiếp tuyến tại ba điểm  của đồ thị* (*C*) *cắt đồ thị* (*C*) *lần lượt tại các điểm * (*tương ứng khác *)*. Chứng minh rằng ba điểm thẳng hàng*.

***Lời giải*.** Gọi tọa độ  và tiếp tuyến tại  của  cắt  tại điểm thứ hai là . Theo định lý Viète thì



Do , nhân hai vế với  và biến đổi ta được:







Suy ra  thuộc đường thẳng có phương trình . Làm tương tự ta cũng suy ra được  thuộc . Do đó ba điểm  cùng thuộc đường thẳng có phương trình , tức ba điểm này thẳng hàng.

**Thí dụ 6.** *Cho hàm số bậc ba  có bảng biến thiên như hình vẽ*

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | −∞ 2 4 +∞ |
|  | + 0 − 0 + |
|  | +∞  *m*  *n*  −∞ |

*Với  là các số nguyên thuộc khoảng  Có bao nhiêu cặp  để phương trình  có đúng bốn nghiệm phân biệt*?

***Lời giải*.** Đặt  phương trình đã cho trở thành , cứ mỗi  cho duy nhất một giá trị của  và ngược lại. Nên số nghiệm của phương trình  cũng bằng số nghiệm của phương trình  hay cũng chính là số nghiệm của phương trình  Do đó yêu cầu bài toán tương đương với tìm số cặp  để phương trình  có đúng hai nghiệm dương phân biệt (do  là hàm số chẵn).

Điểm uốn của đồ thị là trung điểm của hai điểm cực trị và có hoành độ  Suy ra 

Xét. Từ bảng biến thiên đã cho ta nhận thấy phương trình này có nghiệm đơn  và nghiệm kép 

Theo định lý Viète thì: 

 Vậy 

Lại do hàm số  đồng biến trên khoảng  nên suy ra  Từ đó dựa vào đồ thị hàm số  dẫn đến: Phương trình  có đúng hai nghiệm dương phân biệt ứng với hai trường hợp sau:

TH1: có 14 cặp.

TH2:  có 4 cặp.

*Kết luận*: Có 18 cặp.

**Thí dụ 7.** *Cho hàm số  có đồ thị* (*C*) *như hình vẽ, đường thẳng  là tiếp tuyến của* (*C*) *tại  Tính diện tích phần gạch chéo trong hình vẽ*

**

***Lời giải*.** Đồ thị  cắt trục hoành tại các điểm có hoành độ là Theo định lý Viète suy ra:



Xét phương trình tương giao của đồ thị  và đường tiếp tuyến :





Phương trình (\*) có nghiệm kép  và một nghiệm đơn  Áp dụng định lý Viète cho phương trình này ta được:



Xét biểu thức 

Do  là đa thức bậc ba và có nghiệm kép ,  nên suy ra:



Mặt khác , từ đó tìm được Suy ra diện tích phần gạch chéo:

.

**Thí dụ 8.** *Cho hàm số bậc ba có đồ thị* (*C*) *và M là một điểm bất kỳ thuộc* (*C*) *sao cho tiếp tuyến của* (*C*) *tại M cắt* (*C*) *tại một điểm thứ hai N. Tiếp tuyến của* (*C*) *tại N lại cắt* (*C*) *tại điểm thứ hai P. Gọi  lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng MN và* (*C*), *đường thẳng NP và* (*C*)*. Chứng minh rằng* 

***Lời giải*.** Không giảm tổng quát ta chỉ cần xét  Gọi hoành độ các điểm  lần lượt là . Giả sử  có phương trình . Khi đó phương trình  có nghiệm (nghiệm kép) và . Theo định lý Viète:  ⇔ .

Mặt khác: 

.

Dẫn đến tính được: 



Lập luận hoàn toàn tương tự ta cũng thu được  và  

Do  nên suy ra  (đpcm).

**Thí dụ 9.** *Tìm tham số m để phương trình  có ba nghiệm dương phân biệt  thỏa mãn* 

***Lời giải*.** Lập bảng biến thiên của hàm số  trên .

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | 0 1  +∞ |
| *y* | 2 +∞  0 0 |

Nhận thấy phương trình  có ba nghiệm dương phân biệt khi  (\*). Với  thì ba nghiệm . Suy ra:  là nghiệm của phương trình , còn  là nghiệm của phương trình  hay  là ba nghiệm của phương trình  Theo định lý Viète và giả thiết có hệ:



Từ đó tìm được  (thỏa mãn (\*)).

*Kết luận*: .

**Thí dụ 10.** *Cho các số thực dương  thỏa mãn*: **

*Chứng minh rằng* 

***Lời giải*.** Từ  suy ra

 Do đó  là ba nghiệm của phương trình  với  Phương trình được viết lại:



Do  là nghiệm của  và  nên 

Dẫn đến: 



Nếu  (vô lý).

Vậy  (đpcm).

**BÀI TẬP CỦNG CỐ**

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đồ thị hàm số  cắt đường thẳng  tại  điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

**Câu 2.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình  có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân:

**Câu 3.** Cho  là hàm đa thức bậc 3 có đồ thị như hình vẽ. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm  có hoành độ bằng  cắt đồ thị tại điểm thứ hai  cắt trục  tại điểm có hoành độ bằng . Biết diện tích phần gạch chéo là .

Tính tích phân .



**Câu 4.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để đường thẳng  cắt đồ thị của hàm số  tại ba điểm phân biệt  sao cho .

**Câu 5.** Cho hàm số  có đồ thị đi qua các điểm

. Các đường thẳng  lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm

 (khác ). Biết . Tính giá trị của biểu thức .

**Câu 6.** Cho hàm số , xét điểm  có hoành độ  thuộc đồ thị .

Tiếp tuyến của  tại  cắt  tại điểm thứ hai là  khác  có tọa độ . Tiếp tuyến của  tại  cắt  tại điểm thứ hai là  khác  có tọa độ . Cứ tiếp tục như thế, tiếp tuyến của  tại  cắt  tại điểm thứ hai là  khác  có tọa độ . Tìm  biết .

**Câu 7.** Cho hai số thực dương  và phương trình  có ba nghiệm. Chứng minh rằng:

a) . b) .